UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
MENCIÓN MATEMÁTICA
CÁTEDRA DE DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

ERRORES QUE COMETEN LOS ESTUDIANTES EN EL CONTENIDO DE LÍMITE DE FUNCIONES EN LA ASIGNATURA CÁLCULO I

Caso: Estudiantes del Tercer Semestre de la Mención de Matemática de la FaCE-UC, período 2-2013

TUTORA:

MSc Zoraida Villegas

AUTORES:

Francisco Sarmiento
Nerida López

Bárbula, julio de 2014

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
MENCIÓN MATEMÁTICA
CÁTEDRA DE DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

ERRORES QUE COMETEN LOS ESTUDIANTES EN EL CONTENIDO DE LÍMITE DE FUNCIONES EN LA ASIGNATURA CÁLCULO I

Caso: Estudiantes del Tercer Semestre de la Mención de Matemática de la FaCE-UC, período 2-2013

TUTORA:

MSc Zoraida Villegas

AUTORES:

Francisco Sarmiento
Nerida López

Trabajo Especial de Grado presentado como requisito para optar al Título de Licenciado en Educación Mención Matemática

Bárbula, julio de 2014

DEDICATORIA

A Dios, por darme fuerzas, salud y motivo para tratar de superarme en la vida cada día.

A mi madre Enriqueta Martínez por los esfuerzos realizados en mi crianza y formación, siendo un ejemplo de dedicación y esmero, apoyándome incondicionalmente, e inculcándome valores para guiarme en la vida.

A mi abuela Reina Figueredo y al resto de mi familia, por estar conmigo siempre en este camino que estoy recorriendo.

A mis profesores de investigación, que con sus esfuerzos han hecho que pueda llevar a término, este trabajo de investigación.

A todos, lo que de una u otra forma me ha ayudado a culminar mi carrera.

Francisco José Sarmiento Martínez

DEDICATORIA

En primer lugar dedico este trabajo a Dios, por concederme la salud, fortaleza e inteligencia para el logro de mis metas, porque sin él, nada de lo que he logrado hubiese sido posible, es quien da esfuerzo al cansado, y multiplica las fuerzas al que no tiene ninguna. Seguidamente a mi familia en general, por apoyarme incondicionalmente en todos los aspectos de mi vida y alentándome a seguir adelante y así culminar bien mi carrera, obtener mi título y ser una profesional.

A mis padres, Jesús López y Nery Diaz de López, porque con su ejemplo han marcado mi existencia. Me han apoyado en todo momento, instruyéndome primordialmente en el temor a Dios, viniendo lo demás por añadidura. Sin la presencia de ustedes no hubiese sido posible la cosecha de este éxito, por lo tanto, esto es de ustedes.

A mis hermanos queridos Alexander López y Ender López, y a sus lindas esposas Johana Falcón de López y Edith Santiago de López por apoyarme cada día y por brindarme los mejores consejos justo en los momentos en que los necesito, y por mi gran apoyo y ejemplo de mi querido hermano mayor Jesús Orlando López y su bella esposa Aura Yesiré Martínez de López por estar siempre dispuestos a trasladarme de un lugar a otro, apoyarme económicamente, brindarme la mayor colaboración posible ya que en muchas ocasiones los ocupé con mis asuntos académicos.

También, de una manera especial a los hermosos de la casa, mis sobrinos Junior, Eliel, Angelina, Abraham y los que vendrán, gracias por el cariño brindado, los amo.

A mis bellas amigas Engi, Lisset y la extrovertida Imar, gracias por su gran y linda amistad, que ha perdurado en años siempre apoyándonos y ayudándonos una a la otra en todo momento a pesar de las ocupaciones que tengamos.

A mi novio bello y futuro esposo Johan Gómez, por apoyarme, por su paciencia ante los momentos de estrés que juntos hemos superado y por ayudarme a encontrar el aspecto positivo en aquellas ocasiones en que todo no se veía muy bien.

A todos aquellos que han formado parte de mi formación, que si los mencionara, ocuparía un capítulo entero, este honor también es de ustedes, a todos, muchas gracias.

Nerida Albany López Díaz

AGRADECIMIENTO

A insigne Universidad de Carabobo por habernos dado la oportunidad de prepararnos para ser Licenciados en Educación Mención Matemática y así contribuir en la formación académica de las futuras generaciones del país.

A los profesores de nuestra Facultad por su esmero, paciencia, ejemplo y dedicación constante, que tuvieron para capacitarnos como futuros docentes, a lo largo de nuestros años de formación universitaria, fomentando nuestro crecimiento tanto personal como académico.

A las profesoras de la cátedra de investigación Yadira Corral de Franco y Tibisay González por haber dado con ellas nuestros primeros pasos en el presente trabajo, muy agradecidos por su apoyo y colaboración prestada.

A nuestra tutora MSc Zoraida Villegas por su acompañamiento, y sostenidos esfuerzos para materializar la presente investigación.

Con cariño, muchas gracias.

Nerida Albany y Francisco Sarmiento

ÍNDICE GENERAL

		pp.
DEDICATORIA…….		iii
AGRADECIMIENTOS……..		v
LISTA DE CUADROS……..….		viii
LISTA DE TABLAS……..…		ix
LISTA DE GRÁFICOS……..…		xi
RESUMEN…….…		xiii
INTRODUCCIÓN…….....		1
CAPÍTULO		
I	EL PROBLEMA…….	3
	1.1 Planteamiento y formulación del Problema……..….....	3
	1.2 Objetivos de la Investigación……..……..……	7
	Objetivo General……..…..…….....….	7
	Objetivos Específicos…….……..…….....….	7
	1.3 Justificación de la Investigación.……..……	7
II	MARCO TEÓRICO…….…….....	9
	2.1 Antecedentes de la Investigación…….……...……..	9
	2.2 Bases Teóricas……..……...…….	12
	2.2.1 Base filosófica y social……....…….	13
	2.2.1.1 La UNESCO……...…….	13
	2.2.1.2 Karl Popper y su filosofía de la ciencia……...……	15
	2.2.2 Base Psicopedagógica……...…….…	16
	2.2.2.1 Gaston Bachelard y la naturaleza del aprendizaje……...	16
	2.2.2.2 David Ausubel y el aprendizaje significativo……..	17
	2.2.2.3 Jean Pierre Astolfi y su taxonomía de errores…….	17
	2.2.2.4 El error de acuerdo a los pedagogos e investigadores Abrate, R.; Pochulu, M. y Vargas, J. (2006)……..….	23
	2.3 Definición de Términos Básicos……...…	24
III	MARCO METODOLÓGICO…….……...	25
	3.1 Tipo y Diseño de la Investigación……..…….…….....	25
	3.1.1 Tipo…….….....	25
	3.1.2 Diseño……..…….	25
	3.2 Sujetos de la Investigación……...……	26
	3.2.1 Población…….…….	26
	3.2.2 Muestra…….……	27

3.3 Procedimiento……...……... 28
3.4 Instrumentos de recolección de la información……..... 29
3.4.1 Validez del instrumento……. 30
3.4.2Confiabilidad…….. 31
3.5 Técnicas de análisis y procesamiento de la información…….. 33

IV ANALISIS E ITERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS…… 34
4.1 Presentación y análisis de los resultados……... 34
4.2 Presentación de respuestas correctas, incorrectas y no contestadas…….. 35
4.3 Medidas de tendencia Central y Dispersión……... 36
4.4 Análisis ítem por ítem……. 37
4.5 Análisis de los resultados por dimensión…… 52
4.6 Análisis general de los resultados por errores cometidos……..... 56
4.7 Análisis general de los ítems sin respuesta……. 59

CONCLUSIONES……..... 60

RECOMENDACIONES……. 63

REFERENCIAS……..…..... 65

ANEXOS…… 69
A Resumen estadístico de Cálculo. Períodos 1S-2012 y 2S-2012…..... 70
B Tabla de operacionalización de las variables…… 71
C Instrumento utilizado……..... 72
D Clave de respuesta del instrumento…….……. 79

LISTA DE CUADROS

CUADRO		pp.
1	Conformación de la población.……..	27
2	Tabulación de resultados para el cálculo de la confiabilidad……..	32
3	Tipología de errores……	35
4	Datos obtenidos del instrumento aplicado a la muestra…….	35
5	Medidas de Tendencia Central……	36
6	Medidas de Dispersión……	36
7	Resumen estadístico de Cálculo. Períodos 1S-2012 y 2S-2012….	71
8	Tabla de operacionalización de las variables……	72

LISTA DE TABLAS

Tabla		pp.
1	Distribución de Frecuencias del Ítem N°1….....	38
1.1	Errores cometidos Ítem N°1……..	38
2	Distribución de Frecuencias del Ítem N°2…….	39
2.1	Errores cometidos Ítem N°2……..……	39
3	Distribución de Frecuencias del Ítem N°3…….	40
3.1	Errores cometidos Ítem N°3……	40
4	Distribución de Frecuencias del Ítem N°4…….	41
4.1	Errores cometidos Ítem N°4……..	41
5	Distribución de Frecuencias del Ítem N°5…….	42
5.1	Errores cometidos Ítem N°5……..	42
6	Distribución de Frecuencias del Ítem N°6…….	43
6.1	Errores cometidos Ítem N°6……..	43
7	Distribución de Frecuencias del Ítem N°7…….	44
7.1	Errores cometidos Ítem N°7……..	44
8	Distribución de Frecuencias del Ítem N°8…….	45
8.1	Errores cometidos Ítem N°8……..	45
9	Distribución de Frecuencias del Ítem N°9……	46
9.1	Errores cometidos Ítem N°9……..	46
10	Distribución de Frecuencias del Ítem N°10……	47
10.1	Errores cometidos Ítem N°10……	47

11	Distribución de Frecuencias del Ítem N°11……..	48
11.1	Errores cometidos Ítem N°11……	48
12	Distribución de Frecuencias del Ítem N°12……...	49
12.1	Errores cometidos Ítem N°12……	49
13	Distribución de Frecuencias del Ítem N°13……...	50
13.1	Errores cometidos Ítem N°13……	50
14	Distribución de Frecuencias del Ítem N°14…….	51
14.1	Errores cometidos Ítem N°14……	51
15	Distribución de Frecuencias de la Dimensión Conceptual……	52
16	Errores cometidos en la Dimensión Conceptual……	53
17	Distribución de Frecuencias de la Dimensión Procedimental……...	54
18	Errores cometidos en la Dimensión Procedimental……...	55
19	Distribución general de frecuencias de los errores cometidos……..	57
20	Incidencia de los ítems sin respuestas……...	59

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico		pp.
1	Frecuencia de las calificaciones para las medidas de tendencia central……..	36
2	Frecuencia de las calificaciones para las medidas de dispersión……	36
3	Distribución de Frecuencias del Ítem N°1….....	38
3.1	Errores cometidos Ítem N°1……..	38
4	Distribución de Frecuencias del Ítem N°2…….	39
4.1	Errores cometidos Ítem N°2……..……	39
5	Distribución de Frecuencias del Ítem N°3…….	40
5.1	Errores cometidos Ítem N°3……	40
6	Distribución de Frecuencias del Ítem N°4…….	41
6.1	Errores cometidos Ítem N°4……..	41
7	Distribución de Frecuencias del Ítem N°5…….	42
7.1	Errores cometidos Ítem N°5……..	42
8	Distribución de Frecuencias del Ítem N°6…….	43
8.1	Errores cometidos Ítem N°6……..	43
9	Distribución de Frecuencias del Ítem N°7…….	44
9.1	Errores cometidos Ítem N°7……..	44
10	Distribución de Frecuencias del Ítem N°8…….	45
10.1	Errores cometidos Ítem N°8……..	45
11	Distribución de Frecuencias del Ítem N°9……	46
11.1	Errores cometidos Ítem N°9……..	46

12	Distribución de Frecuencias del Ítem N°10……	47
12.1	Errores cometidos Ítem N°10……	47
13	Distribución de Frecuencias del Ítem N°11……..	48
13.1	Errores cometidos Ítem N°11……	48
14	Distribución de Frecuencias del Ítem N°12……...	49
14.1	Errores cometidos Ítem N°12……	49
15	Distribución de Frecuencias del Ítem N°13……...	50
15.1	Errores cometidos Ítem N°13……	50
16	Distribución de Frecuencias del Ítem N°14……...…….	51
16.1	Errores cometidos Ítem N°14…….……	51
17	Resultados obtenidos en la dimensión conceptual …….……	52
18	Errores cometidos en la Dimensión Conceptual……	53
19	Distribución de Frecuencias de la Dimensión Procedimental……...	54
20	Errores cometidos en la Dimensión Procedimental…….…...	56
21	Errores cometidos…….…..	58

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
MENCIÓN MATEMÁTICA
CÁTEDRA DE DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

ERRORES QUE COMETEN LOS ESTUDIANTES EN EL CONTENIDO DE LÍMITE DE FUNCIONES EN LA ASIGNATURA CÁLCULO I

Caso: Estudiantes del tercer Semestre de la Mención de Matemática de la FaCE-UC, período 2-2013

Autores: López, Nerida
Sarmiento, Francisco
Tutor: MSc Zoraida Villegas
Año: 2014

RESUMEN

La investigación es descriptiva con un diseño de campo no experimental cuantitativo y transeccional, cuyo objetivo general es analizar los errores que cometen los estudiantes en el contenido de límite de funciones en Cálculo I, de la mención de matemática, en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo – Semestre 2-2013, según la Taxonomía de Astolfi. La población fue de quince (15) estudiantes. Los datos se obtuvieron a través de un cuestionario de catorce (14) ítems, realizado por Izaguire y Martínez (2011), validado a través del juicio de expertos, y su confiabilidad con el coeficiente Kuder Richardson siendo de 0,78, valor que fue constatado en el marco de este estudio, a través de un grupo piloto de cuatro (4) alumnos, usando el mismo coeficiente, obteniendo 0,91. Para recabar los datos se empleó por muestra los once (11) estudiantes restantes de la población. Entre las conclusiones se tiene, que los estudiantes en general mostraron dificultades a la hora de responder los ítem, siendo el puntaje promedio 06,45 puntos, presentando errores o no resolviendo poco más de dos terceras partes de las preguntas planteadas. En cuanto a los errores, el que más prevaleció fue "E_6" referido a la sobrecarga cognitiva con 39,34%, seguido de "E_4" con 22,95% por mal uso o desconocimiento de alguno de los procedimientos en las operaciones intelectuales implicadas. Por lo que se sugiere el uso de estrategias de aprendizaje de repaso y organización para manejar mejor la información, y verificar a través de diagnósticos si los estudiantes cuentan con los prerrequisitos que se necesitan en el contenido.

Palabras Clave: Cálculo I, Errores, Límite de funciones.

Línea de investigación: Enseñanza, aprendizaje y evaluación de la educación en matemática.

INTRODUCCIÓN

La matemática está presente en todas las áreas de la vida, se necesita para desenvolverse socialmente de forma eficaz, así sea reducida a sus aspectos aritméticos, de la misma forma el error es una de las dos caras de la moneda que es lanzada cada vez que se toma una decisión, no obstante a pesar de que de ambas se aprende y sirve de ayuda, se tiene como señala Astolfi (2003) que en el aula de clase el error es visto como algo a evitar, malo y sin ningún tipo de valor más allá de avergonzarnos o limitarnos, en especial en las concepciones no constructivistas; por su parte la matemática no cuenta con mejores expectativas, más allá de aquellos que se inclinan por su estudio específico.

La educación debe superar estas dificultades, incentivando que los estudiantes vean la matemática no sólo como una herramienta, sino como una forma de interpretar el mundo que les rodea, y que a pesar de que el camino a la comprensión de sus aspectos y problemas no estará exento de errores, estos sirven para comprender mejor los procesos mentales que estamos ejecutando y su corrección amplía nuestras capacidades de ser más eficaces ante situaciones similares.

El contenido de límite de funciones, que está presente en todo curso inicial de cálculo es uno de los más importantes, dado que sirve de sustento a las derivadas que a su vez abre el camino a la integración, y otros conceptos tanto físicos como matemáticos, además de las muchas aplicaciones que tiene, como es el estudio de la continuidad de funciones, no obstante, su cuerpo conceptual como todos los de cálculo, atendiendo a lo dicho por Ziegler (2009), por requerir de un compendio de habilidades y aprendizajes previos, le presentan grandes dificultades a los estudiantes, y a esto hay que sumarle el alto nivel de abstracción que tiene el límite de funciones por ser uno de los conceptos fundamentales del cálculo, de ahí los altos porcentajes de aplazados, y que existan una considerable bibliografía de investigaciones que buscan abordar este problema según lo expuesto por Navarro, Maldonado, López (2012).

Este problema referido al aprendizaje de cálculo, está presente en los estudiantes de la mención de matemática, que cursan Cálculo I, en la Facultad de Ciencias de la

Educación de la Universidad de Carabobo (FaCE-UC), constatado por los porcentajes de aprobados, aplazados y que no terminan de cursar la asignatura que reposan en la respectiva dirección de control de estudio, además de la disminución constante que tiene la matrícula de estudiantes en la mención de matemática, por lo que la presente investigación tiene como propósito analizar los errores que cometen los estudiantes que cursaron el semestre 1-2013, para poder ampliar la perspectiva que se tiene de este problema, cumplir con los objetivos del estudio y dar recomendaciones tanto a los docentes como a los estudiantes, que sirvan para la solución del mismo.

La investigación planteada, es de tipo descriptiva, enmarcada en un diseño no experimental cuantitativo, de corte transversal o transeccional, la población involucrada estuvo integrada por los quince (15) estudiantes cursantes del referido período y de los cuales se tomaron once (11) como muestra para el estudio. De esta forma, la presentación de estudio se estructuró en los siguientes capítulos:

El Capítulo I, donde se describe el planteamiento del problema, los objetivos de la investigación, tanto el general como los específicos, y la justificación del estudio.

El capítulo II, en el que se presentan los antecedentes de la investigación, las bases teóricas y la definición de términos. Para analizar los errores se utilizó la taxonomía de Astolfi (op. cit) que identifica ocho (8) tipos errores a los cuales es posible darles un tratamiento pedagógico.

El Capítulo III, que comprende el tipo y diseño de investigación, los sujetos del estudio, el procedimiento que se llevó a cabo, la técnica e instrumentos de recolección de datos, la validez del instrumento, la confiabilidad y las técnicas de análisis y procesamiento de la información.

Por último, en el capítulo IV, en donde se analizaran e interpretaron los resultados obtenidos en el estudio, mediante tablas y gráficos estadísticos con sus respectivas interpretaciones. Así mismo, se presentan las conclusiones surgidas del diagnóstico, para luego, en base a esto y de acuerdo a la taxonomía de errores de Astolfi generar las recomendaciones pertinentes.

1 EL PROBLEMA

1.1 Planteamiento y formulación del Problema

Uno de los conceptos que más se menciona a la hora de hablar del desarrollo de una nación es la calidad de su educación, es por ello que los países hacen esfuerzos en mayor o menor medida eficaces para mejorar la formación de sus ciudadanos. En este sentido, la educación es un medio que posibilita un desarrollo sustentable y optimiza el espíritu de una sociedad, permitiendo la paz y la sana convivencia de sus ciudadanos (UNESCO, 2003). Ante esta realidad, las universidades, tienen el deber de dar soluciones a sus países, dado que ellas están llamadas no sólo a formar los futuros profesionales sino a generar conocimiento y propuestas para afrontar los retos que se presenten y mejorar así la colectividad en su conjunto.

Ahora bien, en el ámbito latinoamericano, Orozco (2010) señala que están más consolidadas las universidades de Argentina, México, Brasil, Colombia y Chile que las venezolanas. Esto se evidencia también al verificar la posición de Venezuela en el QS Latin American University Rankings 2013, donde la primera universidad venezolana no aparece sino hasta el puesto 29 con la Universidad Central de Venezuela, seguida por Universidad Simón Bolívar en el puesto 34, la Universidad Católica Andrés Bello en el 63, la Universidad de los Andes en el 71, y en el rango 161-170, se sitúan la Universidad de Carabobo, junto a la Universidad Metropolitana y la Universidad del Zulia (Urdaneta, 2013).

Ésta situación se debe, a que a pesar de que se han dado pasos positivos, como el aumento del número de estudiantes que ingresan a los distintos niveles educativos (García, 2012), se debe subsanar problemas que van desde el bajo índice de egresados con relación al total de la matrícula y en correspondencia a algunas carreras (Chacín, 2008), hasta la poca productividad e impacto de las investigaciones que se generan.

En general, una de las áreas del conocimiento donde se hace más palpable los problemas en la educación universitaria, es en el área de la matemática y particularmente en el cálculo, en donde las estadísticas muestran un considerable porcentaje de aplazados (Ziegler, 2009), puesto que, el cálculo a la vez que otorga herramientas para solucionar problemas y potenciar las competencias matemáticas, requiere de un compendio de habilidades y aprendizajes previos, en consecuencia, como señala Vrancken, S. Gregorini, M. Engler, A. Müller, D. y Hecklein, M. (s.f.)

> La enseñanza del cálculo constituye uno de los mayores desafíos de la educación actual, ya que su aprendizaje trae aparejado numerosas dificultades relacionadas con un pensamiento de orden superior en el que se encuentran implicados procesos como la abstracción, el análisis, la demostración, etc. (p. 1)

Ante este problema, Ziegler (ob. cit.), señala que dado la universalidad del fenómeno, evidencia que hay algo inherente a las matemáticas que las hacen un tema espinoso y difícil para la mayoría, porque sería muy extraño que ésta fuese la única asignatura que se enseña mal, a todos los niveles y en casi todos los colegios y universidades, no obstante, acota que en algunos casos si recae parte del problema en la metodología del profesor, por lo que debería hacer una evaluación tanto al proceso como a los fines establecidos en el pensum de cálculo.

