RACIONALIDAD CONCEPTUAL EXISTENTE ENTRE LA GEOMETRÍA FRACTAL Y LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN
POSTGRADO EN EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

RACIONALIDAD CONCEPTUAL EXISTENTE ENTRE LA GEOMETRÍA FRACTAL Y LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Tutor:
Dr. Prospero González

Autor:
Ahmad Osman Cabrera.

Bárbula, Agosto 2014

ÍNDICE

pág.

LISTA DE TABLAS…..……. vi

LISTA DE GRÁFICOS……. vii

RESUMEN…….. viii

INTRODUCCIÓN

CAPÍTIULO I: EL PROBLEMA

1.1 El problema..…… 9

1.2 Objetivos de la Investigación...…… 23

1.2.1 Objetivo General……..….. 23

1.2.2 Objetivos Específicos……. 23

1.3 Justificación de la Investigación..…… 24

CAPÍTULO II: MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes……..... 26

2.2 Fundamentación Teórica……..... 28

2.2.1 Historiografía del cambio de concepción geométrica..... 30

2.2.2 La Geometría Hiperbólica..... 37

2.2.3 La Geometría Fractal..... 48

2.2.4 Teoría de la Cognición Cuántica..... 68

CAPÍTULO III: MARCO METODOLÓGICO

3.1 Tipo y Diseño de Investigación...…..……... 88

3.2 Contexto de la Investigación…….…….. 90

3.3 Técnicas e Instrumentos de Investigación…..……..……. 90

3.4 Procedimiento de la Investigación…..……. 91

CAPÍTIULO IV: ZONA DE CONTRASTE TEÓRICO CONCEPTUALES

4.1 Zona de discontinuidad conceptual..... 92

4.2 Racionalidad teórico-conceptual…..... 97

4.3 Enlaces conceptuales……..... 100

CAPÍTIULO V: FENOMENOLOGÍA DEL CONTRASTE CONCEPTUAL

5.1 De los incentivos caotizantes referentes a la Geometría Fractal e hiperbólica..... 109

5.1.Entrevistas……..... 111

5.2 De los incentivos caotizantes referentes a la fractalidad pura..... 119

5.2.1 De las formas..... 119

5.2.2 De la dimensión..... 123

5.3 Integración..... 124

5.4 Triangulación..... 131

5.5 Categorización..... 137

CAPÍTIULO VI: CLAUSURA DEL CONTRASTE

6.1 Proceso de contraste final..... 144

CAPÍTIULO VII: CONCLUSIONES

7.1 Conclusiones..... 151

7.2 Recomendaciones..... 153

REFERENCIAS ….…… 154

LISTA DE CUADROS

CUADRO **CONTENIDO** **pp.**

1.1 Estructura de los Elementos de Euclides…….41

4.1 Integración.....124 4.2

Triangulación.....131

4.3 Categorización.....137

LISTA DE FIGURAS

FIGURAS **CONTENIDO** **pp.**

2.1 Procesamiento de incentivos caotizantes.....83

4.1 Un enfoque del procesamiento por filtros de las representaciones mentales kantianas.....96

4.2 Puntos de enlace desde la línea recta.....104

4.3 Puntos de enlace desde la dimensión..... 108

5.1 Red compleja Fracto-Energética de conceptos geométricos.....144

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
ÁREA DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Línea de investigación: Epistemología de la Educación Matemática

RACIONALIDAD CONCEPTUAL EXISTENTE ENTRE LA GEOMETRÍA FRACTAL Y LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA

Autor: Ahmad Osman C.
Tutor: Dr. Prospero González
Fecha: Julio 2011

RESUMEN

La comunidad científica ha aceptado, por mucho tiempo, que la matemática es el lenguaje de la naturaleza y por ello los numerales y sus operaciones han sido fundamento del cientificismo y su método estocástico. Sin embargo, hay fenómenos que se presentan ininteligibles a la luz del conocimiento matemático de dimensión entera y en consecuencia, emergió un movimiento que advierte el método alejado de los modelos numerales por dudar en su fiabilidad de representación de los fenómenos inconmensurables. El presente estudio es una investigación de tipo descriptiva de carácter cualitativo y tiene el propósito de descubrir el enlace conceptual existente entre la geometría fractal y la geometría hiperbólica, partiendo de los puntos de sedición introducido por Lobachevsky y Mandelbrot, observado desde la perspectiva conceptual de la cognición cuántica. En este sentido se administraron instrumentos para determinar la percepción geométrica de estudiante y profesores pertenecientes a la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Carabobo. Luego se analizó la información para así conjeturar sobre el potencial de la disciplina como germen de métodos y modelos conceptuales novedosos más aproximativos a la verdad y naturaleza de la realidad.

Descriptores: Geometría Fractal, Geometría Hiperbólica, Modelos Matemáticos, Conceptos, Racionalidad Conceptual.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA

El concepto de *ciencia* fortalecido a través de los años, entendido como el conjunto de conocimientos que tiene un objeto determinado y reconocido, que además emplea un método o métodos propios (Florián, 2002); será el principal fundamento de análisis, que permitirá dilucidar los elementos que componen el núcleo de la situación problemática que pretende abordar la siguiente investigación.

La luz que marca el camino hacia la búsqueda de la verdad, permite observar lo que es *La Ciencia*, a través de los ojos de la siguiente afirmación: "Consiste en dar con explicaciones satisfactorias de todo aquello que nos parece precisar una explicación" (Popper, 1972, p. 180). Esto constituye lo que el autor citado anteriormente denomina un sistema de teorías, dibujando una estructura muy compleja en la cual se fundamenta todo conocimiento científico. Pero a medida que transcurren los años, la experiencia ha develado que no toda estructura es perfecta.

Lo anterior se ve reflejado en el panorama científico actual, y las imperfecciones trascienden la multidisciplinariedad de las ciencias. En el período histórico correspondiente a la última década del siglo XX, la duda, la perplejidad, la inseguridad, y una incertidumbre generalizada, se ha arraigado en toda mente profundamente reflexiva. No solamente se está de cara a una crisis de los fundamentos del conocimiento científico, sino también filosófico y, en general, ante una crisis de los fundamentos del pensamiento. Este escenario impone a todos un deber histórico ineludible, especialmente a las personas que transitan por el arduo sendero de la educación. (Martínez, 1997).

Muchos investigadores, en la actualidad, han coincidido en que uno de los posibles objetivos principales en la educación, es vislumbrar la necesidad de una racionalidad conceptual diferente y adoptar una nueva postura epistemológica. De esta manera surge siempre la pregunta ¿qué tipo de ser humano se desea formar? Este problema, que se ubica en el ámbito de la antropología filosófica, parte desde las

inquietudes socráticas por el ser y llega hasta nuestros días. El teórico de la educación debe consultar y dar aproximaciones teóricas en el área de la epistemología de tal manera que siempre se generen nuevas maneras de pensar en torno a la ciencia y al hombre. Ésta, a su vez, servirá de base a la idea esencial de la educación y a una concepción fundamental sobre sus medios. (Martínez, 2006).

De la misma manera, el estudio de los conceptos fundamentales es una actividad fundamental para el desarrollo científico, de hecho para algunos teóricos, es el principio y es el fin del proceso. La construcción de nuevos conceptos, la ampliación, el mejoramiento y el interrelacionar los que ya existen, es la verdadera clave del desarrollo de la ciencia. De esa manera se pudiera interpretar la siguiente cita: "Estoy plenamente convencido de que no es posible entender el crecimiento biológico sin una comprensión de la estructura conceptual de la biología". (Mayr y Williams,1998, p.23). En el mismo orden de ideas, expresa también el autor anterior, que la comprensión del mundo recorre el mismo camino que el sendero del perfeccionamiento de los conceptos; no el de la acumulación de descubrimientos. Sin embargo ambos procesos no son excluyentes.

Kuhn (1971), en su obra “La estructura de las revoluciones científicas” expresa que en el trascurrir histórico de la ciencia, el desarrollo viene estrictamente representado por el cambio del significado de algunos conceptos fundamentales. Por ejemplo, el concepto de movimiento en la época de Aristóteles, no es el mismo que el concepto de movimiento en la física newtoniana. Se podría también hacer la analogía con el concepto de dimensión, antes y después de Poincaré. Ahora bien, pero ¿de qué manera estos argumentos inciden en el proceso educativo, la psicología del aprendizaje y la pedagogía? Para argumentar un poco esta pregunta se transitará de manera sucinta por tres teorías. Para Aussubel (1983), en su teoría de adquisición significativa, los conceptos son los constituyentes del conocimiento previo fundamental para el proceso de aprendizaje. De hecho para él, el ser humano se desenvuelve en un mundo de conceptos. Esto último se fundamenta en la siguiente cita: " Cualquiera que se detenga lo suficiente para concederle al problema algún

pensamiento serio, no podría eludir la conclusión de que el hombre vive en mundo de conceptos en lugar de objetos, acontecimientos y situaciones." (Aussubel, 1983, p.87)

Por otro lado Vergnaud (1990), mentor de la teoría de los campos conceptuales, argumenta que el proceso de conceptualización es el núcleo del desarrollo cognitivo. Por esta razón se debe estudiar a fondo los aspectos conceptuales de los esquemas y analizar cada una de las situaciones conceptuales que lleva a cabo es el sujeto al momento del aprendizaje de los esquemas.

De manera similar y con argumento más contundente Fodor (1999), sentencia que una teoría de los conceptos sería el núcleo de la ciencia cognitiva; esta última desde un enfoque atomista. Es decir, defiende la tesis de que los conceptos son particulares mentales, que implica que el hecho de tener un concepto está constituido por tener un particular mental y no por rasgos ni capacidades mentales. Su visión es representacional y computacional englobando una teoría que considera a los conceptos como átomos del pensamiento. Fodor (ob.cit.)

Fodor (ob.cit.) propone, en ese trabajo, una ontología del concepto en dónde se pregunta ¿Qué clase de cosas son los conceptos y qué teoría se puede construir sobre ellos? Éste responde a esa pregunta tomando como referencia ciertas hipótesis que ha ido defendiendo durante la mayor parte de su vida, construyendo a partir de ella una psicología científica, basada en su teoría representacional de la mente. Esta teoría, en su forma más genérica, sostiene que pensamos en un sistema de representaciones mentales muy similar al lenguaje y que las configuraciones neuronales que producen nuestras creencias, deseos o intenciones, son una especie de proposiciones del lenguaje natural ya que las partes que constituyen su estructura poseen una consistencia y significado.

La segunda hipótesis elaborada más específicamente en este libro, se refiere a lo que el autor llama atomismo conceptual, en dónde defiende el funcionalismo mental contra el materialismo reduccionista, pretendiendo este último derivar las teorías psicológicas puramente de los mecanismos neuronales. Sus investigaciones ofrecen nuevos enfoques lógicos sobre la causalidad mental y dan luz, con

argumentos actuales, a numerosos aspectos de la tradición metafísica clásica y moderna.

En la actualidad, y afinando la temática de tal manera de introducirnos en el ámbito de la Educación Matemática, se puede afirmar que ésta última ha alcanzado un grado de madurez tal que le permite afirmarse con identidad propia en el conjunto armónico de las ciencias sociales; además, ha podido delimitar el espacio de los problemas que le son inherentemente propios; y, adicionalmente, ha logrado decantar los abordajes metodológicos pertinentes y adecuados para la indagación de dichos problemas, en una perspectiva que es pluriparadigmática.(González, 2004)

Es así como la educación matemática es una ciencia cuyo programa está constituido por elementos fundamentales que profundizan tanto en las ciencias cognitivas como en la epistemología. A su vez el proceso pedagógico y el de la didáctica en general está constituido por teorías de aprendizaje y teorías que analizan la estructura del conocimiento científico. Visto de esta manera, los argumentos que expresan los teóricos anteriores, evidencian lo impregnada que se encuentra esta área de un constante análisis de los conceptos fundamentales.

Esto induce a pensar que tanto por el camino de la ciencias de la educación como por el camino de la matemática existe un proceso de transformación constante del cuerpo teórico que obliga a buscar luces en el ámbito de la racionalidad conceptual, siendo ésta pilar fundamental de la ciencia, y en particular de la Educación Matemática.

De estas ideas se desprende, de una manera dialéctica más que causal, una dimensión importante de la problemática en la educación matemática, y es que en las últimas décadas, especialmente a partir de la crisis de conciencia que sacudió al mundo de las ciencias en los años cincuenta, el convencimiento de que los problemas propios de la investigación científica (en el campo de las Ciencias Sociales o en el campo de las Ciencias Naturales) rebasan el ámbito de lo meramente instrumental, es cada vez más firme. (Villegas y González, 2008). Es así como se puede afirmar que los problemas de la ciencia y en particular en la Educación Matemática no son

exclusivamente empíricos, y que las bases sobre las que se sostiene el edificio de la investigación contemporánea deben buscarse en un lugar menos reduccionista y mucho más complejo. (Villegas y González, 2008).

En el mismo orden de ideas, existe una relación estrecha con la estructura curricular que se maneja actualmente en el contexto de la educación superior; y más aún con el que está por venir; la cual será una estructura curricular de un modelo educativo por competencia. Hay algunas competencias como la capacidad de aprender, la de análisis y de síntesis, que son comunes en casi todas las titulaciones y más en una sociedad que está en constante transformación. (Villegas y González, 2008).

Esto último aunado con la primera dimensión del problema planteado, nos dan un panorama bastante gris en lo que respecta a la investigación en educación matemática en Venezuela, vislumbrándose la fragilidad y la crisis, en los fundamentos del conocimiento científico y en fundamentos del pensamiento. Por lo tanto es necesario, darle altura y nivel a nuestro sentido común, produciendo historiografía y epistemología en lo que respecta a los fundamentos en el área de las matemáticas, para que el docente adquiera las categorías conceptuales necesarias para problematizar y proponer aproximaciones teóricas del cómo debe ser la educación matemática y profesional a nivel superior, en un contexto amplio de discusión académica que permita compartir diferentes visiones.

Lo sostenido en el último párrafo está impregnado de una problemática que emerge al inicio del tercer milenio de la era cristiana, que consiste en que la cultura humana se debate en un proceso de transmutación civilizatoria con fundamento en la incertidumbre respecto de la realidad, la duda sobre el conocimiento y el cuestionamiento de la verdad, tal como ha sido aceptada por siglos. Esto es ocasionado por la detección de vacíos, contradicciones y omisiones aparecidas en las explicaciones cosmológicas del hombre y su circunstancia. En ese sentido, la sociedad actual se encuentra bajo el influjo de un nuevo periodo de transición dirigido a la revisión y reconstrucción de todo tipo de concepciones de índole filosófica,

científica y humanística que lucen hoy agotadas (García, 2007; Capra, 1998; Popper, 1972; Wallerstein, 2004).

Al respecto, cuando se analiza, se estudia y se cuestiona el origen de un determinado conocimiento que ha sido fundamento de la ciencia durante mucho tiempo, es cuando comienzan las trasformaciones de concepción en la comunidad científica, con implicaciones impredecibles en diferentes campos del saber. Por ejemplo, recientemente Bart Kosko (1995) presentó su libro Pensamiento Borroso con la siguiente idea introductoria : “Un día supe que la ciencia no es verdad. No recuerdo que día, sí el momento. El Dios del siglo XX ya no era Dios” (Kosko,1995 p. 17). Como la sentencia sugiere, este tipo de conjeturas subvierte el orden establecido e invita a redimensionar el cuerpo de creencias y significados sobre cualquier disciplina.

Es lógico pensar que el estudiar a profundidad una corriente emergente, se generan concepciones revolucionarias que vienen a cambiar estructuras de pensamiento en lo referente a cómo el ser humano ha advertido la realidad. La ciencia no escapa del proceso de ajuste que involucra la idea anterior. En toda etapa de la ciencia siempre existen nociones, matrices de opinión validadas que regulan y controlan la línea de pensamiento, pero llega un momento en que estas estructuras de pensamiento se perfilan incompletas o erradas y, al no adaptarse muy bien a la realidad, comienzan a ser cuestionadas. Es cuando la ciencia comienza una etapa de crisis, con desequilibrio y revisión por parte de la comunidad científica; la cual toma en cuenta nuevas tendencias y en consecuencia emerge un nuevo paradigma. (Khun, 1971).

Este proceso de cuestionamiento conceptual es históricamente intermitente e iterativo. El mismo, resulta de la aparición de algún punto crucial de sedición en el cual se toma conciencia de la inexactitud del modelo imperante para explicar algún evento o fenómeno. Por ejemplo, hace un siglo el principio de incertidumbre de Heisenberg dio al traste con el modelo atómico determinista y ordenado de la materia, la lógica intuicionista de Brower quebrantó la estabilidad binaria de la lógica aristotélica, la relatividad de Einstein derrumbó el absolutismo realista. También, las

paradojas de Russel liquidarían su propia pretensión de reunir toda la matemática en una sola concepción conjuntista. El principio de incompletitud de Gödel terminaría con la utopía de un sistema matemático universal exacto y perfecto pretendido por Hilbert, y entre otros, Poincaré afianzaría las bases para abrir paso a una geometría no Euclideana.

Pareciera que los matemáticos y los artistas desde sus perspectivas particulares visualizan y anticipan las tendencias de cambio en objetos clave. La matemática no está al margen del proceso descrito anteriormente y en particular la geometría es también una disciplina que con el paso del tiempo ha experimentado períodos de crisis en donde nuevas tendencias han abierto un abanico de senderos, no conducentes a una verdad última, sino conducentes a alimentar una gama de nuevos conocimientos, conceptos y modelos epistemológicos de la representación espacial que ayudan a la mejor compresión de la realidad.

En el área de la geometría es necesario asignar un justo valor a las nuevas tendencias en donde se fundamenta la geometría; para esto es pertinente conocer las raíces que engendraron uno de los dogmas más imponentes en lo que refiere a la manera de concebir la matemática. Estamos hablando de la Geometría Euclidiana, cuerpo de conocimientos geométricos que hasta hace muy poco estuvo dominando el pensamiento no sólo en el campo de la geometría, si no en la matemática y hasta en la completitud de la ciencia. Esta manera de pensar surge hacia 300 a.C, con la construcción del libro producto de la matemática griega llamado *Los Elementos;* comentario que se puede sustentar con la siguiente cita, relacionada con la naturaleza de la geometría antigua:

> "...Con la consiguiente estructuración rígida de la matemática griega elemental en la enciclopédica obra de *Los Elementos* de Euclides, que establece como paradigma un estilo sintético de exposición que oculta la vía heurística del descubrimiento, impulsa la geometría al margen de la aritmética, impide el desarrollo de un álgebra en sentido algorítmico y simbólico y limita la introducción de nuevas curvas a su construcción mediante la intersección de superficies o lugares geométricos definidos a través de relaciones de áreas o longitudes, en forma de proporción y no por medio de ecuaciones."(Urbaneja, 2007, p. 207).

Como se ve, el pensamiento geométrico estuvo moldeado en su totalidad por esta obra; se reflejaba esto una y otra vez cuando se le hacia corresponder a un objeto real, una "apariencia" representada en las figuras de Euclides que permitiera al sujeto resolver los problemas inherentes al objeto que comunmente se encontraba en la naturaleza o era producto de algún fenómeno natural totalmente perceptible. Además los estudios geométricos se realizaban estudiando las propiedades intrínsecas de los entes geométricos como puntos, rectas, planos, circunferencias, secciones cónicas y las distintas figuras que se originaban mediante la intersección de éstas, con la ayuda de instrumentos de medición y el uso de las Proporciones.

Esto continuó así durante mucho tiempo, sin embargo en el siglo XVII hubo un cambio trascendental en la geometría; la introducción del continuo de números hizo posible establecer una relación entre cada segmento de línea recta y un número real determinado como su longitud; sin embargo, viendo aún más allá, todo objeto geométrico y toda operación geométrica pueden ser remitidos a la esfera de los números; es entonces cuando Fermat (1629) y Descartes (1637) comienzan los pasos decisivos para la aritmetización de la geometría (Urbaneja, 2007). Luego se daría paso a la fusión del álgebra con la geometría, creando así la geometría analítica, la cual se podría definir con la siguiente cita:

> "Poderoso instrumento de ataque de los problemas geométricos que utiliza como herramienta básica, el álgebra. La esencia de su aplicación en el plano es el establecimiento de una correspondencia entre los puntos del plano y pares ordenados de números reales, es decir un sistema de coordenadas, lo que posibilita una asociación entre curvas del plano y ecuaciones en dos variables, de modo que cada curva del plano tiene asociada una ecuación f(x,y)=0 y , recíprocamente, para cada ecuación" (Urbaneja, 2007, p.205).

En el momento en que nace la geometría analítica en manos de Descartes y Fermat, ocurre un cambio en la concepción de ésta. Ya la dificultad del arte de medir los objetos en la tierra no va depender de los objetos e instrumentos involucrados en la medición si no que va a depender del análisis teórico que se haga a los objetos matemáticos involucrados; objetos matemáticos que surgen de la relación existente entre el objeto geométrico y una ecuación algebraica. Esto da origen a lo que es el

concepto de lugar geométrico, cuyo basamento es el de la correspondencia biunívoca entre un punto del plano y un par ordenado de números reales.

Otro momento importante que determinó un cambio conceptual en la geometría fue en el año de 1787 cuando Kant en su obra *Crítica a la Razón Pura*, establece una filosofía constructiva de la matemática en la que ofrece un fundamento epistemológico para el conocimiento matemático en general. Su teoría tiene dos puntos de apoyo, una es que tanto la aritmética como la geometría tienen como base las formas puras de la intuición, siendo esta una de las razones por la que califica sus juicios de sintéticos a priorí, y por la otra una noción constructiva de los objetos matemáticos, basada en su teoría de los esquemas para los conceptos de entendimiento. Esto se ve reflejado en el razonamiento existente en Los Elementos de Euclides. (Torres, 2009).

En otro orden de ideas, el método de análisis en la matemática y en particular en la geometría ha sido, durante mucho tiempo, el axiomático, pero no es tan cierto que las matemáticas griegas fueron desarrolladas única y exclusivamente en la forma rígida como se plasma en la obra *Los Elementos* la cuál está basada en unos postulados, sin embargo tal fue la impresión que esta obra causó, que las siguientes generaciones la tomaron como modelo para la actividad matemática. Ha sido en muchas ocasiones objeto de estudio de algunos matemáticos el buscar cuál ha sido en realidad la actividad matemática detrás de esa coraza de conocimientos estructurados de manera lógica deductiva incrustada en la Geometría Euclidiana. Una de las principales consecuencias de esta búsqueda ha sido la controversia entre lo que es la consistencia y la completividad de un cuerpo axiomático. Se habla de consistencia cuando no exista en matemática dos teoremas deducibles a partir de un cuerpo axiomático que sean mutuamente contradictorios y al hablar de completitud es que todo teorema del sistema axiomático se pueda deducir a partir de ellos. Este tema no se ha desgastado en las discusiones y durante mucho tiempo ha sido causa de diferentes convicciones filosóficas acerca de las raíces últimas del conocimiento humano, llevando a perspectivas que según parece son irreconciliables que se ha materializado en una crisis de fundamentos de las matemáticas. Tal es el caso de las

perspectivas que defienden por un lado los intuicionistas y por otro los formalistas. (Courant, 2002).