Teniendo en cuenta, la situación de la enseñanza y aprendizaje del cálculo, el error es un elemento que no se puede dejar de lado, está omnipresente en el proceso de aprendizaje, por no ser descartable, sólo se tienen las opciones de cómo afrontarlo. En este orden de ideas, el profesor tiene un rol clave, como indican los autores Engler, A. Gregorini, M., Müller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M. (s.f.), ya que el papel que se le asigna al error y la forma en que se trabaja con él, influye en el aprendizaje y en el rendimiento académico de los alumnos; no obstante, a pesar de esto, se tiene que en el aula y menos aún en la evaluación no se considera el error como un medio para el logro de los aprendizajes, al respecto Sanmartí (s.f.) señala

> El primer hecho que puede sorprender a un observador externo es que cuando planificamos las actividades de enseñanza nunca pensamos en cómo conseguiremos que el alumnado corrija los errores que sin duda comete. Normalmente pensamos en qué y cómo "explicaremos", y en las lecturas, manipulaciones, problemas y todo tipo de ejercicios que propondremos al alumnado para que aprenda, pero hay la idea implícita de que si estas actividades están bien planteadas, el alumno no cometerá errores y no será necesario dedicar tiempo a revisarlos. El error se percibe como algo no deseable y a evitar desde el inicio. (p. 2)

En Venezuela, estos problemas en la educación universitaria y en el aprendizaje del cálculo, conlleva a limitaciones en la formación de profesionales, no sólo en su calidad sino también en su cantidad en algunas áreas. En relación a los formación de los docentes, Meneses (2012) señala que las promociones de profesores de áreas de ciencia que egresan de las instituciones de educación universitaria son cada vez menores, en el caso del Pedagógico de Caracas en especialidades como matemática han salido siete egresados, y en un estudio realizado por la UPEL en sus ocho institutos pedagógicos refleja que en los últimos 5 años hay menos de 500 egresados en áreas de ciencia.

Esto crea un círculo de problemas, porque al verse reflejado la carencia de docentes en el área de matemática, y no compensada las deficiencias que puedan presentar en su preparación, conlleva a que en las instituciones de educación media general disminuya la calidad del proceso de enseñanza y aprendizaje de los futuros universitarios.

Este deterioro, ha quedado evidenciado en los resultados que obtienen los estudiantes en los niveles de educación media, a la hora de ser evaluados, por ejemplo en la última Prueba de Aptitud Académica (PAA) realizada en el 2007, más de 90% de los estudiantes respondieron erradamente los ítems, tanto en el área de comprensión y lectura como la de razonamiento matemático. Haciendo un promedio los estudiantes respondieron correctamente sólo 8 ítems de 70 (Cauro, 2007). Por otro lado, entre enero de 2010 y junio de 2011, a una muestra de 5200 estudiantes mayores de 15 años y cursantes de Educación Media General, seleccionados al azar de 108 colegios privados y 17 liceos públicos de la gobernación de Miranda, se sometieron a las pruebas PISA (Programas para la Evaluación Internacional de los

alumnos), en la cual se evaluó el rendimiento en las áreas de lenguaje, matemática y ciencias. Obteniendo como resultados en matemática, que el 60% de los alumnos no alcanzó las competencias mínimas y 0% alcanzan el rendimiento óptimo, (Méndez, 2012; Guevara, 2012).

En el mismo orden de ideas, esta situación, se ve reflejada, también, en el alto grado de deserción, que existe en la Facultad de Ciencias de la Educación (FaCE), de la Universidad de Carabobo, en especial en el primer semestre donde los estudiantes comienzan a estudiar el cálculo, al respecto, De Canha y Escalona (2013) señalan que los profesores que administran la asignatura, sostienen que la mayor parte de los estudiantes abandonan la cátedra y quienes no lo hacen poseen un rendimiento académico bajo en la mayoría de los casos.

Según datos suministrados por el Departamento de control de estudio de la Facultad de Ciencias de la Educación (FaCE) de la Universidad de Carabobo, en la asignatura cálculo I durante los períodos 1S-2012 y 2S-2012, que se encuentran tabulados en los anexos, se obtuvieron las siguientes calificaciones, las cuales varían de 01 a 20 puntos con una mínima aprobatoria de 10 puntos, donde se evidencia que de 105 estudiantes que han inscrito la asignatura en dos semestres, sólo han aprobado 42 estudiantes (40%), repartidos de la siguiente manera: en el semestre 1S-2012 se inscribieron 69 formando cuatro secciones, de los cuales aprobaron 33 estudiantes (47,82%), aplazaron 12 estudiantes (17,39%) y no cursaron 24 estudiantes (34,78%); en el semestre 2S-2012 se matricularon 36 estudiantes constituyendo dos secciones, en donde aprobaron 9 alumnos (25%), aplazaron 7 alumnos (19,44%) y no cursaron 20 alumnos (55,55%).

Las ideas anteriormente abordadas, conllevan a concluir, que entre los diversos factores que pueden afectar o inciden en el bajo rendimiento de los estudiantes, está el error, por lo que dentro de esta problemática que se suscita en el aprendizaje del cálculo, la consideración de valorar el uso pedagógico de los errores, puede ampliar la comprensión del problema y dar herramientas tanto al docente como al alumno para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Por ello, surge la siguiente pregunta ¿Cuáles son los errores que cometen los estudiantes en el contenido de límite de funciones en Cálculo I, de la mención de matemática, en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo – Semestre 2-2013?

1.2 Objetivos de la Investigación

Objetivo General

Analizar los errores que cometen los estudiantes en el contenido de límite de funciones en Cálculo I, de la mención de matemática, en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo – Semestre 2-2013, según la Taxonomía de Astolfi.

Objetivo Específicos

- Identificar os errores que cometen los estudiantes en el contenido de límite de funciones en Cálculo I, de la mención de matemática, en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo – Semestre 2-2013, según la Taxonomía de Astolfi.
- Clasificar los errores que cometen los estudiantes en el contenido de límite de funciones en Cálculo I, de la mención de matemática, en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo – Semestre 2-2013, según la Taxonomía de Astolfi.
- Categorizar los errores que cometen los estudiantes en el contenido de límite de funciones en Cálculo I, de la mención de matemática, en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo – Semestre 2-2013, según la Taxonomía de Astolfi.

1.3 Justificación de la Investigación

Al ser el cálculo una de las ramas de la matemática a la que los estudiantes se le hace más complicada, y el número considerable de ellos que terminan aplazados o que abandonan la asignatura en general, y en el particular por ser éste un problema presente en la mención de matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de

la Universidad de Carabobo (FaCE-UC) se considera pertinente la realización del presente estudio en el que se analiza cuáles son los errores que están cometiendo los estudiantes en el contenido particular de límite de funciones desde el punto cognitivo, en dicha muestra.

En el mismo orden de ideas, la presente investigación, proporcionará desde el punto de vista teórico, un aporte que ampliará los conocimientos acerca de los errores conceptuales y procedimentales que se dan en el contenido de límite de funciones bajo la taxonomía de Astolfi, por otra parte desde la perspectiva práctica suministrará una visión a los docentes de la cátedra de cálculo de la FaCE-UC, sobre cuáles son los errores que cometen actualmente los estudiantes en dicho contenido de Cálculo I, permitiéndole reorientar sus estrategias de enseñanza en atención a los errores, del mismo modo, podrá identificar las causas de los desaciertos de los alumnos en sus clases y a la hora de evaluar.

Por otra parte, considerando lo anterior, con respecto al estudiante sus resultados le ayudarán a evaluar las causas de sus errores, tales como, los que tienen su origen en otra disciplina, los errores causados por la complejidad propia del contenido y errores debido a la sobrecarga cognitiva en la actividad, entre otros, contribuyendo a realizar las correcciones que sean necesarias, para mejorar así, su desempeño académico en Cálculo I.

Para concluir, se considera que el presente estudio beneficiará a aquellos investigadores que abordan desde la matemática, alternativas para mejorar los resultados académicos tomando en cuenta los errores de los estudiantes; al mismo tiempo que contribuirá a futuras investigaciones enmarcadas en la "Enseñanza, aprendizaje y evaluación de la educación en matemática", con la temática "Procesos de enseñanza y aprendizaje en los diferentes niveles y modalidades de la Educación Matemática" y subtemática dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de la Matemática, ya que podrá ser tomado como antecedente o podrá dársele continuidad al mismo.

2 MARCO TEÓRICO

Una vez definido el planteamiento del problema y precisados los objetivos generales y específicos que determinan los fines de la investigación, es necesario establecer los aspectos teóricos que sustentarán el estudio en cuestión. En consecuencia, dentro del Marco Teórico se hace referencia en primer lugar a las investigaciones previas realizadas en relación a este trabajo, y luego se muestran las diversas teorías y conceptos en los que se circunscribe la presente investigación que busca analizar los errores que cometen los estudiantes en el contenido de límites de funciones, atendiendo a la tipología de errores de Astolfi.

2.1 Antecedentes de la Investigación

A continuación se muestran una serie de investigaciones que se relacionan con el problema de investigación que se centra en analizar los errores cometidos, según la taxonomía de Astolfi, por los estudiantes de Cálculo I de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo (FaCE-UC), período 1-2013, los cuales sustentan la existencia del problema en el desempeño y los resultados que se obtienen en dicha asignatura.

La investigación de Domínguez y Oviedo (2009), partiendo del hecho, de que el contenido de funciones es el que más se le dificulta aprender a los estudiantes, se propuso analizar los errores cometidos por los estudiantes de educación, mención matemática, de la Universidad de Carabobo, en los conocimientos previos del contenido de funciones para el aprendizaje de la asignatura Cálculo I, realizada bajo la modalidad descriptiva. Entre las conclusiones está que la mayor concurrencia de errores está en la parte procedimental, destacando datos mal utilizados y falta de verificación en la solución. Entre las recomendaciones está revisar los conocimientos previos que traen los estudiantes para así determinar cuáles serían la estrategias que podría emplear el profesor para usarlos como fuente de aprendizaje.

Un estudio efectuado por Ramírez y Rivas (2009), con el objetivo de analizar los errores cometidos por los estudiantes en el contenido de inecuaciones en la asignatura Cálculo I de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo, según la taxonomía de Movshovitz e Inbar, realizada con una metodología descriptiva, obtuvo entre las conclusiones que el error que más predominó fue el uso de teoremas o definiciones deformadas a un principio, regla, teorema o definición en un 83,33%, del mismo modo, se determinó que los estudiantes evaluados no poseen conocimientos sólidos en inecuaciones. Entre las recomendaciones están que el docente y el aprendiz deben utilizar el error como un instrumento en el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que no hay aprendizaje exento de errores.

Una investigación de Rubí, Moreno, Pou, y Jordán (2010), motivado por el alto índice de aplazados en cálculo diferencial e integral, en la Universidad Autónoma de Baja California, México, se planteó describir este problema, concluyendo que la dificultad en el aprendizaje del cálculo se concatena con la geometría analítica, ésta con el álgebra, llegando a deficiencias en la formación pre-universitaria, motivo de la alta reprobación, deserción, baja matrícula en ciencias naturales y exactas e ingenierías, aversión generalizada a las matemáticas y dificultades al resolver problemas aritméticos. Se recomendó implementar soluciones en donde participen los involucrados, intentando nuevos caminos y estrategias; por ejemplo, que las escuelas primarias tengan un profesor anexo para matemática.

Por su parte, Navarro, Maldonado, López (2012), en vista de los problemas en la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite, realizaron una investigación donde hicieron un resumen de los resultados en el aspecto cognitivo, en los países de habla hispana, sobre los trabajos que hay del tema. Entre las conclusiones generales de las investigaciones es que el preconcepto se asocia a “una barrera no rebasable”; y el concepto con un “valor inalcanzable”, o “como aproximación”, entre otras; y las dificultades se centran al redactar la definición, interpretar su simbolismo algebraico y reconocer e interpretar límites laterales y entornos reducidos. Entre las

recomendaciones al docente está destacar las características esenciales de concepto, atendiendo más a la comprensión que al desarrollo de algoritmos.

Es importante mencionar también, la investigación, realizada por García y Flores (2012), motivado por la poca comprensión del concepto de derivada, en un curso de cálculo diferencial de la Universidad Autónoma de Guerrero, México, se propuso elaborar una propuesta para solventar la situación. Se usó una muestra de 23 estudiantes, teniendo como resultado una comprensión aceptable sólo en una estudiante. Del mismo modo, a pesar de notar una mejora en el dominio de las actividades para comprender el concepto derivada, se percibe un escaso dominio a la hora de indicar ejemplos y contraejemplos del mismo, señalar casos especiales y conocer las relaciones con otros conceptos, como el de límite a través de la resolución de problemas físicos y matemáticos, haciendo un registro de los procedimientos.

La investigación de Manzalba y Sánchez (2013), partiendo de la relevancia que tiene en el cálculo el empleo de diversos registros, como también de que el límite de funciones implica aspectos más allá de la definición matemática, se planteó describir las representaciones semióticas del contenido de límite empleadas por los estudiantes de Cálculo I de la FaCE–UC, según la perspectiva de Duval, realizada con la modalidad descriptiva. Entre las conclusiones está que la muestra puede trabajar con límites, pero al cambiar a otros registros se tiene un 55% o menos de respuestas correctas. Se recomienda a los docentes, profundizar e incorporar actividades que favorezcan la utilización de distintos registros semióticos, para obtener una visión amplia y general de los obstáculos epistemológicos, didácticos y cognitivos de los procesos de cálculo.

Por último, se tiene a De Canha y Escalona (2013), que motivadas por el uso inadecuado del lenguaje científico, la errónea interpretación del registro matemático y el bajo rendimiento académico, se plantearon analizar el registro matemático empleado por los estudiantes de Cálculo I, de la FaCE–UC, en el contenido de Inecuaciones, con base a los procedimientos de Clare Lee, bajo la modalidad

descriptiva. Entre las conclusiones, está que más del 45% presentan dificultades en el registro matemático y sus elementos característicos como dominio y adaptación del vocabulario, uso de la metáfora, entre otros. Se recomienda que los docentes al tratar ideas y resolver problemas hagan énfasis sobre el poder de las palabras en el registro matemático, y así evocar la compleja red de ideas que forma un concepto.

Todos los trabajos anteriormente citados confluyen en la idea de la utilización y/o consideración del error, además de las dificultades que se le presentan al estudiante en su aprendizaje como un actor importante en el proceso educativo, y consecuentemente abordar estos aspectos estratégicamente para usarlo como un medio en el logro de los aprendizajes, ya sea para solventar problemas con respecto a los conocimientos previos, mejorar la comprensión, o ser más eficaces en la asignatura de cálculo.

Del mismo modo, en dichas investigaciones se hace evidente las deficiencias en la enseñanza aprendizaje del contenido límite de funciones y otros contenidos asociados o relacionados al mismo como las funciones, las derivadas y las inecuaciones, por lo que se sustenta la necesidad de explorar las dificultades que presentan los estudiantes en el abordaje y aprendizaje del límite de funciones.

2.2 Bases Teóricas

En las bases teóricas de la investigación se hace referencia a los postulados, principios, leyes y teorías que sustentan y que orientan el sentido del estudio. En el presente trabajo, se tendrán dos bases; la primera, la base filosófica y social que está centrada en los principios de la UNESCO y en los planteamientos de Karl Popper; la segunda es la base psicopedagógica constituida por las ideas Gaston Bachelard, David Ausubel, la taxonomía de errores en el aprendizaje de Jean Pierre Astolfi, y los aportes de los investigadores Raquel Abrate, Marcel Pochulu y José Vargas sobre el error y la incidencia de la falta de conocimientos previos en el error.

2.2.1 Base filosófica y social.

2.2.1.1 La UNESCO

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura, cuyas siglas en inglés son UNESCO, es un organismo especializado creado en 1945 cuyo fin último es edificar la paz en la mente de los hombres mediante la educación, la ciencia, la cultura y la comunicación, de la misma forma en la actualidad desempeña la función de ser un laboratorio de ideas y organismo normativo para forjar acuerdos entre todas las naciones sobre las cuestiones éticas de nuestro tiempo.

En su constitución se establecen ciertos principios fundamentales en los que se guía, y consecuentemente deberían guiar a la sociedad en su conjunto, ellos son: en primer lugar, el principio de la no discriminación, que consiste en que todos los miembros de la sociedad deben gozar de acceso a la educación en igualdad de oportunidades sin distinción de raza, sexo ni condición social o económica alguna, de segundo, establece que debe haber igualdad de oportunidades y de trato en el ámbito educativo, en tercer lugar el acceso universal a la educación y en cuarto lugar el principio de solidaridad, el cual debe ser tanto intelectual como moral.

Por lo tanto, en los ideales de la UNESCO la educación, es un medio para el progreso del hombre y en consecuencia de los pueblos, la paz, el desarrollo sustentable en busca de una sociedad con mejor convivencia y calidad de vida. En atención a esto, dada, la búsqueda del organismo de forjar acuerdos aceptando que hay diferencias, pero de que se debe hacer consenso en busca de un mundo mejor, el aula de clase debe reproducir está filosofía buscando la superación a través de análisis de las variadas situaciones y dificultades que se les presentan a los estudiantes.

Teniendo en cuenta, que en ésta perspectiva de la educación y en particular de los procesos de enseñanza y aprendizaje, no está exenta de cambios, complejidad, incertidumbre, y en la que el error, con sus aportes y superación juega un papel

crucial, esta institución considerando los resultados planteados en las publicaciones La educación del futuro (1973) y La educación encierra un tesoro (1997), este último conocido como “El Informe Delors”, propone una visión holística e integrada de la educación, basada en los paradigmas del aprendizaje a lo largo de toda la vida y los cuatro pilares pedagógicos: aprender a ser, a conocer, a hacer y a convivir.

Se entiende por aprender a ser, el desarrollo de la personalidad del individuo, de su autonomía, juicio y responsabilidad personal. Con tal fin, no se debe menospreciar en la educación ninguna de las posibilidades de cada estudiante: memoria, razonamiento, sentido estético, capacidades físicas, aptitud para comunicar.

El aprender a conocer, implica la combinación de una cultura general, con la posibilidad de profundizar los conocimientos en un pequeño número de materias, además de que el estudiante aprenda a aprender para poder aprovechar las posibilidades que le ofrece la educación a lo largo de su vida. Y tomando en cuenta que no sólo de los aciertos se aprende el individuo debe poder extraer aprendizajes de los errores que comete.

Con respecto al aprender a hacer, se tiene que la educación debe ir más allá de darle al ciudadano una calificación profesional sino que también, debe darle competencias que lo capaciten para hacer frente a gran número de situaciones y a trabajar en equipo.

Por su parte, el aprender a convivir, implica desarrollar la capacidad de comprender el otro, valorar el pluralismo, la paz y percibir que vivimos en una sociedad y que somos interdependientes.

Si bien, pues la educación, en concordancia con la UNESCO, no puede ser autocrática y estática, su desenvolvimiento es un reflejo del dinamismos de todos los procesos humanos, ya se acepta, que nada es lineal y sin de dificultades y errores, como plantea los teóricos Astolfi en la pedagogía de la clase, Karl Popper para la ciencia y su evolución y Gastos Bachellad para la adquisición de los conocimientos.

2.2.1.2 Karl Popper y su filosofía de la ciencia

Los planteamientos del filósofo Austro-británico Karl Raimund Popper, se centran en que el camino al conocimiento no es lineal, ni menos aún acabado o finito, al respecto, Popper (1991) señala en el segundo prefacio de su libro Conjeturas y refutaciones que su tesis se puede resumir en que además de que se puede aprender de los errores propios, el conocimiento aumenta sólo a través de la corrección de éstos.

Según Moreira y Massoni (2009), en esta concepción, el primer principio sería entonces la testabilidad y refutabilidad de las teorías científicas, por ejemplo, una teoría no refutable es la astrología, pues, sus profecías son tan vagas que pueden explicar cualquier cosa capaz de refutarla, y así difícilmente fallan, por lo que se trataría de una pseudociencia. El segundo principio es que se avanza a través de la racionalidad reflejada en el examen crítico de conjeturas (teorías) controladas por refutaciones, por lo que, las leyes y teorías son esencialmente tentativas, es decir, independientemente de cuantos cisnes blancos podamos observar, eso no justifica la conclusión de que todos los cisnes son blancos.

Teniendo así, que los límites del conocimiento radican en la imposibilidad de verificar, de manera definitiva, los enunciados universales de la ciencia, pues de lo único que tenemos certeza, es de los enunciados particulares que se refieren a los hechos.

En Popper la historia de la ciencia se asemejaría a la historia de las demás ideas, resultado de continuos errores y correcciones, pero que a pesar de esto, es una de las actividades, cuidado si no la única, en la que los errores son criticados sistemáticamente y con frecuencia corregidos (Moreira y Massoni, op. cit.).

En consecuencia, el planteamiento epistemológico popperiano permiten abordar la educación en varias dimensiones como son el aprendizaje, los conocimiento, las actitudes, los valores y la institucionalidad que la han de guiar, (Burgos, 2011), en este orden de ideas, Astolfi (2003) señala que en la investigación al igual que en el aprendizaje no se sigue un procedimiento rígido, no se hacen pasos predeterminados

ni menos aún, hay un "camino real" para alcanzar el conocimiento, y uno de los factores que afecta esto es el error, pero éste es imposible de eliminar, sólo se puede decidir la forma en que se aborde, y es un claro ejemplo de los procesos mentales que realiza el alumno, por lo que éste es una fuente útil tanto para la ciencia como para la enseñanza.

2.2.2 Base Psicopedagógica.

2.2.2.1 Gaston Bachelard y la naturaleza del aprendizaje.

Con relación a la naturaleza del aprendizaje y el proceso inherente al mismo, se tiene que el filósofo francés Bachelard (1948) señala en su libro La formación del espíritu científico, que cuando el sujeto aprende su actividad está sometida constantemente a rectificación, un conocimiento se adquiere en oposición y reemplazo a un conocimiento anterior que es insuficiente o incorrecto, y que en la mente cumple la función de obstáculo, y es en este proceso donde aparecen, por una especie de necesidad funcional, los entorpecimientos y las confusiones.

De acuerdo a Moreira y Massoni (op. cit.), para Bachelard, entre los obstáculos epistemológicos que se convierten en obstáculos pedagógicos, destaca la experiencia primera, que se prioriza encima de la crítica y la tendencia a las generalizaciones, que no siempre son adecuadas. Sin embargo, en educación la noción de obstáculo pedagógico no siempre es considerada, dado que, los profesores muchas veces conciben que el aprendizaje comienza con una lección, y en ella puede hacerse comprender el proceso de solución de un problema, o una demostración repitiéndola punto por punto. Al respecto Bachelard afirma:

> Frecuentemente me ha chocado el hecho de que los profesores de ciencias, aún más que los otros si cabe, no comprendan que no se comprenda. Son poco numerosos los que han sondeado la psicología del error, de la ignorancia y de la irreflexión. p. 21

Asimismo, esta concepción, conlleva a una educación en donde se considere, que al igual que un estudiante no espera a ver las figuras planas para hacerse conjeturas de ¿qué es una circunferencia? o ¿qué es cuadrado?, tampoco esperará a ver límite de funciones, a nivel superior, para hacerse suposiciones, por lo que el docente debe

considerar los aciertos y errores presentes en estas ideas, y las dificultades propias del contenido, para utilizarlo en su clases.

2.2.2.2 David Ausubel y el aprendizaje significativo.

Estas ideas se concatenan al concepto y objetivos del aprendizaje significativo, de acuerdo a Díaz Barriga y Hernández (2010) para que el aprendizaje sea significativo debe existir una relacionabilidad sustancial entre el material que es potencialmente significativo con las ideas establecidas y pertinentes de la estructura cognitiva. De esta manera, se pueden utilizar con eficacia los conocimientos previos en la adquisición de nuevos conocimientos. El aprendizaje significativo sería el resultado de ésta interacción, pero sin olvidar que ninguna tarea de aprendizaje se realiza en el vacío cognitivo. Por lo tanto, los docentes deben crear un entorno de instrucción en el que las nuevas ideas, conceptos y proposiciones tengan un punto de "anclaje" en los conocimientos, ideas y conceptos previos de los estudiantes.

En este orden de ideas, Ausubel y Bacherlard coinciden al reconocer que los conocimientos previos y las experiencias juegan un papel influyente en el aprendizaje, ya que Bachelard alerta sobre el hecho de que los errores de los alumnos son indicadores de los obstáculos que se resisten y se tiende a subestimar, y que todo conocimiento se adquiere en oposición a otro, (Astolfi, op. cit), y Ausubel está presente en la taxonomía de errores de Astolfi cuando señala entre sus causas, los provocados por las concepciones alternativas de los alumnos y las limitaciones en cuanto a las operaciones intelectuales no disponibles.

2.2.2.3 Jean Pierre Astolfi y su taxonomía de errores.

Astolfi (2003) describe y analiza el error desde una perspectiva constructivista, atendiendo tanto a la visión y papel que desempeña el docente como a la del estudiante, y enfocándose en aquellos en los cuales el profesor puede hacer una intervención didáctica, para ello, excluye los obstáculos psicológicos como la afectividad, más no es que se menosprecie su influencia, sino que se hace énfasis en los que pueden ser abordados por los docentes en el aula.

Astolfi (op. cit.) plantea que en la corriente pedagógica del contructivismo el error tiene un estatus más positivo en relación a las concepciones anteriores, ya que a pesar de que se persigue llegar a su erradicación en las producciones de los alumnos, se admite que, como medio para conseguirlo, hay que dejar que aparezcan, incluso provocarlos, para mejorar el aprendizaje, no obstante, esta posición, sólo durará el tiempo necesario para comprenderlos y analizarlos detenidamente, ya que éstos son indicadores de con qué se está enfrentando el pensamiento de los alumnos, así como de los razonamientos que realizan.

El error es visto entonces, bajo esta concepción como un obstáculo, no obstante, no en el sentido etimológico del término, que lo entiende como "lo que se tiene delante", lo que obstruye el camino, sino que su origen está, en el sujeto que aprende, en la experiencia cotidiana, en el inconsciente. Por lo que no se puede dar un aprendizaje sin obstáculos, pues cualquier forma de funcionamiento mental se presenta tanto como una herramienta como una fuente potencial de errores, que no son rechazables por sí mismo, sino sólo por la forma en que se use. Por ejemplo, las analogías y metáforas, sirven para comprender, pero pueden llevar a ser erróneamente consideradas como realidad, por lo que el conocimiento de los peligros potenciales quizá constituya la mejor garantía de un tratamiento didáctico razonado. A respecto Astolfi (op. cit.) explica:

> consecuencia de todo ello es que los errores sólo se pueden reconocer después de cometidos, una vez que los obstáculos han podido ser franqueados. ¿Se franquean de verdad, o sólo se identifican? En todo caso hay algo de metacognitivo en este reconocimiento (p. 14)

Una vez abordado el error bajo la concepción constructivista de Astolfi (op. cit.), éste autor identifica los siguientes ocho errores, restringidos al aspecto cognitivo, en el desenvolvimiento del estudiante:

- Errores debidos a la redacción y comprensión de las instrucciones. Uno de los motivadores de errores de esta taxonomía referida a la didáctica en clase es el relacionado a la compresión de las instrucciones ante una pregunta, el léxico de la

disciplina y a la comunicación docente-estudiante. Es este error, se expone que la comprensión de los términos de cada disciplina, no son, muchas veces, tan claros como el docente supone, para el estudiante, esto ocurre también en la lectura de enunciados, textos escolares, inclusive en el proceso de comunicación docente estudiante, que va desde las expectativas y aclaraciones ante la dudas, hasta las recomendaciones que se dan en el aula.

Como mediación ante esta fuente de errores, se propone que se analice el lenguaje de los textos, con el fin de trabajar, para mejorar la comprensión; de la misma forma, realizar una selección y formulación de las instrucciones más minuciosa.

- Errores que provienen de las costumbres escolares o de una mala interpretación de las expectativas. Se plantea que los estudiantes están conscientes de que actúan bajo la influencia de un contrato didáctico y que si está bien diseñado sabrán que se espera de ellos, no obstante, dificultades en su interpretación y seguimiento son generalmente una fuente de errores.

Agrega, además que la clase funciona como una "sociedad de costumbres" con sus reglas, pero sin que muchas veces estas costumbres se hayan dictado o formalizado pero que si deben ser cumplidas.

Cita ejemplos, como las reglas adoptadas por los estudiantes para resolver problemas deducidas de su experiencia de alumno, entre otras. Pero también de las consecuencias que muchas veces puede tener esta posición, ya que a veces se deja de lado el aprendizaje a base del camino más fácil para tener éxito en aprobar las evaluaciones. Por lo que, muchos de los errores provienen de las dificultades que encuentran los alumnos para entender los aspectos implícitos de la situación didáctica.

Como mediación ante este error, se propone que el docente debe hacer un análisis de los hábitos didácticos en vigor y las expectativas que presentan los estudiantes.

- Errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos. En el tercer error, se habla de las construcciones previas que hacen los estudiantes ante un concepto, no siempre correctas, y que estas representaciones deben ser analizadas con la condición de medir su utilidad en el desarrollo de la didáctica de la clase y la forma de abordarse para administrar el tiempo eficientemente, ya que éstas pueden transformarse en una dificultad para la comprensión.

En el mismo orden de ideas, señala que esta actitud lleva a no considerar a los conocimientos únicamente como "cosas" que deben adquirirse y memorizarse, aunque a veces, evidentemente, esto sea necesario, sino valorar igualmente nuestros momentos de descubrimiento, ya que éstos son a menudo aquéllas que nos permiten ver las cosas de otro modo, sin tener que saber "más", al igual que pueden servir para hacer significativo el aprendizaje.

Como mediación ante este error, se sugiere el trabajo de escucha, de toma de conciencia por los estudiantes y del debate científico en la clase.

- Errores relacionados con las operaciones intelectuales implicadas. Se señala en el error 4 de que algunas equivocaciones de los estudiantes son debido a que en las operaciones intelectuales implicadas en una tarea no le están disponibles, a pesar de que el docente las vea naturales, y que al ser exigidas, conlleva a errores en su aplicación. Por lo tanto, se debe medir la dificultad de lo que se pide al estudiante, viéndolo más como un sujeto didáctico que como sujeto psicológico haciendo que en las evaluaciones se preste atención a las dificultades y así atenderlas para mejorar el aprendizaje.

Por ejemplo que dos problemas sean más o menos equivalentes, no implica que los alumnos puedan traspasar conclusiones de uno a otro y que sean sensibles a las variables didácticas que los distinguen. En consecuencia estos errores están relacionados más directamente con la diversidad de las operaciones intelectuales que

deben utilizarse para resolver problemas y en donde se parte de la premisa que, aparentemente, están al alcance de los alumnos.

Como mediación ante este tipo de errores, se sugiere analizar las capacidades lógico-matemáticas que exigen los ejercicios y realizar selecciones previamente analizadas de actividades a proponer al estudiante.

- Errores en los procesos adoptados. Este error explica que en la solución de un problema los recorridos empleados, pueden ser muy diversos, lo que trae dificultades, si el docente espera el uso de un procedimiento estándar o en su defecto no comprende el camino o la intención del alumno. Por lo que ante la variedad de respuestas de los estudiantes, se debería valorar la diversidad, no obstante, a menudo se consideran erróneas las propuestas cuando se apartan del método-tipo que se ha imaginado, y más si se acompañan de tallos puntuales que enmascaran la lógica del recorrido.

Como mediación se propone, analizar previamente la diversidad de procedimientos con los que se pueden abordar los ejercicios y las situaciones planteadas en el aula de clase.

- Errores debidos a la sobrecarga cognitiva durante el ejercicio. Estos son originados por los efectos adversos de la sobrecarga cognitiva y de la memoria en el ejercicio de aprender, dado que la capacidad de trabajo es limitada y se subestima frecuentemente la carga cognitiva de la actividad, conlleva que, ante ciertas actividades el estudiante, no sólo se encuentran frente a un problema, sino frente a una situación altamente problemática, y los errores que cometen son su resultado automático.

Como mediación ante este obstáculo, señala que si bien es cierto que tiene sus límites también es cierto que dispone de recursos en que basarse, los cuales deberían ser tratados en clase, además de seleccionar los contenidos hasta llegar a lo esencial, eligiendo los mejores recursos y dar las herramientas que faciliten la comprensión.

De la misma forma, en estas situaciones, también aconsejarles a los estudiantes que se centren sucesivamente en varias tareas de rango menor, más fácilmente gestionables en la memoria.

- Errores que tienen su origen en otra disciplina. El séptimo error plantea que las deficiencias en otras disciplinas o los conocimientos que si se adquieren pero que no se transfieren fácilmente a otros contextos, deben ser consideradas en el trabajo didáctico, ya que son fuente de errores en los estudiantes. Esto, porque a pesar de que la transferencia de competencias entre un área y otra parece natural, no lo es en absoluto según estudios psicológicos modernos, pero no se trata de abandonar ésta meta, sino desarrollar estrategias que permitan que los estudiantes transfieran lo aprendido en otras áreas, dado que la escuela es cada vez más consciente de que lo que enseña corre el riesgo de caducar, en el mismo momento en que termine la formación. Es por ello, que se debe defender y organizar la transferencia.

Como mediación, se recomienda que el docente, lleve a cabo, en las clases un reforzamiento constante, y usar estrategias que permitan tanto una metacognición del estudiante en su trabajo, como la experimentación personal de las herramientas que domina en otros marcos.

- Errores causados por la complejidad propia del contenido. Se plantea que la complejidad propia de un contenido, y no siempre percibida como tal, en los análisis que se hacen de las disciplinas y las programaciones, puede ser una fuente de errores en los estudiantes al tener repercusiones aquí y en las otras categorías de errores como la carga mental y la naturaleza de las operaciones intelectuales, pero la mirada aquí pasa del punto de vista psicológico del sujeto que aprende al punto de vista epistemológico de la estructura del contenido.

Como mediación se propone, un análisis didáctico de las dificultades y exigencias intrínsecas de los conceptos y procedimientos que serán trabajados en clase.

2.2.2.4 El error de acuerdo a los pedagogos e investigadores Abrate, R.; Pochulu, M. y Vargas, J. (2006)

Estos autores en su trabajo de investigación publicado sobre los errores y dificultades en matemática, plantean que los errores son uno de los elementos presentes en las actividades que realizan los estudiantes, y su papel en la matemática es significativo, por lo cual partiendo de la visión constructivista, se debe considerar en primer lugar las áreas más susceptibles de errores en el proceso de enseñanza y aprendizaje, para identificarlos con más efectividad cuando aparezcan y considerar junto a ello, las ideas previas que traen los alumnos. Coincidiendo de esta manera con Astolfi, que partiendo de igual forma, apoyándose en modelos constructivistas, establece para ello los errores tres, cuatro y siete de su taxonomía de errores y con Ausubel que postula que en la medida de lo posible todo aprendizaje debe partir de lo que el alumno ya sabe.

Esto implica, considerar no solamente, que los errores en matemática tienen que ser aceptados, deben ser superados, "…no como algo que no tendría que haber aparecido, sino como una instancia cuya aparición es útil e interesante, ya que permite la adquisición de un nuevo y mejor conocimiento" (Abrate, et al, 2006, p.12).

Lo innovador de estos investigadores, dentro de estas ideas que se enlazan con los planteamientos anteriores dados sobre el error, es que resaltan la importancia de los ítems no contestados sobre los errores de los estudiantes, al ser estos evidencia de ausencia de conocimientos previos, es decir el error también puede darse si el estudiante todavía no está preparado para el objetivo perseguido en la clase.

Por lo tanto, entre los aspectos metodológicos, el docente debe hacer un análisis de las preguntas no contestadas por los estudiantes relacionándolas con las que tuvieron errores y posteriormente con el total de ítems, por cada contenido o ejercicio, para interpretar la influencia que tuvieron éstas en los errores, dado que, al no responder a un ítem, el alumno estaría mostrando que no contaba con el conocimiento previo para ello, o en el caso de la presente investigación, no aprendió

un determinado contenido de límite de funciones en el tiempo que se le asigno en cálculo para ello.

2.3 Definición de términos básicos.

Error en el aprendizaje: Síntomas interesantes de los obstáculos con los que se enfrenta el pensamiento de los alumnos (Astolfi, op. cit., p. 4).

Cálculo I: Es una materia que pertenece a la cátedra de Cálculo de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo (FaCE-UC), bajo el código MA0304, y que es impartida en tercer semestre de la mención de matemática. Comprende las unidades, ecuaciones y desigualdades lineales, relaciones y funciones, sucesiones y series, límites de funciones y derivadas de funciones. (Ascanio y Próspero, 2003, p. s/n)

Límite de funciones: Es la cuarta unidad curricular que se ve en Cálculo I en la FaCE. Desde el punto de vista conceptual, en general, es el valor al que tiende una función al aproximarse la variable independiente a cierto valor. La idea de límites es la base del análisis, una parte de las matemáticas. (Daintith, 2005, p.115)

3 MARCO METODOLÓGICO

Dentro del Marco Metodológico se hace referencia al momento tecno-operacional presente en todo proceso de investigación, para ello se introducirán a continuación importantes aspectos relativos al tipo de estudio, su diseño, la población estudiada, la muestra; el procedimiento seguido para llevar a cabo la investigación, las técnicas e instrumentos que se emplearon en la recolección de los datos; las formas de codificación, presentación de los datos; y el análisis e interpretación de los resultados que permitirán destacar las evidencias más significativas encontradas en relación a los errores que cometen los estudiantes en el aprendizaje de límites en Cálculo I de la mención de matemática, semestre 2-2013, en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo.

3.1 Tipo y diseño de investigación.

3.1.1 Tipo de investigación.

De acuerdo al problema planteado y la pregunta de investigación sobre ¿Cuáles son los errores que cometen los estudiantes en el contenido de límite de funciones en Cálculo I, de la mención de matemática, en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo – Semestre 2-2013? y en función de sus objetivos, la presente, se incorpora al tipo de investigación descriptiva, al respecto, escribe Hernández, Fernández y Baptista (2010)

> Los estudios descriptivos buscan especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis. Es decir, únicamente pretenden medir o recoger información de manera independiente o conjunta sobre los conceptos o las variables a las que se refieren, esto es, su objetivo no es indicar cómo se relacionan éstas. (p. 80)

3.1.2 Diseño de investigación.

En relación a la forma, lugar y plan o estrategia a seguir para la recolección de los datos, la presente investigación seguirá un solo diseño, enmarcado en la investigación

no experimental cuantitativa, entendiendo por ésta, de acuerdo a Hernández y otros (op. cit.)

> Estudios donde no hacemos variar en forma intencional las variables independientes para ver su efecto sobre otras variables. Lo que hacemos en la investigación no experimental es observar fenómenos tal como se dan en su contexto natural, para posteriormente analizarlos. (p. 149)

Y dentro de los diseños no experimentales, teniendo en cuenta la dimensión temporal o el número de momentos o puntos en el tiempo, en los cuales se recolectan datos, la presente investigación, según Hernández y otros (op. cit.) entra en la categoría transeccional al respecto el autor señala

> Los diseños de investigación transeccional o transversal recolectan datos en un solo momento, en un tiempo único. Su propósito es describir variables y analizar su incidencia e interrelación en un momento dado. Es como tomar una fotografía de algo que sucede. (p. 149).

Y dentro de los diseños transeccionales o transversales, es descriptivo, ya que como estipula Hernández y otros (op. cit.)

> Los diseños transeccionales descriptivos tienen como objetivo indagar la incidencia de las modalidades o niveles de una o más variables en una población. El procedimiento consiste en ubicar en una o diversas variables a un grupo de personas u otros seres vivos, objetos, situaciones, contextos, fenómenos, comunidades; y así proporcionar su descripción. Son, por tanto, estudios puramente descriptivos y cuando establecen hipótesis, éstas son también descriptivas (de pronóstico de una cifra o valores). (p. 152)

3.2 Sujetos de la investigación.

3.2.1 Población.

Según Hernández y otros (ob. cit.), se entiende por población o universo bajo un enfoque cuantitativo al "conjunto de todos los casos que concuerdan con determinadas especificaciones" (p. 174). En la presente investigación las unidades de análisis objeto de observación o estudio, para la cual se generalizarán los resultados,

fueron la totalidad de estudiantes de la mención de matemática cursantes de Cálculo I en el III Semestre, período 2-2013, de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo. La conformación de la población se resume en la siguiente cuadro:

Cuadro Nº 1: Conformación de la población.

Secciones	Número de estudiantes
Sección 11 (turno mañana)	13
Sección 81 (turno noche)	2
Totalidad	15

3.2.2 Muestra.

La muestra bajo un enfoque cuantitativo según Hernández y otros (ob. cit.) se define como el "subgrupo de la población del cual se recolectan los datos y debe ser representativo de ésta" (p. 143) y en cuanto a su número en relación a la población, dadas las características de la investigación, correspondió a once (11) estudiantes que cursaban Cálculo I en el III semestre, período 2-2013, de la mención de Matemática en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo (FaCE-UC), correspondiente al 73,33% de la población.

Estando en concordancia con lo expuesto por Hurtado y Toro (1999) al señalar que "los diseños puramente descriptivos como las encuestas requieren de muestras que abarquen al menos el diez por ciento (10%) de la población para que sus resultados puedan considerarse válidos" (p. 79). De la misma forma, Hernández y otros (ob. cit.), estipulan que "conforme disminuye el tamaño de la población aumenta la proporción de casos que necesitamos en la muestra" (p. 180).

En relación al muestreo utilizado, éste fue probabilístico y por azar simple, al respecto, Hurtado y Toro (ob. cit.) escriben "se utiliza cuando la población es pequeña y finita, es decir, con un número de integrantes conocido, y se realiza por un

sorteo entre todos ellos" (p. 80), para ello se procedió a numerar a cada sujeto a partir de la nóminas de las secciones, que cursaba Cálculo I en el III Semestre, período 2-2013, de la mención de Matemática, en la FaCE-UC, y por medio de una tómbola se determinó quienes serían los once (11) sujetos que conformaría la muestra, al respecto Hernández y otros (ob. cit.) indican sobre la tómbola

> Muy simple pero muy rápido, consiste en numerar todos los elementos muestrales de la población, del uno al número N. Después se hacen fichas o papeles, uno por cada elemento, se revuelven en una caja y se van sacando n número de fichas, según el tamaño de la muestra. Los números elegidos al azar conformarán la muestra. (p. 183)

3.3. Procedimiento.

En la presentación de los pasos secuenciales, para llevar a término la presente investigación, se seguirá lo planteado por Afcha (2000), en cuanto al planteamiento del procedimiento que se sigue en todo proceso de investigación

> Se hace referencia a las actividades y pasos secuenciales necesarios para llevar a cabo el trabajo de investigación. Corresponde a las macroactividades de ejecución del estudio propiamente dicho, por ello el punto de partida del reglón destinado a los procedimientos, es la planificación y narración de lo que se hace en la práctica investigativa después que el proyecto ha sido aprobado o considerado definitivamente viable. (p. 42)

En el semestre III, período 2-2013, de la mención de Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo, se tuvo una población de 15 alumnos, de los cuales se estudiaron 11, y a los que se le aplicó un instrumento, tipo cuestionario, para determinar los errores que cometieron en el contenido de límite de funciones atendiendo a la taxonomía de Astolfi.

Para ello, una vez elaborado el instrumento, se realizó la prueba piloto en donde se utilizaron los cuatro estudiantes restantes, y a través de ésta se determinó la confiabilidad nuevamente a través del coeficiente Kuder Richardson, la validez ya fue establecida por Izaguire y Martínez (2011) a través del juicio de expertos.