Por consiguiente, durante siglos, el conjunto de axiomas de Euclides se ha estudiado muy a fondo, pero fue hace poco cuando en diversas discusiones ha quedado claro que estos postulados deben ser modificados y completados para que la geometría elemental se pueda deducir a partir de ellos. Hilbert (1930) en su obra *Fundamentos de la Geometría* dio un conjunto de axiomas satisfactorios para la geometría y al mismo tiempo hizo un estudio exhaustivo de su independencia mutua, consistencia y completividad. Este proceso anteriormente descrito de alguna manera representó también un cambio conceptual en la geometría; lo podemos interpretar desde las propias palabras de Hilbert, pronunciadas en una conferencia en el año 1930:

> En los días de Kant se podía pensar que las representaciones que uno tenía del espacio y del tiempo eran aplicables de un modo tan inmediato y general a la realidad como, por ejemplo, nuestras representaciones de números, sucesión y cantidad, las cuales se utilizan constantemente en la manera en que nos es familiar en la teoría matemática y física. Pero entonces la teoría del espacio y el tiempo (y en particular la geométrica), precedería como la aritmética, nuestro conocimiento de la naturaleza. No obstante el punto de vista de Kant, fue abandonado por Riemman y Helmholtz incluso antes de que la teoría física obligara a hacerlo, y con toda razón, pues la geometría no es otra cosa que esa parte del marco de conceptos físicos que modela las posibles relaciones de posición entre los cuerpos rígidos en el mundo de las cosas reales. (Ewald, 1996, p. 1162).

Hilbert cambió la concepción de la geometría hacia un sistema de definiciones y teoremas; los teoremas geométricos se volvieron independiente de la representación esquemática real. La geometría pasó a fundamentarse en la axiomática, aunque las bases o fundamentos siguirán siendo el punto, la línea y el plano.

El conjunto de axiomas que se conoce de la geometría provee definiciones de términos geométricos tales como recta, punto. Estos elementos sólo son producto de una idealización de la realidad. Esto hace reflexionar, con respecto al cuerpo axiomático euclidiano, sobre la veracidad de un axioma de la geometría euclidiana,

cuya correspondencia con los datos empíricos no es obvia; es el famoso quinto postulado o postulado de la paralela única, el cual afirma que por un punto exterior a una recta, se puede trazar una única paralela. Todos los axiomas de la geometría euclidiana poseen un carácter finito que posibilita su veracidad con lo real, mientras que el quinto postulado se refiere a un ente infinito como lo es la recta, cuya veracidad no es tan simple de observar, por el simple hecho de que resulta imposible representarlo de manera empírica.

El primer vestigio de rechazo a éste postulado se remonta a Proclo (IV d.C) quien trató de prescindir de la necesidad del postulado de las paralelas definiendo la recta paralela dada como el lugar geométrico de todos los puntos que están a una determinada distancia fija de la recta. (Courant, 2002).

Muchos años más tarde Saccheri y Lambert trataron de demostrar el postulado de las paralelas por el método indirecto, suponiendo lo contrario con miras a obtener consecuencias absurdas , pero su conclusiones muy lejos de ser incongruentes dieron origen a los primeros intentos de teoremas de geometrías no euclidianas que posteriormente se desarrollarían. Es entonces cuando aparecen Bolyai y Lobachesky construyen, inspirados en el axioma de las paralelas, una geometría en la que éste no se cumple. (Courant, 2002).

Vemos entonces claramente como la geometría euclidiana que fue prácticamente un dogma hasta principios del siglo XIX, siempre llevó consigo lo que Gauss llamó la parte vergonzosa de las matemáticas, que fue el quinto postulado de Euclides. Este postulado nunca pudo ser demostrado a partir de los restantes cuatro, lo que dio origen a principio del siglo XIX a que Gauss, Bolyai ,Lobachevsky y otros, describieran postulados tan ciertos como el quinto postulado de Euclides, que a su vez daban origen a nuevas geometrías, llamadas geometrías no euclidianas y que hoy en día cuentan con un apoyo rotundo y con una utilidad impresionante al momento de describir fenómenos de la naturaleza, la cuales son la geometría esférica, la geometría elíptica y a geometría hiperbólica. (Courant, 2002).

Una de las geometrías no euclidianas más importante que nace a partir de lo expuesto, además de la geometría esférica y la geometría elíptica es la geometría

Riemanniana, que surge con un enfoque más general de las geometrías elíptica e hiperbólica, donde una de las principales características es que las “líneas rectas” en este tipo de geometría, son líneas geodésicas. Esta geometría fue usada por el físico Albert Einstein en el momento en que describió su teoría general de la relatividad, diciendo que la Luz viaja a lo largo de líneas geodésicas y la curvatura del espacio está determinada por la naturaleza de la materia que hay en él.(Courant, 2002)

Cabe destacar que el proceso descrito anteriormente es de gran importancia revolucionaria; la cual radica en que el descubrimiento de la geometría no euclidiana demolió la noción que según Newton, basado en Kant, apuntaba a que los axiomas de Euclides eran una estructura de conocimientos geométricos inmutables al que deben ajustarse los conocimientos de la realidad física. Tal consideración refleja una serie de hechos que representan una crisis dando origen al nacimiento de un nuevo modelo geométrico.

Aunque el aporte de Einstein a la ciencia con la teoría general de la relatividad fue indiscutible, éste se expresaba de la siguiente manera con respecto a la matemática: “En la medida en que las leyes de las matemáticas se refieren a la realidad, no son ciertas. Y en la medida en que son ciertas, no se refieren a la realidad”. Einstein todavía miraba mucho más lejos y se daba cuenta de que el mundo está muy lejos de ser descrito de manera mucho más aproximada mediante el leguaje de las geometrías y probabilidades existentes, tal vez un nuevo lenguaje, o una nueva lógica de pensamiento y nuevos conceptos serían necesarios para describir mejor la naturaleza.

Paralelamente a esto, en el año 1919 emerge un nuevo concepto de dimensión geométrica a manos de Felix Hausdorff, modificado en base al concepto de dimensión topológica que dio Poincaré en el año 1912. Este nuevo aporte posteriormente fue desarrollado por A.S. Besicovitch en la década de 1930, tuvo un período de receso y luego fueron retomadas las investigaciones a manos del ingeniero Benoit Mandelbrot quien empezó a generar mediante el uso de computadores, figuras bien particulares que posteriormente se le denominarían Fractales. (Courant, 2002).

Una de las cosas que caracteriza a los Fractales es que son figuras que pueden ser generadas mediante algoritmos matemáticos debidamente programados en un computador y que una de sus principales características es que una mínima perturbación en uno de sus parámetros podía generar consecuencias inesperadas en el comportamiento de su representación gráfica. Había nacido entonces lo que se llamó el caos matemático. Ahora bien pero ¿de qué manera se podría corresponder esto con la realidad?, es una pregunta bastante laboriosa de responder, Mandelbrot (1997), en su libro The Fractal Geometry of Nature expresa “Las nubes no son esferas, ni las montañas conos, ni las costas círculos, ni la corteza de un árbol es lisa ni un rayo viaja en línea recta, todo está lleno de agujeros”. Se comenzaba entonces a percibir la realidad geométrica de otra manera, y, por si fuera poco, no sólo la realidad geométrica sino algunos fenómenos físicos y sociales se fueron asociando con este tipo de matemática.

Se puede decir entonces, desde la perspectiva de Morin, que la humanidad se estaba dando cuenta de que la realidad es caótica, compleja y que las consecuencias en los fenómenos naturales eran originadas por la multicausalidad. Una vez que el ser humano se percata de que la realidad es compleja y que ninguna teoría ha podido describir de manera óptima la realidad en que se vive, es cuando surge la Teoría del Caos, aplicada en la mayoría de los fenómenos naturales, cuyo basamento está en gran parte en los Fractales.

Se podría entonces decir a manera de síntesis y con miras a enfrentar perspectivas, que la geometría euclidiana, trata con frialdad los aspectos que tiene que ver con la naturaleza; asocia a los objetos naturales, formas ideales que nunca podremos ver en realidad. Al ser descubiertas las formas Fractales, su particularidad de autosemejanza la hace adaptarse mejor a muchas de las formas y fenómenos que se encuentran en la vida cotidiana, desde el borde de una costa o simplemente el borde de cualquier objeto hasta los fenómenos climáticos.

Ahora bien, habiendo descrito el panorama geométrico de la situación, se plantea que actualmente la dinámica de la ciencia no va de la mano con la actividad de la naturaleza, por lo que se hace necesario un cambio de paradigma en las

investigaciones científicas; este paradigma tendría que estar unido a una modificación en la lógica del pensamiento y en la manera de concebir los fenómenos y objetos reales de tal manera que estas investigaciones se adapten mejor a la realidad.

En la actualidad la geometría ha avanzado a pasos agigantados, pasos que son seguidos por muy pocas personas, posiblemente debido a la falta de información y engranaje de los nuevos conocimientos con los antiguos. Si se considera a la Geometría Fractal como un conocimiento más reciente que el de la Geometría Hiperbólica y ésta a su vez más reciente que el de la Geometría Euclidiana; es pertinente preguntarse ¿Que enlace conceptual hay entre la Geometría Fractal y la Geometría Hiperbólica?, a fin de sustentar criterios de compatibilidad geométrica que a su vez servirían de fundamento para establecer una continuidad entre las teorías geométricas. Para dar respuesta a la interrogante formulada, se plantean los siguientes objetivos.

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Objetivo general

Analizar el enlace conceptual existente entre la Geometría Fractal y la Geometría Hiperbólica.

Objetivos específicos

1-. Indagar sobre el estado del arte de los cambios de concepción geométrica a través de la historia.

2-.Identificar algunos de los conceptos fundamentales de la Geometría Fractal.

3-.Identificar algunos de los conceptos fundamentales de la Geometría Hiperbólica.

4-.Contrastar los conceptos fundamentales de la Geometría Fractal y la Geometría Hiperbólica resaltando algunas de sus relaciones y describiendo los posibles puntos de enlace desde una perspectiva teórica.

5-.Contrastar los conceptos fundamentales de la Geometría Fractal y la Geometría Hiperbólica resaltando algunas de sus relaciones y describiendo los posibles puntos de enlace desde una perspectiva fenomenológica.

6-.Formular el o los criterios de enlace obtenidos a través del estudio de los conceptos fundamentales de la Geometría Fractal y la Geometría Hiperbólica desde una perspectiva teórica y desde una perspectiva fenomenológica.

JUSTIFICACIÓN

La investigación epistemológica que se desarrolla hoy en todo el mundo se deriva de una doble condición impuesta por el clima cultural de esta época. Una de ellas son los límites de un modelo de ciencia que ha hecho crisis en todos los campos del saber, sobre todo en el saber matemático, obligando a un vasto movimiento de renovación de teorías, definiciones y conceptos. La otra, es la crisis particular de la cultura académica propia de una modernidad que se hizo históricamente insostenible. De allí se originan un conjunto de experiencias renovadoras en diferentes campos del conocimiento matemático y en especial en el conocimiento geométrico. (Popper, 2001 ; Kuhn,1971).

La crisis de paradigmas que es reconocida en estos tiempos de modo generalizado ha supuesto un replanteamiento de las formas de interacción entre las tendencias del pensamiento que hasta hace poco eran antagónicas en sus

interpretaciones teóricas. El mundo académico en que se vive, responde a requerimientos intelectuales distintos, sus modelos epistemológicos ya no pueden ser sustentados por una inspiración ideológica o en una gran teoría que albergue cómodamente a las disciplinas del mundo universitario. (Kuhn, 1971)

En relación a los criterios anteriores, el surgimiento de la complejidad como germen constitutivo de nuevos modelos epistemológicos, así como la necesidad de nuevas manera de concebir el abordaje de la realidad, han marcado un nuevo horizonte en las investigaciones en el campo de la ciencias de la educación, inspirados en la necesidad de formar a seres humanos capaces de instruir a las nuevas generaciones de manera que tengan otra visión de la realidad, de una realidad compleja que responde a la multicausalidad.

Contribuyendo a esto, estudiar la posibilidad de un cambio de concepción de la geometría será un gran aporte para sentar las bases de esas nuevas estructuras de pensamiento, sobre todo si se trata de la Fractalidad, visto como un enfoque geométrico que hasta ahora ha sido una herramienta para el estudio de la Teoría de Caos y de la Complejidad.

Este conocimiento citado anteriormente, constituye hoy en día un saber específico. La sociedad requiere un cambio de manera de pensar, por lo cual una de las cosas necesarias, es ir paulatinamente convirtiendo este saber específico a un saber común. Pero esto es posible sólo si se está en presencia de una teoría lo suficientemente consistente como para hacerla inherente a la manera de pensar de los individuos.

El enlazar conceptualmente las teorías constituye una de las etapas de un proceso que Popper en su obra *La Lógica de la Investigación Científica* describe como “someter a contraste la coherencia interna del sistema”, que tiene como fin último contrastar una serie de teorías. En la presente investigación, se propone una nueva racionalidad conceptual entre la Geometría Fractal y la Geometría Hiperbólica que va a permitir visualizar el grado de generalidad de fractalidad con respecto a las otras geometrías, la cual servirá, posiblemente, de base epistemológica para futuras reestructuraciones curriculares en las Facultades de Ciencias de la Educación, en las

Facultades de Ingeniería de las universidades o en cualquier otra carrera donde su objeto de estudio sea la matemática. De manera paralela la metodología que se aplicará en esta investigación dará luces, probablemente, para describir y establecer procedimientos que generen cambios conceptuales en el área de la Educación Matemática.

En un futuro, no muy lejano, este cambio, ayudaría a convertir a la Teoría Fractal de un saber específico a un saber común, donde el ser humano tenga contacto con la fractalidad desde sus primeros años de formación.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO-REFERENCIAL

Por épocas la geometría estuvo supeditada a una estructura axiomática inmutable que sirvió durante mucho tiempo de sustento para casi todos los estudios científicos, estructura que se debe a la obra de Euclides denominada *Los Elementos*. Pero a medida que fue trascurriendo el tiempo muchos matemáticos hicieron fuerte criticas a los fundamentos de la geometría, dando cabida a ciertos criterios que facilitaron la formulación de teorías que dieron origen a la Geometría Hiperbólica y la Geometría Fractal.

Desde entonces, diversos estudios se han realizado sobre los fundamentos de la geometría en general, la Geometría Fractal y la Geometría Hiperbólica. Así como también contrastes, las coincidencias y los fundamentos teóricos para lograr un cambio en la concepción de la matemática.

Antecedentes de la Investigación

Gámez, (2001) en su tesis doctoral titulada *Construcciones en geometría hiperbólica y teselaciones mediante grupos N.E.C. Poligonales. Algoritmos de automatización,* estudia los dos modelos de Poincaré del plano hiperbólico, a partir de la definición de isometría en función de los puntos fijos que dejan cada una de ellas. Se abordan distintos problemas constructivos que se pueden presentar con el grupo de transformaciones del plano hiperbólico. Finalmente El estudio permitió, basándose en el análisis realizado sobre cuadriláteros de Saccheri y Lambert, demostrar bajo qué condiciones dichos cuadriláteros teselan el plano hiperbólico, exponiendo ejemplos de dichas teselaciones. Si considera el estudio desde el punto de vista del análisis del comportamiento de propiedades de una figura geométrica en particular desde los modelos no euclidianos de Poincaré, se estaría en presencia de uno de los muchos intentos que se han realizado para observar la conservación de las

propiedades y el comportamiento de las transformaciones de algunos objetos geométricos, dentro de un modelo distinto al euclidiano. El trabajo anterior ofrece luces para esta investigación en el sentido de proporcionar vestigios de solapamiento conceptual entre modelos geométricos distintos al euclidiano.

De la misma manera Farrés(2004) en su tesis doctoral *Integrals de curvatura i geometria integral a l'espai hiperbòlic,* se estudian la integrales de curvatura de hipersuperficies en el espacio hiperbólico utilizando técnicas de geometría integral. El trabajo se centra en analizar los planos del espacio hiperbólico. De la misma manera, este trabajo sirve de insumo a la presente investigación, ya que se observa como se estudia el concepto de longitud utilizando el enfoque de las integrales de curvatura en un modelo geométrico distinto al modelo clásico euclidiano.

Los dos trabajos citados anteriormente se relacionan en una manera bastante aproximada a lo que se pretende lograr en este estudio ya que en esta ocasión se espera descubrir un enlace de teorías, pero tomando como punto de partida algunos conceptos fundamentales de la geometría fractal.

En otro orden de ideas De Pablo (2006) en su tesis doctoral “La Crítica de la Razón Pura como ontología a priori de la naturaleza” hace un análisis de como el ser humano carece de un mundo de la experiencia innato, por esta razón él mismo tiene que generarlo para luego aplicar sus estructuras racionales a los objetos. De la misma manera también aborda el problema fundamental de la sustitución la Geometría Euclidiana por una Geometría Riemanniana y el problema que plantean las geometrías no euclidianas, el cual radica en que no hablan de objetos extraños a los sentidos, sino que tratan al objeto según una estructura diferente a como se lo advirtió. Al final emerge la conclusión de que la existencia de la estructura no euclidiana de los fenómenos viene dada de un modo comparativo, es decir, en relación con otra existencia dada según las leyes de la conexión de los fenómenos en una experiencia en general.

Este último trabajo sirve como base al que se está desarrollando en el sentido de que explica el problema existente en el individuo en lo que respecta a la separación

existente entre la ideas y los objetos, aspecto que es considerablemente importante al hablar de un modelo geométrico fractal aplicado a las formas geométricas reales.

Fundamentación Teórica

Una investigación en Educación Matemática pudiera tener muchas aristas en su fundamento teórico, debido al carácter multidisciplinario de esta área del conocimiento. Es por esto que el fundamento teórico de esta investigación se desarrollo bajo dos pilares fundamentales. El primer pilar refiere al contenido geométrico de la investigación, cuyo discurso está inmerso dentro de las cuatro grandes corrientes epistemología de la matemática: el Platonismo, el Logicismo, el Formalismo y el Constructivismo-Intuicionista. El segundo pilar refiere a la teoría cognitiva, el cual se desarrolló bajo el esquema de la Teoría de Cognición Cuántica.

En el discurso geométrico no se asumió una corriente epistemológica absolutista. En algunos casos se observan argumentos en donde se asumen a los objetos matemáticos como objetos reales no materiales, inmutables, pertenecientes al un "mundo de las ideas" existente con independencia del individuo y fuera de él; argumentos correspondientes a la corriente Platonista. En este sentido, el Platonismo constituye la forma clásica del realismo, el cual imparte una dimensión metafísica a la geometría afirmando que los entes geométricos existen, que son abstractos, y que son independientes a toda actividad racional, es decir, que los objetos y teoremas geométricos existen en forma aislada del mundo material e independientemente del espacio y del tiempo.(Abbagnano,1961)

Por otro lado, se enuncian argumentos que dan a entender que la geometría es un sistema desprovisto de significados, constituido por axiomas, definiciones, teoremas producto del pensamiento humano; estos argumentos se enmarcan dentro de la corriente Formalista. El formalismo en la geometría entiende al sistema geométrico como un juego basado en un conjunto de reglas para manipular símbolos que sirven para definir un sistema lógico-formal puro, cuya condición primaria es prescindir de la inconsistencia, constituyéndose así un sistema formal vacío. En esta

corriente epistemológica los enunciados geométricos pierden el carácter de verdades; dejan de ser proposiciones sobre objetos bien definidos. Lo más importante en esta perspectiva son las relaciones que se establecen entre los símbolos.(Abbagnano,1961)

En este mismo orden de ideas, se pudieran encontrar fragmentos bajo la idea de que la lógica, como disciplina, es anterior o más fundamental que la matemática y por ende que la geometría misma, reduciendo a esta a una rama de la lógica; en este punto se estaría bajo la concepción logicista de la matemática. El Logicismo, como suele designarse a esta conocida posición epistemológica de las matemáticas, se desarrolla como una tendencia a privilegiar, y en algunos casos hasta a reducir, los aspectos del campo de la investigación matemática a sus componentes lógicos o lógicamente formulables. En esta investigación existen argumentos que adoptan la postura del estudio de los lenguajes naturales de conceptos geométricos desarrollados en la lógica y relacionados con la extensión y la estabilidad de las categorías, el significado y la denotación, así como por la tendencia a reducir el estudio lingüístico a los aspectos lógicos, en detrimento de otros aspectos resaltados en otros tipo de argumentos. (Abbagnano,1961).

Por último se pudieran manifestar argumentos que están en sintonía con el hecho de que en la matemática y en particular en la geometría los objetos matemáticos tienen significado y existen en la medida en que se construyan mediante un número finito de pasos a partir de entes fundamentales; quedando así a la luz la corriente Constructivista-Intuicionista. El constructivismo-intuicionista se encuentra al margen tanto de la postura logicista como de la formalista, proponiendo que el conocimiento matemático se basa en la aprehensión que antecede cualquier lenguaje o lógica. Esta corriente se fundamenta en que el saber matemático se basa en una intuición primordial como base del conocimiento matemático, y a partir de este cimiento, el conocimiento matemático se comienza a construir. (Abbagnano,1961).

Las teorías que se utilizarán para fundamentar el análisis conceptual que llevará a cumplir el objeto de estudio, son la Geometría Fractal de Mandelbrot, la Geometría Hiperbólica de Lobachevsky y la teoría cognición cuántica de Mussa. Por lo que la fundamentación teórica se organizó en tres partes, las cuales cada una pretende

describir y explicar los aspectos más importantes de las tres teorías citadas anteriormente, estructuradas, en lo posible, de una manera cronológica.

Historiografía del cambio de concepción geométrica

A manera de introducción, se tomará el atrevimiento de exponer un pequeño extracto histórico, el cual haciendo uso del método inductivo, iniciará el tránsito de lo específico a lo general, con miras a lograr la comprensión de esta sección.

Todavía a comienzos del siglo XIX seguía incólume la geometría clásica griega plasmada en Los Elementos. Solamente un avance significativo había quedado registrado en ese lapso de veinte siglos y era el del nacimiento de la geometría proyectiva que vino a construir una serie de reglas, desde el punto de vista de las aplicaciones, en cuanto a la perspectiva, arraigada en los artistas más destacados de la época del renacimiento.(Courant, 2002).

A mediados del siglo XIX fue cuando la geometría proyectiva fortalecida por la geometría descriptiva de Gaspar Monge (1746-1818) empezó a tener más auge; sin embargo la concepción geométrica tanto de la comunidad científica como la de la mayoría de las personas, estaba regida por geometría euclidiana. Esto se evidencia en la idea fundamental de Kant de entender los axiomas y teoremas de la geometría euclidiana como juicios sintéticos a priori que explican las propiedades del espacio en virtud de su idealidad.(Alsin y Pérez, 2000).

De Euclides a Kant

Kant en la obra *Crítica a la razón pura*, establece una filosofía constructiva de la matemática en la que ofrece un fundamento epistemológico para el conocimiento matemático en general. Su teoría tiene dos puntos de apoyo, una es que tanto la

aritmética como la geometría tienen como base las formas puras de la intuición, siendo esta una de las razones por la que califica sus juicios de sintéticos a priori, y por la otra una noción constructiva de los objetos matemáticos, basada en su teoría de los esquemas para los conceptos de entendimiento. Esto se ve reflejado en el razonamiento existente en Los Elementos de Euclides.