Posteriormente, una vez revisado los resultados arrojados por la prueba piloto, se le aplicó el cuestionario a la muestra seleccionada, realizando un estudio ítem por ítem, en cada uno de los cuestionarios, calificándolos, y realizando un análisis de estadística descriptiva, para luego, determinar cuáles fueron los errores cometidos, con el fin de clasificarlos en función de la taxonomía de errores de Astolfi.

De esa forma, se pasó a un análisis dimensión por dimensión, que estuvo dado por los contenidos conceptuales y procedimentales de límites de funciones, atendiendo a los errores cometidos en cada uno de ellos y la relación entre las preguntas no contestadas con respecto, a las que presentaban errores y al total de preguntas, que evidencian carencia de conocimientos previos. Por último se expusieron las conclusiones y las recomendaciones.

3.4. Instrumentos de recolección de la información.

Según Fidias Arias (1997, p. 55) los instrumentos son "los medios materiales que se emplean para recoger y almacenar la información", en la presente se usó como instrumento el cuestionario, que se define de acuerdo a Ruiz (2002), como

> Un instrumento de recolección de datos, de lápiz y papel, integrado por preguntas que solicitan información referida a un problema, objeto o tema de investigación, el cual es normalmente administrado a un grupo de personas. (p. 191)

En cuanto al tipo de cuestionario, dado que la población objeto de estudio tiene conocimiento acerca del contenido que abarca el mismo, y que los investigadores pueden determinar previamente la respuesta correcta, se usó el cuestionario de respuestas cerradas. Por su parte, el mismo autor lo define como *"*aquellas en que cada reactivo o pregunta consta de un número fijo de escogencias o alternativas de respuestas. En estos casos se le pide al sujeto marcar la alternativa de respuesta que considere más apropiada*"* (Ruíz, op. cit., p. 194).

En cuanto al cuestionario seleccionado, se utilizó, el elaborado por Izaguire y Martínez (2011), sobre límites de funciones, que consta de 14 ítems de opción simple,

con cinco opciones de respuestas de las cuales sólo una es la correcta, no obstante, antes de su aplicación, de acuerdo, a lo sugerido por Hernández y otros (2010), se realizó en primer lugar una redefinición de las variables fundamentales de la investigación, en donde se mantuvo que se trabajaría con los sujetos y los contenidos de límites de funciones vistos en Cálculo I, en la mención de Matemática de la FaCE-UC, semestre 2-2013, posteriormente que se hayan impartido por el docente correspondiente, y que a pesar, de ser un cuestionario de respuestas cerradas, se pediría a los estudiantes justificación, para así aumentar la información y comprensión que se pueda obtener de los errores que comentieron los estudiantes de acuerdo a la taxonomía de Astolfi.

Finalmente, se agregó un nuevo aspecto a evaluar, dado por la relación de las preguntas no contestadas con respecto a las que presentaron errores y al total de preguntas, que representaría ausencia de conocimientos previos sobre ese ítem por parte del sujeto.

3.4.1 Validez del instrumento.

Según Hernández y otros (op. cit.) la validez en términos generales se refiere al "grado en que un instrumento en verdad mide la variable que se busca medir." (p. 201). En la presente investigación se usó la validez de contenido, la cual según el autor antes citado, "se refiere al grado en que un instrumento refleja un dominio específico de contenido de lo que se mide" (ibídem).

Según Ruiz (ob. cit.) para responder esta pregunta se recurre a un juicio de expertos, que para el presente cuestionario ya fue determinado por Izaguire y Martínez (2011), y estuvo conformada por un panel de cinco (5) especialistas los cuales verificaron la representatividad, redacción, extensión y tendenciosidad de los ítems.

3.4.2. Confiabilidad.

Se entiende por confiabilidad, según Hernández y otros (op. cit.) el "grado en que un instrumento produce resultados consistentes y coherentes." (p. 200). La confiabilidad del instrumento de medición, ya fue determinada por Izaguire y Martínez (2011) a través del coeficiente Kuder Richardson, arrojando un valor de 0,78. No obstante, para este estudio, se calculó nuevamente pero con los sujetos que conformaron el grupo para la prueba piloto constituido por cuatro (4) estudiantes, dada las características de la población y la muestra y que se ajusta a lo planteado por Hernández y otros (op. cit.) que indica que la prueba piloto se realiza con una pequeña muestra inferior a la muestra definitiva.

En ambos casos, en la presente investigación se utilizó el método para determinar la confiabilidad denominado consistencia interna, en donde el énfasis se hace en las puntuaciones de los sujetos, al respecto Ruíz (op. cit.) estipula que este tipo de confiabilidad

> Permite determinar el grado en que los ítemes de una prueba están correlacionados entre sí. Si los diferentes reactivos de un instrumento tienen una correlación positiva y, como mínimo, moderada, dicho instrumento será homogéneo. En consecuencia, se puede definir la homogeneidad como la consistencia en la ejecución en todos los reactivos de la prueba. (p. 62)

El procedimiento elegido para estimar la confiabilidad de consistencia interna, fue Kuder Richardson, el cual presenta el siguiente algoritmo explicado por Ruiz (ob. cit)

> Para calcular la confiabilidad por el método K-R_{20}, se procede así: en primer lugar, para cada ítem se computa p, que es la proporción de sujetos que pasaron un ítem sobre el total de sujetos; luego, se computa q, que es igual a 1-p; se multiplica pq; y finalmente se suman todos los valores de pq. El resultado obtenido es la sumatoria de la varianza individual de los ítemes, o sea, Σpq; en segundo lugar, se calcula la varianza total de la distribución de calificaciones (V_t); y, en tercer lugar, se aplica la fórmula correspondiente. (p. 63-64)

$$r_{n=\frac{n}{n-1}\bullet\frac{Vt-\sum pq}{Vt}}$$

En donde:

r_n = coeficiente de confiabilidad.

N = número de ítemes que contienen el instrumento.

V_t = varianza total de la prueba.

Σpq = sumatoria de la varianza individual de los ítemes.

Y una manera sencilla de obtener los términos de la fórmula consiste en tabular los datos obtenidos tal como se señala en el siguiente cuadro, donde se indica los resultados arrojados de la aplicación de la prueba piloto:

Cuadro 2: Tabulación de resultados para el cálculo de la confiabilidad.

Sujetos	Ítemes														Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	11
2	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	8
3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
4	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	5
p	0,5	0,75	0	0,25	0,5	0,5	0,25	0,25	0,5	0,5	0,75	0,5	0,75	0,25	V_t =18,25
q	0,5	0,25	1	0,75	0,5	0,5	0,75	0,75	0,5	0,5	0,25	0,5	0,25	0,75	
p.q	0,25	0,1875	0	0,1875	0,25	0,25	0,1875	0,1875	0,25	0,25	0,1875	0,25	0,1875	0,1875	Σpq = 2,8125

Sustituyendo en la fórmula dada anteriormente para calcular kuder-Richardson se tiene:

$$r_{n=\frac{n}{n-1}\bullet\frac{Vt-\sum pq}{Vt}}$$

$$r_{14=\frac{14}{14-1}\bullet\frac{18,25-2,8125}{18,25}}$$

$$r_{14=0,91}$$

Por estar el coeficiente de correlación entre 0,81 y 1,00 siguiendo la interpretación de Ruiz (ob. cit), se tiene que el nivel de confiabilidad es muy alto.

3.5. Técnicas de análisis y procesamiento de la información.

En la presente investigación, relativa al análisis de los errores que cometen los estudiantes en el contenido de límite de funciones en Cálculo I, de la mención de matemática, en la FaCE-UC, Semestre 2-2013, se utilizarán algunos métodos estadísticos, derivados de la Estadística Descriptiva, a objeto de resumir y comparar las observaciones que se han evidenciado en relación a las variables estudiadas. A respecto, Selltiz, Jehoda y otros (1976, citado por Balestrini, 2002), indican "el propósito del análisis es resumir las observaciones llevadas a cabo de forma tal que proporcionen respuestas a las interrogantes de investigación" (p. 169), De la misma forma, en cuánto al procesamiento e interpretación de la información Balestrini (op. cit.), señala que

> "está referido a los métodos estadísticos que se introducirán a la masa de datos. Es decir, que tipo de cálculo se aplicará a los datos obtenidos de la muestra, que ha sido delimitada, para describirlos o resumirlos, a fin de caracterizar la población estudiada." (p. 183).

Con este fin, en primer lugar, para presentar los resultados generales en la prueba realizada en el contenido de límites de funciones, se tabularan éstos en una tabla de distribución de frecuencias, y se calculará posteriormente las medidas de tendencia central, media aritmética, mediana y moda y las medidas de variabilidad o dispersión la desviación típica (s) , la varianza (s^2) y el coeficiente de variación (Cv).

Luego, en busca de hacer un análisis ítems por ítem, se determinará en primer lugar por cada pregunta el promedio de respuestas correctas, incorrectas y no contestadas, de la misma forma se determinará la proporción en porcentaje de los errores cometidos atendiendo a la taxonomía de Astolfi, a fin de utilizar como técnica gráfica para la presentación de datos el diagrama de barras, con su respectiva interpretaciones.

Por último en el análisis dimensión por dimensión, se presentarán para la dimensión conceptual y procedimental del contenido de límite de funciones, los errores generales cometidos de acuerdo a la taxonomía de Astolfi, y la rezón entre ítems no contestados respeto a los ítems con errores y el total de ítem, que implica como error ausencia de conocimientos previos.

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1 Presentación y análisis de los resultados.

Con el fin de que los datos recolectados sean presentados de forma eficaz en relación a las conclusiones que aportarán, en la presente investigación, que versa, sobre los errores cometidos en el contenido de límite de funciones, de acuerdo a la taxonomía de Astolfi (2003) y el tratamiento de ítems no contestados planteado por Abrate, R.; Pochulu, M. y Vargas, J. (2006), por los estudiantes en cálculo I, de la mención de matemática, en la FaCE-UC, semestre 2-2013, se hace necesario introducir un conjunto de operaciones en la fase de análisis e interpretación de los resultados, con el propósito de organizarlos, para luego dar respuestas a los objetivos planteados en el estudio, evidenciando los hallazgos encontrados y conectarlos de manera directa con las bases teóricas que sustentan la misma.

En primer lugar se presentarán los resultados obtenidos individualmente por cada estudiante, por ítem, indicando las respuestas que eligió, resaltando si era correcta, para luego indicar su calificación final. Luego se construirá una tabla de distribución de calificaciones en base a las notas generales, para calcular así las medidas de tendencia central y de dispersión.

En base a las notas obtenidas en una escala de 1 a 20 puntos, ya que se le asignara 01 puntos si el estudiante no acierta o no responde ningún ítem, y donde obtendrán 1,45 puntos por cada ítem respondido correctamente, caso contrario 0 puntos.

Posteriormente para analizar e interpretar los resultados se procederá en forma creciente, en primer lugar ítem por ítem; luego, dada la naturaleza del estudio y la disposición de preguntas del instrumento, en donde la mayoría de los indicadores constan de una sóla pregunta, se pasará directamente al análisis dimensión por dimensión, en donde se presentarán para la dimensión conceptual y procedimental del contenido de límite de funciones, los errores generales cometidos de acuerdo a la tipología de Astolfi (op. cit.), y la razón entre ítems no contestados respeto a los ítems

con errores y el total de ítem, que implica la ausencia de conocimientos previos, de acuerdo a Abrate, R.; Pochulu, M. y Vargas, J. (op. cit.). A continuación se muestra la tipología de errores de Astolfi (op. cit.):

Cuadro N° 3: Tipología de errores:

E_1:	*Errores debido a la redacción y comprensión de las instrucciones.*
E_2:	*Errores que provienen de las costumbres escolares o de una mala interpretación de las expectativas.*
E_3:	*Errores como resultado de las concepciones alternativas de los estudiantes.*
E_4:	*Errores relacionados con las operaciones intelectuales implicadas.*
E_5:	*Errores en los procesos adoptados.*
E_6:	*Errores debido a la sobrecarga cognitiva en la actividad.*
E_7:	*Errores que tienen su origen en otra disciplina.*
E_8:	*Errores causados por la complejidad propia del contenido.*

4.2 Presentación de las respuestas correctas, incorrectas y no contestadas

Cuadro N° 4: Datos obtenidos del instrumento aplicado a la muestra:

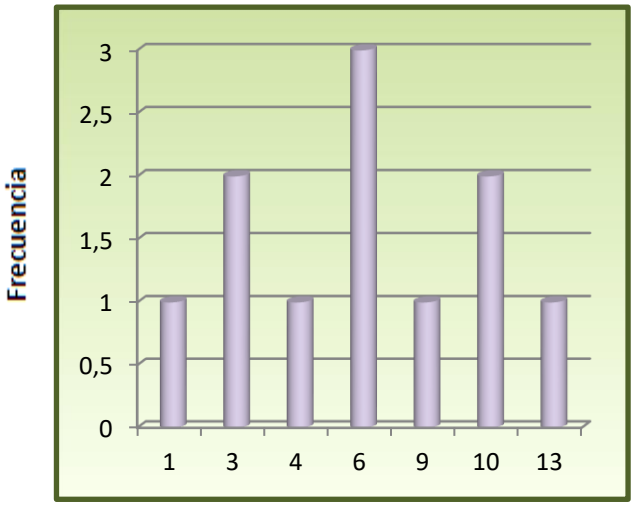
	Ítems														Total			Calificación
Sujeto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	**Correctas**	**Incorrectas**	**No contesto**	
1	N.C	N.C	N.C	N.C	N.C	N.C	N.C	N.C	N.C	N.C	N.C	N.C	N.C	N.C	0	0	14	01
2	√ c	c	N.C	√ a	√ a	N.C	√ a	a	N.C	d	√ c	√ a	e	√ d	7	4	3	10
3	√ c	√ d	b	√ a	b	N.C	√ a	√ b	N.C	√ b	a	e	√ c	e	7	5	2	10
4	a	b	c	b	e	N.C	c	√ b	a	a	a	N.C	N.C	N.C	2	8	4	03
5	b	b	e	√ a	√ a	a	c	a	b	a	a	b	√ c	√ d	4	10	0	06
6	a	√ d	√ d	√ a	d	e	d	a	e	a	d	e	N.C	**N.C***	3	9	2	04
7	a	√ d	e	b	√ a	e	c	√ b	N.C	√ b	a	e	**N.C***	**N.C***	4	7	3	06
8	√ c	√ d	N.C	√ a	N.C	N.C	N.C	a	a	√ b	a	√a	√ c	N.C	6	3	5	09
9	a	N.C	N.C	N.C	N.C	**N.C**	N.C	N.C	N.C	d	a	√ a	√ c	**N.C***	2	3	9	03
10	√ c	√ d	c	√ a	N.C	N.C*	N.C	a	N.C*	√ b	a	N.C	N.C	N.C	4	3	7	06
11	√ c	√ d	e	√ a	√ a	N.C	√ a	√ b	c	√ b	a	√ a	e	√ d	9	4	1	13

Leyenda: N.C.: No contesto. **N.C.*:** Desarrollo un procedimiento cuya respuesta no coincida con la sugerida, ya que se va por otra perspectiva diferente a lo que se pide. √: Respuesta correcta.

4.3.- Medidas de Tendencia Central y Dispersión

Considerando las calificaciones obtenidas por los estudiantes que conforman la muestra, a través de la aplicación del instrumento utilizado en la presente investigación, descritos en el cuadro anterior, se analizó dichas calificaciones con respecto a las medidas de tendencia central y dispersión, luego se interpretó dichas medidas como se muestra a continuación:

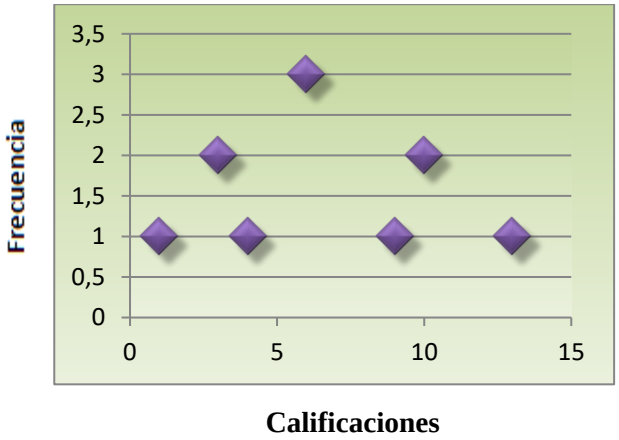
Gráfico N° 1: Frecuencia de las calificaciones para las medidas de tendencia central



Cuadro N° 5: Medidas de Tendencia Central

Medidas de tendencia central de las calificaciones obtenidas por los estudiantes encuestados:
Moda: 6 puntos. Media Aritmética: 6, 4545 puntos. Mediana: 6 puntos.

Gráfico N° 2: Frecuencia de las calificaciones para las medidas de dispersión



Cuadro N° 6: Medidas de Dispersión

Medidas de dispersión de las calificaciones obtenidas por los estudiantes encuestados:
Desviación típica: 3,6705 puntos. Varianza: 13,4725 puntos. Coeficiente de variación: 56,8673%

Interpretación: en los once (11) estudiantes, la nota que aparece con más reincidencia es 06 puntos. El valor promedio es 06,45 puntos; y dado que el número de la muestra es impar e igual a 11, se tiene que en la posición seis ordenadas las calificaciones en orden ascendente, está la calificación central, que es igual 06 puntos. En este orden de ideas, es de observar que los valores de mediana y moda coinciden, de la misma forma, que se encuentra la media aritmética en ese valor prácticamente, lo que implica que las calificaciones obtenidas por los estudiantes presentan una distribución simétrica, ya que hay igual número de datos a lado y lado de la media, y que los valores obtenidos están alrededor de ese valor, si se distribuyesen las puntuaciones en partes iguales. Las calificaciones tienden en promedio a dispersarse en 3,6705 puntos con respecto a la media. Se observa que el valor de la varianza es de 13,4725 puntos^2. La variación del grupo con respecto a su promedio es de 56,8673%, por ser un valor relativamente alto se puede concluir que los datos de la serie se encuentran dispersos.

4.4 Análisis ítem por ítem.

A continuación se expone las conclusiones de los resultados obtenidos a través de la aplicación del instrumento y su contextualización en cuánto al desenvolvimiento particular de los estudiantes, en cada ítem, haciendo énfasis en los hallagos encontrados, sobre los errores que cometieron de acuerdo a la taxonomía de Astolfi, en los contenidos de límite de funciones.

Dimensión 1: Conceptual.
Indicador 1: Límite de una función.

Ítem Nº 1 . *La definición formal de Límite se escribe de la siguiente manera*

	a.	$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \delta < \lvert x-a\rvert < 0 \therefore \lvert f(x)+b\rvert < \epsilon$	Justificación:
	b.	$\lvert F(x)+B\rvert < \epsilon \leftrightarrow 0 < \lvert X-A\rvert < \delta$	
	c.	$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow 0 < \lvert f(x)-L\rvert < \epsilon \therefore 0 < \lvert x-a\rvert < \delta$	
	d.	$a < \lvert f(x)-b\rvert \leq \epsilon \therefore b < \lvert x-a\rvert < \delta$	
	e.	$a \leq \lvert f(x)\rvert \leq \alpha \leftrightarrow b < \lvert x-a\rvert < \delta$	

Tabla N°1: Distribución de Frecuencias del Ítem N°1

Respuesta	f	%
Correctas	5	45,45%
Incorrectas	5	45,45%
No contesto	1	9,09%
Total	11	100%

Tabla N°1.1: Errores cometidos Ítem N°1

Error	Justificación	f	%
E_1	**Sujeto 5:** (b) porque en la definición dice como hay que hacer.	1	9,09%
E_3	**Sujetos 4, 6, 7 y 9:** (a) el 4 y el 6 por definición de límite, el 7 escribe "la respuesta es la letra" y el 9 no da justificación.	4	36,36%
Total		5	45,45%

Gráfico N° 3:

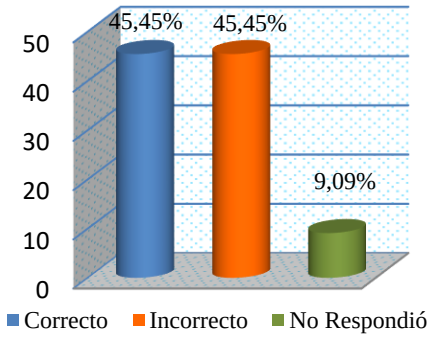
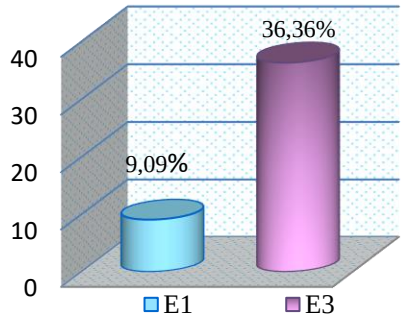


Gráfico N° 3.1:



Fuente: López y Sarmiento (2014)

Interpretación: Se puede evidenciar en el gráfico N°3 y N° 3.1, que el 45,45% de los estudiantes contestó correctamente, por lo que poco menos de la mitad de los encuestados domina la definición formal de límite y su representación en lenguaje algebraico. En cuanto a los errores, el 9,09% cometen el "E_1" (Errores debido a la redacción y comprensión de las instrucciones), producto de elegir opciones ilógicas, por cuanto no transponen mentalmente la representación gráfica del límite de una función a su expresión algebraica. El 36,36% comenten el "E_3" (Errores como resultado de las concepciones alternativas de los estudiantes), ya que su respuesta plantea que los valores de δ determinan los valores del ε, y no se percatan de un error en una letra; lo que es falso, ya que en la definición formal de límite el valor de "δ" a escoger para que el límite de una función cuando tiende a un valor "a" sea "L" depende de "ε". Por su parte, el 9,09% restante no emitió respuesta, lo cual según Pochulú, es el error debido a la ausencia de conocimientos previos.

Dimensión 1: Conceptual.
Indicador 2: Límite infinitos y al infinito.

Ítem Nº 2. *El módulo de la función "x" menos el número real "a" en menor que; se escribe de la siguiente manera:*

	a. $\|F(x)-A\|<\epsilon$	Justificación:
	b. $\|f(x)+a\|>b$	
	c. $\|f(x)+a\|>\epsilon$	
	d. $\|f(x)-a\|<\epsilon$	
	e. $\|x-a\|\leq\beta$	

Tabla N°2: Distribución de Frecuencias del Ítem N°2

Respuesta	f	%
Correcta	7	63,63%
Incorrecta	2	18,18%
No contestó	2	18,18%
Total	11	**100%**

Tabla N°2.1: Errores cometidos Ítem N°2

Error	Justificación	f	%
E_7	**Sujeto 2:** (c) no escribe justificación. **Sujeto 5:** (b) "Porque la definición dice como hay que hacer".	2	18,18%
Total		2	18,18%

Gráfico N° 4:

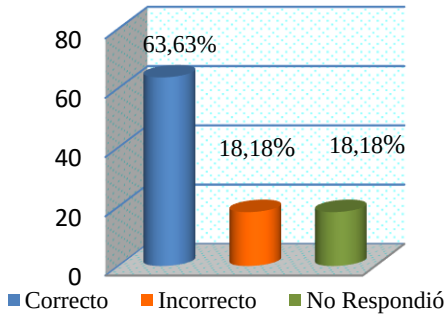
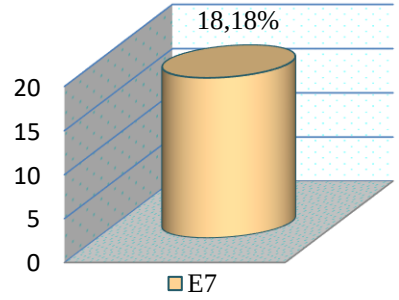


Gráfico N° 4.1:



Fuente: López y Sarmiento (2014)

Interpretación: Se puede evidenciar en el gráfico N° 4 y N°4.1, que el 63,63% de los estudiantes contestó correctamente, lo que indica que poco más de la mitad de los encuestados hizo una buena traducción del lenguaje común al lenguaje matemático. Mientras que el 18,18% de los estudiantes cometen el "E_7" (Errores que tienen su origen en otra disciplina), dado que en su justificación se observó el uso inadecuado de símbolos y fallas en el significado que se les confirió. Por otro lado el 18,18% no responden y esto según Pochulú se concibe como errores debidos a la ausencia de conocimientos previos.

Dimensión 1: Conceptual.
Indicador 3: Teorema sobre límites de funciones.

Ítem Nº 3. *El número* δ *depende generalmente de:*

	a. De valor del conjunto "a"	Justificación:
	b. Conjunto de los números naturales	
	c. Del valor asignado a "x" menos la tendencia "a"	
	d. Del valor asignado "a", "x" y "$\in$"	
	e. Conjunto de los números Reales	

Tabla N°3: Distribución de Frecuencias del Ítem N°3

Respuesta	f	%
Correctas	1	9,09%
Incorrectas	6	54,54%
No contestó	4	36,36%
Total	11	100%

Tabla N°3.1: Errores cometidos Ítem N°3

Error	Justificación	f	%
E_3	**Sujetos 3 y 10:** (c) uno por definición de límite y el otro no escribe justificación. **Sujetos 5, 7 y 11:** (e) los sujetos 5 y 11 no escriben justificación y el 7 afirma "la respuesta es la letra".	5	45,45%
E_4	**Sujeto 4:** (a) no escribe justificación.	1	9,09%
Total		5	54,54%

Gráfico N° 5:

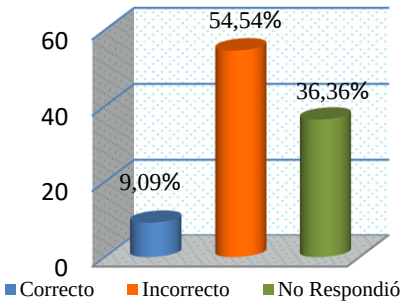
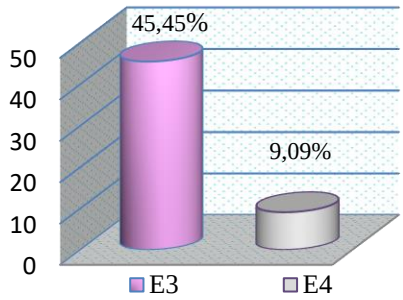


Gráfico N° 5.1:



Fuente: López y Sarmiento (2014)

Interpretación: Se puede evidenciar en el gráfico N°5 y N°5.1, que el 9,09% de los estudiantes contestó correctamente, teniendo así, que menos de la décima parte de los alumnos domina el significado del parámetro δ en la definición formal del límite. Mientras que el 45,45% de los encuestados cometen el "E_3" (Errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos), que implicar asociar, por ejercitación, el valor "δ", con un número natural o real, debido a que en los ejercicios de simple cálculo, se decía que el límite siempre tendía a esos valores. El 9,09% cometen el "E_4" (Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas), ya que responden una opción de respuesta si asociación con la teoría de la definición formal de límite. Por otro lado, el 36,36% de los estudiantes no contestan y esto según Pochulú se concibe como errores debidos a la ausencia de conocimientos previos.

Dimensión 1: Conceptual.
Indicador 4: Propiedades de calculo de límite de funciones.

Ítem Nº 4*. El límite de una función se escribe de la siguiente manera:*

		Justificación:
a.	$\lim_{x \to a} f(x) = L$	
b.	$\lim_{x \to a} (a + x) = \infty$	
c.	$\lim_{x \to a} f(x - a) = b$	
d.	$\lim_{x \to a} F(x) = B$	
e.	$\lim(x^2 + b) = 0$	

Tabla N°4: Distribución de Frecuencias del Ítem N°4

Respuestas	f	%
Correctas	7	63,63%
Incorrectas	2	18,18%
No contestó	2	18,18%
Total	11	100%

Tabla N°4.1: Errores cometidos Ítem N°4

Error	Justificación	f	%
E_3	**Sujetos 4 y 7:** (b) no escriben justificación. El 7 escribe "la respuesta es la letra".	2	18,18%
Total		2	18,18%

Gráfico N° 6:

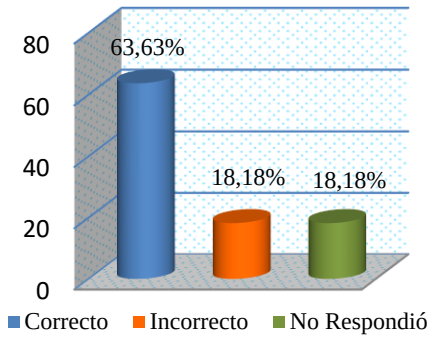
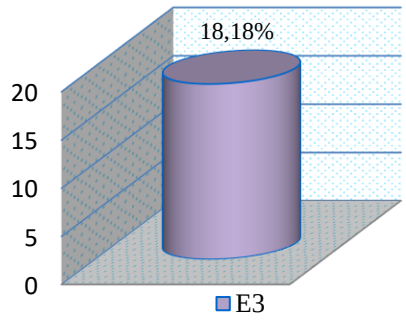


Gráfico N° 6.1:



Fuente: López y Sarmiento (2014)

Interpretación: Se puede evidenciar en el gráfico N°6 y N°6.1, que el 63,63% de los estudiantes contestó correctamente, teniendo entonces, que algo más de la mitad de la muestra identifica correctamente como se escribe el límite de una función. Mientras que el 18,18% de los estudiantes cometen el "E_3" (Errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos), ya que su respuesta $\lim_{x \to a}(a + x) = \infty$ está asociada a entender el concepto de límite con un "valor inalcanzable" o "como aproximación". Por otro lado, el 18,18% restante no emitió respuesta y esto según Pochulú se concibe como errores debidos a la ausencia de conocimientos previos.

Dimensión 1: Conceptual.
Indicador 4: Propiedades de calculo de límite de funciones.

Ítem Nº 5. *Las propiedades del Límite son:*

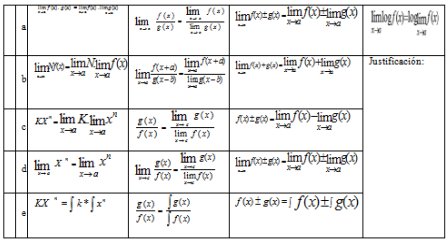


Tabla N°5: Distribución de Frecuencias del Ítem N°5

Respuesta	f	%
Correctas	4	36,36%
Incorrectas	3	27,27%
No contestó	4	36,36%
Total	11	100%

Tabla N°5.1: Errores cometidos Ítem N°5

Error	Justificación	f	%
E_4	**Sujeto 4:** (e) no escribe justificación.	1	9,09%
E_6	**Sujeto 3:** (b) no escribe justificación. **Sujeto 6:** (d) no escribe justificación.	2	18,18%
Total		3	27,27%

Gráfico N° 7:

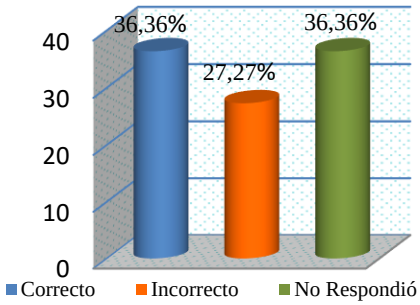
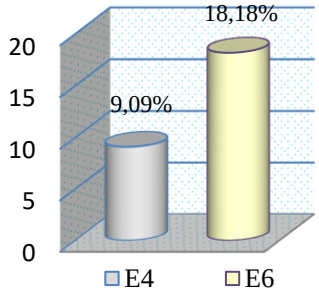


Gráfico N° 7.1:



Fuente: López y Sarmiento (2014)

Interpretación: Se evidencia en el gráfico N°7 y N°7.1, que el 36,36% de los estudiantes contestó correctamente, siendo poco más de la tercera parte de la muestra la que domina las propiedades de límite. Mientras que el 9,09% comente el "E_4" (Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas), al elegir una opción donde demuestran nula comprensión de los símbolos de límite de funciones. El 18,18% comenten el "E_6" (Errores debido a la sobrecarga cognitiva de la actividad), por el gran esfuerzo de la memoria al buscar descartar que grupos de opciones sean malas en base a elemento (s) incorrecto (s) de la lista, además de que se deben comparar con una lista de 12 propiedades. Por otro lado, el 36,36% restante no emitió respuesta y esto según Pochulú se concibe como errores debidos a la ausencia de conocimientos previos.

Dimensión 1: Conceptual.
Indicador 5: Igualdades simbolicas y formas determinadas.

Ítem Nº 6. *Usando la definición del límite de una función, demostrar que:*

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = 3$$

	a. $\lvert x-1\rvert > \frac{\beta}{2}$	Resuelve en este espacio:
	b. $\frac{\epsilon}{2} > \lvert x-1\rvert$	
	c. $\lvert\delta\rvert < \frac{\epsilon}{2}$	
	d. $\delta < \epsilon$	
	e. $x < 3$	

Tabla N°6: Distribución de Frecuencias del Ítem N°6

Respuestas	f	%
Correctas	0	0%
Incorrectas	3	27,27%
No contestó	8	72,72%
Total	11	100%

Tabla N°6.1: Errores cometidos Ítem N°6

Error	Justificación	f	%
E_4	**Sujetos 6 y 7:** (e) el primero evalúa la indeterminación y verifica que es del tipo 0/0, el otro evalúa verificado que el del tipo 0/0, y luego concluye es igual a 8.	2	18,18%
E_5	**Sujeto 10:** no responde, rompe la indeterminación con criterios algebraicos, pero no la resuelve con las llamadas demostraciones ε y δ.	1	9,09%
Total			27,27%

Gráfico N° 8:

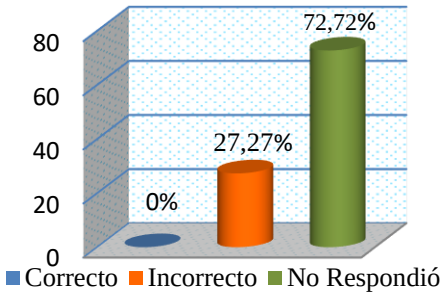
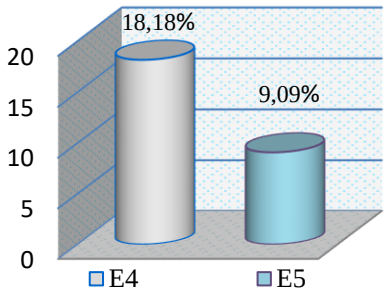


Gráfico N° 8.1:



Fuente: López y Sarmiento (2014)

Interpretación: Se evidencia en el gráfico N°8 y N°8.1, que 0% de los estudiantes contestan correctamente, por lo que ninguno de ellos empleó bien la definición formal de límite para hacer la demostración planteada. Mientras el 18,18% comente el "E_4" (Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas), debido a la gran cantidad de operaciones implicadas en el ámbito conceptual (entorno de un punto, propiedades de valor absoluto…) y en donde cualquier confusión o desconocimiento de alguna de ellos evita que lleguen a la respuesta; el 9,09% cometen el "E_5" (Errores en los procesos adoptados), a limitarse a romper la indeterminación y verificar que si se llega a esa respuesta, pero se salen del camino esperado. Por otro lado, el 72,72% restante no contesta y esto según Pochulú se concibe como errores debidos a la ausencia de conocimientos previos.

Dimensión 1: Conceptual.
Indicador 6: Límites de formas indeterminadas.

Ítem Nº 7. *Considere la función a tramos definida por:*
Diga cuál de las siguientes gráficas es la correcta:

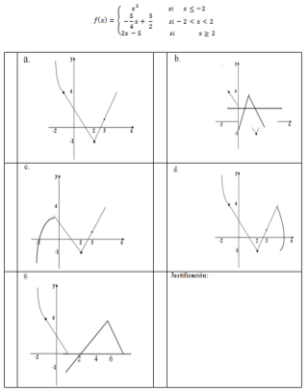


Tabla N°7: Distribución de Frecuencias del Ítem N°7

Respuetas	f	%
Correctas	3	27,27%
Incorrectas	4	36,36%
No contestó	4	36,36%
Total	11	100%

Tabla N°7.1: Errores cometidos Ítem N°7

Error	Justificación	f	%
E_6	**Sujeto 6:** (d) No escribe justificación.	1	9,09%
E_7	**Sujetos 4, 5 y 7:** (c) No escriben justificación, el 7 escribe "es la opción c porque la curva pasa por todos los puntos de la función".	3	27,27%
Total		4	36,36%

Gráfico N° 9:

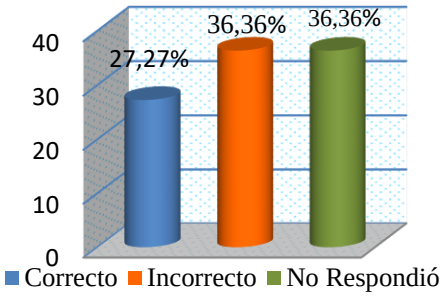
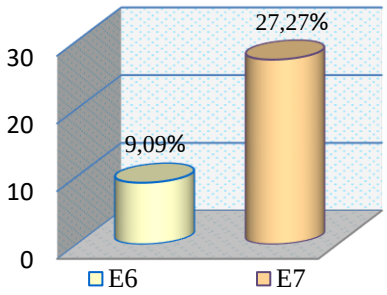


Gráfico N° 9.1:



Fuente: López y Sarmiento (2014)

Interpretación: Se evidencia en el gráfico N°9 y N°9.1, que 27,27% de los estudiantes contestó correctamente, por lo que menos de la tercera parte de la muestra, bosqueja una función por tramos. Mientras 9,09% cometen el "E_6" (Errores debido a la sobrecarga cognitiva), al no darse cuenta, que a pesar de que las primeras tres porciones de gráfica están en concordancia con su notación algebraica y el dominio establecido, la cuarta está demás, esto muestra desconcentración. Del mismo modo, el 27,27% comenten el "E_7" (Errores que tienen su origen en otra disciplina), ya que su equivocación surge de no utilizar eficazmente en cálculo lo aprendido sobre

geometría de trazados de curvas y características de curvas especiales, en asignaturas previas como lógica matemática y la matemática estudiada en Educación Media General. Por otro lado, el 36,36% restante no emitió respuesta y esto según Pochulú se concibe como errores debidos a la ausencia de conocimientos previos.

Dimensión 2: Procedimental.
Indicador 7: Límite de una función.

Ítem Nº 8. Para resolver una indeterminación $\frac{0}{0}$ donde $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ y f(x), g(x) son polinomios*:*

	a.Dividir ambos miembros de la variable con su mayor exponente.	Justificación:
	b.Se aplican artificios matemáticos como la factorización	
	c.Se resuelve mediante la regla de L´Hospital	
	d. Se aplican artificios matemáticos	
	e. Se aplican las propiedades del logaritmo	

Tabla N°8: Distribución de Frecuencias del Ítem N°8

Respueta	f	%
Correctas	4	36,36%
Incorrectas	5	45,45%
No contestó	2	18,18%
Total	11	100%

Tabla N°8.1: Errores cometidos Ítem N°8

Error	Justificación	f	%
E_6	**Sujetos 2, 5, 6, 8 y 10:** (a) No escriben justificación, el 6 escribe "por definición".	5	45,45%
Total		5	45,45%

Gráfico N° 10:

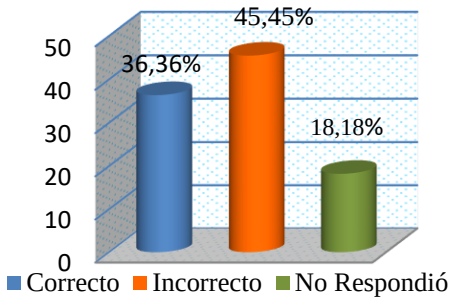
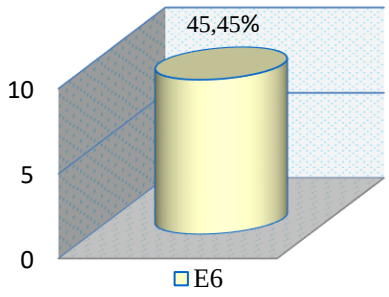


Gráfico N° 10.1:



Fuente: López y Sarmiento (2014)

Interpretación: Se puede evidenciar en el gráfico N°10 y N°10.1, que 36,36% de los estudiantes contestó correctamente, es decir deducen el algoritmo para resolver una indeterminación 0/0. Mientras que el 45,45% comenten el "E_6" (Errores debido a la sobrecarga cognitiva), dado que confunden el algoritmo para las indeterminaciones ∞/∞ con las 0/0. Por otro lado, el 18,18% restante no responde y esto según Pochulú se concibe como errores debidos a la ausencia de conocimientos previos.

Dimensión 2: Procedimental.
Indicador 8: Límites infinito y al infinito.

Ítem Nº 9. Usando la definición formar del límite de una función, pruebe que:

$$\lim_{x\to 5}(9-3x) = -6$$

		Resuelve en este espacio:
a.	$(3-x) > \frac{\varepsilon}{3}$	
b.	$\lvert x-5\rvert < \frac{\varepsilon}{3}$	
c.	$0 < \lvert x-5\rvert < \frac{\varepsilon}{3}$	
d.	$\lvert\delta\rvert < \frac{\varepsilon}{3}$	
a.	$X = \frac{15}{3}$	

Tabla N°9: Distribución de Frecuencias del Ítem N°9

Respuesta	f	%
Correctas	0	0%
Incorrectas	6	54,54%
No contestó	5	45,45%
Total	11	100%

Tabla N°9.1: Errores cometidos Ítem N°9

Error	Justificación	f	%
E4	**Sujeto 6:** (e) no escribe justificación.	1	9,09%
E5	**Sujeto 10:** no responde, simplemente evalúa el límite y llega a verificar que es igual al valor dado. **Sujeto 11:** (c) simplemente evalúa el límite y llega a verificar que es igual al valor dado.	2	18,18%
E8	**Sujeto 4 y 8:** (a) no escribe justificación. **Sujeto 5:** (b) no escribe justificación.	3	27,27%
Total		5	54,54%

Gráfico N° 11:

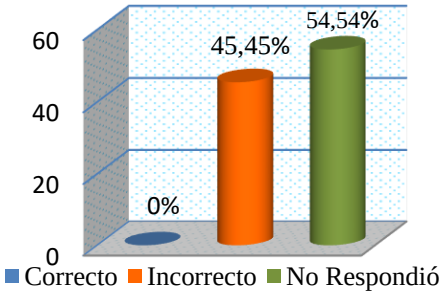
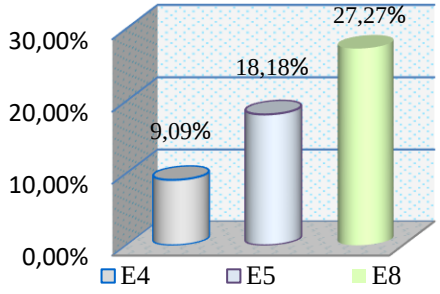


Gráfico N° 11.1:



Fuente: López y Sarmiento (2014)

Interpretación: Se evidencia en el gráfico N°11 y N°11.1, que 0% de los estudiantes contestó correctamente, no logrando emplear el algoritmo para comprobar un límite usando su definición formal. Mientras que el 9,09% comete el "E4" (Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas), debido a la gran cantidad de procedimientos asociados (entorno de un punto, propiedades de valor absoluto…) y en donde cualquier confusión o desconocimiento de alguno de ellas limita la capacidad para llegar a la respuesta; se tiene que el 18,18% cometen el "E5" (Errores en los procesos adoptados), dado que se salen del patrón de respuesta, al limitarse a resolverla rompiendo la indeterminación. Del mismo modo el 27,27% cometen el

"E_8" (Errores causados por la complejidad propia del contenido), ya que sus desaciertos se deben a que muchos de los conceptos, propiedades y abstracciones a tener en cuenta, se asocia más con los requisitos para verificar una demostración que los simples algoritmos para hacer un ejercicio. Por otro lado, el 45,45% restante no responde y esto según Pochulú se concibe como errores debidos a la ausencia de conocimientos previos.