Según Kant, en los teoremas de Euclides, las construcciones se realizan en la intuición sensible, en esa investigación no se toma en cuenta ningún rasgo empírico del objeto así construido, como por ejemplo la longitud de sus lados o la medida de los ángulos; y si bien el diagrama es empírico (un objeto sensible), en las demostraciones sólo se considera la acción de construir sus elementos (triángulo, recta) sin hacer uso de alguna particularidad propia de los objetos específicos que resultan de la construcción. Por eso la validez de los teoremas geométricos que se estructuran de esta forma.

Sin embargo en la disertación realizada en el año 1746, sobre *La manera de calcular las fuerzas vivas*, Kant dejo abierta la posibilidad para la existencia de otras geometrías; esto se observa en la siguiente reflexión:

> Dios hubiera podido elegir otra, (refiriéndose a la ley de gravitación universal), por ejemplo, la proporción inversa al cubo de las distancias; [...]por último, que de otra ley, se habría derivado una extensión de otras propiedades y dimensiones. Una ciencia de todas estas posibles clases de espacios sería con toda seguridad la más alta geometría abordable por un entendimiento infinito. La imposibilidad, que percibimos en nosotros mismos para figurarnos un espacio de más de tres dimensiones, me parece estribar en que nuestra alma recibe igualmente las impresiones externas segúnn la ley de la doble relación inversa de las distancias, y en que su naturaleza misma está hecha de modo que no solo sufre, sino que actúa fuera de sí de esta manera.(Kant, 1781, p. 35-36).

Este proceso de cambio de concepción posee cierta continuidad conceptual, en esta investigación se trata de contextualizar nuevamente este cambio de concepción y vislumbrar posibles continuidades entre la Geometría de Lobachevki y la Geometría de Mandelbrot.

Entre Kant y Hilbert

El estudio de los fundamentos de la geometría organizado por Hilbert condujo a un cambio importante en la manera de concebir la geometría. Esto último se puede ver reflejado en la siguiente afirmación:

> "En los días de Kant se podía pensar que las representaciones que uno tenía del espacio y del tiempo eran aplicables de un modo tan inmediato y general a la realidad como, por ejemplo, nuestras representaciones de números, sucesión y cantidad, las cuales se utilizan constantemente en la manera en que nos es familiar en la teoría matemática y física. Pero entonces la teoría del espacio y el tiempo (y en particular la geométrica), precedería como la aritmética, nuestro conocimiento de la naturaleza. No obstante el punto de vista de Kant, fue abandonado por Riemman y Helmholtz incluso antes de que la teoría física obligara a hacerlo, y con toda razón, pues la geometría no es otra cosa que esa parte del marco de conceptos físicos que modela las posibles relaciones de posición entre los cuerpo rígidos en el mundo de las cosas reales."
> (Hilbert, 1930, p.162).

Hay principios que Kant considera a priori y que generalmente se le asigna a la experiencia, por ejemplo la totalidad de los hechos fundamentales de la geometría, así como las propiedades elementales del espacio y la materia.(Hilbert, 1930).

Para Kant, la representación del espacio debía ser construida mediante juicios a priori. También tenía que ser intuitiva, de manera que se establecieran proposiciones sintéticas que produjeran avance en el conocimiento, sin interpretarlas como meras tautologías, debido a que son producto de la intuición. Es decir, para Kant la geometría es la prueba de que existe una intuición pura (representación intuitiva y a priori) del espacio.

Más adelante la aparición de las geometrías no euclidianas provocó un estudio y una reformulación tan grande de la geometría euclidiana, que nada tiene que ver con la idea que tenía Kant de esta ciencia, sin embargo, estas geometrías no son incompatibles con la filosofía de Kant:

> El descubrimiento de Bolyai y Lobachevski consistió, en negar la validez del postulado de las paralelas y deducir de esta negación (combinada con la afirmación de los demás principios de la geometría clásica) una serie al

> parecer infinitamente prolongable de consecuencias, sin duda inusitadas, pero en absoluto contradictorias. Un descubrimiento tal no sólo no se opone a la concepción kantiana de la geometría, sino que hasta puede decirse previsto por ella.(De Pablo, 2006, p.181)

Hilbert cambió la concepción de la geometría hacia un sistema de conceptos, los teoremas geométricos se volvieron independiente de la representación esquemática real. En donde la geometría pasó a fundamentarse en la axiomática. Los fundamentos siguen siendo el punto, la línea y el plano.

En este cambio de concepción, se visualiza vestigios de posibles conceptos fundamentales en lo que se refiere a la geometría en general. Esta etapa se caracterizó por la búsqueda de lo esencial en la teoría geométrica. Para esta investigación se tomará la esencia geométrica descrita en esta etapa para realizar la racionalidad conceptual correspondiente.

De Euclides a Mandelbrot

Los modelos geométricos clásicos han tenido su mérito, han conseguido explicar triunfalmente el movimiento de los planetas, aunque se siga teniendo dificultades para descubrir la distribución de las estrellas, también sirvió para explicar el movimiento de las mareas y de las olas, pero ha sido incapaz de describir la turbulencia atmosférica y la turbulencia oceánica.(Mandelbrot, 2009).

La teoría fractal nace del método. De manera constante se prepara la escena tomando consciencia de que los datos experimentales obtenidos por caminos distintos entran en contradicción. Una vez que cada uno de ellos se hace inexplicable, la teoría entra en crisis y se ha de aceptar que el marco conceptual es inconsistente, por ende la interpretación y el significado asignado termina siendo radicalmente inadecuado. Es entonces cuando se propone la solución mediante la introducción de un fractal acompañado de su dimensión fractal para realizar un nuevo estudio y lograr un mejor acoplamiento Modelo-Realidad.(Mandelbrot, 2009).

Una vez que los fractales emergen del método, estos pasan a constituir una de las secciones más hermosas de la teoría del caos. Lo que en un principio comenzó

como una observación sobre la repetición indefinida de una misma estructura, ha acabado dando lugar a imágenes de increíble belleza, que han caracterizado especialmente a esta ciencia matemática, alejándola de la frialdad con que se suele tratar al resto de las matemáticas.(Florian, 2002).

Al aparecer los objetos Fractales, el concepto de dimensión se amplía y los números fraccionarios pasan a tener protagonismo en lo que se refiere a dimensión. Por otra parte, los fenómenos naturales vistos desde una concepción macro de la realidad, generalmente poseen estados bien definidos, pero cuando vemos estos mismos fenómenos desde una concepción geométrica más afinada, sobre todo las fronteras y los bordes, estas se vuelven borrosas, caóticas y dentro de ese análisis también surge la geometría Fractal. Los Fractales poseen la característica que si observamos sus bordes desde una perspectiva cada vez más cercana, la forma permanece inalterable y al mismo tiempo irregular.

La diferenciabilidad y la dimensión topológica se pudieran considerar como un buen punto de partida para el análisis de la transmutación conceptual que surge con el estudio de las propiedades de las formas patológicas emergentes desde los conceptos y definiciones que albergaban las formas clásicas derivadas de la geometría euclidiana. Además una serie de conceptos y definiciones topológicas sustentan las definiciónes de diferenciabilidad y dimensión. Entre los más significativos y pertinentes para el siguiente análisis está el de punto de acumulación y continuidad.

En topología el concepto de punto de acumulación de un conjunto en un espacio, captura la noción de estar extremadamente cercano al conjunto sin necesariamente pertenecer a él. Dado un conjunto E y un punto p en un espacio métrico X, se define que p es un punto de acumulación para E, si cualquier e-vecindad de p sin incluir a p, ésta tiene intersección con E. (Courant, 2002).

Por ejemplo, si se considera lo que posteriormente se mostrará como el polvo de Cantor, se observa que el concepto de punto de acumulación constituye elemento fundamental dentro de la descripción topológica del conjunto; se puede decir que entre sus propiedades topológicas más predominantes están la de ser un conjunto cerrado, acotado, en donde todo punto es de acumulación y es totalmente disconexo,

que intuitivamente nos da la idea de un conjunto que no está formado por una sola pieza y por ende se puede dividir.

Según Courant (2002) el concepto de continuidad en una función es, intuitivamente, cuando para puntos cercanos del dominio se producen pequeñas variaciones en los valores de la función. Lo anterior se puede visualizar en la morfología de una curva que se estudiará más adelante con mayor profundidad, la curva de Koch, ella, independientemente de la escala en que se observa y la etapa del conjunto que se está estudiando, es continua para todo su dominio.

Ahora bien en base a estos conceptos, la idea que se tiene de dimensión en un contexto topológico está relacionada con la posibilidad de movilizarse en el espacio. La recta euclidiana tiene dimensión uno, porque sólo es posible desplazarse en una sola dirección, el plano tiene dimensión dos, ya que es posible movilizarse a lo largo y a lo ancho y el espacio euclidiano tiene dimensión tres ya que es posible moverse a lo largo, a lo ancho y a lo alto. El concepto de dimensión no presenta gran dificultad, siempre y cuando se trate sólo con figuras geométricas simples tales como, puntos, líneas, triángulos y poliedros. Un solo punto o cualquier conjunto finito de puntos tiene dimensión 0, un segmento de línea es unidimensional, y la superficie de un triángulo o de una esfera es bidimensional.

En 1912 Poincaré definió dimensión topológica como sigue: Un conjunto S será de dimensión n, si no es de ninguna dimensión menor y cada punto de S puede encerrarse en una región arbitrariamente pequeña, cuya frontera se intercepte con S en un conjunto de dimensión n-1.

Es pertinente entonces preguntarse ¿Que dimensión tiene el polvo de Cantor? Parecería, con el concepto que se tiene de dimensión que el conjunto de Cantor debería ser unidimensional, sin embargo el conjunto no posee ningún intervalo completo. Por lo tanto podría pensarse también que el conjunto de Cantor tiene dimensión cero, estaríamos asumiendo entonces que el conjunto de Cantor está constituido por un conjunto finito de puntos discretos. De la misma manera se podría extrapolar el problema a la curva de Koch. ¿Se pudiera considerar a la curva de Koch una curva unidimensional o bidimensional? Estas interrogantes de alguna manera

sintetizan una discontinuidad conceptual que obstaculiza la construcción de nuevas estructuras de conocimiento basadas en conceptos geométricos fundamentales que permita el abordaje de morfologías distintas a las derivadas de la geometría euclidiana.

Lo descrito anteriormente, sería nuestro eslabón de cambio conceptual más próximo al que se pretende abordar en este trabajo. Acá surge una serie de discontinuidades que empañan los conceptos fundamentales estudiados hasta el momento, siendo, esta etapa, la génesis de una trasmutación conceptual geométrica que posiblemente hará vislumbrar la continuidad existente entre la Geometría Hiperbólica y la Geometría Fractal.

La geometría Hiperbólica

El quinto postulado fue cuestionado por un período de más de 2000 años. Fueron numerosos los intentos de demostrar tanto que era posible deducirlo a partir de los cuatro primeros postulados como su independencia. Fue recién en el siglo diecinueve que matemáticos como Bolyai y Lobachevsky consideraron formalmente la posibilidad de un sistema geométrico sin el quinto postulado. Fue así como se dió lugar al nacimiento de las geometrías no euclidianas.(Courant, 2002).

La geometría hiperbólica fue elaborada por los matemáticos Bolyai y Lobaschevsky en el siglo diecinueve, está fundamentada en los cuatro primeros postulados de Euclides y un nuevo postulado que viene a sustituir el postulado original de las paralelas. En sus investigaciones de la teoría de las líneas paralelas, Lobachevski tomó un camino diferente. Habiendo comenzado por intentos de demostrar el postulado del paralelismo posteriormente advirtió que la reestructuración de uno de ellos conduce a resultados absolutamente inesperados. El postulado que viene a sustituir el quinto postulado original de Euclides es el siguiente: “a través de un punto fuera de una recta, en el plano determinado por éstos, se pueden trazar por lo menos dos rectas que no cortan a la recta dada”. (Courant, 2002).

Hoy en día la geometría hiperbólica está fundamentada más formalmente por, los cuatro primeros postulados de Euclides y el postulado siguiente : “Si una recta secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores, la suma de los cuales sea menor que dos ángulos rectos; las dos rectas, suficientemente alargadas se cortarán en el mismo lado”, cuya expresión equivalente sería que “por un punto exterior a una recta, pasan dos paralelas que separan las infinitas rectas no secantes de las infinitas secantes”. Según la definición clásica, las rectas no secantes son las llamadas, inicialmente, paralelas. Sin embargo suele hacerse una distinción dentro del conjunto de las no secantes, y denominar paralelas a aquellas que poseen ciertas propiedades espaciales. (Euclides, 300 a.C; Lascurain, 2005).

De las diversas corrientes geométricas que se produjeron, en esta investigación, se tomará como uno de los pilares teóricos a la Geometría de Lobachevski debido a que contiene y representa los fundamentos y la génesis del edificio hiperbólico.

La Geometría de Lobachevski

Nicoláii Ivánovich Lobachevski nació el primero de Diciembre de 1792 en Nizhni Nóvgorod. Cursó exitosamente sus estudios en la Universidad Kazán desde 1807 a 1811 disponiendo brillantes aptitudes para la matemática. Una vez culminados éstos, fue retenido en ella para catedrático, título que le fue concebido en 1816. Una fructuosa trayectoria universitaria lo caracterizó llegando a ser rector de la Universidad de Kazán, desempeñando esta función alrededor de 20 años. Su actividad científica dió a Lobachevski una fama mundial, inmortalizó su nombre con la creación de las geometrías no euclidianas que en la actualidad se le hace referencia a la Geometría de Lobachevski .(Smogorzhevski, 1978).

El 23 de febrero de 1826, en la sesión de ciencias fisico-matemáticas de la universidad de Kazán, Lobachevski intervino con un discurso en el que informó, por primera vez, sobre sus incursiones en geometrías no euclidianas. La primera exposición de los principios fundamentales de ésta, aparecida en prensa, fue la

memoria de Lobachevski titulada: *Sobre los fundamentos de la Geometría* publicada entre los años 1829-1830 en la revista Boletín de Kazán. (Smogorzhevski, 1978).

Los descubrimientos de Lobachevski no fueron concebidos por la mayoría de sus contemporáneos. Sus trabajos sobre Geometría fueron objeto de numerosos juicios negativos tanto en Rusia como en el extranjero. Las ideas de este gran sabio ruso eran demasiado audaces y diferían de los puntos de vista predominantes en la ciencia de la época. Precisamente por ésta razón fue que transcurrió mucho tiempo para que dichas ideas ganaran el debido reconocimiento, lamentablemente después de la muerte de su precursor. Lobachevki falleció el 24 de febrero de 1856. (Smogorzhevski, 1978).

El estudio de la Geometría de Lobachevski va a permitir, en primera instancia, vislumbrar los conceptos fundamentales de esta geometría con miras a realizar un futuro contraste con la Geometría Fractal.

Respecto a la génesis de sus axiomas

Con el objetivo de aclarar el rol que desempeñan los axiomas en esta investigación, se examinará de manera general algunos aspectos importantes del origen de esta geometría y su desarrollo axiomático.

Desde los inicios de la geometría en el antiguo oriente, en donde se practicaba la medición de longitudes, áreas, volúmenes y ángulos de los cuerpos más simples, se comenzó a elaborar principios de manera empírica que con el tiempo se fueron convirtiendo a círculos más amplios de objetos. Una vez alcanzada tal amplitud, se hizo necesario formular principios geométricos muchos más generales, hecho que determina el tránsito de la geometría de conceptos concretos a la geometría de conceptos abstractos. En síntesis, se tiene entonces que la primera fase del desarrollo de la geometría constituyó una ciencia de estructura empírica, ascendiendo de manera progresiva a estadios un poco más altos de la razón. (Alsin y Pérez, 2000; Smogorzhevski, 1978).

El desarrollo de la geometría se produjo en el momento en que se toma conciencia colectiva del hecho de que algunas proposiciones no requieren de argumentación empírica, ya que éstas pueden ser derivadas de otras proposiciones mediante deducciones basadas en las leyes de la lógica. Es entonces cuando se genera una ruptura en lo que concierne a las proposiciones geométricas. Se comienza entonces a diferenciar entre las proposiciones establecidas por vía práctica, llamadas más adelante, axiomas y las demostrables mediante las leyes de la lógica, posteriormente denominadas teoremas.(Alsin y Pérez, 2000; Smogorzhevski, 1978).

Por el simple hecho de no requerir instrumentos especiales de elaboración compleja, ni numerosas mediciones que rayan en el tedio, la argumentación con fundamento lógico en geometría, es considerablemente más simple que la geometría empírica instrumental. En la antigüedad, los sabios se plantearon el objetivo de reducir al mínimo el número de proposiciones del primer género y trasladar el análisis geométrico a la esfera del raciocinio lógico. Este objetivo resultó ser factible, ya que la geometría se puede abstraer de las propiedades evidentes de los cuerpos, propiedad tan esencial y tan simple que toda clase de relaciones geométricas pueden ser deducidas de un número reducido de proposiciones de tipo axiomático usando las leyes de la lógica. (Smogorzhevski, 1978).

Así fue entonces como la geometría pasó de ser una ciencia empírica a una ciencia deductiva. La primera exposición organizada y sistemática de los trabajos geométricos realizados en la antigüedad fue Los Elementos de Euclides. El esquema de construcción de esta obra es el siguiente:

Definiciones
Postulados
Axiomas
Teoremas
Demostraciones

Cuadro 2.1: Estructura de los Elementos

Fuente: Elaboración Propia

Para abordar en cierto grado la estructura de Los Elementos, es necesario incursionar un poco sobre los constituyentes. La palabra definición, en latín definire que es a su vez delimitar, determinar, es la operación por la cual se determina la comprensión de un concepto a través del establecimiento de su género, clase y características esenciales. Según Aristóteles la definición indica el qué es o también la esencia específica de la cosa y establece el procedimiento clásico de la definición por el género y la diferencia específica. (Euclides, 300 a.C.; Florián, 2002).

El postulado es una proposición que se admite pero que no es ni evidente por si misma ni demostrable, mientras que al axioma se le llama a las proposiciones autoevidentes que se admiten como verdaderas sin necesidad de demostración y son el punto de partida de la teoría deductiva. Según Aristóteles en su teoría de la ciencia demostrativa establece que la demostración procede a partir de premisas indemostrables pero que se asumen como verdaderas, como son los axiomas o nociones comunes, las definiciones y los postulados.(Euclides, 300 a.C.; Florián, 2002).

Teorema, derivada del latín *theorema*, consiste en una proposición que afirma una verdad demostrable de manera lógica a partir de axiomas, nociones comunes, definiciones, postulados o de otros teoremas que fueron demostrados con anticipación. Mientras que demostración, es el nombre que se le asigna al proceso de razonamiento con el que se establece la verdad de una proposición a partir de premisas que se consideran verdaderas, como axiomas, nociones comunes, definiciones, postulados o de otros teoremas que fueron demostrados con anticipación.(Euclides, 300 a.C.; Florián, 2002).

Todo el saber geométrico que había hasta alrededor de los años 300 A. C. se estructura de manera ordenada y axiomatizada en *Los Elementos*, estructura que en los siguientes años iría a moldear el pensamiento geométrico de la mayoría de los individuos involucrados en el saber científico. Esta manera de concebir la geometría es lo que comúnmente conocemos como geometría euclidiana, cuyos pilares son una serie de definiciones y postulados, incluidos en la estructura expuesta anteriormente, que son puntos de partida para todo el edificio geométrico que se pretenda construir.

Los postulados y las nociones comunes o axiomas como se dijo anteriormente, son proposiciones que se admiten sin demostración, de las cuales los axiomas son afirmaciones generales, válidas en todas las ciencias, cuya evidencia las hace generalmente aceptables, mientras que en los postulados la evidencia no es tan pronunciada como en las nociones comunes, por esa razón, se postulan, o se pide que se acepte.

Las definiciones fundamentales de la geometría euclídea constituyen proposiciones que tienen como objeto, introducir un determinado concepto geométrico; carecen de explicación y de ejemplo alguno. Además la definición de cada uno de los objetos matemáticos expuestas en *Los Elementos*, no implican su existencia.

El problema del quinto postulado

La certeza del postulado del paralelismo de Euclides no suscitaba dudas. La duda respecto a este postulado radicaba en lo siguiente: ¿Era justo haberlo incluido en la categoría de postulados? ¿No sería posible demostrar esta proposición con ayuda de otros axiomas de la misma obra y de esta manera incluirlo en la categoría de teorema? En inicio los primeros intentos de demostrar el postulado de paralelismo reflejaba la tendencia a disminuir el número de proposiciones geométricas que requerían de fundamentos empíricos, pero con el trascurso del tiempo, se varió un poco la perspectiva, se hacía caso omiso al origen experimental de los postulados y estos se empezaron a interpretar como evidentes en si mismas e independientes de cualquier experimento.

Esta costumbre, engendró un enfoque en el que se daba seguridad de la complejidad del postulado de paralelismo, posteriormente se llega a la certeza de que la proposición en juego no se trataba realmente de un postulado y por consiguiente se podría encontrar una demostración de la afirmación contenida en él. Sin embargo numerosos esfuerzos se realizaron sin dar resultado positivo alguno, los intentos de demostrar este postulado fueron condenados al fracaso y exigieron el consumo

enorme de trabajo intelectual de numerosas generaciones de sabios.(Smogorzhevski, 1978).

Para el quinto postulado o postulado de las paralelas existen muchos enunciados equivalentes uno de ellos, reformulado por Claudio Ptolomeo aproximadamente en el siglo II a.C. , es “Dada una recta y un punto exterior a la misma solamente puede trazarse una paralela”. Desde un principio este postulado se tornó un tanto ambiguo, ya que la estructura de la proposición era muy similar a un teorema y fue durante mucho tiempo el punto más vulnerable de crítica a este cuerpo teórico. Es muy probable que este postulado haya originado muchas dudas incluso desde los tiempos de Euclides, esto se ve reflejado en la estructura propia del libro los elementos ya que en él se demuestran alrededor de treinta proposiciones, antes de aplicarlo en alguna determinada demostración, ofreciendo así un cuerpo geométrico absoluto, totalmente independiente de éste. Es posible que Euclides haya considerado como opción correcta adicionar éste postulado al conjunto de teoremas; cosa que los matemáticos menos aferrados a la lógica consideraban inconcebible, por el hecho de admitir como verdad no demostrada a una propiedad que para ellos estaba incluida en la naturaleza de la línea recta, esta última implícita en los postulados anteriores. (Babini, 1974).