Dimensión 2: Procedimental.
Indicador 9: Teorema sobre límites de funciones.

Ítem Nº 10. Resuelva el siguiente límite, $\lim_{x\to 0} \frac{x^4-16}{x^3-8}$ y su resultado es:

	a. $\frac{-16}{8}$	Resuelve en este espacio:
	b. 2	
	c. 4	
	d. – 2	
	e. 2,35	

Tabla N°10: Distribución de Frecuencias del Ítem N°10

Respuesta	f	%
Correctas	5	45,45%
Incorrectas	5	45,45%
No contestó	1	9,09%
Total	11	100%

Tabla N°10.1: Errores cometidos Ítem N°10

Error	Justificación	f	%
E_6	**Sujetos 2 y 9:** (d) no escribe justificación y el otro evalúa y llega a -2. **Sujetos 4, 5 y 6:** (a) no escribe justificación.	5	45,45%
Total		5	45,45%

Gráfico N° 12:

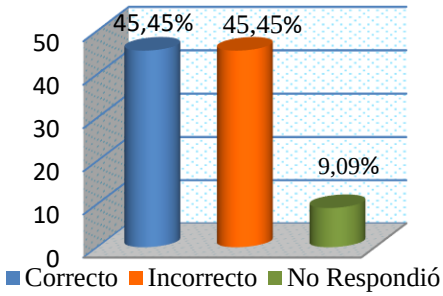
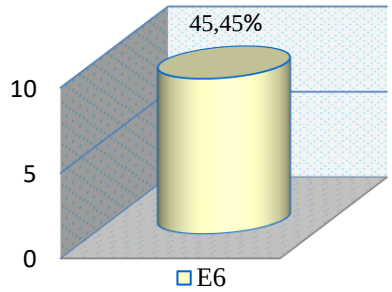


Gráfico N° 12.1:



Fuente: López y Sarmiento (2014)

Interpretación: Se puede evidenciar en el gráfico N°12 y N°12.1, que el 45,45% de los estudiantes contestó correctamente, esto indica que poco menos de la mitad de la muestra resolvió correctamente el límite propuesto. Mientras que el 45,45% de los estudiantes comenten el "E_6" (Errores debido a la sobrecarga cognitiva), dado que

estos estudiantes no mantuvieron la concentración en la pregunta, de ahí que se equivoquen al evaluar y realizar operaciones aritméticas sencillas. Por otro lado, el 9,09% restante no emitió respuesta y esto según Pochulú se concibe como errores debidos a la ausencia de conocimientos previos.

Dimensión 2: Procedimental.
Indicador 10: Propiedades del cálculo del límite de funciones.

Ítem Nº 11. Al momento de resolver un problema de límite las indeterminaciones más comunes que se pueden presentar son las siguientes:

	Justificación:
a) $\lim_{x\to a} f(x)=\frac{\infty}{\infty}; \lim_{x\to a} f(x)=1^{\infty}; \lim_{x\to a} f(x)=\infty^{\infty}; \lim_{x\to a} f(x)=\frac{0}{0}$	
b) $\frac{3}{n}$; $\frac{0}{0}$; 0^{∞}	
c) $0.\infty$; ∞^{0} ; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; 1^{∞}	
d) $0.\infty; \infty^{\infty}; \frac{\infty}{\infty}; \frac{0}{0}; -\infty+\infty; +\infty-\infty; 1^{\infty}; -\infty.\infty$	
e) $f(x+1)=\frac{k}{\infty}; f(x+1)=1^{\infty}; f(x+1)=\infty^{\infty}; f(x+1)=\frac{0}{0}$	

Tabla N°11: Distribución de Frecuencias del Ítem N°11

Respuesta	f	%
Correctas	1	9,09%
Incorrectas	9	81,81%
No contestó	1	9,09%
Total	11	100%

Tabla N°11.1: Errores cometidos Ítem N°11

Error	Justificación	f	%
E6	**Sujetos 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10 y 11:** (a) no escriben justificación, el 4 escribe "en cada caso se indetermina el límite" y el 7 escribe "porque en cada uno de los casos se indetermina" **Sujeto 6:** (d) no escribe justificación.	9	81,81%
Total		9	81,81%

Gráfico N° 13:

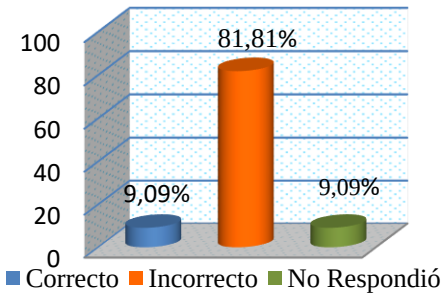
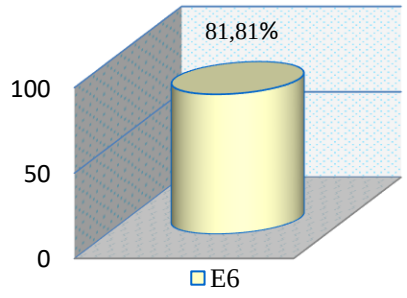


Gráfico N° 13.1:



Fuente: López y Sarmiento (2014)

Interpretación: Se puede evidenciar en el gráfico N°13 y N°13.1, que el 9,09% de los estudiantes contestó correctamente, por lo que menos de la décima parte de la muestra, identifica correctamente las indeterminaciones más comunes en el contenido de límite de funciones. Mientras que el 81,81% comenten el "E_6" (Errores debido a la sobrecarga cognitiva), ya que por tener que revisar muchas opciones en las listas

dadas, la memoria del estudiante tiende a confundirse, al tener que mantener la atención y la memoria para ir descartando en función de elementos que no sean indeterminaciones o simbologías incorrectas. Por otro lado, el 9,09% restante no contestó y esto según Pochulú se concibe como errores debidos a la ausencia de conocimientos previos.

Dimensión 2: Procedimental.
Indicador 11: Límites de formas indeterminadas.

Ítem Nº 12. Halle la solución del siguiente límite $\lim_{x\to 81} \frac{x-81}{\sqrt{x}-9}$:

	a. 18	Resuelve en este espacio:
	b. $\frac{-81}{9}$	
	c. -81	
	d. 81	
	e. 9,5	

Tabla N°12: Distribución de Frecuencias del Ítem N°12

Respuesta	f	%
Correctas	4	36,36%
Incorrectas	4	36,36%
No contestó	3	27,27%
Total	11	100%

Tabla N°12.1: Errores cometidos Ítem N°12

Error	Justificación	f	%
E_4	**Sujeto 3:** (e) realiza procedimientos ilógicos. **Sujeto 5:** (b) no escribe justificación. **Sujetos 6 y 7:** (e) uno sólo evalúa el límite y observa que es del tipo 0/0, el otro escribe "la respuesta es la letra".	4	36,36%
Total			36,36%

Gráfico N° 14:

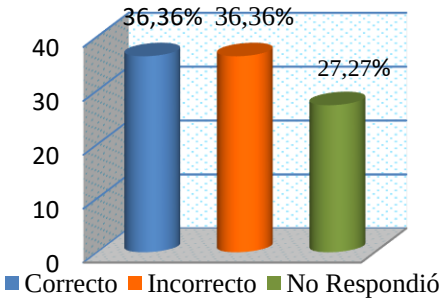
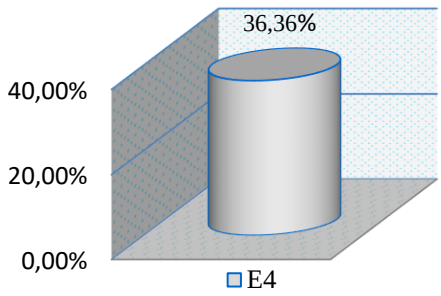


Gráfico N° 14.1:



Fuente: López y Sarmiento (2014)

Interpretación: Se puede evidenciar en el gráfico N°14 y N°14.1, que 36,36% de los estudiantes contestó correctamente, esto indica que cerca de un tercio de la muestra resolvió la indeterminación 0/0 señalada. Mientras que el 36,36% cometen el "E_4" (Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas), puesto que, se equivocan en éste ítem al no aplicar correctamente, procedimientos como la racionalización caso binomio y los productos notables, y la comprensión de que los criterios algebraicos para resolver límites de funciones racionales se pueden extender a las funciones

irracionales. Por otro lado, el 27,27% restante no responden y esto según Pochulú se concibe como errores debidos a la ausencia de conocimientos previos.

Dimensión 2: Procedimental.
Indicador 11: Límites de formas indeterminadas.

Ítem Nº 13. Obtenga el resultado del siguiente límite $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$:

	a. $\frac{1}{3}$	Resuelve en este espacio:
	b. -3	
	c. $\frac{1}{2}$	
	d. 0, 66	
	e. $\frac{2}{3}$	

Tabla N°13: Distribución de Frecuencias del Ítem N°13

Respuesta	f	%
Correctas	4	36,36%
Incorrectas	3	27,27%
No contestó	4	36,36%
Total	11	100%

Tabla N°13.1: Errores cometidos Ítem N°13

Error	Justificación	f	%
E_4	**Sujetos 2 y 11:** (e) uno no escribe justificación y el otro se limita a evaluar encontrando que es una indeterminación 0/0.	2	18,18%
E_6	**Sujeto 7:** no responde, sólo evalúa, pero en vez de sustituir -1, se equivoca y sustituye por 1, de ahí que haya obtenido como error 0,75.	1	9,09%
Total		3	27,27%

Gráfico N° 15:

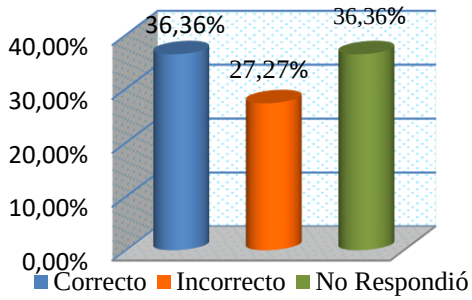
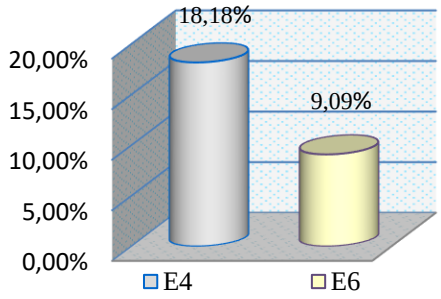


Gráfico N° 15.1:



Fuente: López y Sarmiento (2014)

Interpretación: Se evidencia en el gráfico N°15 y N°15.1, que 36,36% de los estudiantes contestó correctamente, esto indica que poco más de la tercera parte de la muestra resolvió la indeterminación 0/0 algebraica. Mientras que el 18,18% comenten el "E_4" (Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas), dado que a pesar de que bastaba una factorización algebraica, para hallar el límite, no pudieron resolverla; y un 9,09% comete el "E_6" (Errores debidos a la sobrecargas cognitiva en la actividad) al equivocarse a la hora de hacer una sustitución. Por otro lado, el 45,45% restante no responden y esto según Pochulú se concibe como errores debidos a la ausencia de conocimientos previos.

Dimensión 2: Procedimental.
Indicador 11: Límites de formas indeterminadas.

Ítem Nº 14. Obtenga el resultado del siguiente límite $\lim_{x\to\infty} \frac{x^7-x^2+1}{2x^7+x^3+300}$

	a. $\frac{1}{3}$	Resuelve en este espacio:
	b. $-\frac{1}{2}$	
	c. 0,003	
	d. $\frac{1}{2}$	
	e. $\frac{1}{300}$	

Tabla N°14: Distribución de Frecuencias del Ítem N°14

Respuesta	f	%
Correctas	3	27,27%
Incorrectas	4	36,36%
No contestó	4	36,36%
Total	11	100%

Tabla N°14.1: Errores cometidos Ítem N°14

Error	Justificación	f	%
E_4	**Sujeto 6:** no responde, evalúa el límite y observa que es del tipo ∞/∞. **Sujetos 3:** (e) no justifica. **Sujetos 7:** se limita a evaluar encontrando que es una indeterminación ∞/∞.	3	27,27%
E_6	**Sujeto 9:** No responde, sólo evalúa identificando que es del tipo ∞/∞, aplica el procedimiento correcto para romper la indeterminación, pero no vuelve a evaluar.	1	9,09%
Total		1	36,36%

Gráfico N° 16:

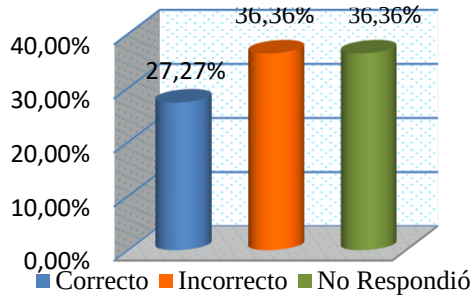
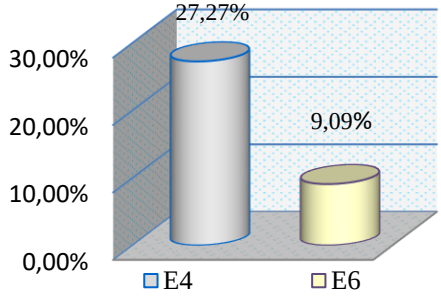


Gráfico N° 16.1:



Fuente: López y Sarmiento (2014)

Interpretación: Se evidencia en el gráfico N°16 y N°16.1, que el 27,27% de los estudiantes contestó correctamente, esto indica que menos de un tercio de la muestra resolvió la indeterminación ∞/∞. Mientras que el 27,27% de los estudiantes cometen el "E_4" (Errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas), a no desarrollar de forma completa el procedimiento de solución; el 9,09% de los estudiantes comenten el "E_6" (Errores debido a la sobrecarga cognitiva de la actividad), ya que a pesar de desarrollar un procedimiento adecuado, parece confundirse y no darse

cuenta que lo que faltaba era volver a evaluar. Por otro lado, el 63,63% restante no contestó y esto según Pochulú se concibe como errores debidos a la ausencia de conocimientos previos.

4.5 Análisis de los Resultados por Dimensión

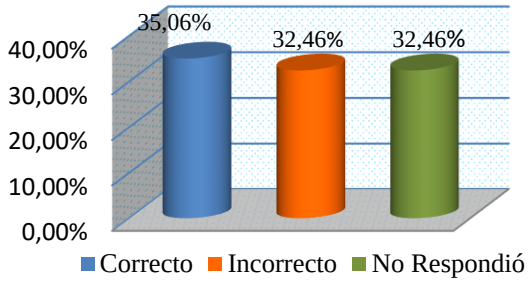
A continuación se expone las conclusiones en función de los resultados obtenidos en cada dimensión, dadas éstas por los contenidos conceptuales y procedimentales de límites de funciones, impartidos en la asignatura cálculo I, de la mención de matemática de la FaCE-UC, en el semestre 1-2013, haciendo énfasis en los hallagos encontrados, sobre los errores generales que se cometieron de acuerdo a la taxonomía de Astolfi.

Dimensión Conceptual

Tabla Nº 15: Distribución de Frecuencias de la Dimensión Conceptual

Indicadores	Ítems	Respuestas					
		Correctas		Incorrectas		No Respondidas	
		f	%	f	%	F	%
Límite de una función	**1**	5	45,45%	5	45,45%	1	9,09%
Límites infinitos y al infinito	**2**	7	63,63%	2	18,18%	2	18,18%
Teoremas sobre límites de funciones	**3**	1	9,09%	6	54,54%	4	36,36%
Propiedades de cálculo del límite de funciones	**4**	7	63,63%	2	18,18%	2	18,18%
	5	4	36,36%	3	27,27%	4	36,36%
Igualdades simbólicas y formas determinadas	**6**	0	0%	3	27,27%	8	72,72%
Límites de formas indeterminadas	**7**	3	27,27%	4	36,36%	4	36,36%
Total		**27**	**35,06%**	**25**	**32,46%**	**25**	**32,46%**

Gráfico Nº 17: Resultados obtenidos en la dimensión conceptual



Fuente: López y Sarmiento (2014)

Interpretación: La tabla N°5 y el gráfico Nº 17 muestran los resultados obtenidos en la dimensión conceptual, en la cual se examinó seis (6) indicadores; que, según las respuestas emitidas por los estudiantes encuestados, se evidencia que en promedio

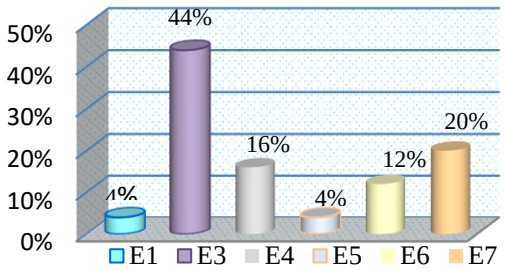
sólo el 35,06% de las preguntas fueron respondidas correctamente. Teniendo así, un 32,46% de respuestas incorrectas y un 32,46% sin contestar, esto último según Pochulú, es debido a la ausencia de conocimientos previos. En este sentido, dado que las respuestas emitidas por los estudiantes en la mayoría de los ítems de carácter conceptual no estuvieron acertadas, quedó constatado, por una parte, que existe un alto porcentaje de errores en los análisis y desarrollo de las preguntas de carácter teórico, y por otro lado, que hay un considerable grupo de los encuestados, con ausencia de conocimientos previos en los aspectos conceptuales de límite de funciones, abordados en Cálculo I, en la mención de matemática, de la FaCE-UC.

Dimensión Conceptual

Tabla Nº 16: Errores cometidos en la Dimensión Conceptual

Indicadores	Ítems	Errores Cometidos											
		E_1		E_3		E_4		E_5		E_6		E_7	
		f	%	f	%	F	%	f	%	f	%	f	%
Límite de una función	1	1	9,09%	4	36,36%	-	-	-	-	-	-	-	-
Límites infinitos y al infinito	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	18,18%
Teoremas sobre límites de funciones	3	-	-	5	45,45%	1	9,09%	-	-	-	-	-	-
Propiedades de cálculo del límite de funciones	4	-	-	2	18,18%	-	-	-	-	-	-	-	-
	5	-	-	-	-	1	9,09%	-	-	2	18,18%	-	-
Igualdades simbólicas y formas determinadas	6	-	-	-	-	2	18,18%	1	9,09%	-	-	-	-
Límites de formas indeterminadas	7	-	-	-	-	-	-	-	-	1	9,09%	3	27,27%
Total		**1**	**4%**	**11**	**44%**	**4**	**16%**	**1**	**4%**	**3**	**12%**	**5**	**20%**

Gráfico Nº 18: Errores cometidos en la dimensión conceptual.



Fuente: López y Sarmiento (2014)

Interpretación: En la dimensión conceptual se registraron seis (6) indicadores y a través de la tabla N°16 y el gráfico N°18, se observa que del total de errores que cometen los estudiantes, el que se repite con más insistencia, es el "E_3", que surge

producto de las concepciones alternativas de los alumnos, en especial cuando los estudiantes debían recordar y plantear el concepto de límite, o establecer el significado y relación de sus parámetros o simplemente su notación, seguido del "E_7" con un 20% de prevalencia, originado por deficiencias en otras disciplinas como la geometría y el uso de lenguaje algebraico, que son necesarios para que el estudiante tenga un buen desenvolvimiento en la comprensión de las ideas intuitivas de límite de funciones, y en sus aplicaciones, como el estudio de la continuidad de funciones, para la cual es imprescindible el trazado de curvas.

Luego, en tercer lugar el "E_4" que originó el 16% de las equivocaciones, al carecer éstos de ciertas operaciones intelectuales necesarias; también se evidenció, el "E_6" con 12% debido a la sobrecarga cognitiva, mostrando este grupo dificultad a la hora de analizar expresiones para verificar si se cumple propiedades de límites y la falta de concentración para el bosquejo de gráficas.

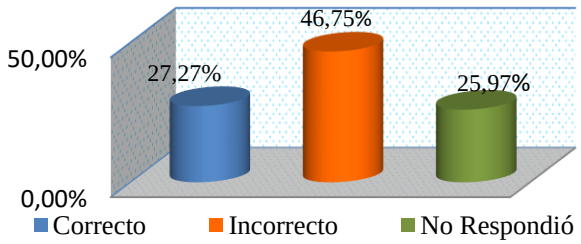
Por último, en menor medida, "E_1" y "E_5", debido a la compresión de la instrucciones y los procesos adoptados que se salen del procedimiento exigido y que se quiere verificar a través de la pregunta, y que son usados en un intento por dar una solución, en un porcentaje de 4% en cada caso.

Dimensión Procedimental

Tabla Nº 17: Distribución de Frecuencias de la Dimensión Procedimental

Indicadores	Ítems	Respuestas					
		Correctas		Incorrectas		No Respondidas	
		f	%	f	%	f	%
Límite de una función	**8**	4	36,36%	5	45,45%	2	18,18%
Límites infinitos y al infinito	**9**	0	0%	6	54,54%	5	45,45%
Teoremas sobre límites de funciones	**10**	5	45,45%	5	45,45%	1	9,09%
Propiedades de cálculo del límite de funciones	**11**	1	9,09%	9	81,81%	1	9,09%
Límites de formas indeterminadas	**12**	4	36,36%	4	36,36%	3	27,27%
	13	4	36,36%	3	27,27%	4	36,36%
	14	3	27,27%	4	36,36%	4	36,36%
Total		**21**	**27,27%**	**36**	**46,75%**	**20**	**25,97%**

Gráfico Nº 19: Resultados obtenidos en la dimensión procedimental.