Este hecho desencadenó que durante siglos se intentara deducir el quinto postulado de los otros cuatro; esfuerzos que siempre fracasaron. En la antigüedad existen registros de personas, que apoyándose en la idea que que el quinto postulado era independiente de los cuatro anteriores, hicieron considerables intentos de prescindir de este postulado o sustituirlo por algún otro enunciado. Un ejemplo de esto, es un comentario hecho por Proclo, comentarista de la obra de Euclides nacido en el año 410 a.C., quien expresó que ese postulado de Euclides debía “ser absolutamente eliminado de los postulados” y para ello ofreció una demostración propia e informa que ya Ptolomeo había hecho un intento similar. Los matemáticos árabes y occidentales del renacimiento y la edad moderna siguieron haciendo intentos similares a los anteriores, intentos que llevaron a enunciar postulados equivalentes al postulado original de Euclides, algunos un poco más simples y otros más intuitivos.

Ya para el siglo XVIII se retoman los esfuerzos asumiendo como base la hipótesis de la falsedad del quinto postulado, proceso que inició Gerolamo Saccheri (1677-1733) con la esperanza de que mediante la reducción al absurdo, el estudio condujese a una contradicción. No sucediendo así, Gauss es el primero que llega a afirmar que el hecho de prescindir del quinto postulado en la construcción geométrica no conduce a ninguna contradicción.(Babini, 1974).

El tipo de demostración clásica y errónea que se acostumbraba en ese entonces partía de enunciar y sustituir al postulado de paralelismo por una proposición equivalente como la que se muestra a continuación:

> La perpendicular y la oblicua respecto a una misma recta se cortan; o, existe un triángulo semejante a un triángulo dado pero no igual a éste;o, el lugar geométrico de dos puntos equidistantes de una recta dada, si se encuentran a un mismo lugar de ésta, es una recta; o, a través de cualesquiera tres puntos se puede trazar o bien una recta o bien una circunferencia.(Smogorzhevski, 1978.pp.15)

Lobachevski tomó otro camino en las investigaciones que tenían que ver con la teoría de las líneas paralelas. No es necesario esconder que comenzó demostrando el postulado del paralelismo, pero su razonamiento lógico aplicado al sistema de postulados pronto lo llevó a resultados totalmente inesperados. Esto último consistió en la aplicación reiterada del método de reducción al absurdo, que planteaba la siguiente consideración : Si el postulado de paralelismo de Euclides es resultado de los otros postulados y axiomas de Los Elementos y si, sin embargo, se admite que a través de un punto fuera de una recta, en el plano determinado por estos, se pueden trazar por lo menos dos rectas que no cortan a la recta dada, resultará ser que tarde o temprano esta suposición en lo inmediato o en lo lejano, conducirá a una contradicción. (Smogorzhevski, 1978)

Mientras tanto, analizando los nuevos resultados de la admisión hecha por él, que desde el punto de vista de la geometría euclidiana resultaba paradójico, Lobachevski no mermaba en insistir que con estos hallazgos se podía formar un sistema lógico no contradictorio de teoremas capaces de construir una base para una nueva teoría científica.

Así fue fundamentada la geometría no euclidiana, la novedad estaba en la reestructuración del postulado de las paralelas, coincidente con lo citado anteriormente, que luego pasó a llamarse, el postulado del paralelismo de Lobachevski.

Sin embargo, no quedaba claro si se podía afirmar con seguridad que ninguno de los resultados consecuentes del postulado de las paralelas de Lobachevski conduciría a una contradicción. Lobachevski fija también la solución a este problema. Señaló que las contradicciones de la geometría descubiertas por él deben deducirse de la posibilidad de la aritmetización, es decir, de la posibilidad de reducir la solución de cualquier problema geométrico a cálculos aritméticos y transformaciones analíticas, utilizando para ello las fórmulas de la geometría hiperbólica deducidas por él mismo.(Smogorzhevski, 1978)

En toda ciencia los conceptos fundamentales tienen mucha importancia. En la geometría euclidiana, los conceptos fundamentales son, el punto, la recta y el plano. Estos conceptos fundamentales se extrapolan a las geometrías no euclidianas y se explican a continuación. La recta en la geometría de Lobachevski se entiende como la línea por la que se mide la distancia mas corta entre dos puntos. El plano en la geometría de Lobachevski se entiende como la superficie que cumple con la siguiente propiedad: si dos puntos de una recta pertenecen a esta superficie, resultará ser que todos los puntos restantes de esa misma recta pertenecen a esa misma superficie.(Smogorzhevski, 1978)

Esta terminología es completamente oportuna, ya que en cualquiera de las geometrías que se esté trabajando, la recta es la línea mas simple, así como el plano es la superficie más simple. Como resultado de las investigaciones de Lobachevski se dejó sentado que no sólo son concebibles las superficies con propiedades no euclidianas sino que también se pueden realizar interpretaciones en espacios no euclidianos tridimensionales. Así pues, Lobachevski se volcó de nuevo a la geometría experimental desde los axiomas y postulados como proposiciones que constatan las propiedades geométricas fundamentales del espacio.

Para concluir se señalará la importancia del estudio exhaustivo de los conceptos fundamentales de la geometría de Lobachevski. Antes de Lobachevski, durante muchos siglos, reinaba en la geometría desde el punto de vista idealista que representado por Platón, atribuyendo a los postulados del sistema euclidiano un carácter absoluto, negando su procedencia de lo experimental. Lobachevski rompió categóricamente con este punto de vista y retornó la geometría a las posiciones del materialismo.

Actualmente es imposible considerar resuelta de manera definitiva la cuestión que respecta a la estructura geométrica del espacio físico real. Sin embargo se señalará posteriormente que la teoría de la relatividad y la teoría fractal, basándose en numerosos datos, consideran que el espacio real no es euclidiano y que además, por sus propiedades geométricas, es mucho más complejo que el espacio descrito por Lobachevski.

Modelos de la geometría hiperbólica

Para mostrar la consistencia de una nueva geometría no es necesario deducir una gran cantidad de teoremas no euclidianos, en vez de eso se ha aprendido a construir modelos de tal geometría que satisfacen todos los axiomas de Euclides excepto el postulado de las paralelas. Así como el plano Euclídeo se presenta con los puntos y rectas usuales, para representar el plano hiperbólico existen diferentes modelos. Estos son: El modelo de Klein, el disco de Poincaré, el semiplano superior de Poincaré y el modelo de Lorentz o hiperboloide. Las características generales de estos modelos son las siguientes:

Modelo de Klein.

Es también conocido como disco proyectivo y representa al plano como el interior de un circulo, y las rectas como cuerdas del circulo.

El disco de Poincaré.

Representa al plano como el interior de un círculo, pero las rectas están representadas por arcos de circunferencia ortogonales a la circunferencia borde, y a los diámetros de dicha circunferencia.

El semiplano de Poincaré.

Este modelo toma como plano, a un semi plano abierto del plano Euclídeo. Cada recta es la intersección de una circunferencia o de una recta perpendicular al borde de dicho semiplano, con el semiplano de Poincaré.

Modelo de Lorentz.

En este caso se utiliza la hoja de un hiperboloide en revolución. Los puntos son clases de equivalencia de vectores que satisfacen una determinada forma cuadrática y las rectas, lo que resulta de la intersección de ciertos planos con el hiperboloide. (Courant, 2002).

Con toda esta indagación referente a la Geometría de Lobachevski, se tendría identificado, de manera sintetizada, los conceptos fundamentales de la geometría hiperbólica; conceptos que posteriormente se someterán a contraste con sus homólogos en la geometría fractal con el objetivo de vislumbrar posibles puntos de enlace.

La Geometría Fractal

La teoría fractal se expondrá en tres bloques. El primero es una historiografía, el segundo es el abordaje de algunos conceptos involucrados en la fractalidad y por último, se mostrarán algunas definiciones importantes que constituyen la geometría fractal.

Historiografía de los fractales

El término fractal etimológicamente viene de la palabra del latín *Fractus*, que significa fracturado, roto, irregular. Como concepto matemático se le atribuye a

Benoit Mandelbrot, quien en sus trabajos para la empresa International Business Machines (IBM) en la década de los setenta, define con el término de fractal a algunos objetos matemáticos representables geométricamente, los cuales gozan de características como lo son la autosimilaridad (exacta, aproximada o estadística), su dimensión no necesariamente son números naturales y se definen mediante un algoritmo recursivo. Sin embargo los primeros objetos fractales representados geométricamente fueron concebidos por el matemático francés Henri Poincaré en el año 1890, idea que fue posteriormente desarrollada por los matemáticos Gaston Julia y Pierre Fatou en el año 1918. Sin embargo el primer fractal conocido fue creado o descubierto, según sea la tendencia filosófica, por el matemático Karl Weirstrass en 1861. (Aguirre, 2002)

Otro conjunto que en la actualidad es considerado como un fractal es el polvo de Cantor, llamado así por ser introducido por el matemático Georg Cantor en 1883. Para construirlo se parte de un intervalo cerrado, se divide en tres partes iguales y se elimina la del medio obteniendo un conjunto, que es la unión de los dos intervalos cerrados disjuntos. Con cada uno de los intervalos que se forman, se repite el mismo proceso obteniéndose una sucesión de conjuntos cerrados. Comparado con otros ejemplos el conjunto de cantor no resulta muy atractivo, su imagen termina siendo un conjunto de puntos dispersos que se distribuyen a lo largo del intervalo [0,1], pero ciertas características esenciales que se describirá posteriormente lo hacen ser un conjunto fractal.(Aguirre, 2002).

Para el año de 1904 Helge Von Koch define una curva que lleva su nombre, mostrando un ejemplo de una curva continua que no es diferenciable en ninguno de sus puntos. La curva se construye comenzando con un segmento rectilíneo. En la primera etapa, el segmento se divide en tres partes iguales y se sustituye la parte central por un triángulo equilátero sin la base. En la segunda etapa se repite el proceso anterior con cada una de los cuatro segmentos. Luego, iterando este proceso se obtiene la curva de Koch. (Estrada, 2004)

La aparición de estos primeros objetos matemáticos con características atípicas produjo ciertas inconsistencias en el momento en que comenzó el estudio de

los conceptos y definiciones, relacionando con estos nuevos entes con características muy particulares que sustentan la morfología espacial de los objetos matemáticos, que hasta ese entonces eran aceptados en la comunidad científica.

La matemática clásica está enraizada en las estructuras regulares de la geometría de Euclides y en la evolución continua de características de la dinámica de Newton. La matemática moderna empezó con la teoría de conjuntos de Cantor y la curva de Peano que llena el plano. Desde el punto de vista histórico, la revolución se produjo al descubrirse estructuras matemáticas que no encajaban en los patrones de Euclides y Newton. Estas nuevas estructuras fueron consideradas patológicas, como galería de monstruos, emparentadas con la pintura cubista y la música atonal, que por aquella época trastornaron las pautas establecidas en el gusto artístico. (Mandelbrot, 2009)

Sin embargo, la geometría fractal no es una aplicación directa de la matemática del siglo XX. Es una nueva rama nacida tardíamente de la crisis de la matemática que comenzó Dubois Reymond en 1875, llamando la atención por primera vez con una función continua y no diferenciable, construida por Weierstrass. Dicha crisis duró aproximadamente hasta 1925, siendo los principales actores Cantor, Peano, Lebesgue y Hausdorff. Estos nombres, así como los de Besicovitch, Bolzano, Césaro, Koch, Osgood, Sierpinski y Urysohn, no suelen aparecer en el estudio empírico de la naturaleza, pero es probable que el impacto de la obra de esos gigantes, de alguna manera, desviaron los objetivos que se propusieron inicialmente algunos investigadores subsecuentes.

Algunos conceptos involucrados en la geometría fractal

En numerosas áreas de la investigación, la comunidad científica ha solventado numerosos problemas en los que se le hace corresponder un modelo matemático clásico a un fenómeno natural como primera aproximación. Esta primera aproximación generalmente se modifica en procesos subsiguientes añadiendo términos correctivos. Pero este tipo de análisis, en la actualidad se está tornando

insuficiente. En una gran cantidad de dominios abordados en la actualidad, la realidad se revela tan convulsionada, que el modelo continuo clásico, y perfectamente homogéneo fracasa, de tal manera de quedar inutilizado como primera aproximación. (Mandelbrot, 2006).

La Geometría Fractal la constituyen dos pilares fundamentales: el primero se caracteriza por la elección de problemas en el núcleo del caos de la naturaleza y el segundo se caracteriza por la elección de herramientas en la esencia de las matemáticas para buscar su aplicación directa, dejando al lado esas ansias de buscar en la belleza clásica la razón única para describir un fenómeno natural mediante un modelo matemático.

Estos dos pilares fundamentales ha traído como consecuencia algo nunca antes visto, ha sumergido a muchos científicos en un mundo que oscila entre el caos incontrolable y el orden excesivo de Euclides. Se genera entonces un nuevo ambiente, una nueva zona, una zona de orden fractal.

La piedra angular que fundamenta el estudio de la racionalidad conceptual, está descrita en la siguiente cita:

> La geometría de la naturaleza es caótica y está mal representada por el orden perfecto de las formas usuales de Euclides o del cálculo diferencial.(Mandelbrot,2009.pp.17)

Es entonces cuando surge la necesidad de adentrar en un análisis de los conceptos geométricos fundamentales.

De las curvas, de la continuidad y la intuición

Se estudia un enfoque en donde las funciones en espacios de dimensión n que son derivables constituyen un conjunto muy simple y fácil de manejar, pasando a ser una excepción dentro del conjunto general de funciones. En otras palabras, aquellas curvas que no admiten tangente en ninguno de sus puntos, serían la regla, mientras que las curvas regulares y suaves son casos extremadamente particulares; dejando a

un lado el mero ejercicio intelectual, artificial estéril y llevar a la práctica ese deseo inconsciente de rigor perfecto. (Mandelbrot, 2006; Mandelbrot 2009).

Se pudiera dar el caso en los que el hecho de utilizar una función no diferenciable resulte más simple que utilizar una función clásica que si lo fuera. En este caso, se habrá corroborado el valor práctico del estudio matemático de los continuos irregulares.(Mandelbrot, 2006; Mandelbrot 2009).

La naturaleza de una curva irregular o una curva sin tangentes escapa completamente de la intuición; después de una serie de repeticiones del proceso de segmentación, la figura que va resultando es tan complicada que la intuición a duras penas puede captarla, y se pierde de vista totalmente en lo que respecta a la curva que se obtiene pasando al límite.

De las formas y los espacios

En la topología, llamada antes, geometría de la posición o *análisis situs*, se trabaja con otras clase de formas y semejanzas distintas a las que se acostumbra a manejar. Por ejemplo, todas las tazas tienen la misma forma, pues suponiéndolas infinitamente flexibles y compresibles, se puede transformar una en otra sin saltos ni discontinuidad alguna y sin tener que abrir ningún agujero nuevo, ni cerrar otro que ya existiera.

De la misma manera, todas las costas geográficas de todas las islas tienen la misma forma, topológicamente igual a la del círculo. Es decir, la topología, que es donde supuestamente se analizaban las formas de manera más compleja, no es capaz de distinguir entre distintas costas. Además, distintas costas tienden a tener, lo que llamaremos posteriormente dimensiones fractales diversas. Las diferencias en la dimensión fractal reflejan diferencias de forma en un aspecto no topológico. Es entonces cuando se propone hablar de formas fractales.

Como dato histórico adicional, se puede acotar que en el caso de la topología, la definición propia de la disciplina y la definición de dimensión topológica, se fueron

gestando y perfeccionando en paralelo; mientras que la dimensión fractal es anterior en más de medio siglo a los primeros estudios formales de las formas fractales.

De la dimensión

La noción intuitiva de dimensión física nace de un concepto griego derivado de la relación entre las figuras y los objetos , en donde la palabra figura, se refiere a idealizaciones matemáticas y la palabra objeto se refiere a datos de la realidad. En este sentido, la dimensión física tiene inevitablemente una base pragmática y por tanto subjetiva, dependiendo en la totalidad de los casos del grado de resolución al momento de advertir la realidad. El resultado numérico de la dimensión depende de la relación entre el objeto y el observador; donde un observador ve una zona bien definida con una dimensión efectiva característica, un segundo observador pudiera no ver más que una zona gradual, con interpretación confusa y cuyo estudio tal vez no merezca la pena.(Courant, 2002; Mandelbrot, 2006).

El concepto de dimensión fractal no es tan nuevo, de hecho forma parte de un tipo de matemática creada y estudiada entre los años 1875 y 1925. El hecho de que una curva sea fractal, no implica que deba tener siempre dimensión fraccionaria. Por ejemplo, la trayectoria del movimiento Browniano es una de las curvas mas simples dentro del análisis fractal, sin embargo se han propuestos modelos para este tipo de movimiento en donde se describe a esta trayectoria como una curva continua de dimensión fractal 2.(Mandelbrot, 2009).

El concepto geométrico clásico que se tiene derivado de la geometría elemental enseña que una figura de dimensión cero tiene forma de punto aislado o de un conjunto de puntos finitos y dispersos. Figuras de dimensión 1 son todas aquellas curvas clásicas y en particular las líneas rectas. Una superficie cualquiera o un plano en su defecto tiene dimensión 2. Un sólido o en su defecto un cubo, tiene dimensión 3.(Courant, 2002; Mandelbrot, 2009).

Una vez expuesto lo anterior y con el fin de conceptualizar el lenguaje geométrico se puede decir que,una figura cuya dimensión esté entre 1 y 2 ha de ser

más deshilada y traslucida que una una superficie ordinaria pero más maciza, más densa y más consistente que una línea ordinaria. El concepto clásico en donde una curva tiene superficie nula y longitud infinita se ve modificado. En este estudio se deja mostrar la existencia de casos en donde la longitud entre dos puntos cualesquiera de una curva finita, es infinita.(Mandelbrot, 2006).

Sabiendo esto, en contraposición a lo que se viene entendiendo como dimensión de un punto, de una curva y de una superficie, en este estudio, se abordan conceptos como el siguiente: Existen ciertas curvas planas de una irregularidad tal, que su dimensión fractal es un número mayor que 1 y menor que 2; de la misma manera, existen superficies tan irregulares que su dimensión fractal se encuentra en el intervalo comprendido entre 2 y 3; por último se definen a los polvos como un lugar geométrico contenido en una línea recta cuya dimensión fractal se encuentra entre 0 y 1.

Además de los conceptos matemáticos inherentes a la dimensión topológica y la dimensión fractal, existe un concepto transitorio y de sedición llamado dimensión efectiva. Un concepto que carece de precisión pero es clave para el esbozo teórico. Se trata de un regreso potente a la intuición geométrica griega arcaica de los pitagóricos.

La dimensión efectiva tiene que ver con la relación entre los conjuntos matemáticos y los objetos reales. Así por ejemplo en la descripción de un hilo las teorías unidimensionales y tridimensionales deben modificarse con términos correctivos, y sólo a posteriori puede decirse qué modelo geométrico es el mejor, es decir, el que precisa menos correcciones. La dimensión efectiva, tiene una base subjetiva. Es una cuestión de aproximación y de grado de resolución.(Mandelbrot,2006).

La mayoría de los objetos a los que se hace referencia en esta investigación presentan una sucesión de dimensiones efectivas distintas. Pero se añade una novedad esencial. Se plantea la novedad de que ciertas transiciones mal definidas entre sectores de dimensión bien definida son reinterpretadas como sectores fractales, en los que la dimensión fractal es siempre mayor o igual que la dimensión topológica.

Los primeros vestigios del concepto de dimensión fractal fueron generados de una diversidad de procesos y métodos de medida de la longitud de una costa geográfica desarrollados por un conjunto matemáticos desde 1901 hasta 1960, cada método corresponde a una definición de dimensión; definiciones ya usadas en matemática pura pero sin ninguna pretensión de aplicación a la realidad concreta.(Mandelbrot, 2006).

Durante la crisis que va de 1875 a 1925, los matemáticos se dieron cuenta que no es posible una comprensión correcta de lo irregular y lo fragmentado, si se define la dimensión como número de coordenadas. El primero en emprender un análisis riguroso fue Cantor en su carta a Dedekind, fechada el 20 de junio de 1877. Le siguió Peano en 1890, y los pasos finales datan de la década de 1920.(Courant, 2002; Mandelbrot, 2009).

Como todos los grandes procesos intelectuales, el final de esta historia admite diversas interpretaciones. Cualquiera que escriba un tratado matemático sobre la teoría de la dimensión, está asumiendo que dicha teoría es única. Pero en este trabajo, una de las cosas que se pretende mostrar es que para Mandelbrot lo más importante es que un concepto amplio como el de dimensión presenta diversas facetas matemáticas que, aparte de ser conceptualmente distintas, dan distintos resultados numéricos.

Es inevitable usar varias clases de dimensión, Euclides sólo se limita a conjuntos para los que distintos tipos de dimensiones útiles, coinciden en número, así pues podríamos llamarles conjuntos dimensionalmente concordantes. En este marco, se expondrán conjuntos para los que las distintas dimensiones no coinciden; a los cuales se les llamará conjuntos dimensionalmente discordantes.(Courant, 2002, Mandelbrot, 2006; Mandelbrot 2009).

Al pasar de los conjuntos matemáticos a las dimensiones efectivas de los objetos físicos modelizados por dichos conjuntos, se encuentran con otros tipos de ambigüedades, inevitables e imprescindibles. Poco a poco se ofrecerán distintas visiones de los aspectos matemáticos y físicos de la dimensión.

El hecho de que los fractales elementales sean dimensionalmente discordantes, puede servir para dar contenido matemático al concepto hasta ahora

intuitivo de fractal. Se mostrarán dos conceptos que asignan a cada conjunto del espacio euclidiano ,sin tomar en cuentas sus características patológicas, un número real que por razones intuitivas y formales merece ser llamado su dimensión.

El más intuitivo de dichos conceptos es la dimensión topológica y se denotará por Dt . La segunda dimensión, es aquella formulada por Hausdorff y Besicovitch y se denotará por D. Siempre que se trabaje en espacios euclidianos, tanto Dt como D toman valores comprendidos entre 0 y E, pero hasta aquí llegan las analogías. Dt siempre es entero, pero D no necesariamente lo es. Así, ambas dimensiones no tienen por que coincidir. De hecho, sólo se rigen por la desigualdad de Szpilrajn, que establece que D es mayor igual a Dt y D es igual a Dt para todas las figuras euclidianas, pero casi todos los conjuntos en este trabajo, satisfacen que D es mayor o igual que Dt.

De la homotecia

Diversos objetos naturales se caracterizan por poseer cierta complicación y desorden e irregularidad cuando se trata de caracterizarlos como figuras geométricas. Sin embargo existe un orden subyacente, los grados de irregularidad correspondientes a la percepción a distintas escalas parecieran ser aproximadamente iguales.

El análisis de los contornos de algunos objetos naturales, arroja que la mayoría de las características y detalles vistos a una escala, se vuelven a repetir a una escala más aguda que la anterior y así sucesivamente a escalas subsiguientes. Se observa pues, que los contornos están formados por innumerables réplicas de formas y subformas de manera sucesiva. La iteración no pudiera continuarse indefinidamente, pero se puede ir muy lejos. En la lejanía, se encontrará que aunque las distintas formas observadas correspondientes a los sucesivos niveles de análisis sean completamente diferentes, en lo específico, poseen el mismo carácter global, es decir, los mismos rasgos genéricos. (Mandelbrot, 2009).

En otras palabras, la observación anterior induce a creer que independientemente de la escala, un mismo mecanismo pudo haber generado tanto los detalles pequeños como los detalles grandes de un objeto natural.

Otra manera de interpretar lo dicho anteriormente a manera de complemento, es construir la idea de un posible mecanismo en forma de cascada o artificio procesal por etapas, en donde cada etapa es capaz de engendrar detalles cada vez más pequeños que los que lo preceden.

Se dirá entonces que cuando cada pedazo de un objeto natural el homotético al todo, salvo algunos detalles que de los que de manera estadística eventualmente se decide pasar por alto, el objeto natural estudiado posee homotecia interna. La homotecia interna sólo tiene sentido estricto si no hay puntos coincidentes entre un nivel recursivo y el anterior, es decir puntos múltiples. En el caso de los objetos naturales, la homotecia interna hace que el azar tenga la misma importancia a cualquier escala. Sabiendo esto, si se aborda el concepto de homotecia, no tendrá ningún sentido hablar de niveles microscópico y macroscópico.

De la invariancia

Si se comienza por un ejemplo sencillo, se podría comentar lo siguiente. La distribución homogénea sobre la recta, el plano o el espacio tiene dos propiedades muy interesantes. La invariancia por traslación y la invariancia por cambios de escala. En los fractales, debe modificarse un poco el alcance de estas invariancias, en consecuencia se dirá que los mejores fractales son aquellos en los cuales se presenta el máximo de invariancia. (Mandelbrot, 2009).

La invariancia por cambio de escala se manifiesta una vez que se realiza un cambio de escala en un sector de una trayectoria fractal y éste permanece invariante en su forma; de esta manera se está en presencia de la invariancia a ciertos cambios de escala. En este caso se dirá que los fractales son escalantes.(Maldelbrot,2006; Mandelbrot, 2009).

La invarianza por traslación se manifiesta en el momento en que se observa que dos sectores cualesquiera de una traza de trayectoria fractal no necesariamente se pueden superponer de manera exacta. En algunos casos se pueden superponer en sentido estadístico. La mayoría de los fractales que se abordan en esta investigación son invariantes por traslación. (Mandelbrot, 2006).

Lo anterior expuesto contituye el concepto de autosemejanza, concepto más amplio que se manifiesta una vez que se está en presencia de un fractal que sea invariante por la transformación geométrica de semejanza, en el sentido ordinario. Luego, se dirá que es un fractal autosemejante.(Mandelbrot,2006; Mandelbrot, 2009).

De la autosimilitud

En el caso en que un objeto tenga la misma forma al cambiar la escala, aún y cuando se cambie la escala de manera reiterada, se dice que el objeto es autosimilar.(Mandelbrot,2006; Mandelbrot ,2009).

La autosimilitud es una idea que ya había sido sugerida en muchas ocasiones a lo largo de la historia. Por ejemplo, en el siglo XVII, el pensador alemán Gottfried Wilhem Leibniz (1646-1716) propuso que una gota de agua contenía todo un universo, que a su vez contenía gotas de agua más pequeñas; cada una de estas gotas encerraba a su vez un universo que tenía en su interior otras gotas de agua todavía más pequeñas y así sucesivamente. (Braun, 1996).

Esta autosimilitud y muchas otras cosas que surgieron, fueron desechadas con el tiempo ya que no se pudieron comprobar experimentalmente. En una gota de agua no hay ningún universo en el sentido propuesto por Leibniz. Fue hasta la década 1960 y de 1970 que Mandelbrot volvió a proponer esta idea, pero en un contexto completamente distinto de los anteriores. (Courant,2002;Mandelbrot, 2006;Mandelbrot, 2009).

Se ha demostrado que la autosimilitud se presenta en gran variedad de fenómenos y de situaciones muy diversas.

De la divergencia

Casi todos los casos que se abordan en esta teoría presenta la característica de divergencia. El concepto de divergencia consiste de manera informal en que si en algún caso se espera que una cantidad sea positiva y finita, al terminar el proceso en realidad resulta que se hace infinita o se anula. (Mandelbrot, 2006).

De la longitud

En 1961 el inglés L.F. Richardson presentó una serie de las mediciones experimentales que hizo de varias costas, fronteras y cuerpos geométricos regulares. En cada caso fue cambiado el valor de la unidad de medida de referencia; obteniendo valores de la longitud, en inicio, crecientes y luego se va haciendo casi constante.

En las figuras geométricas clásicas no ocurre lo mismo. Al ir aumentando la escala de observación no aparecen estructuras de tipo irregular que eran invisibles a escalas anteriores, ya que por definición, la línea que delimita a la figura carece de estas estructuras. (Braun,1996).

De las Tremas

En la geometría fractal, la palabra trema significa agujero y está en cierto modo emparentada con la palabra en latín *Termes*=Termita. Algunos fractales se caracterizan por poseer agujeros o huecos para los cuales no existe contra imagen en el dominio de la función.

De los grumos

En el proceso de formación de algunos fractales se puede percibir vacíos de materia que se conserva y se distribuye uniformemente en la plenitud del conjunto. Al conjunto negado de esos vacíos se le denomina grumo.

De los coágulos

El proceso de formación de grumos continua y converge hacia un conjunto que se denomina coágulo. De manera simultánea al conjunto negado del coágulo se le denomina suero.

Con lo descrito anteriormente, hemos sintetizado los conceptos fundamentales que se manejan en la teoría fractal propuestos por Mandelbrot(2009), cerrando el ciclo de indagación teórica correspondiente de los primeros tres objetivos de esta investigación.

Curvas y Definiciones fractales

A continuación se muestran algunas definiciones que se consideran importantes a la hora de emitir alguna aproximación teórica que requiera manejar los significados de algunos términos fractales.

El Polvo de Cantor

Cantor, fue un matemático alemán cuyo trabajo se orientó hacia la fundamentación rigurosa de la matemática. Como parte de su legado, en 1883 publicó un conjunto famoso que lleva su nombre, el conjunto de Cantor. Este conjunto es considerado generalmente como poseedor de propiedades paradójicas. Una de ellas es que el conjunto tiene infinitos puntos, si embargo su medida es cero. Fue obtenido por cantor cuando intentaba caracterizar lo que es un conjunto continuo, es decir, denso en todas partes. Cantor pensaba que todo conjunto perfecto debía ser continuo.

El conjunto de Cantor es perfecto pero no es denso en ninguna parte. Un conjunto perfecto es aquel que es igual al conjunto de todos sus puntos de acumulación.

El proceso de construcción del conjunto parte de dividir un segmento en tres parte iguales y suprimir la parte central. El conjunto iniciador puede ser un segmento de recta representado por el intervalo [0,1], y la primera etapa de construcción consiste en dividir a [0,1] en tres partes iguales y extraer el tercio central abierto. Luego se le quitan los tercios centrales abiertos a cada uno de los dos tercios restantes de la primera etapa y se continúa el proceso sucesivamente. A este conjunto también se le llama discontinuo de Cantor o Polvo de Cantor.

La curva de Koch

Esta curva fue creada por el matemático sueco Helge Von Koch en el año de 1904 como un ejemplo de una curva continua pero no diferenciable en ninguno de sus puntos, generada a través de construcciones geométricas elementales. Tiene longitud infinita pero encierra un área finita. No es una curva constituida por segmentos de recta a pesar de que en sus primeras etapas de construcción si lo está.

El proceso de construcción de la curva de Koch es dividir un segmento dado en tres partes congruentes, construir sobre el segmento central un triángulo equilátero cuya base sea precisamente este segmento central, por último suprimir la base. Lo que resulta del proceso anterior es una línea quebrada formada por cuatro segmentos de igual longitud, que se le llamará *generador*.

Una vez culminado el proceso anterior, se rompe cada segmento para sustituir en cada uno de los segmentos del generador otro generador de tamaño reducido en un tercio, para formar subpromontorios.

Si este mismo proceso en cascada continúa indefinidamente, la curva convergerá a un límite que fue considerado por primera vez por Von Koch en 1904 que se denomina curva triádica de Koch, denotada de forma abreviada por K. (Estrada, 2004; Mandelbrot, 2006).

Pareciera que la curva anterior tuviera rasgos intuitivos predominantes, pero la actitud en realidad es otra. Una curva no rectificable o sin tangentes escapa completamente de la intuición; después de unas pocas repeticiones del proceso de segmentación, la figura que va resultando es tan complicada que la intuición a duras penas puede captarla y se separa completamente de la intuición, en lo que respecta a la curva que se obtiene pasando el límite. Sólo el pensamiento, o el análisis lógico, puede seguir la evolución de ese extraño objeto hasta su forma final. Si en este caso hubiésemos confiado en la intuición, se hubiera caído en un error, pues al parecer la intuición nos lleva forzosamente a concluir que no puede haber curvas que no tengan tangente en ningún punto. Este primer ejemplo del fracaso de la intuición tiene que ver con los conceptos fundamentales de diferenciación.

Fractal

La definición de fractal se encuentra en proceso de construcción, de hecho, tuvo una primera aproximación hecha por Mandelbrot en su obra objetos fractales, definición que fue objeto de modificación hasta llegar a su última aproximación generada por el mismo autor en su obra La Geometría Fractal de la Naturaleza. En este último tratado a estos últimos conjuntos se les asigna el término fractal, de la siguiente manera: Un fractal se define como un conjunto cuya dimensión de Hausdorff-Besicovitch es estrictamente mayor a la dimensión topológica. Además, los conjuntos con D (dimensión fractal) no entera, son fractales.(Mandelbrot 2006).

Es algo significativo el hecho que D no tenga que ser necesariamente un entero. Si se usa el término fracción en sentido amplio, como sinónimo de número real no entero, entonces algunos valores de D que se expondrán en ejemplos posteriores son fraccionarios. A menudo se le llama dimensión fraccionaria a la dimensión de Hausdorff- Besicovitch, pero D también podrá tomar valores enteros. Para sintetizar lo anterior, se dirá entonces que D es una dimensión fractal.(Mandelbrot 2006).

Clases de dimensión fractal

Existen muchas definiciones y muchos métodos para calcular la dimensión. Dichos métodos implican de manera natural el concepto de dimensión. En los casos fundamentales, dichas definiciones dan valores idénticos. En otros, sin embargo, dan valores distintos.

Las definiciones de dimensión que se pretenden manejar, se estudiarán desde el punto de vista de los espacios métricos. Esto significa que se trabajará en un espacio en el que está definida convenientemente una distancia entre cada par de puntos.(Lipschutz, 1970; Mandelbrot, 2009).

La primera clase a exponer es la dimensión de de Hausdorff-Besicovitch. El concepto de la dimensión de Hausdorff-Besicovitch o dimensión fractal de contenido parte de la siguiente motivación intuitiva. Un contenido lineal se calcula sumando pasos de longitud n no transformados, es decir, elevado a la potencia 1 que es la dimensión de la recta. El contenido de una superficie formada por cuadros pequeños se calcula sumando los lados de los cuadrados elevados a la potencia 2, que es la dimensión del plano. En el caso de realizar un procedimiento de medida de contenido de una costa de forma aproximada, se pudiera ejecutar de manera implícita el método esbozado anteriormente con el fin de obtener una medida de contenido.

Para esto último, se pudiera hablar entonces de un proceso que consista en establecer una línea quebrada formada por pequeños segmentos de longitud n enteramente recubierta por la unión de círculos de radio n centrados en los puntos utilizados para la medida. Se elevaría entonces estos pasos a una potencia D para obtener un contenido aproximado. A continuación se constata que ese contenido, varía muy poco al variar la longitud de los pasos n para un determinado número D. Se sintetiza entonces un contenido aproximado en dimensión D. Para un número d menor que D el contenido calculado resultaría infinito, en contraparte si d es mayor que D el contenido se anula. Tenemos entonces que el contenido se comporta razonadamente para d igual a D. Es el valor D el que de ahora en adelante nos dará la idea de una nueva dimensión.

La segunda clase es la dimensión de homotecia generalizada. Supongamos que una figura se descompone en N partes tales que, dos a dos, no tienen ningún punto en común, pero que cada una sea deducible del total por una homotecia de razón r , seguida eventualmente de una rotación o una simetría. En el caso en que todas r sean idénticas, sabemos que la dimensión de homotecia es

$$D = \frac{\log(N)}{\log(\frac{1}{r})}$$

A fin de generalizar este concepto, consideremos :

$$g(d) = \sum_{n=1}^{N} r_n^d$$

como función de d; cuando d varia de cero hasta infinito g(d) decrece continuamente desde n hasta cero y pasa una y sólo una vez por el valor 1, entonces la ecuación g(d)=1 tiene una única raíz positiva que se designará por D, que generaliza la dimensión de homotecia.

Fractal(Sentido intuitivo): Adjetivo que refiere a la posesión de una forma sumamente irregular, interrumpida, o fragmentada, conservando estas características a cualquier escala de observación. La necesidad del uso de este término, surge de la toma de conciencia de Mandelbrot de que en la naturaleza existen numerosos objetos naturales cuyas mejores representaciones son conjuntos fractales, luego se hace necesario disponer de una palabra cuyo significado sea único en este tipo de situaciones.

Mandelbrot acuña el término fractal a partir del latín *fractus*. El verbo correspondiente es *frangere* que significa romper en pedazos . Es pues razonable que además de fragmentado *fractus* signifique también irregular, confluyendo ambos significados en el término fragmento. La palabra álgebra procede del árabe *jabara=unir*; sabiendo esto, fractal y álgebra son etimológicamente opuestos.

Fractal(Sustantivo): La palabra fractal como sustantivo, no distingue entre conjuntos matemáticos y objetos naturales, se emplea en los casos en que su

generalidad y ambigüedad deliberada que resulta de ellos, sean bien deseadas, aclaradas en el contexto y además no lleven inconvenientes asociados.(Mandelbrot, 2009).

Conjunto fractal(definición provisional): Conjunto cuya dimensión fractal es mayor o igual a su dimensión ordinaria topológica. Se pudiera tratar de definir también de la siguiente manera, un conjunto sería fractal si su dimensión D es un número real no entero, o bien D es un entero pero el conjunto es globalmente irregular. Podría suceder que perturbando un conjunto clásico en el entorno de un punto, su dimensión se haga fraccionaria, en este sentido si el análisis se realiza en un ambiente concreto el ejemplo anterior sería insostenible; es por eso que se hace difícil en estos momentos construir una definición formal de conjunto fractal.(Mandelbrot, 2009).

La asociación, conjunto fractal tiene una definición rigurosa, pero el fractal natural no, la cual sirve para designar sin demasiada precisión una figura natural que puede ser representada por un conjunto fractal. Por ejemplo, las curvas brownianas son conjuntos fractales y el movimiento browniano físico es un fractal natural.

Objeto Fractal: Objeto natural que resulta razonablemente útil representarlo matemáticamente mediante un conjunto fractal.

La Cascada: Es el término que se utiliza para referirse al mecanismo generador de un fractal. Cuando un trozo de figura es geométricamente semejante al todo, se dice que tanto la figura como la cascada que la produce son autosemejantes.(Mandelbrot, 2009).

Autosemejanza: un conjunto acotado S es autosemejante, con respecto a la razón r y un entero N, si es la reunión de N subconjuntos disjuntos, congruentes cada uno de ellos con r(s), siendo r(s) la transformación homotecia. Se entiende por congruente al ser idéntico exceptuando los procesos de traslación y rotación. Generalizando, un conjunto acotado es autosemejante, con respecto a las razones

$$r_{1,}r_{2,\dots,}r_{n}$$

cuando es la reunión de los N subconjuntos disjuntos congruentes respectivamente con rN(s). Un conjunto no acotado S se dice que es autosemejante con respecto a la razón r, cuando el conjunto r(s) es congruente con S.(Mandelbrot, 2009).

Autoafinidad: en un espacio euclidiano de dimensión n, una colección de razones reales positivas

$$r = (r_{1,} r_{2,\dots}, r_n)$$

define una afinidad, que transforma cada punto

$$x = (x_{1,} x_{2,\dots}, x_n)$$

en el punto

$$r(x) = r(x_{1,} x_{2,\dots}, x_n)$$

y transforma por lo tanto el conjunto S en el conjunto r(S). Un conjunto acotado S será autoafín con respecto a una razón r y a un entero N, si S es reunión de N partes disjuntas congruentes cada una de ellas con r(S). (Mandelbrot, 2009).

Con toda la información anterior han quedado descritos los elementos principales y definiciones que desencadenan en el sujeto una zona conceptual fractal, es decir, todo aquellos conceptos fundamentales constituyentes de la red conceptual fractal que se manejan al evocar la fractalidad; cumpliéndose de manera definitiva el objetivo número tres. Además se muestran definiciones de algunos términos, que actuarán como foco luminoso en la construcción de ciertas aproximaciones teóricas.

La Cognición Cuántica

Con el objeto de introducir la teoría que da sustento a este trabajo, se considerarán aspectos vertidos en una teoría bastante actualizada llamada Teoría de la Cognición Cuántica. Esta teoría explica los procesos cognitivos del ser humano desde un enfoque basado en la física cuántica, apoyada además, en el tratamiento de

tópicos que desarrollan la noción de caos, orden, complejidad, simplicidad y campos energéticos, con herramientas teóricas para el estudio de los sistemas complejos.(Fodor, 1999)

El objeto de esta investigación es fundamentalmente el estudio de los conceptos geométricos, por lo tanto, una breve explicación del origen del término es bastante útil en nuestro caso. La palabra concepto, tiene su raíz etimológica en el latín *conceptum*, que deriva de *capere*, es decir agarrar o capturar algo y se interpreta como las unidades que conforman el conocimiento, que estructurados en categorías pueden representarnos el mundo real de manera biunívoca. La categorización es un proceso clave de la mente humana, que le permite interactuar con la naturaleza que le rodea. Sin embargo si se pregunta por el ¿qué son los conceptos en sí mismos?, se entra en consciencia del limitado conocimiento que se tiene sobre ellos. De manera general, el concepto se define como una unidad cognitiva de significado, se define también como unidad de conocimiento o de manera más específica como constituyentes de los estados mentales, entendiéndose como estado mental a las relaciones existentes entre las representaciones. A través de su integración en clases o categorías, se produce el conocimiento. (Fodor, 1999).

Conceptos previos

En la actualidad, las aproximaciones hechas anteriormente han sufrido cambios de enfoque y han pretendido describir y dar respuesta a estas interrogantes mediante nuevas herramientas supeditadas a nuevas corrientes de pensamiento. Recientemente, el análisis de los sistemas complejos y la teoría de la complejidad han marcado la pauta en el recorrido que pretende explicar los procesos cognitivos. La Teoría de la Cognición Cuántica pretende dar respuesta al comportamiento y a la estructura de estos procesos, desde un enfoque energético basado en la teoría cuántica, introduciendo una gran cantidad de conceptos adicionales que permiten un mejor acople entre la teoría y el fenómeno. A continuación se expondrá un breve esquema que intentará explicar la conformación de la Teoría de la Cognición

Cuántica, así como también la definición de algunos términos necesarios para su comprensión. Primeramente, se tratarán algunos conceptos previos que se deben manejar para abordar esta teoría.

Los sistemas biológicos son garantes de fenómenos caóticos que aparentemente se ciñen a reglas estrictas. Sus estructuras son tan complejas y poseen tanta cantidad de variables implicadas que pareciera imposible hacer una predicción a un futuro siquiera relativamente cercano. Los procesos cognitivos, forman parte del sistema biológico del ser humano y no escapan de ese tipo de estructuras. Desde el punto de vista de la cognición cuántica, los procesos del pensamiento constituyen sistemas abiertos, es decir, sistemas que presentan abundante interacción con el medio ambiente, en donde el conocimiento no se produce en la estructura física de la célula, sino en el campo energético que trasciende la masa. Además el proceso tiene estructura dinámica y disipativa, esto es, aquellas estructuras que alejadas del estado de equilibrio desencadenan subsistemas caóticos que requieren de la existencia de la entropía para adquirir un nuevo estado de equilibrio; entendiéndose por entropía a ese proceso irreversible de liberación de energía (no transformada en trabajo) en un sistema biológico cualquiera. El incremento de la entropía se asocia generalmente al incremento del caos.(Mussa,2008).

Los Sistemas Complejos

Los sistemas complejos aquellos que describen un constante comportamiento imprevisisble, en su mayoría son inestables y se mantienen delicadamente equilibrados. Su principal característica es que cualquier variación mínima entre sus elementos constituyentes puede modificar de forma imprevisible la interrelaciones , y por tanto el comportamiento de todo el sistema. Además, se caracterizan por la intermitencia y fluctuación que permite una constante oscilación entre el orden y el desorden. Por último, sus estados evolutivos no trascurren a través de procesos continuos y graduales, sino que suceden por medio de reorganizaciones y saltos. Cada

nuevo estado es una transición, llamados también períodos de reposo entrópico. (Mussa, 2008).

Los Sistemas Caóticos

Son aquellos sistemas dinámicos no lineales que se comportan, en ciertas condiciones, de forma tan compleja que parecen probabilísticos, pero en realidad son determinísticos. A pesar de que a nivel local las reglas que rigen su comportamiento son aparentemente muy simples, el sistema a nivel global generalmente tiene un comportamiento inesperado y no predecible. Dependen de manera muy sensible de las condiciones iniciales. El caos que caracteriza a estos sistemas no es más que un desorden solamente en apariencia, tiene muy poco que ver con el azar, parecen evolucionar de forma estocástica, pero en realidad está supeditado a cierto orden subyacente.

Lo anterior hace suponer que en los procesos cognitivos, los estímulos ejercen y desencadenan efectos supeditados a leyes subyacentes que evidencian la existencia de sistemas caóticos. De la misma manera se observan estructuras jerárquicas de la construcción del conocimiento que responden a estructuras similares en escala y que se van diferenciando por su grado de abstracción, evidenciando así estructuras de tipo fractal que pasa a ser el nuevo constituyente fundamental del sistema caótico cognitivo.

Redes Complejas

La mayoría de los sistemas biológicos se pueden describir adecuadamente a través de redes complejas constituidas por Nodos y Enlaces como cualquier red. Los nodos constituyen organizaciones, puntos de convergencia de enlaces o puntos de concentración de energía y los enlaces simbolizan las posibles interacciones entre los nodos. Las redes complejas son aquellas cuya topología exhibe dos rasgos esenciales: el primero es que todo nodo está fuertemente conectado con muchos de sus vecinos

pero débilmente con algunos elementos aislados, el segundo es que entre los nodos existe una distancia muy pequeña. Lo anterior implica alta velocidad de transmisión entre dos elementos cualquiera de la red y que existe un número pequeño de nodos claves por donde circula un gran porcentaje de tráfico total. A aquellos sectores de red que poseen gran número de nodos con muchos enlaces, se les denomina concentrador.(Mussa,2008).