Fuente: López y Sarmiento (2014)

Interpretación: La tabla N°17 y el gráfico N°19 muestra los resultados de la dimensión procedimental en la cual se trabajó con cinco (5) indicadores y según las respuestas dadas por los estudiantes de la muestra se tiene sólo el 27,27% respondió correctamente los ítems, en contraposición del 46,75% que respondió incorrectamente, lo que evidencia dificultades, en los aspectos prácticos y de ejercitación en el contenido de límite de funciones. Por otro lado el 25,97% de los alumnos no respondió, y esto según Pochulú, es debido a la ausencia de conocimientos previos. En consecuencia, se concluye que existe un significativo número de errores, y que estos están inscritos en la tipología de errores Astolfi, cuando se evalúa el desenvolvimiento de los estudiantes en ítems de carácter procedimental en el contenido de límite de funciones.

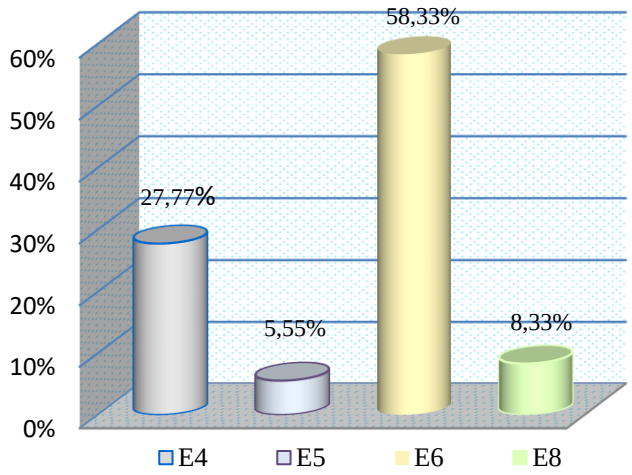
Dimensión Procedimental

Tabla Nº 18: Errores cometidos en la Dimensión Procedimental

Indicadores	ítems	Errores Cometidos							
		E_4		E_5		E_6		E_8	
		f	%	f	%	f	%	f	%
Límite de una función	**8**	-	-	-	-	5	45,45%	-	-
Límites infinitos y al infinito	**9**	1	9,09%	2	18,18%	-	-	3	27,27%
Teoremas sobre límites de funciones	**10**	-	-	-	-	5	45,45%	-	-
Propiedades de cálculo del límite de funciones	**11**	-	-	-	-	9	81,81%	-	-
Límites de formas indeterminadas	**12**	4	36,36%	-	-	-	-	-	-
	13	2	18,18%	-	-	1	9,09%	-	-
	14	3	27,27%	-	-	1	9,09%	-	-
Total		**10**	**27,77%**	**2**	**5,55%**	**21**	**58,33%**	**3**	**8,33%**

Fuente: López y Sarmiento (2014)

Gráfico Nº 20: Errores cometidos en la dimensión procedimental.



Fuente: López y Sarmiento (2014)

Interpretación: En la dimensión procedimental se registraron cinco (5) indicadores y a través de la tabla N°18 y el gráfico N°20, se observa que del total de errores que cometen los estudiantes, el que se repite con más insistencia, es el "E_6", que surge por sobrecarga cognitiva en la actividad, evidenciados por desconcentración en el desarrollo del ejercicios, con sustituciones mal hechas, o errores de signos, o confusión en resultados de reglas de signos u operaciones aritméticas, dada la extensión de la respuesta y la variedad de conocimientos que hay que tomar en cuenta. Por su parte en segundo lugar, está el "E_4" con un 27,27%, motivado por el mal uso, de los procedimientos en ciertas operaciones intelectuales, específicamente en los métodos para romper indeterminaciones 0/0 e ∞/∞. En tercer lugar, se sitúa el "E_8" que con 8,33%, ocurre por la complejidad de contenidos, evidenciando que aspectos de límite, como su cálculo usando la definición formal de límite, tiende a ser complicadas de aprender para los estudiantes que se inician en el estudio de límites, dado la gran variedad de conocimientos y abstracciones que tienen que considerarse para su solución. Por último el "E_5" con una recurrencia del 5,55%, se presenta por la utilización por parte del estudiante de procedimientos de solución distintos a los exigidos y que se está evaluando, por ejemplos cuando en vez de realizar una demostración ε-δ, opta por romper la indeterminación por procedimientos algebraicos.

4.6 Análisis general de los resultados por errores cometidos.

Una vez abordada las dimensiones, que se miden en la presente investigación sobre los errores cometidos por los estudiantes de cálculo I, en la mención de matemática de la FaCE-UC, semestre 1-2013, en el contenido de límites de funciones de acuerdo a la tipología de errores de Astolfi, se resume en una sola tabla los errores

que se cometieron tanto en la dimensión conceptual como procedimental con el fin de hacer las los análisis pertinentes sobre qué errores son los más comunes desde un punto de vista general, y las particularidades en los que se presentan.

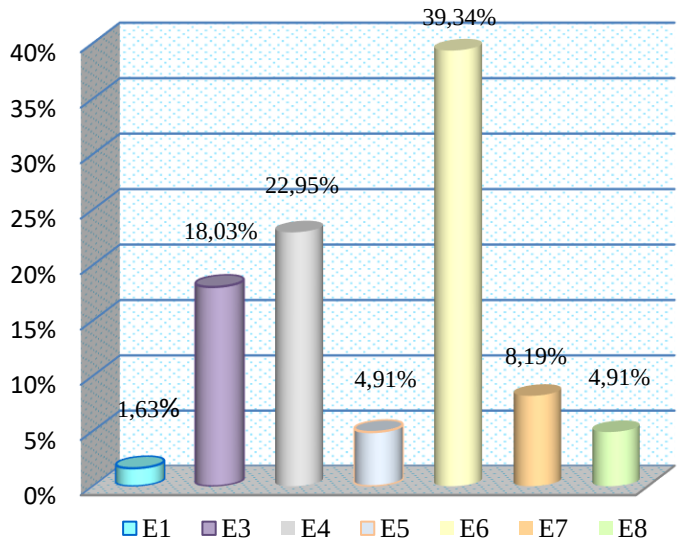
Dimensión Conceptual y Procedimental.

Tabla Nº 19: Distribución general de frecuencias de los errores cometidos

	Indicadores	ítems	Errores Cometidos													
			E_1		E_3		E_4		E_5		E_6		E_7		E_8	
			f	%	f	%	f	%	f	%	F	%	f	%	f	%
DIMENSION CONCEPTUAL	Límite de una función	1	1	9,09%	4	36,36%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Límites infinitos y al infinito	2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2	18,18%	-	-
	Teoremas sobre límites de funciones	3	-	-	5	45,45%	1	9,09%	-	-	-	-	-	-	-	-
	Propiedades de cálculo del límite de funciones	4	-	-	2	18,18%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
		5	-	-	-	-	1	9,09%	-	-	2	18,18%	-	-	-	-
	Igualdades simbólicas y formas determinadas	6	-	-	-	-	2	18,18%	1	9,09%	-	-	-	-	-	-
	Límites de formas indeterminadas	7	-	-	-	-	-	-	-	-	1	9,09%	3	27,27%	-	-
DIMENSIONPORCEDIMENTAL	Límite de una función	8	-	-	-	-	-	-	-	-	5	45,45%	-	-	-	-
	Límites infinitos y al infinito	9	-	-	-	-	1	9,09%	2	18,18%	-	-	-	-	3	27,27%
	Teoremas sobre límites de funciones	10	-	-	-	-	-	-	-	-	5	45,45%	-	-	-	-
	Propiedades de cálculo del límite de funciones	11	-	-	-	-	-	-	-	-	9	81,81%	-	-	-	-
	Límites de formas indeterminadas	12	-	-	-	-	4	36,36%	-	-	-	-	-	-	-	-
		13	-	-	-	-	2	18,18%	-	-	1	9,09%	-	-	-	-
		14	-	-	-	-	3	27,27%	-	-	1	9,09%	-	-	-	-
	Total		**1**	**1,63%**	**11**	**18,03%**	**14**	**22,95%**	**3**	**4,91%**	**24**	**39,34%**	**5**	**8,19%**	**3**	**4,91%**

Fuente: López y Sarmiento (2014)

Gráfico Nº 21: Errores cometidos.



Fuente: López y Sarmiento (2014)

Interpretación: A través de la tabla N°19 y el gráfico N°21, se observa que del total de estudiantes encuestados a través del cuestionario sobre el contenido de límites de funciones, se presentaron en mayor o menor medida, exceptuando el "E_2" referido a los hábitos escolares y la mala interpretación de las expectativas, todos los errores de la tipología de Astolfi, de la misma forma, es de destacar que todas las equivocaciones en las que cayeron los alumnos estudiados, puede explicarse haciendo uso de la mencionada lista. Por otro lado, tomando en cuenta que los 11 cuestionarios analizados hacían un total de 154 preguntas, se tiene que de ellas, 61 presentaron errores, representando el 39,61% del total, siendo esta cifra reflejo de dificultades para el aprendizaje significativo de este contenido.

Una vez expuesto lo anterior, se tiene en orden decreciente, que el error que con más frecuencia se presentó fue "E_6" resultado de sobrecarga cognitiva, con un 39,34%, en especial cuando el estudiante tenía que manejar mucha información, por ejemplo a determinar de listas de igualdades cuales si eran propiedades de límite, o en desconcentraciones, al realizar operaciones aritméticas o sustituciones, que hicieron que no pudieran resolver ejercicios acertadamente, por lo que se presentó de forma significativa en ambas dimensiones. En segundo lugar el "E_4" con 22,95% producto del desconocimiento o deficiente manejo por parte del estudiante de ciertas operaciones intelectuales, presentándose de forma importante en ambas dimensiones. En tercer lugar "E_3" con 18,03% por concepciones alternativas que estaban erradas, y en cuarto lugar "E_7" con 8,19% por desconocimiento de herramientas que se debe traer de otras disciplinas como álgebra y geometría, pero a diferencia de los anteriores estos dos últimos estuvieron presentes sólo en la dimensión conceptual.

En el mismo orden de ideas, el "E_5" y "E_8" se presenta en 4,91% de los estudiantes, motivados por errores resultado de procesos adoptados diferentes a los evaluados y

por la complejidad de ciertos procedimientos, presentándose en ambas dimensiones. Por último, "E_1" con 1,63% de prevalencia, resultado de problemas en la comprensión de las instrucciones, sólo observado en la dimensión conceptual.

4.7 Análisis general de los ítems sin respuesta.

Se presenta ahora, un análisis sobre la incidencia que tuvieron los ejercicios sin respuesta, o errores debido a ausencia de conocimientos previos, sobre el total de errores cometidos por cada ejercicio por un lado, y sobre el total de ejercicios que conformó el cuestionario administrado a los estudiantes por el otro, de acuerdo a lo planteado por los investigadores Abrate, R.; Pochulu, M. y Vargas, J. (2006), para ello se construirá la siguiente tabla.

Tabla Nº 20: Incidencia de los ítems sin respuestas

Dimensión	Indicador	Ítems	Cantidad de ejercicios propuestos en el total de cuestionarios	**Total de ejercicios sin respuesta en todos los cuestionarios**	Total de ejercicios con errores en todos los cuestionarios	Relación entre ejercicios sin respuesta y ejercicios con errores	Relación entre ejercicios sin respuestas y ejercicios propuestos
Conceptual	Límite de una función	1	11	1	5	20%	9,09%
	Límites infinitos y al infinito	2	11	2	2	100%	18,18%
	Teoremas sobre límites de funciones	3	11	4	6	66,66%	36,36%
	Propiedades de cálculo del límite de funciones	4	11	2	2	100%	18,18%
		5	11	4	3	133,33%	36,36%
	Igualdades simbólicas y formas determinadas	6	11	8	3	266,66%	72,72%
	Límites de formas indeterminadas	7	11	4	4	100%	36,36%
Procedimental	Límite de una función	8	11	2	5	40%	18,18%
	Límites infinitos y al infinito	9	11	5	6	83,33%	45,45%
	Teoremas sobre límites de funciones	10	11	1	5	20%	9,09%
	Propiedades de cálculo del límite de funciones	11	11	1	9	11,11%	9,09%
	Límites de formas indeterminadas	12	11	3	4	75%	27,27%
		13	11	4	3	133,33%	36,36%
		14	11	4	4	100%	36,36%

Fuente: López y Sarmiento (2014)

Interpretación: A través de la lectura de la tabla N°20, queda claro que la totalidad de los ítems sin contestar por cada indicador, son una proporción importante de las 154 preguntas que sumaban todos los cuestionarios, ya que al estar constituidas por 45, representan el 29,22% del total, por otro parte, si se les compara con la proporción de respuestas incorrectas, en la tabla se señala, que estas representan no menos del 20% de la suma de las últimas por cada ítem, y en algunos casos por encima del 100%, teniendo así que más son los estudiantes que no contestan que los que lo hacen con errores, en algunas de las preguntas, de ahí que la ausencia de conocimientos previos, o no adquiridos de forma significativa, tuvo una gran influencia en las bajas calificaciones que obtuvieron los estudiantes en el cuestionario en general, el cual en la estadística descriptiva se señaló que el promedio había sido de 06,45 puntos. Lo ítems en los que los estudiantes, se abstuvieron de responder más, fue el ítems 6, con 72,72%, representado alrededor de dos veces y media el número de las respuestas incorrectas, y en la que se tenía que verificar el valor de un límite usando una demostración ε-δ, seguido del ítems 5 y el ítems 13, con 36,36%, estando por encima del números de estudiantes que respondió erradamente, siendo la ausencia de respuesta 133,33% más recurrente que el error, y en donde se evaluaba las propiedades de límite de funciones y el rompimiento de una indeterminación 0/0 algebraica para la cual había que factorizar. Por su parte, en el cuarto lugar, se tiene el ítems 9, en donde dejaron de responder el 45,45%, estando con 83,33%, en un valor cercano a la paridad con respecto a los que no aceptaron la respuesta, y el cual se pedía la resolución de un límite usando una la definición formal de límite, es decir a través de una demostración ε-δ.

CONCLUSIONES

El presente estudio, que tuvo como objetivo el análisis de los errores que cometen los estudiantes en el contenido de límite de funciones en la asignatura cálculo I, de la mención de matemática, en la FaCE-UC, semestre 2-2013, según la taxonomía de Astolfi, y para el cual se tomó el cuestionario de respuestas cerradas elaborado por Izaguire y Martínez (2011), sobre límites de funciones, en donde se le anexó la solicitud de justificación de la respuesta a los integrantes que conformarían la muestra, constó 14 ítems de opción simple, distribuidos en dos dimensiones, conceptual y procedimental, permitiendo obtener las siguientes conclusiones, a través de análisis e interpretación de los resultados de cada uno de los once (11) estudiantes que participaron.

En cuanto a la estadística descriptiva, se tiene que en general los estudiantes demostraron dificultades a la hora de responder ítems que versaban sobre límites de

funciones, dado que el promedio o media aritmética de la prueba fue de 06,45 puntos, con una moda de 06 puntos, y una mediana de 06 puntos, en cuanto a la separación de las puntuaciones con respecto a la media, se obtuvo una desviación típica de 3,67 puntos, una varianza de 13,47 puntos y un coeficiente de variación de 56,86%. Todo esto con un porcentaje de aprobados, en cuanto a puntuación final, de sólo 27,27%, o en número sólo tres de los 11 estudiantes que constituyeron la muestra, siendo la calificación más alta 13 puntos.

En relación al desenvolvimiento de los estudiantes en los 14 ítems del instrumento, se tiene, dado que la sumatoria de las preguntas de todos los cuestionarios es 154, que 48 ítems fueron respondidos acertadamente representando el 31,16%, mientras 61 ítems presentaron errores, constituyendo el 39,61% y no se contestaron 45 representando el 29,22%, siendo mal trabajados o no resueltos poco más de dos terceras partes de todos las preguntas. Por su parte, entre los errores que con más frecuencia aparecieron, en orden decreciente se tiene el "E_6" con 39,34% de prevalencia, referido a los efectos de la sobrecarga cognitiva en el estudiante, el "E_4" con 22,95% originado por mal uso o desconocimiento de alguno de los procedimientos en las operaciones intelectuales implicadas en las preguntas, destacando que estos dos errores, se presentan tanto en la dimensión conceptual como procedimental, y en tercer lugar "E_3" con 18,03%, motivado por concepciones alternativas y erradas que presentan los estudiantes en este contenido, y lo llevan a malas interpretaciones de la teoría de límites de funciones.

En el mismo orden de ideas, desde el punto de vista de cada dimensión, en la dimensión conceptual, en donde había siete ítems, que suman 77 preguntas, hubo un 35,06% de aciertos, mientras que los desaciertos fue de 32,46% y se dejaron de contestar el mismo porcentaje de ítems, siendo la pregunta que más dificultad presentó para la muestra, el ítem 3, referente a la interpretación de los símbolos ε-δ en la definición formal de límite con un 54,54% de errores, seguido de ítem 1, en donde se evaluaba el conocimiento de la definición simbólica de límite de funciones, con 45,45% de errores, y en tercer lugar el bosquejo de una gráfica, con 36,36% de

errores. En cuanto a la ausencia de conocimientos previos este se hizo mayor en el ítems 6 con 72,72%, que buscaba verificar el valor de un límite a través de una demostración ε-δ, seguido de los ítems 3, 5 y 7 en donde en cado uno el 36,36% de los estudiantes no supo como proponer una solución o respuesta, estos versaban sobre la relación y significado de los parámetros ε-δ, la identificación de las propiedades de límite de funciones y el bosquejo de gráficas.

En cuanto a los errores en la dimensión conceptual, se tiene que 44% de los estudiantes, comente el "E_3", motivo de concepciones alternativas y erradas sobre aspectos de límite de funciones seguido del "E_7", que con 20%, es originado por conocimientos no adquiridos de forma significativa de otras disciplinas y que son prerrequisito para el contenido de límites de funciones, como son el trazado de curva y el uso del lenguaje algebraico, por último el tercer error en prevalencia de esta dimensión es "E_4" que con 16%, surge por falta de dominio de ciertas operaciones intelectuales.

Con respecto, a la dimensión procedimental, en donde había siete ítems, que suman 77 preguntas, se tiene que se presentó sólo un 27,27% de respuestas correctas, mientras que el 46,75% de las respuestas tuvieron errores y el 25,97% no se contestaron, observando que el ítems en donde se evidenció más dificultad en los estudiantes fue el ítems 11 con 81,81% de errores, que versaba sobre la lista de las indeterminaciones más comunes que se presentan en el estudio de límites de funciones, en segundo lugar el ítems 9 con 54,54% de errores, y en donde se buscaba que el estudiante calculara un límite haciendo uso de la demostraciones ε-δ, seguido del ítems 8 y 10, que con 45,45% cada uno, evaluaban el algoritmo para romper indeterminaciones 0/0 y la sustitución y puesta en práctica de las propiedades de límite de funciones. Por otro lado, la ausencia de conocimientos previos se verifica en mayor proporción en el ítems 9 con 45,45%, seguido de los ítems 13 y 14, con 36,36% y que abordaban la competencia del estudiantes para romper indeterminaciones 0/0 e ∞/∞. En el mismo orden de ideas, considerando los errores observados, el que con más insistencia se presentó es el "E_6" con 58,33% producto de la sobrecarga cognitiva, seguido del "E_4" con 27,77%, resultado del mal manejo de

desconocimiento de procedimientos en las operaciones intelectuales implicadas en un ejercicio y en "E_8" con 8,33%, dada la complejidad propia de algunos aspectos del contenido de límite de funciones.

RECOMENDACIONES

Una vez dadas las conclusiones a las que permitió llegar la presente investigación, en cuanto a los errores cometidos por los estudiantes en el contenido de límite de funciones de acuerdo a la tipología de Astolfi, en cálculo I, de la mención de matemática, en la FaCE-UC, semestre 2-2013, y que son susceptibles a un tratamiento didáctico, se hace necesario presentar las siguientes recomendaciones, tanto al docente como al estudiantes en función de contribuir en la mejora del proceso de enseñanza aprendizaje de límites de funciones en la asignatura:

- ✓ Inculcar en el estudiantes, la necesidad de usar estrategias de aprendizaje, de repaso y de organización, como el uso de fichas, esquemas, algoritmos, entre otros, que le permitan manejar la información que se quiere aprender de forma más eficiente, y de esa forma disminuir los errores producto de la sobrecarga cognitiva ""E_6" que fue el que más prevaleció, de la misma forma, insistir en la importancia de mantener la concentración y revisar los cálculos realizados una vez llegado al final del ejercicio.
- ✓ Dar en las clases, herramientas para que los estudiantes puedan hacer comprobaciones de las soluciones obtenidas, por ejemplo verificar el valor obtenido de un límite a través de tablas, o sustituir puntos arbitrarios del bosquejo de una gráfica para verificar si realmente fue bien trazada.
- ✓ Por medio de la realización de diagnósticos, verificar en un principio de cada contenido si los estudiantes dominan los prerrequisitos para trabajar; ya que esto origina el "E_4" y el "E_7" por ejemplo, si se va a estudiar la resolución o comprobación de límites por las llamadas demostraciones ε-δ, verificar si los estudiantes resuelven inecuaciones, conocen las propiedades de valor absoluto, el concepto de entorno de un punto, para considerarlo en sus clases, de la misma forma,

que no se puede entender por ejemplo el estudio de la continuidad de una función sin no se sabe graficar o no se comprende el concepto de límite.

- ✓ Es importante que el docente y el estudiantes afiance tanto los aspectos teóricos como prácticos, del contenido de límite de funciones, ya que quedó evidenciado que las concepciones alternativas erradas "E_3" son una causa importante de los errores que cometen los estudiantes, en especial en donde tenía que hacer uso de la definición formal de límite y de las demostraciones ε-δ.
- ✓ Asimismo, en general, considerar siempre los errores que cometen los estudiantes más allá de la simple corrección y aclaración del camino correcto, sino utilizarlo como una herramienta que permita comprender los obstáculos y dificultades que presenta el estudiante para asimilar un determinado aspecto, usando ésta información para buscar la técnica que mejor permita al estudiante aprender, de acuerdo a lo planteado por Astolfi.