Sintergía

El cerebro de un ser humano interactúa con una matriz informacional o campo informacional que todo lo abarca y envuelve, en donde cada porción de ese campo contiene de manera sintetizada, toda la información. Es también llamado campo cuántico y se interpreta como una matriz hologramática que contiene la información de los objetos, más no su cualidad. Al cerebro interactuar con ese campo cuántico se inicia un procesamiento cerebral que arroja como producto la realidad perceptual, es decir, los objetos, las formas, los colores y las texturas. En otras palabras, el cerebro está encargado de decodificar ese campo cuántico y el resultado es la realidad que se percibe. (Mussa,2008)

La incapacidad del ser humano de entender este proceso genera una constante confusión que nos lleva a pensar que lo que resulta al final del proceso no es un producto creado por nosotros mismos. En el proceso de construcción de la realidad se genera un campo neuronal, que no es más que macrodistorsión generada por la interacción de todas las distorsiones particulares de cada neurona al pasar por este procesamiento cerebral. (Mussa,2008)

Para resumir, se puede decir que la sintergía propone que la realidad perceptual aparece como producto de la interacción de dos matrices, la matriz resultante de la actividad neuronal del cerebro y la matriz del campo cuántico.(Mussa,2008).

En esta investigación, se abordará el término percepción geométrica desde el enfoque sintérgico, así como también se asume que los procesos cognitivos se

desarrollan en campos energéticos. Lo expuesto constituye uno de los pilares fundamentales de la teoría de la cognición cuántica.

La complejidad

La complejidad descansa sobre tres pilares fundamentales que permiten una nueva concepción de la realidad vista como un tejido de eventos, acciones, interacciones y determinaciones que constituyen el mundo fenoménico. Estos tres pilares son: el principio dialógico, el principio de recursividad organizacional y el principio hologramático. (Morin,1994)

El principio dialógico consiste en mantener la dualidad en centro de la unidad, fusionar el orden y el desorden de manera simultánea, considerar aquellos enfoques antagonístas como complementarios. El principio de la recursividad organizacional consiste en observar la realidad como un proceso recursivo en donde los productos y los efectos son, al mismo tiempo, causas y productores de aquello que los produce. Esto, en contraposición a lo que clásicamente se asume como idea lineal de tipo causa -efecto, al momento de concebir la realidad. Y por último, el principio hologramático consiste en concebir la realidad como una matriz de información en donde no solamente la parte está en el todo, sino que el todo está en la parte.(Morin, 1997).

En esta investigación se considera muy importante el manejo de los principios de la complejidad al momentos de describir cualquier fenómeno que involucre la activación de procesos cognitivos que permitan construir conceptos de tipo geométrico.

Cognición cuántica

En esta sección se describirán aquellos aspectos constituyentes de una propuesta que pretende interpretar los procesos cognitivos desde la mirada de la física cuántica, considerando los procesos de generación de conceptos como la interacción permanente de campos de energía.

La cognición cuántica se concibe como una nueva propuesta de racionalidad, que aborda los procesos de construcción del conocimiento humano, en donde intervienen múltiples factores energéticos contenidos en diversas relaciones sistémicas que involucran al individuo y a su entorno. Esta nueva racionalidad se caracteriza por cumplir con ciertos parámetros que la definen como una nueva teoría de procesos cognitivos.

El primer aspecto que caracteriza el pensamiento cuántico es la existencia de una permanente consideración de que los conceptos opuestos se pueden unir sin perder diferenciación y particularidad; ambos pueden excluir y complementarse de manera simultánea. A este principio se le denomina principio de la duocomplementariedad y de la polaridad.

El segundo aspecto que caracteriza al pensamiento cuántico es que los procesos del pensamiento se auto-producen y auto-organizan, en un constante mecanismo de retroalimentación. A este principio se le denomina principio de la autopoiesis.

El tercer aspecto que caracteriza al pensamiento cuántico es el asumir que los sistemas están constituidos de tal manera que las partes están en el todo y al mismo tiempo el todo está en las partes, tal y como reza el principio hologramático de la complejidad.

El cuarto aspecto considera al aprendizaje como un continuo proceso de construcción oscilante entre el orden, el desorden y la organización. Este principio es llamado principio del caos.

El quinto y último aspecto que considera la cognición cuántica es el considerar de manera holística la fusión y el aporte constructivo tanto del análisis cualitativo como el análisis cuantitativo.

El aprendizaje según la teoría de la cognición cuántica

El aprendizaje cuántico se puede sintetizar en un proceso que se concibe como consecuencia de la interacción del individuo con un medio, determinado por cambios

energéticos cuali-cuantitativos que se generan en el sistema nervioso central , dejando espacio a múltiples asociaciones entre las sensaciones, que captadas desde el medio por el sistema sensoperceptivo generan cambios en las estructuras cognitivas, desencadenando un caos en los campos energéticos establecidos por los conceptos previos. Luego de generarse múltiples acoplamientos energéticos, se genera un nuevo campo conceptual a través de un proceso de entropía, que permite la llegada de un nuevo equilibrio energético. Esas sensaciones que captadas desde el medio por nuestro sistema sensoperceptivo se denominan *Incetivos Caotizantes.* (Mussa, 2008)

En esta investigación el aprendizaje y la asimilación de nuevas formas geométricas se enfocará desde el punto de vista descrito anteriormente. Esto se manifestará en el uso de nuevos términos y nuevas descripciones del fenómeno de adquisición de una nueva racionalidad geométrica.

Construcción del concepto desde la cognición cuántica

La generación de conceptos se enmarca dentro de varias instancias o momentos. El primero se denomina momento contextual, este es donde el medio ejerce sus incentivos, un segundo momento es el perceptual, este, está determinado por todos aquellos mecanismos sensoperceptivos, otro momento consiste en una instancia identificadora de las cualidades emocionales, luego un período de integración, modificación y acoplamiento a los campos energéticos de los conocimientos previos, y por último un momento de respuesta al medio generando, en la mayoría de los casos, transformaciones en él.

La luz y la construcción de los conceptos

Muchos experimentos evidencian el particular comportamiento de la luz. Su comportamiento es bastante complejo, dejando cabida a múltiples analogías con otros fenómenos que se manifiestan en la naturaleza. El fenómeno de elaboración del conocimiento humano, es un ejemplo de un proceso que a menudo tiende a ser

interpretado de manera análoga a algunos experimentos realizados en laboratorios de física cuántica. Esta sección describirá un enfoque particular que se aproximará a la interpretación de los procesos cognitivos; en particular a aquellos procesos encargados de la construcción de conceptos.

Un experimento realizado por el científico inglés Thomas Young en 1803 denominado el experimento de la doble rendija desencadenó la construcción de la teoría de las múltiples funciones de onda, la cual últimamente se ha tomado como analogía para interpretar los procesos cognitivos. En este experimento Young dejó en evidencia el comportamiento de la luz como onda. A continuación se explicará de manera breve el experimento realizado por Young y luego se hará un análisis que establece la relación existente entre el comportamiento de la luz y el proceso de construcción del conocimiento.

Si se coloca una fuente de luz delante de una pantalla con un orificio de forma rectangular, su proyección sobre una pared que se encuentra detrás de la pantalla sería una forma rectangular de bordes bien definidos que dividen la zona oscura de la zona iluminada.

Ahora bien, si se coloca una pantalla que sustituya a la anterior con un corte rectangular pero muy fino, no mas grueso que el filo de una navaja, con un paso o anchura comparable a la longitud de onda de la luz incidente, sobre la misma pared posterior se proyectará una imagen rectangular cuyos bordes resultarán un tanto borrosos. Esto se debe a que la ranura produce una interferencia sobre la onda de fotones que inciden en la pantalla; debido a que las dimensiones de las ranuras son comparables a la longitud de onda, restando grados de libertad espacio-temporales a la luz que incide en la pantalla.

Si ahora se toma como referencia el corte de la pantalla anterior y se realiza un doble corte para una nueva pantalla, ambos de igual dimensión y haciendo incidir nuevamente su rayo de luz sobre ella, se observarán varias imágenes de bordes imprecisos. La ranura proyectada aproximadamente en el centro es la que posee mayor intensidad, las ranuras laterales a esta van disminuyendo en nitidez. La proyección de mayor intensidad se encuentra desplazada del lugar respecto a la que se

proyectó, cuando la ranura era sola. Esto demuestra la existencia mutua de interferencia entre las ondas luminosas que se propagan a través de las ranuras.

De la misma manera, la esencia del fenómeno se observaría al hacer incidir en la pantalla un solo fotón en vez de un haz de luz. Se observará que si se emite el fotón sobre la pantalla de una sola ranura, éste, hará impacto en un lugar de la pared que es coincidente con la proyección de la ranura, sin embargo cuando están libres las dos ranuras, hace impacto en sector desplazado que en el párrafo anterior era el más iluminado.

Este experimento permite intuir que de alguna manera el fotón sabe cuando están dispuestas una sola ranura o las dos ranuras. Esto último visto desde la física cuántica se traduce como que las funciones de onda que acompañan al fotón lo anteceden y lo guían según el estado en que esté la pantalla. Esta función de onda es de naturaleza múltiple, es decir, marca distintas opciones de recorrido, selecionando una de ellas sin desconocer la existencia de otras.

Para asimilar lo anterior, se debe aclarar que el término función de onda descrito por el francés Louis de Broglie en 1926, se refiere, en un enfoque determinista, a la representación de una partícula en forma de onda física que se propaga en el espacio. Esto era lo que inicialmente se entendía como función de onda. En la actualidad, la función de onda se interpreta como un objeto más abstracto, representa un elemento de algún espacio de Hilbert de dimensión infinita que agrupa a los posibles estados de los sistemas.

Según la teoría de la cognición cuántica, existe una multiplicidad de funciones de onda que anteceden y marcan todos los caminos probables que sigue una porción de energía al propagarse, esto permite la detección a futuro de la condiciones del camino que se debe recorrer a través de un campo consciente, el campo cuántico, para que posteriormente el fotón actúe en consecuencia y decida un camino de propagación.

Según Schrodinger, descriptor de la ecuación de onda, la función de onda no solo acompaña el transcurrir de la masa, sino que la antecede, o lo que es lo mismo, la masa recorre el camino marcado previamente por la función de onda. Esto sería

válido tanto para los fenómenos macro como para los micro, es decir, es independiente de la escala si se expresa la idea en sentido fractal. Pero así, cuando a cada partícula le subyacen múltiples funciones de onda es también cierto que el camino a seguir no es determinista, sino que la función de onda solo pretende especificar la mayor o menor probabilidad que ocurra en tránsito por uno o varios caminos.

En este orden de ideas, es pertinente cuestionarse ¿de qué manera se puede establecer una analogía entre el fenómeno descrito anteriormente y los procesos cognitivos? Mussa en el año 2009 dice lo siguiente: “En el desarrollo de los procesos cognitivos también se manifiesta la múltiple función de onda, igualmente no se puede optar sino por una opción según el principio de incertidumbre”.

Esta afirmación presupone que las ondas mediantes la cuales el ser humano capta los mensajes, ingresan al sistema como campo magnético. Es decir, el conocimiento se incorpora como campo energético y se acopla a un sistema de campos energéticos generados por las neuronas que representan los conocimientos previos; y el incentivo caotizante guiado a través de las múltiples funciones de onda que las preceden, interactúan, se integran y se acoplan al campo neuronal. Así sucesivamente se va adquiriendo información en el sistema racional, para dar inicio al proceso de construcción y así generar un nuevo campo energético neuronal.

El inicio del proceso de construcción de conceptos se realiza en la región cortical, a medida en que los conocimientos se hacen cada más sutiles, los conceptos van transmutando para convertirse en estructuras más abstractas. Los conceptos son construidos con una materia prima que es proporcionada en su gran mayoría por los incentivos caotizantes que emergen desde el entorno.

Los campos energéticos neuronales.

El constituyente cerebral fundamental es la neurona y partiendo del hecho de que en el universo todo es energía, en esta sección se analizará la estructura neuronal

y la formación de campos energéticos como producto del proceso que se desarrolla al adquirir nuevos conocimientos, considerando el concepto de átomo más actualizado.

La neurona como estructura celular, está formada por moléculas biológicas y estas a su vez por átomos. Un átomo está constituido por un núcleo central formado por la aglomeración de neutrones y protones, a su alrededor giran electrones ubicados a distintos niveles energéticos y estos, a su vez, giran alrededor de su propio eje.

El movimiento rotatorio alrededor del núcleo y el movimiento rotatorio alrededor de su propio eje, llevan la dirección de los vectores gradientes generados por los campos energéticos en esas direcciones, las cuales son llamadas gradiente del átomo y gradiente de spin respectivamente.

A raíz del movimiento del electrón, este genera un campo electromagnético alrededor según la ley de Gauss la cual hace que el átomo en su totalidad genere un campo energético que trasciende su propia corporalidad. A este campo se denomina, *campo energético elemental* y se refiere al campo primordial con que se construyen las estructuras manifestadas en el campo cerebral.

Los átomos poseen cualidades energéticas que le permiten interrelacionarse con el entorno independientemente de su estructura interna, manteniendo una permanente fuidez con mecanismos de retroalimentación. Cada uno de ellos tiene consciencia de la presencia de los restantes a través de sus múltiples funciones de onda, los campos energéticos se acoplan para luego constituirse la molécula, la cual es a su vez generadora de un campo energético que responde a la integración de los campos individuales de cada átomo. Al campo energético generado por la molécula se denomina *campo energético parcelar.*

Una vez conformadas las moléculas biológicas, estas se agrupan para formar la célula neuronal. El proceso de interacción de los campos es similar pero a mayor escala , desde el punto de vista fractal. Los integrantes moleculares se relacionan mediante múltiples funciones de onda generando un nuevo campo consciente denominado *campo energético ancestral.*

Siguiendo la jerarquía funcional y organizacional, se puede decir que las células se reunen en estructuras más complejas en forma de órgano, que a su vez generan campos denominados *campos energéticos moleculares.*

Aquí se observa a la fractalidad como estructura dinámica que constituye la génesis de la formación de los campos energéticos. De esta manera se van formando campos energéticos superiores como los campos reticulares, campos capitulares, campos energético Gregarios y campos energéticos masales. Este último referente al campo que forma la gran masa humana incluida dentro del campo inclusor denominado campo cuántico, lo que posteriormente desarrollará la circulación energética que construirá el consciente colectivo.

La información expuesta anteriormente es muy valiosa para esta investigación, ya que establece los patrones y mecanismos de las estructuras complementarias y contenedoras que nos permiten interpretar el principio hologramático y advertir que cualquier cambio en las estructuras integrales, en cualquier nivel jerárquico, afectará el acoplamiento de los campos energéticos y a su vez la construcción de los conceptos.

Los argumentos que se expondrán en esta investigación interpretarán la construcción de conceptos geométricos, como la construcción de campos energéticos desde un punto de vista cualitativo, que trasciende el cuerpo físico de los tejidos neuronales y no podrá ser adjudicado ni a estructuras meramente orgánicas, ni a teorías cognitivas deterministas, ni a teorías cognitivas idealistas con explicaciones psicológicas dispersas y carentes de simplicidad.

Clases de campos cognitivos y el proceso de percepción.

En esta investigación se desistirá de manera rotunda del hecho de denominar estímulo a todas aquellas acciones que el medio ejerce sobre el sistema senso perceptivo. Se considera que no todos ellos se incorporan a los campos cognitivos generando algún tipo de conocimiento. Para que se produzca conocimiento es necesario que se desencadene cierto grado de caos que genere un nuevo orden

energético y por ende un cambio en las estructuras cognitivas preexistentes. Por lo tanto, a estas unidades generadoras o acciones que el medio ejerce sobre el sistema cognitivo, se llamarán *Incentivos Caotizantes.*

El incentivo caotizante es primero sintonizado a través de una longitud de onda generada por una determinada cualidad emocional. Luego llega a los campos procesadores del conocimiento, zona donde se desarrollan las inteligencias múltiples del individuo. Este incentivo al interactuar con los campos pertenecientes a los conocimientos previos, permite la formación de una nueva estructura funcional en forma de campo energético también que se llama Campo Acumulador Cognitivo. Este campo se va transformando de manera muy dinámica en la mayoría de los casos, unificándose paulatinamente y adquiriendo mayor abstracción hasta formar los que se denomina Campo Totalizador.

El campo Totalizador corresponde a campos estructurados en un nivel energético y una homogeneidad tal, que resulta una aproximación a interpretar un paso más hacia la abstracción del conocimiento, donde se hace posible la construcción de las ideas, los conceptos y la creatividad y la intuición. Es bueno destacar que los incentivos caotizantes no son entes aislados, son mas bien elementos que se desprenden del campo energético cognoscible formando un caudal, denominado Caudal Incentivador Cognitivo. Este último alude entonces a todas las sensaciones captadas por el sistema sensoperceptivo provenientes del entorno. En la siguiente figura se muestra un diagrama de bloques correspondiente al proceso de percepción desde el enfoque cuántico.

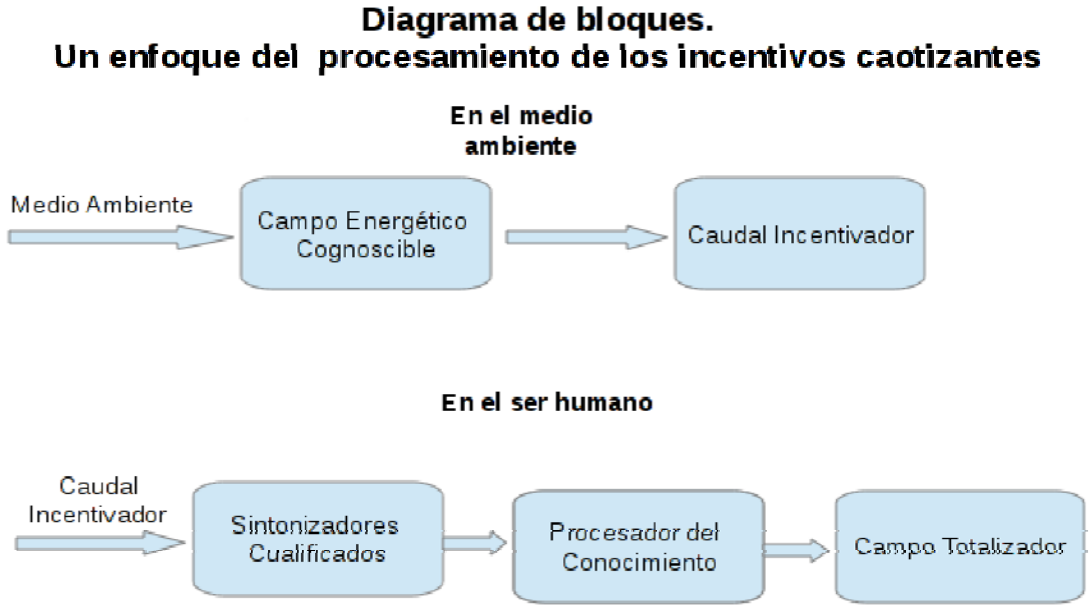


Fig.2.1 Procesamiento de los incentivos caotizantes

Fuente: Elaboración Propia

Los nodos del conocimiento

Al momento de incorporarse los incentivos caotizantes a las estructuras cognitivas del ser humano se constituye un nuevo campo energético temporal que resulta el foco de transformación y propagación energética, éste se puede identificar como un nodo y se caracteriza por generar cierto grado de caos en su entorno.

Estos nodos posee distintas intensidades e influencias que se denomina murmullos que en algunos casos logran generar cambios energéticos en un entorno estructural muy cercano. Si este cambio se logra, este fenómeno pasa a denominarse murmullo cuántico significativo. Este murmullo refiere de manera directa al nivel de caos que genera un incentivo caotizante sobre los campos cognitivos pre existentes, logrando un nuevo equilibrio a través del proceso entrópico.(Mussa, 2008)

Este enfoque se acopla muy bien a teorías cognitivas que fueron muy significativas a mediados de siglo, teorías que sirvieron hasta de influencia a este

nuevo constructo denominado cognición cuántica. El fenómeno nodal, viene a ser un proceso que se encuentra inmerso en un proceso de construcción de sistemas funcionales inherente al cerebro humano. Este proceso era lo que llamaba Vygotsky en 1978 como principio de la organización extracortical de las funciones mentales complejas. Esta expresión digerida de una mejor manera, se puede interpretar como que todas aquellas actividades humanas conscientes se forman siempre con la asistencia de instrumentos auxiliares o dispositivos externos.(Vygotsky, 1978 ; Mussa, 2008).

Una vez que el nodo cuántico cognitivo desencadene un murmullo significativo, se acopla e integra a las estructuras cognitivas previas en donde se manifiesta la desestructuración de la armonía previa, generando un cierto nivel de entropía.

En esta investigación se utilizará lo antes dicho para interpretar de una manera más aproximada la flexibilidad de las estructuras cognitivas, dando a entender que dependen en gran medida de las características de intensidad y longitud de onda de los incentivos caotizantes que se incorporan.

Un proceso de cambio de racionalidad no escapa del ingrediente creativo. Con la información anterior es posible aproximar una definición cuántica para la creatividad. El proceso creativo parte de un nodo invocante, selecciona por analogía conceptos previos a partir del caudal cognitivo para luego desencadenar actitudes modificadoras en el entorno, que originan en éste, nodos de murmullo cuántico significativo, las cuales de manera consecuente actúan como incentivos caotizantes cualificados emocionalmente, incrementando el caos en los campos existentes, a niveles tales que pudiera poner en juego estructuras disipativas, a través de mecanismos entrópicos para lograr un nuevo orden distinto al preexistente.

Es de suma importancia en nuestra investigación tomar como bandera esta interpretación del proceso creativo, ya que si se extrapola a este contexto, esta investigación constituye un nodo invocante de tipo científico, que persigue, como fin último generar cambios en las estructuras curriculares preexistentes y así generar un cambio de racionalidad geométrica colectiva.

Construcción cuántica del conocimiento

Es importante destacar que no todo incentivo se incorpora como nodo. Para que se establezca un nodo, es necesario que se sobrepase un umbral de intensidad mínima para que se pueda producir un murmullo o para que se pueda reforzar otro nodo. Al fenómeno de alcance de intensidad mínima se denomina salto cuántico. Un incentivo aportará información significativa si se genera un salto cuántico o lo que es lo mismo, si se genera el caudal de resonancia necesario para incorporarse a las estructuras cognitivas.

Para que un incentivo caotizante se convierta en nodo a partir de un murmullo cuántico significativo, requiere que sus características de intensidad y frecuencia formen un paquete mínimo o quantum cognitivo. Es así como el proceso de adquisición del conocimiento es discontinuo, es decir, no se adquiere de forma sistemática y progresiva sino por saltos cuánticos, en sentido fractal, tal como se incorpora la energía a los niveles energéticos del átomo.

El conocimiento humano se puede entender entonces como un concepto integrador, en el cual, cada partícula está consciente de la existencia de todas las demás y del todo de manera simultánea bajo el principio de las múltiples funciones de onda, que permiten reconocer la aplicabilidad de principios como el hologramático, el recursivo y el dialógico duocomplementario.

¿Por qué la cognición cuántica?

Con el párrafo anterior se ha culminado el breve esbozo sobre la teoría de la cognición cuántica. Pero, ¿por qué en esta investigación, que trata de una nueva racionalidad geométrica, se trae a relucir una teoría cognitiva como la teoría de la cognición cuántica ? En algunos párrafos contenidos en el desarrollo de esta teoría se

ha explicado cierta relación existente entre esta teoría y el objetivo general de esta investigación, pero es necesario dar a conocer un acoplamiento mucho más genérico.

En realidad, la teoría de la cognición cuántica, constituye un enfoque mediante el cual se podrá observar el fenómeno de construcción de conceptos geométricos, proceso clave en la construcción de una nueva racionalidad conceptual geométrica. Además, según la cognición cuántica, el proceso de construcción de conceptos está supeditado a una estructura de dinámica fractal, que estaría en sintonía con la naturaleza de los conceptos geométricos que se pretenden generar con esta investigación. Si el proceso de construcción de conceptos posee una estructura de red compleja de dinámica fractal, su representación lingüística también debería tenerla, por ello, en esta investigación se trabajará de manera directa con el análisis de todas aquellas estructuras nodales discursivas generadas por el proceso de construcción de conceptos geométricos de tipo hiperbólico y fractal.

Se estaría en presencia entonces de un principio de unificación de la dinámica conceptual para tres espacios independientes, para el espacio geométrico en sí mismo, para la forma escrita de los conceptos geométricos (lingüística), y para el espacio fenomenológico (energía). Es decir, los tres espacios en estudio, el matemático, el linguistico y el energético estarían supeditados los principios hologramáticos, recursivos y dialógicos duocomplementarios; obviamente esto último implica una dinámica de tipo fractal.

En el mismo orden de ideas, las entrevistas que se van a realizar irían a constituir una especie de fotografía a diferentes instantes del proceso de construcción de nuevos conceptos geométricos en el individuo, en donde se observará la posible existencia de enlaces conceptuales tendidos entre la geometría fractal y la geometría hiperbólica a la luz de manifestaciones lingüísticas caoticas representativas de murmullos cuánticos y reordenamientos energéticos.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

Esta investigación, enmarcada dentro de la linea de investigación Epistemología de la Educación Matemática, inicialmente pretendía tener una caracter puramente documental y con fundamento epistemológico, pero a medida que fue avanzando, se encontró un disnamismo insperado entre los conceptos fundamentales de la Geometría Hiperbólica y la Geometría Fractal. Es entonces cuando surge una nueva dimensión necesaria en la investigación, una dimensión fenomenológica, el cual deja al descubierto la magnitud, la interdisciplinariedad y la complejidad de una racionalidad conceptual geométrica vista desde un enfoque caótico.

El caracter fenomenológico de la investigación no pretente obtener conocimiento geométrico del individuo entrevistado, más bien pretende dar luces sobre una posible estructura novedosa de la racionalidad conceptual desarrollada propiamente en el individuo.

El desarrollo de los estudios en las ciencias de la educación, en la actualidad, se ha vuelto cada vez más complejo en todas sus dimensiones. Esta realidad ha provocado un aumento en la dificultad de los procesos metodológicos que permiten conocer los fenómenos en esta área con una mayor profundidad. (Martínez, 2006)

Teniendo en cuenta lo anterior, el objetivo básico de este capítulo es mostrar la metodología que se dispone para abordar de la manera más aproximada posible el problema de estudio que se pretende analizar, sin perder de vista tanto la complejidad de la vida humana actual como los procesos rigurosos, semánticos y críticos, para lograr reflexiones sustentables epistemológica y metodológicamente ante la comunidad científica en general. (Martínez, 2006; Hernández y Fernández, 2008).

Tipo y diseño de investigación

Siguiendo diversos criterios para este estudio y teniendo presente que el propósito de la investigación es analizar el enlace conceptual existente entre la Geometría Fractal y la Geometría Hiperbólica; el diseño de investigación se enmarca en una investigación descriptiva, documental y de carácter cualitativo, ya que se fundamenta en una revisión bibliográfica. La totalidad de la investigación se basa en contenidos de orden teórico, en los cuales se reflejan posiciones coincidentes y contradictorias de los enfoques analizados. Además se complementa con un estudio fenomenológico tanto en los profesores como en los alumnos; así como también la posición independiente del investigador. (Martínez, 2006).

Para los efectos del presente trabajo, el carácter cualitativo de la investigación según (Martínez, 2006), se basa en que trata de identificar, básicamente, la naturaleza profunda de las realidades y su estructura dinámica; aquella que da razón plena e intenta implicar sus manifestaciones como un todo integrado.

Dentro de la tipología de los diseños cualitativos, esta investigación es de carácter documental y fenomenológico, en la cual estará incluido un análisis teórico y una hermenéutica, ya que describe y analiza ideas, significados y conocimientos, plasmados en algunos documentos escritos de Geometría Fractal y de Geometría Hiperbólica y en algunas entrevistas. Tal aplicabilidad se manifiesta en descubrir un enlace conceptual existente entre las geometrías hiperbólicas y fractal. (Martínez, 2006)

Asumir esta metodología, permite al investigador reflexionar de forma fundamentada, adquiriendo una representación más aproximada de la realidad basándose en fuentes bibliográficas que hacen posible el análisis de los conceptos enlazantes que posiblemente irán a ampliar la concepción geométrica de los docentes.

En el mismo orden de ideas y partiendo del primer objetivo que describe el “indagar sobre el estado del arte de los cambios de concepción de la geometría a través de la historia”, se abordará haciendo uso de un arqueo documental, el cual, se basa en una revisión bibliográfica del estado del conocimiento con apoyo

principalmente en trabajos previos e información divulgada por medios impresos audio visuales y electrónicos, con el fin de integrar organizar y evaluar la información teórica existente sobre el problema en estudio. Esto último permitirá abordar de la misma manera el segundo objetivo que es “Evaluar los conceptos fundamentales de la Geometría Fractal y la Geometría Hiperbólica” (Universidad Pedagógica experimental Libertador (2006). *Manual de trabajos de grado de especialización y maestría y tesis doctorales. Caracas.*)

Para una parte del cuarto y quinto objetivo se asumirá la metodología descrita para el método fenomenológico (Martínez, 2006,2007):

Etapa descriptiva

- Ver qué estrategia usar e instrumento a aplicar.
- Aplicar instrumento.
- Elaborar descripción protocolar.

Etapa estructural

- Sumergirse en la realidad del fenómeno, revivir, reflexionar(en el protocolo).
- Delimitar las unidades temáticas naturales en el protocolo.
- Determinación del tema central de cada unidad temática.
- Traducir el tema central a lenguaje científico.
- Integración de todos los temas centrales en una estructura.
- Integración de las estructuras particulares en una sola estructura general.
- Entrevista final con los sujetos estudiados.
- Contrastación y teorización.

Contexto de investigación

La investigación se llevó a cabo en dos partes, una parte documental y una fenomenológica. El estudio fenomenológico se realizó en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Carabobo, en donde se aplicaron tres instrumentos tanto a los profesores como a los alumnos cursantes de los primeros cuatro semestres de la carrera de Ingeniería. La parte documental se

desarrolló mediante el análisis de los siguientes libros: *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional* (Lascurain,2005); *Los Objetos Fractales* (Mandelbrot,2006); *La Geometría Fractal de la Naturaleza* (Mandelbrot,2009); *Conceptos* (Fodor,1999); *Cognición Cuántica* (Mussa,2008).

Técnicas e instrumentos de recolección de datos

Tomando como guía del proceso a los objetivos del estudio, la técnica general de recolección de datos a utilizar para la parte fenomenológica serán la triangulación, en donde se recolectará información de profesores y alumnos; aplicando en la mayoría de los casos, cuestionarios de preguntas abiertas, entrevistas personales y entrevistas virtuales haciendo uso de espacios educativos estructurados bajo la plataforma Moodle, para luego contrastar con la información extraída del ámbito documental en donde se consultarán diferentes fuentes bibliográficas tanto físicas como electrónicas (libros, tesis, revistas, monografías, entre otros). Entre los instrumentos empleados en este caso estarán: la ficha bibliográfica, fichas de trabajo, citas, el subrayado, entre otros.

Procedimiento de la investigación

Tomando como referencia el esquema de distribución aproximada del espacio del informe de investigación de Martinez(2007), el esquema metodológico de Martinez(2006) y haciendo una adaptación a este tipo de investigación documental, ésta se pudo llevar a cabo mediante los siguientes pasos:

- Objetivos del estudio.
- Orientación epistemológica
- Marco teórico y conceptual
- Diseño general de la investigación
- Experiencia y rol del investigador
- Estrategias para la recolección de datos
- Categorización, estructuración y teorización.
- Presentación y aplicación de resultado.

CAPITULO IV

ZONA DE CONTRASTE TEÓRICO-CONCEPTUAL

En el presente capítulo se describe la zona conceptual en donde se realizó la búsqueda de los enlaces conceptuales existentes entre la Geometría Hiperbólica y la Geometría Fractal. La descripción se divide en dos partes, la primera es una descripción general de la zona de discontinuidad conceptual y la segunda es propiamente la racionalidad conceptual que permitió determinar los puntos de enlace desde el punto de vista teórico conceptual.

Zona de discontinuidad conceptual

Con el objetivo de vislumbrar posibles puntos de enlace entre la Geometría Hiperbólica y la Geometría Fractal, es necesario establecer una zona de discontinuidad conceptual. Una zona de discontinuidad conceptual no es más que proponer y dar forma a un espacio conceptual abstracto inspirado en los espacios topológicos, que sea capaz de contener los conceptos a estudiar. Una representación concreta de una zona conceptual pudiera tener morfología de región.

En definitiva, se trata de establecer una región conceptual de arranque con el propósito de delimitar la zona de búsqueda de los posibles puntos de enlace entre los dos enfoques geométricos involucrados.

El principio que permitirá construir esta región de análisis se pudiera tomar de algunas aproximaciones realizadas por Kant en su obra titulada *Crítica a la Razón Pura*.

Hasta los momentos, ha sido fundamentado de manera reiterada, que los posibles enlaces conceptuales entre distintas geometrías nacen de un punto crítico, es decir surgen de los enfoques y aproximaciones realizadas al quinto postulado de *Euclides.* De este modo, se pudiera considerar al quinto postulado como nodo fundamental de la red conceptual a estudiar; ha sido, históricamente, el incentivo

caotizante mas fuerte en lo que respecta al contenido geométrico puro, es decir , observando a la geometría como sistema lógico inmutable.

Una vez determinado que el quinto postulado es el elemento generador de espacios conceptuales diversos y polémicos, es necesario tomar algún principio que provea de morfología y conexidad a esas nuevas regiones abstractas que se desprenden de lo matemático y que se elevan a niveles energéticos cognitivos conceptuales.

Se tomará como principio la siguiente aproximación teórica :

> "Por consiguiente la dialéctica transcendental se contentará con descibrir la ilusión de los juicios trascendentes e impedir al mismo tiempo que engañe" (Kant,1781pp.50)

Con esta cita se constata que desde hace mucho tiempo se considera que las zonas de discontinuidad conceptual se encuentran en aquellos juicios sintéticos a priori de naturaleza trascendental generando ilusiones y dialécticas permanentes en el tiempo. En nuestro caso la zona de análisis se encuentra en esa dialéctica trascendental inherente a la razón que se manifiesta en la recurrencia de los contrastes generados a partir de proposiciones geométricas como el quinto postulado, que en muchos casos han generado una gran cantidad de ilusiones en la interpretación.

Se podría afirmar entonces que el problema del quinto postulado, pudiera tener su génesis en una posible dialéctica trascendental entre juicios geométricos que hasta los momentos ha impedido vislumbrar cual de los tantos enfoques geométricos es más certero, más real, más aproximado y cual es en realidad producto de una ilusión.

Lo descrito anteriormente se puede reforzar con el siguiente fundamento:

> "Por lo tanto, hay una natural e inevitable contraste de la razón pura, no una dialéctica en la cual se enrede a un experto por falta de conocimiento, o que un sofista haya inventado artificialmente para confundir a las personas razonables, sino una dialéctica imperturbable inherente a la razón humana y que aún después de haber descubierto su espejismo, no cesará de engañarla ni de impulsar constantemente a momentaneos extravíos que necesitan ser suprimidos en todo momento " (Kant,1781pp.50)

Es importante resaltar que en la siguiente investigación no se pretende emitir un juicio geométrico absoluto, con respecto al quinto postulado, que suprima la ilusión de otros. Lo que en realidad se pretende en esta investigación es obtener el debido provecho a la dialéctica de la razón para descubrir los posibles puntos de enlace existentes al momento de interpretar los conceptos fundamentales, tanto de la Geometría Hiperbólica como de la Geometría Fractal.

El problema radica en la existencia de una constante pretensión de la razón en utilizar el postulado de las paralelas como principio fundamental geométrico. Este postulado es un conocimiento universal a priori que puede ser usado como premisa mayor para deducciones geométricas, más no es correcto usarlo como principio. En el momento en que lo que se usa como principio fundamental es cuando emergen las inconsistencias. Sería entonces recomendable usar este postulado como premisa en un determinado contexto geométrico.

Una vez aclarado esto, queda abierto el camino para iniciar la búsqueda de enlaces conceptuales. Primeramente se debe hacer una distinción entre lo que se conoce directamente y lo que es inferido. Por ejemplo, se conoce directamente que por un punto se pueden trazar un multiplicidad de rectas, pero solo se infiere que por un punto exterior a una línea recta se puede trazar una y sólo una línea recta paralela a la anterior.

La inferencia es una costumbre natural, hecho que trae como consecuencia el no estar consciente en todo momento entre lo que se conoce directamente y lo que es inferido. A menudo se da el caso en que se considera que se ha percibido algo directamente de la naturaleza cuando en realidad lo que se ha hecho es inferir.

En este espacio conceptual a estudiar existirán denominaciones adecuadas a cada clase de representación mental, no existirán, por los momentos solapamientos de dominios que impliquen confusión en las interpretaciones iniciales de los fundamentos conceptuales kantianos. A continuación se describen una serie de términos kantianos, acompañados de ejemplos aplicados al problema del quinto postulado hiperbólico.

Cuando se hable de género, se refiere a la representación propiamente dicha, ésta a su vez contiene a la representación con consciencia que se denomina percepción. Como se puede observar en la figura 5.1, aquella percepción que se refiera solamente al sujeto como modificación de su estado se le llamará sensación, aquella percepción que sea objetiva se le llamará conocimiento, si el conocimiento se refiere directamente al objeto de manera singular se llamará intuición y si el conocimiento se refiere de manera indirecta a elementos comunes entre varias cosas se denomina concepto.

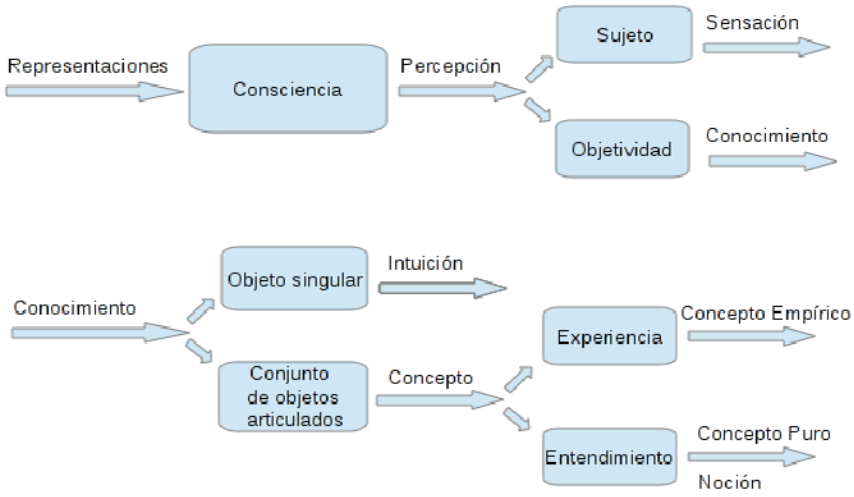
En la Geometría Fractal se estará navegando en el mar de las sensaciones trabajando en la búsqueda de un enlace que conecte con el proceso de construcción de conceptos geométricos nuevos que respondan a nuevos modelos como el de la fractalidad y la hiperbolicidad simultánea.

Así mismo, como indica la figura 5.1, el concepto se puede clasificar en conceptos empíricos y conceptos puros. El concepto, al pasarlo por el filtro de la experiencia, se obtiene el concepto empírico. De la misma manera si lo pasamos por el filtro del entendimiento recibe el nombre de concepto puro o noción. Finalmente al conjunto de nociones que sean independientes a los niveles empíricos se le denomina Idea.

En la geometría Hiperbólica de Lobachevski se trabaja generalmente en la región conceptual de las ideas. La labor que se pretende realizar en esta investigación es vislumbrar posibles conceptos geométricos vinculados al postulado de las paralelas y a la fractalidad que posean una noción primaria común acoplada a una sensación primaria común.

El hecho de establecer que por un punto exterior a una recta solo es posible trazar una y solo una recta paralela a ella, remite a la construcción de un sistema de conceptos inherentes a la razón pura, es decir, una idea que de ninguna manera puede darse a nivel de los sentidos considerando a todo proceso geométrico empírico como

Fig 5.1 Un enfoque del



procesamiento por filtros de las representaciones mentales kantianas

Fuente: Elaboración Propia.

una subordinación, determinada por la totalidad absoluta de la condición generada por el postulado.

El quinto postulado no fue inventado de manera arbitraria, sino que fue propuesto por la naturaleza misma de la razón que inevitablemente hace referencia a los elementos constituyentes del campo del entendimiento. Además, se puede considerar como una idea trascendental. Lo trascendente está en el hecho de que rebasa los límites de toda experiencia; en la naturaleza tangible nunca se podrá presentar un objeto que se acople de manera perfecta a esta idea representada por el quinto postulado.

Considerando lo anterior, es necesario delimitar el sector del campo de las ideas transcendentales en el cual se va a trabajar. Según Kant existen tres clases de ideas transcendentales. La primera clase de ideas referentes a la unidad del sujeto pensante, ideas que en su mayoría son objeto de la psicología. La segunda clase agrupa todas las ideas que resulta de la absoluta unidad de la serie de condiciones del fenómeno,esto es, el conjunto de todos los fenómenos presentes en el mundo real tangible. Por último, la tercera clase consiste en el conjunto de ideas agrupadas por la absoluta unidad de la condición de todos los objetos del pensamiento, la condición

suprema de la posibilidad de todo lo que puede pensar, es decir, el ente de todos los entes.

En esta investigación se disertó en el campo de las ideas descritas en la segunda clase, ya que es el grupo contenedor de las ideas trascendentales referentes a los entes geométricos.

Una premisa que sirve de insumo necesario en esta investigación, es el hecho de que Kant advierte que entre las mismas ideas trascendentes está presente cierto enlace y unidad que consolida, mediante la razón pura, un sistema de conceptos. Una pretensión fundamental en esta investigación es extrapolar esta premisa para el caso de algunas ideas trascendentales de la geometría de Lobachevski con algunas ideas trascendentales de la fractalidad generadas por algún proceso sensitivo.

De esta manera se afirma la pretensión de la búsqueda de enlaces conceptuales que fundamentan tanto la Geometría Hiperbólica de Lobachevski como la Geometría Fractal de Mandelbrot.

En los análisis subsiguientes, se generarán aproximaciones dentro de la segunda clase de raciocinios dialécticos dispuesta sobre los conceptos trascendentales con una serie de condiciones que determinarán el fenómeno conceptual del quinto postulado y su relación con la fractalidad.

Racionalidad Teórico-Conceptual

Durante muchos siglos, el quinto postulado hiperbólico ha sido analizado, modificado, enfocado e interpretado de múltiples maneras; y en la medida en que se desarrollan las investigaciones al respecto, de la misma manera nacen nuevas propuestas de enfoque.

En los últimos años se ha estado incursionando en una clase nueva de sistemas que parecen ser los que predominan en el estudio del comportamiento de los fenómenos de la naturaleza; se habla del tipo de sistema dinámico no lineal. Éste ha mostrado tener comportamientos de tipo complejo, que no se adecúan a conceptos previos como los sistemas de tipo determinístico o sistemas de tipo estocásticos. Son

comportamientos cuyas reglas a nivel local son muy simples, pero a nivel global tiende a tener comportamientos inesperado e impredecibles.

Al comportamiento de este tipo de sistemas se le llama caótico y se puede relacionar de muy buena manera con el fenómeno histórico-geométrico del quinto postulado. Y aún más allá, se pudiera relacionar con el fenómeno conceptual generado por la estructura matemática existente en el quinto postulado.

Se comienza el análisis proponiendo enfocar al quinto postulado hiperbólico como una porción de nodo de la red del sistema complejo geométrico, que hasta las luces actuales no ha podido calar en un estado absoluto de comportamiento.

El solo hecho de pensar en el quinto postulado hiperbólico, evoca una red conceptual compleja que subyace cualquier afirmación o cualquier conjetura que se haga acerca de él. Es entonces cuando la porción nodal referida anteriormente, genera una porción nodal en el campo conceptual en donde se encuentran los posibles enlaces conceptuales existentes entre los conceptos fundamentales inherentes al postulado de Losbachevki y los conceptos fundamentales inherentes a la teoría fractal.

Ahora bien, en esa porción de nodo está contenida otra red conceptual posiblemente con características de autosimilaridad, que de manera reiterada en presencia del sujeto pasa por un proceso dialógico de percepción. Éste fenómeno se puede enfocar desde la teoría sintérgica, en donde nuestro cerebro interactúa con un campo cuántico en forma de matriz holográfica resultando una nueva realidad perceptual representada mediante nuevos objetos y formas geométricas. El cerebro está encargado de decodificar ese campo cuántico para que se pueda realizar el proceso de percepción de la realidad. Si el ser humano es incapaz de tomar consciencia de lo descrito anteriormente produce de manera inevitable una desviación en el resultado final, con respecto al estímulo primario.

En síntesis, existe un proceso de generación de una realidad perceptual, y el acceso al mecanismo procesal está todavía restringido, solo se puede accesar al resultado final, lo que origina directamente la confusión y a la errónea afirmación de que el producto del proceso no es algo creado por el individuo, sino que se considera

la existencia de una realidad independiente, ajena al ser, cuando en realidad, es el individuo mismo el que construye esa realidad perceptual.

El fenómeno descrito anteriormente no solo interfiere en el proceso de análisis sino que determina el enfoque general de los juicios en lo que respecta al nodo conceptual geométrico que se está estudiando. Esa dialéctica realidad percepción , ha venido distorsionando históricamente conceptos fundamentales como el de la diferenciabilidad, recta e infinito, provocando en casos fructíferos nuevos modelos geométricos y en otros casos inconsistencias en el sistema geométrico.

En los procesos cognitivos que se activan al momento del análisis del quinto postulado de Lobachevski, se pudieran manifiestar estructuras conceptuales jerárquicas que a su vez responden a estructuras con autosemejanza a pequeña escala diferenciadas en niveles cuánticos en sintonía con su grado de abstracción.

Los tres conceptos geométricos citados anteriormente pudierán ser constituyentes fundamentales y a su vez posibles puntos de enlace en la topología de la red conceptual. Siendo aún más específico, cada concepto anterior se pudiera enfocar como nodo principal de múltiples enlaces o concentrador.

En fin, se trata de plasmar un nuevo enfoque racional acerca del quinto postulado de Lobachevski, dejando claro que el objetivo no es aproximarse a enlaces conceptuales absolutos, sino a elementos de enlace que enriquezcan la conexión entre conceptos desde una perspectiva fenomenológica con fundamentos racionales. Como se dijo anteriormente, se pretende analizar la zona conceptual desde el punto de vista complejo, dejando abierta la posibilidad de generar modelos basados en los principios de Morin como los son, el principio dialógico, el principio recursivo y el principio holográmático.