REFERENCIAS

Astolfi, J. (2003). *El error, un medio para enseñar*. (2º ed.). España: Diada Editora.

Maldonado, K. (s.f). Metodología. Manual teórico práctico para tesistas, asesores, tutores y jurados de trabajos de investigación y ascenso.

Bachelard, G. (2000). *La formación del espíritu científico.* (23º ed.). Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo. México: Siglo veintiuno editores.

Burgos, C. (2011). Hacia una teoría educativa desde el pensamiento de Karl Popper. Memorias del XII Congreso Internacional de Teoría de la Educación 2011. Recuperado de http://www.cite2011.com/Comunicaciones/Escuela/145.pdf

Cauro, M. (2007). *Resultados de Prueba de Aptitud Académica son alarmantes*. Recuperado el 6 de mayo de 2012 de http://www.venelogia.com/archivos/1879/

Chacín, Rosanna. (2008). Factores asociados al deterioro curricular y la calidad de la educación superior. [Versión electrónica]. *Revista Docencia Universitaria.* Vol. IX, N° 1, 31-54. Recuperado el 09 de noviembre de 2013 de http://www.ucv.ve/fileadmin/user_upload/sadpro/Documentos/docencia_vol9_n1_2008/5_ART._N__2__Rosanna_Chac%C3%ADn.pdf

Colina, P. (2006). Errores propios del aprendizaje de los alumnos cursantes de la asignatura cálculo I. Recuperado el 25 de octubre de 2013 de http://tesis.luz.edu.ve/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=400

Corral, Y. (2012). *Algunas normas para la elaboración de trabajos de investigación y de grado y tesis doctorales.* Manuscrito no publicado. Valencia, Venezuela. [Correo electrónico]. Recuperado de corral.seminariosinvestigacion@gmail.com

Daintith, J. (2005). Diccionario de matemáticas. Bogotá: Grupo Editorial Norma Educativa.

De Canha, G. y Escalona, K. (2013). *Registro matemático empleado por los estudiantes de Cálculo I, en el contenido de inecuaciones con base a los planteamientos de Clare Lee. Caso: Tercer Semestre de Educación Mención Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo Período electivo 1-2013*. [Trabajo de grado]. Universidad de Carabobo. Facultad de Ciencias de la Educación. Bárbula, Venezuela.

Delors, J. *La educación encierra un tesoro.* Santillana: Ediciones UNESCO. Recuperado de http://www.unesco.org/education/pdf/DELORS_S.PDF

Díaz, F. y Hernández, G. (2010). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista.* (3er ed.). Mexico: McGraw-Hill Interamericana.

Domínguez, J. y Oviedo, M. (2009). *Errores cometidos por los estudiantes en los conocimientos previos del contenido funciones para el aprendizaje de la asignatura Calculo I en el Tercer Semestre de la Mención Matemática en la Facultad de Ciencias de la educación de la Universidad de Carabobo.* [Trabajo de grado]. Universidad de Carabobo. Facultad de Ciencias de la Educación. Bárbula, Venezuela.

García, C. (2012). Polarización y tensiones en la educación superior venezolana. [Versión electrónica]. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*. Vol. 3, Núm. 7, 3-22. Recuperado el 09 de noviembre de 2013 de http://ries.universia.net/index.php/ries/article/view/230/pdf_19

García, M. y Flores, C. (2012). Una propuesta para contribuir a la comprensión de la derivada. [Resumen]. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Comité latinoamericano de matemática educativa. Colegio mexicano de matemática educativa A.C. Recuperado el 09 de noviembre de 2013 de http://www.clame.org.mx/documentos/alme25.pdf

Guevara, A. (2012, julio 18). 60% de estudiantes mirandinos tiene deficiencias en matemáticas. *El Nacional*. Ciudadanos. 5.

Hernández R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación* (5º ed.). Editorial McGraw-Hill. Interamericana.

Izaguire, Y. y Martínez, Y. (2011). *Errores que cometen los estudiantes de la mención matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo al manejar el contenido de límite.* [Trabajo de grado]. Universidad de Carabobo. Facultad de Ciencias de la Educación. Bárbula, Venezuela.

La Unesco ¿Qué es? ¿Qué hace? – UNESCO. (2003). Recuperado el 18 de noviembre de 2008 de www.comisionunesco.cl/Unesco/Documentos/Acercadelaunesco/Que_es_la_UNESCO.pdf-

Manzalba, Y. y Sánchez, J. (2013). *Representaciones Semióticas del contenido límite de funciones empleadas por estudiantes de Cálculo I de la FaCE-UC según la perspectiva teórica de Duval*. [Trabajo de grado]. Universidad de Carabobo. Facultad de Ciencias de la Educación. Bárbula, Venezuela.

Méndez, G. (2012, julio 18). Evidencian fallas en el proceso educativo venezolano. *El Universal.* 1-5.

Meneses, D. (2012, octubre 16). Déficit de docentes alcanza el 40% en las áreas de ciencia. *El Universal.* 1-5.

Moreira, M. y Massoni, N. (2009). Bases Epistemológicas para el Profesor Investigador en Enseñanza de las Ciencias. Recuperado el 16 de noviembre de 2013 de http://www.if.ufrgs.br/~moreira/Subsidios9.pdf

Navarro, C., Maldonado, E. y López, E. (2012). Un estudio de investigaciones cognitivas acerca del concepto de límite. El caso de habla hispana. *Matemática Educativa. Comité latinoamericano de matemática educativa colegio mexicano de matemática educativa A.C.* VOL. 25, 171-178. Recuperado el 09 de noviembre de 2013 de http://www.clame.org.mx/documentos/alme25.pdf

Orozco, L. (2010). Calidad académica y relevancia social de la educación superior en América Latina. [Versión electrónica]. *Revista Iberoamericana de Educación Superior*. Núm. 1 Vol. I, 24-36. Recuperado el 09 de noviembre de 2013 de http://www.mppeu.gob.ve/web/uploads/documentos/documentosVarios/pdf10-08-2010_09:57:33.pdf

Popper, K. (1991). *Conjeturas y refutaciones. El desarrollo del conocimiento científico.* (3era ed.). Barcelona: Editorial Paidós Básica.

Popper, K. (1980). La lógica de la investigación científica. (5era ed.). Madrid: Editorial Tecnos.

Principios Fundamentales. Recuperado el 01 de febrero de 2014 de http://www.unesco.org/new/es/education/themes/leading-the-international-agenda/right-to-education/normative-action/fundamental-principles/.

Abrate, R. Pochulu, M. y Vargas, J. (2006). *Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad.* Recuperado el 08 de junio de 2014 de http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf.

Ramírez, G. y Rivas, N. (2009, agosto). *Análisis de los errores que cometen los estudiantes en el contenido de inecuaciones en la asignatura Cálculo I de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo.* [Trabajo de grado]. Universidad de Carabobo. Facultad de Ciencias de la Educación. Bárbula, Venezuela.

Rubí, G., Moreno, M., Pou, S. y Jordán, A. (2010-2011). Problemática persistente en el aprendizaje de Cálculo. Caso de la Facultad de Ciencias, UABC. *Revista El Cálculo y su en Enseñanza.* (Volumen II) 1-10. Recuperado el 25 de octubre de 2013 de http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/index.php?vol=2&index_web=8&index_mgzne

Ruíz, C. (2002). Instrumentos de Investigación Educativa. Procedimientos para su Diseño y Validación. (2º ed.). Venezuela: Cideg.

Sanmartí, N. (s.f.). La *evaluación vista como un proceso de autorregulación. En prensa, Publicaciones MEC.* Recuperado el 26 de octubre de 2013 de http://www.cneq.unam.mx/programas/anteriores/curso_taller/eva/material/archivos/ArtEvaluacion.pdf

Universidad de Carabobo. Facultad de Ciencias de la Educación. (FaCE-UC). (2003). Programa Analítico de la asignatura Cálculo I elaborado por Ascanio, R. y Prospero, G. Bárbula-Estado Carabobo.

Urdaneta, L. (2013). URBE dentro de las 300 mejores Universidades de América Latina. Recuperado el 23 de noviembre de 2013 de http://www.campus.urbe.edu/academia/285-universidades/2442-urbe-dentro-de-las-300-mejores-universidades-de-america-latina

Valdivé, C. (2008). Los infinitesimales en el Cálculo: Un punto de vista sistémico. *Revista Educere, Año 12. Nº42. 531-538.* Recuperado el 30 de agosto de 2010 de www.saber.ula.ve/bitstream/123456789/26310/26310/1/articulo13.pdf - Similares

Vrancken, S. Gregorini, M. Engler, A. Müller, D. y Hecklein, M. (s.f.). *Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite.* Recuperado el 26 de octubre de 2013 de http://www.soarem.org.ar/Documentos/29%20vrancken.pdf

Ziegler, K. (2009). Enseñanza del cálculo. *El espectador*. Recuperado el 02 de noviembre de 2013 de http://www.elespectador.com/columna160520-ensenanza-del-calculo

Anexos

Anexo (A)

Cuadro 7: Resumen estadístico de Cálculo. Períodos 1S-2012 y 2S-2012

Período	Sección	Nº de estudiantes	Aprobados	Aplazados	No curso (se aplica por inasistencias o por abandono - equivale a 01)	Promedio
1S-2012	11	13	06	03	04	Sólo con aprobados y aplazados: 10,44 puntos Total 07,53 puntos
	12	27	14	05	08	Sólo con aprobados y aplazados: 11,52 puntos Total 08,40 puntos
	71	8	05	02	01	Sólo con aprobados y aplazados: 12,14 puntos Total 10,75 puntos
	90	21	08	02	11	Sólo con aprobados y aplazados: 09,06 puntos Total 05,09 puntos
2S-2012	11	14	04	04	06	Sólo con aprobados y aplazados: 07,50 puntos Total 04,71 puntos
	90	22	05	03	14	Sólo con aprobados y aplazados: 08,75 puntos Total 03,77 puntos

Nota. Síntesis de los autores a partir de datos del Subsistema de Control Académico Integral (SuCAI FaCE).

Anexo (B)

Categorías de Estudio

La categoría considerada para la identificación de los errores que cometen los estudiantes en los contenidos de Cálculo I de la mención de matemática, en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo – Semestre 2-2013, son según la Taxonomía de Astolfi son:

Categoría 1: Errores en el aprendizaje

Cuadro 8: Tabla de operacionalización de las variables

Objetivo de la Investigación	Variables	Definición	Dimensiones	Indicadores	Ítem	Instrumento
Analizar los errores que cometen los estudiantes en el contenido de límite de funciones en Cálculo I, de la mención de matemática, en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo – Semestre 1-2013, según la Taxonomía de Astolfi.	Errores en el manejo del contenido límite de una función.	Los errores se presentan para identificar las dificultades que presentan los estudiantes en los contenidos conceptuales y procedimentales del contenido de Límite. Astolfi (1999),	Conceptual	• Límite de una función.	1	**Cuestionario**
				• Límites infinitos y al infinito.	2	
				• Teoremas sobre límites de funciones.	3	
				• Propiedades de cálculo del límite de funciones.	4, 5	
				• Igualdades simbólicas y formas determinadas	6	
				• Límites de formas indeterminadas	7	
			Procedimental	• Límite de una función.	8	
				• Límites infinitos y al infinito.	9	
				• Teoremas sobre límites de funciones.	10	
				• Propiedades de cálculo del límite de funciones.	11	
				• Límites de formas indeterminadas	12 13 y 14	

Nota. Tomado de _____

Anexo (C)

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÒN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
MENCIÓN: MATEMÁTICA
CÁTEDRA: DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

Instrucciones:

Lea cuidadosamente cada uno de los ítems planteado, y seleccione marcando con una **"X"** la opción correcta.

Seleccione una sola opción, ya que no se tomará en cuenta los ítems que tengan más de una opción como respuesta. Por favor no deje ninguna pregunta sin contestar y justifique su respuesta.

1. La definición formal de Límite se escribe de la siguiente manera

	a.	$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \delta < \lvert x-a\rvert < 0 \therefore \lvert f(x)+b\rvert < \in$	Justificación:
	b.	$\lvert F(x)+B\rvert < \in \leftrightarrow 0 < \lvert X-A\rvert < \delta$	
	c.	$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow 0 < \lvert f(x)-L\rvert < \in \therefore 0 < \lvert x-a\rvert < \delta$	
	d.	$a < \lvert f(x)-b\rvert \leq \in \therefore b < \lvert x-a\rvert < \delta$	
	e.	$a \leq \lvert f(x)\rvert \leq \alpha \leftrightarrow b < \lvert x-a\rvert < \delta$	

2. El módulo de la función "x" menos el número real "a" en menor que $\in$; se escribe de la siguiente manera:

	a.	$\lvert F(x)-A\rvert < \in$	Justificación:
	b.	$\lvert f(x)+a\rvert > b$	
	c.	$\lvert f(x)+a\rvert > \in$	
	d.	$\lvert f(x)-a\rvert < \in$	
	e.	$\lvert x-a\rvert \leq \beta$	

3. El número δ depende generalmente de:

	a. De valor del conjunto "a"	Justificación:
	b. Conjunto de los números naturales	
	c. Del valor asignado a "x" menos la tendencia "a"	
	d. Del valor asignado "a" , "x" y "$\in$"	
	e. Conjunto de los números Reales	

4. El límite de una función se escribe de la siguiente manera

	a. $Limf(x) = L$ $x \to a$	Justificación:
	b. $Lim(a + x) = \infty$ $x \to a$	
	c. $Limf(x - a) = b$ $x \to a$	
	d. $LimF(x) = B$ $x \to a$	
	e. $Lim(x^2 + b) = 0$	

5. Las propiedades del Límite son:

a	$\lim_{x\to a} f(x).g(x) = \lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$	$\lim_{x\to a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to a} \log f(x) = \log \lim_{x\to a} f(x)$
b	$\lim_{x\to a} Nf(x) = \lim_{x\to a} N.\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} \frac{f(x+a)}{g(x-b)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x+a)}{\lim_{x\to a} g(x-b)}$	$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$	Justificación:
c	$KX^n = \lim_{x\to a} K.\lim_{x\to a} x^n$	$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to c} g(x)}{\lim_{x\to c} f(x)}$	$f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$	
d	$\lim_{x\to a} X^n = \lim_{x\to a} x^n$	$\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to c} g(x)}{\lim_{x\to c} f(x)}$	$\lim_{x\to a} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$	
e	$KX^n = \int k * \int x^n$	$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\int g(x)}{\int f(x)}$	$f(x) \pm g(x) = \int f(x) \pm \int g(x)$	

6. Usando la definición del límite de una función, demostrar que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = 3$$

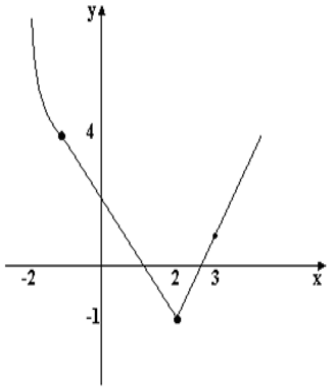
	a. $\lvert x-1\rvert > \frac{\beta}{2}$	Resuelve en este espacio:
	b. $\frac{\in}{2} > \lvert x-1\rvert$	
	c. $\lvert\delta\rvert < \frac{\in}{2}$	
	d. $\delta < \in$	
	e. $x < 3$	

7. Considere la función a tramos definida por:

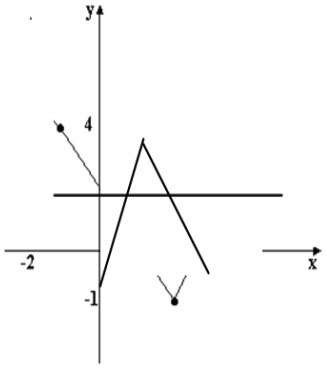
Diga cuál de las siguientes gráficas es la correcta:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq -2 \\ -\frac{5}{4}x + \frac{3}{2} & si \quad -2 < x < 2 \\ 2x - 5 & si \quad x \geq 2 \end{cases}$$

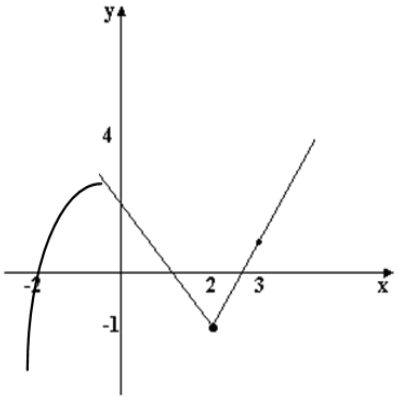
a.



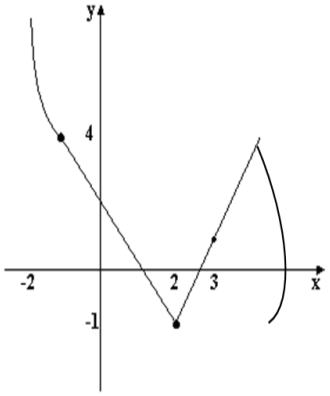
b.



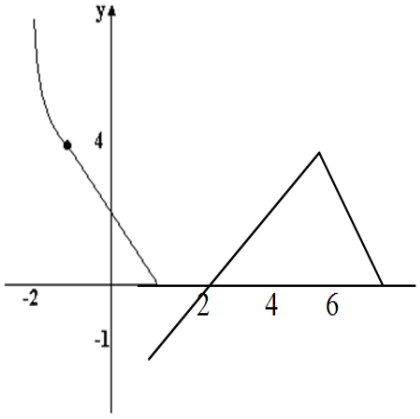
c.



d.



e.



Justificación:

8. Para resolver una indeterminación $\frac{0}{0}$ donde $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ y f(x), g(x) son polinomio

	a. Dividir ambos miembros de la variable con su mayor exponente.	Justificación:
	b. Se aplican artificios matemáticos como la factorización	
	c. Se resuelve mediante la regla de L´Hospital	
	d. Se aplican artificios matemáticos	
	e. Se aplican las propiedades del logaritmo	

9. Usando la definición formar del límite de una función, pruebe que:

$$\lim_{x\to 5}(9-3x)=-6$$

	a. $(3-x)>\frac{\in}{3}$	Resuelve en este espacio:
	b. $\lvert x-5\rvert<\frac{\in}{3}$	
	c. $0<\lvert x-5\rvert<\frac{\in}{5}$	
	d. $\lvert\delta\rvert<\frac{\in}{3}$	
	e. $X=\frac{15}{3}$	

10. Resuelva el siguiente límite, $\lim_{x\to 0}\frac{x^4-16}{x^3-8}$ y su resultado es:

	a. $\frac{-16}{8}$	Resuelve en este espacio:
	b. 2	
	c. 4	
	d. – 2	
	e. 2,35	

11. Al momento de resolver un problema de límite las indeterminaciones más comunes que se pueden presentar son las siguientes

	a) $\lim_{x\to a} f(x)=\frac{\infty}{\infty};\lim_{x\to a} f(x)=1^0;\lim_{x\to a} f(x)=\infty^\infty;\lim_{x\to a} f(x)=\frac{0}{0}$	Justificación:
	b) $\frac{3}{n};\frac{0}{0};0^\infty$	
	c) $0.\infty;\infty^\infty;\frac{\infty}{\infty};\frac{0}{0};1^\infty$	
	d) $0.\infty;\infty^\infty;\frac{\infty}{\infty};\frac{0}{0};-\infty+\infty;+\infty-\infty;1^\infty;-\infty.\infty$	
	e) $f(x+1)=\frac{k}{\infty};\ f(x+1)=1^0;\ f(x+1)=\infty^\infty;\ f(x+1)=\frac{0}{0}$	

12. Halle la solución del siguiente límite $\lim_{x\to 81}\frac{x-81}{\sqrt{x}-9}$

	a. 18	Resuelve en este espacio:
	b. $\frac{-81}{9}$	
	c. – 81	
	d. 81	
	e. 9,5	

13. Obtenga el resultado del siguiente límite $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$

	a. $\frac{1}{3}$	Resuelve en este espacio:
	b. – 3	
	c. $\frac{1}{2}$	
	d. 0, 66	
	e. $\frac{2}{3}$	

14. Obtenga el resultado del siguiente límite $\lim_{x\to\infty} \frac{x^7-x^2+1}{2x^7+x^3+300}$

	a. $\frac{1}{3}$	Resuelve en este espacio:
	b. $-\frac{1}{2}$	
	c. 0,003	
	d. $\frac{1}{2}$	
	e. $\frac{1}{300}$	

Anexo (D)

RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS PRESENTES EN EL INSTRUMENTO

Pregunta	Opción A	Opción B	Opción C	Opción D	Opción E
1	Error3	Error 1	**Correcta**	Error 1	Error 6
2	Error 6	Error 7	Error 7	**Correcta**	Error 7
3	Error 4	Error 3	Error 3	**Correcta**	Error 3
4	**Correcta**	Error 3	Error 2	Error 6	Error 2
5	**Correcta**	Error 6	Error 3	Error 6	Error 4
6	Error 8	Error 8	**Correcta**	Error 8	Error 4
7	**Correcta**	Error 7	Error 7	Error 6	Error 7
8	Error 6	**Correcta**	Error 5	Error 5	Error 4
9	Error 8	Error 8	Error 8	**Correcta**	Error 4
10	Error 6	**Correcta**	Error 6	Error 6	Error 6
11	Error 6	Error 6	**Correcta**	Error 6	Error 4
12	Correcta	Error 4	Error 4	Error 4	Error 4
13	Error 4	Error 4	Correcta	Error 4	Error 4
14	Error 4	Error 6	Error 4	Correcta	Error 4

Nota: El número de los errores corresponde a la taxonomía de Astolfi (2003).