En este sentido, existe la posibilidad de encontrar en este proceso conceptos que según el principio dialógico sean complementarios y a la vez antagónicos que permitan mantener la dualidad entre el orden representado por la Geometría de Lobachevski y el desorden inicial aparente representado por la geometría fractal. De igual manera es posible encontrar enlaces conceptuales recursivos, en los cuales los

productos y los efectos son de manera simultanea causas y productores de aquellos que los produce, rompiendo así con la racionalidad conceptual lineal clásica de orden Causa-Efecto. Por último, existe la posibilidad de encontrar procesos generadores de posibles enlaces producto de la interacción del sujeto con el campo cuántico como matriz hologramática vista desde un nivel empírico primario.

Enlaces Conceptuales

Los posibles puntos de enlace conceptual surgen del vértice de sedición correspondiente al quinto postulado de Lobachevki. El hecho de superponer una curva fractal centrada en el punto de origen de trazo de las líneas paralelas, nos permite observar que existe la posibilidad de dibujar infinitas rectas paralelas a otra que pasen por el punto en cuestión, usando como segundo punto de trazo a uno de los puntos de la curva fractal. A diferencia de los modelos clásicos de la geometría hiperbólica, acá no se pretende trabajar con un espacio métrico diferente; se pretende enfocar el quinto postulado hiperbólico desde un enfoque fractal.

Con lo antes planteado, los puntos de enlace se manifestarán en la manera en que aparezcan dualidades, dialécticas conceptuales y borrosidades en algunos conceptos fundamentales de la geometría. Se analizará una red de dos nodos, es decir, se asumieron como nodos principales de la red conceptual a un concepto fundamental para la Geometría de Lobachevki y un concepto fundamental para la Geometría Fractal, estos son La Línea Recta y la Dimensión respectivamente.

La línea Recta.

Se asumirá como concepto fundamental representativo de la Geometría Hiperbólica a la línea recta. La línea recta constituye uno de los conceptos fundamentales, tanto en la Geometría Hiperbólica como para la Geometría Fractal. El conjunto de definiciones referentes a la línea recta concretan y sintetizan una serie de atributos que delimitan la estructura conceptual del intérprete. Por ejemplo en la

Geometría de Lobachevski, el concepto de la línea recta nace de las definiciones previas a los postulados de los Elementos de Euclides, pero una vez que el quinto postulado es reestructurado por Lobachevski el concepto de línea recta sufre una expansión, sube a un peldaño de abstracción adquiere un grado más de generalidad confundiéndose en esencia con otros objetos geométricos como la circunferencia.

El concepto de línea recta entra en un plano de borrosidad y dualidad con respecto a sus referentes conceptuales. En un estadio más abstracto, se hablaría de línea curvas en general como referente superior a las líneas rectas. Las lineas rectas en su concepto original quedaría disminuidas a un referente particular ideal minúsculo con respecto al nuevo concepto que responde a otra serie de atributos que constituyen redes conceptuales distintas a la original.

Los conceptos como distancia , longitud , infinito, diferenciabilidad, punto son los que se desprenden de la contemplación enfocada en la línea recta, que convenientemente se llamarán constructos matemáticos por el hecho de que ahora más que antes generan diversos enfoques derivados de la percepción del término, produciendo una divergencia conceptual al momento de tratar de definir de manera absoluta algunos de esos términos.

En la Geometría Fractal las figuras determinantes poseen bordes irregulares y forman parte de un proceso progresivo, es decir no son figuras estáticas. Son figuras dinámicas en el tiempo y el espacio cuyo grado de irregularidad se va agudizando. En este contexto , la línea recta es lo que en la geometría fractal se llama objeto generador. Es un objeto inicial que a medida que se va desarrollando el proceso se pierde de vista en su forma original. Se entra entonces de nuevo en un proceso dialéctico borroso que no permite establecer de manera concreta la existencia de una estructura conceptual absoluta en lo que tiene que ver a la línea recta.

Ahora bien, si se observa nuevamente el fenómeno conceptual de la línea recta desde el punto de vista de la diversidad teórica, advierte una dialéctica en el concepto que se maneja en la Geometría Hiperbólica y el concepto que se maneja en la Geometría Fractal. Existe diversidad de género, de clase y de funcionalidad.

Es entonces cuando se dice que el enlace conceptual que se vislumbra está en la dialéctica que se genera al iniciar el proceso de contemplación del objeto primario línea recta que a su vez genera una forma de cascada fractal de los procesos dialécticos consecuentes con respecto los demás conceptos que forman parte de la red.

En la figura 5.2 se representan los conceptos geométricos fundamentales que aparecen al evocar el concepto de línea recta. La dualidad existente en el concepto de línea recta, se presenta de igual manera en el resto de los conceptos descritos en el diagrama.

Del infinito

La incertidumbre que genera el contextualizar el infinito en la geometría hiperbólica genera borrosidad a la hora de asumir una postura entre las geometrías euclidianas y elípticas. La geometría fractal, aunque tiene otra génesis, su desarrollo conceptual podría tener conexión con el quinto postulado a través del infinito. El infinito en la fractalidad refiere, en su mayoría, a la incertidumbre del proceso intrínseco de la generación de un fractal. Es el concepto fundamental del dinamismo geométrico. Incluir el dinamismo característico de una curva fractal en el quinto postulado hiperbólico podría general un primer enlace conceptual entre la Geometría de Lobachevski y la Geometría Fractal.

De la diferenciabilidad

Con respecto al concepto de diferenciabilidad, la dialéctica y la borrosidad conceptual se manifiesta en lo siguiente, desde el punto de vista de la geometría de Lobachevski la diferenciabilidad en las curvas es la regla y lo contrario es la excepción. Desde el punto de vista fractal la no diferenciabilidad es la regla y las curvas suaves son la excepción. De esta manera se pudiera establecer como concepto general de la no

diferenciabilidad, siendo este último de un nivel de abstracción mayor además de adaptarse de manera más armónica a la nueva percepción de la realidad.

De la longitud

Entra aquí el contraste entre las longitudes determinísticas establecidas en los modelos contituyentes en la Geometría de Lobachevski y una logitud caótica que se genera mediante el proceso de medición en un borde fractal. Plantear, desde el enfoque hiperbólico, distintas definiciones de longitud permite modificar extractos de modelos hiperbólicos que responden a un mismo principio, responden a un enfoque aislado del quinto postulado de Lobachevki. En un borde fractal, si bien hay una longitud efectiva producto de un acuerdo, en general, la longitud es incierta y va de la mano con el concepto de infinito progresivo. De nuevo se manifiesta una dialéctica que genera contraste en el concepto de longitud.

Del punto

Desde la visión reduccionista de la geometría de Lobachevki el punto sigue siendo lo que no tiene parte generando un concepto convergente en el infinito. Desde el punto de vista de la topología, constituye un elemento de un espacio topológico y desde el punto de vista fractal se genera la antagonía y la imposibilidad de visualizar algo que no tiene parte. El punto se convierte en un pensamiento divergente que responde a un comportamiento infinito y progresivo.

En este sentido se puede sintetizar lo siguiente, desde el punto de vista fractal, se pudieran trazar infinitas rectas paralelas desde un punto exterior a otra recta dejando estáticos todos los demás elementos de la red conceptual excepto el concepto de continuidad. Una perturbación en el concepto de continuidad, esto es, insertando una curva fractal alrededor del punto exterior, generaría un nuevo ordenamiento conceptual que acopla de manera armónica el quinto postulado hiperbólico con la fractalidad.

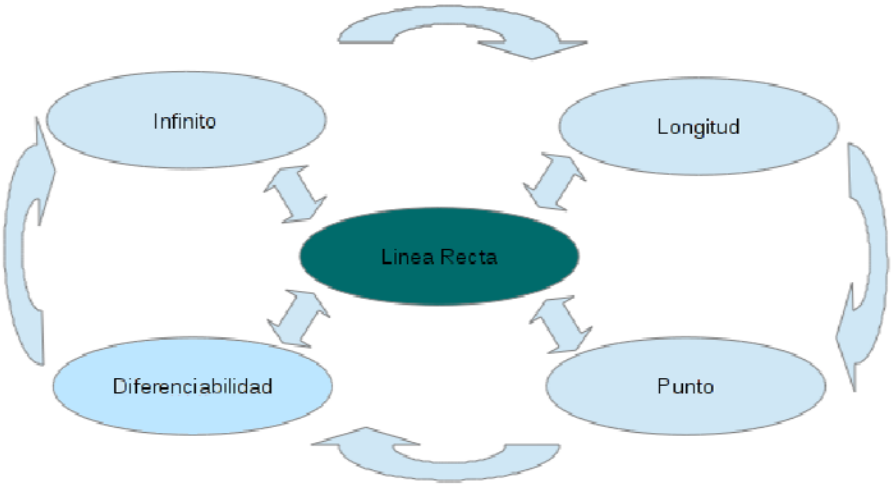


Figura 5.2 Puntos de enlace desde la línea recta

Fuente: Elaboración Propia.

La dimensión

Se asumirá como concepto fundamental representativo de la Geometría Fractal a la dimensión. La dimensión constituye uno de los conceptos fundamentales, tanto en el espacio Hiperbólico como para el espacio Fractal. El conjunto de definiciones referentes a la dimensión concretan y sintetizan una serie de atributos que delimitan la estructura conceptual del intérprete. Por ejemplo en la Geometría de Lobachevski, el concepto de dimensión nace de las definiciones previas derivadas de la teoría topológica, pero una vez que emerge la Geometría Fractal, el concepto de dimensión se vuelve difuso y dependiente del grado de escalamiento en que se realice la percepción.

La existencia de nuevas figuras representativas del caos matemático, generan una ruptura en el concepto de clásico de dimensión. La dimensión fractal constituye un concepto más genérico que el de la dimensión topológica, constituyendo además un concepto dinámico progresivo y adaptativo hacia nuevas teselaciones del espacio y del cosmo.

Un nuevo concepto de dimensión propone de manera indirecta una nueva concepción del espacio. La dialéctica en el concepto de dimensión se propaga hacia la red generando un efecto similar en el concepto de espacio.

El concepto de espacio es muy amplio, sin embargo, no escapa de la inminente ruptura. El espacio hiperbólico concebido desde el punto de vista topológico como morfológicamente curvo, sufre cierta transformación desde el punto de vista fractal. La dimensión fraccionaria presupone una nueva forma del espacio-tiempo pasando a ser, en su totalidad, de característica irregular.

Ahora bien, ¿un espacio curvo pudiera estar contenido en un espacio fractal? Se podría plantear un espacio de morfología irregular como una consolidación topológica del concepto de espacio o lo que es lo mismo una generalización.

Si se considerara así, la nueva estructura conceptual de espacio concreto sería morfológicamente curvo e irregular, pasando a niveles de abstracción inferior los casos particulares de los espacios elípticos puros, hiperbólicos puros, y euclideanos puros.

El hecho de evocar el concepto de dimensión genera una red conceptual dinámica constituida por nuevos nodos con enlaces fuertes. Uno de los nodos es el concepto de Espacio. Un subnodo esencial de la red correspondiente al concepto de espacio concreto es el punto. Esto muestra la manera en que el concepto de dimensión y el concepto de línea recta se relacionan mediante el enfoque de las dos geometrías, generando enlaces posiblemente más débiles que los descritos anteriormente, pero que de igual manera concatenan la red conceptual.

Si se enfocara el concepto de espacio en el sentido más abstracto, se generará una red de conceptos de tipo axiomático más estable que la red que genera el concepto de espacio concreto.

El concepto de espacio concreto es más inestable que el concepto de espacio en el sentido axiomático por el hecho de poseer un enlace fuerte con el quinto postulado hiperbólico el cual constituye un sector conceptual vulnerable y caótico que con ligeras perturbaciones de enfoque genera un reordenamiento conceptual espacial.

De la autosemejanza

La distribución homogénea de las rectas en la zona de trazo de las paralelas es en principio un fallo en la percepción de la realidad. El trazo de paralelas desde el punto en cuestión con su respectiva guía fractal se vuelve un proceso invariante por traslación e invariante por cambios de escala. La curva que subyace los trazos de la lineas paralelas generalmente goza de ser invariante a la luz de las transformaciones geométricas, esto establece un enlace fuerte con el concepto de autosemejanza.

De la simetría

La simetría desde el punto de vista fractal es vista como un nivel más profundo de la autosemejanza, expresa que algunos fractales, que están más ligados a la sensaciones, poseen características invariantes más ricas, que empiezan a distorsionar aparentemente el concepto de escalamiento. Sin embargo, en el nodo principal que se está estudiando, no es más que una distribución de manera fractal no escalante de las rectas trazadas desde el punto exterior a otra línea recta.

De la divergencia

En el caso del postulado de las paralelas, lo que en principio desde los modelos euclidianos e hiperbólicos daba la sensación de convergencia, ahora desde el punto de vista fractal da la sensación de divergencia, ya que cualquier algoritmo de generación de rectas paralelas se va a convertir en un proceso dinámico sin límite que enlaza de manera directa con el concepto de infinito.

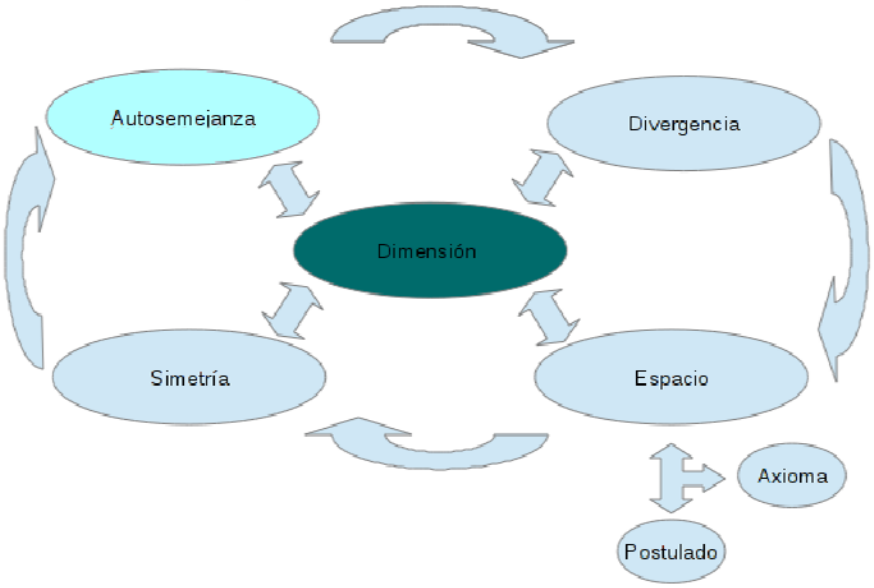


Figura 5.3 Puntos de enlace desde la dimensión

Fuente: Elaboración Propia.

CAPÍTULO V

FENOMENOLOGÍA DEL CONTRASTE CONCEPTUAL

De los incentivos caotizantes referentes a la Geometría Fractal y a la Geometría Hiperbólica.

Con el objetivo de estudiar la formación de nuevos conceptos y evidenciar posibles enlaces conceptuales desde el punto de vista fenomenológico, se realizaron algunas entrevistas escritas con preguntas abiertas a estudiantes de ingeniería tanto del segundo como del quinto semestre que previamente asistieron al evento académico realizado en el Auditorio de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo el 25 de Abril del año 2013, titulado *Enlace conceptual existente entre la Geometría Hiperbólica y la Geometría Fractal*. Este evento, además de servir de insumo teórico para esta investigación, sirvió para emular durante 8 horas un campo energético cognoscible contenedor de un caudal incentivador cognitivo con el objeto de desencadenar cierto grado de caos cognitivo, y de manera consecuente una generación de nuevos conceptos, cambios en las estructuras cognitivas existentes y posibles enlaces entre los conceptos fundamentales de la Geometría Hiperbólica y los conceptos fundamentales de la Geometría Fractal. (Flores, 2013; Ruggiero, 2013; Sanguino, 2013; Tesorero; 2013)

En el evento citado anteriormente, se disertó sobre los fundamentos de la geometría hiperbólica, los fundamentos de la geometría fractal, la fractalidad en la dinámica social a través de la historia, y por último, sobre el tránsito de la geometría euclidiana a otras geometrías. (Flores, 2013; Ruggiero, 2013; Sanguino, 2013; Tesorero; 2013).

Una vez que el alumno interactuó con ese campo energético cognoscible, se realizó la entrevista, con preguntas abiertas que cumplieron la función de incentivo caotizante incorporándose a las estructuras neurológicas en forma de campo energético para luego acoplarse con los campos receptores.

La incorporación de los incentivos caotizantes a las estructuras cognitivas forman un nuevo campo energético que se puede enfocar como Nodo. Este nodo será capáz de generar cierto grado de caos en su entorno que dependiendo de las personas se manifestará con distintas intensidades. A este caos a pequeña escala comúnmente se le denomina Murmullo. Si este Murmullo lograse generar cambios en las estructuras circundantes, se dirá que ha ocurrido un Murmullo Cuántico Significativo.

El acoplamiento de los incentivos caotizantes y la estructuras neurológicas del individuo se realiza en forma de sintonía, de acuerdo con las cualidades emocionales, por lo tanto, en este proceso actuarán de manera constante campos denominados Sintonizadores. Una vez sintonizado el incentivo caotizante, llega a los campos procesadores del conocimiento para luego interactuar con los campos de conocimiento previos, permitiendo la formación de nuevos constructos cuánticos llamados Campos Acumuladores Cognitivos.

El proceso que, de manera breve, se acaba de describir anteriormente es el que se considera subyacente en el individuo, una vez que interactúe con las preguntas abiertas. Una vez aplicado el incentivo caotizante se generarán nuevos campos acumuladores cognitivos referentes tanto a la Geometría Hiperbólica como a la Geometría Fractal. Estos campos generados por el individuo, serán plasmados por él mismo en forma de discurso escrito, en los que se analizarán los solapamientos conceptuales generados a partir de los conceptos generados por ambas geometrías.

La zona conceptual a estudiar vista desde el ángulo de la cognición cuántica es justamente la que constituye en nivel previo a la unificación, antes del proceso de abstracción que finalmente forma al campo totalizador. El conocimiento posee niveles energéticos, el primer nivel lo constituye el campo energético cognoscible de donde se desprenden los incentivos caotizantes formando el caudal incentivador cognitivo, también lo constituyen las estructuras energéticas en donde se realiza la sintonización, esto es los campos sintonizados y cualificados según la cualidad energética que posee, para luego conectarse con los campos procesadores del conocimiento que se ubica en la capa más profunda de la corteza. El segundo nivel energético es el de la sabiduría, en donde paulatinamente se va adquieriendo mayor abstracción en los conocimientos; es un nivel de transición que permite el acoplamiento con el tercer nivel energético. El tercer nivel energético es el de la

intuición, ésta se realiza en un campo totalizador del conocimiento. Las entrevistas que se mostrarán a continuación evidencian campos conceptuales generados en el primer nivel energético.

Entrevistas

Se realizó una entrevista personalizada a los estudiantes que participaron en el evento académico antes citado, se llevó a cabo a través de la plataforma virtual de Moodle, de donde se extrajo una serie de planteamientos representativos, que evidencian algunos enlaces conceptuales producto de esa generación del Murmullo Cuántico, así como también algunos vacíos conceptuales.

Se inició la entrevista con dos planteamientos por separado para no generar solapamiento previo y distorsión en el discurso. El primer planteamiento fue, describir la opinión sobre el término dimensión fraccionaria y el segundo fue, describir la opinión sobre el término espacio curvo, dos nodos conceptuales que representan cada uno conceptos subyacentes de la Geometría Fractal y conceptos subyacentes de la Geometría Hiperbólica respectivamente. Por ejemplo, uno de los alumnos cuando describía su nueva percepción de la dimensión dijo lo siguiente:

> "Mi punto de vista en cuanto a la dimensión es que, ésta está relacionada con la percepción del mundo físico, en este caso, a la medida de los objetos, su longitud, área y volumen...ahora bien, referente a las dimensiones fraccionarias no cuestiono su existencia...implican divisiones fraccionarias entre los valores enteros de las dimensiones y propone la medición mediante conteo de cajas ".

Acá se manifiesta un enlace conceptual generado entre el concepto de dimensión y los conceptos de longitud, área y volumen, por el simple hecho de haber hecho referencia de estos términos en el discurso, haciendo hincapié en la relación existente entre la dimensión y los objetos reales. Representa una visión clásica de la geometría, aún y cuando pretende manifestar una conexión notoria entre el objeto sensible y la idea trascendental. Se evidencia de igual manera cierto vacío conceptual en lo que respecta al término dimensión fraccionaria.

Otro planteamiento referido al concepto de dimensión fraccionaria extraído de las entrevistas es el siguiente: "...debe cumplir ciertos axiomas para que exista". Se

evidencia una clara subordinación axiomática por parte del individuo, generando un enlace conceptual ascendente entre el concepto de dimensión fraccionaria inherente a la Geometría Fractal y el concepto de axioma constituyente fundamental de la Geometría de Lobachevski.

El siguiente planteamiento representa los campos energéticos generados por un individuo al referirse al termino de dimensión y su relación con los espacios curvos :

> "La dimensión es un espacio que ocupamos en un tiempo determinado, y que puede estar ocupado por otros seres de otras dimensiones sin que ambos interactúen ya que hay infinitas dimensiones...la dimensión fraccionaria es poco probable que exista... el espacio curvo lo forma cualquier línea que se encuentre en el espacio".

En esta cita se pueden observar múltiples fenómenos, en primera instancia se evidencian enlaces entre el concepto de dimensión fraccionaria y el concepto de espacio, así como también un fuerte enlace entre el concepto de espacio curvo y la línea recta. De manera concatenada, se manifiesta entonces un enlace entre el concepto de dimensión fraccionaria, inherente a la Geometría Fractal y el concepto de línea recta, siendo este último constituyente fundamental de la Geometría Hiperbólica. Así mismo, cuando el alumno se refiere a la ocupación en el tiempo de la dimensión, se pudiera interpretar un concepto dinámico del espacio o un proceso progresivo de ocupación espacial, lo cual constituye una característica esencial de la Geometría Fractal.

El siguiente testimonio también es interesante:

> "La dimensión 1(uno) es un espacio definido por una línea ya sea recta o curva con ciertas coordenadas específicas las cuales determinan su tamaño, forma y estructura...el espacio curvo, aunque su nombre nos haga pensar que es una curva, no necesariamente es así, el espacio curvo son infinitas rectas o líneas que a través de la gravedad se mueven en el espacio hacia diferentes lados, no llevan un sentido específico."

Acá se observa en primera instancia fuertes enlaces entre los conceptos, dimensión, espacio y línea pero además de eso se evidencia de nuevo un concepto dinámico divergente del espacio. De alguna manera el alumno generó conceptos que no son estáticos en el tiempo con respecto al espacio y a la dimensión; es importante

recalcar que en la fractalidad los objetos son considerados parte de un proceso de construcción dinámico y divergente.

Otro testimonio, referido a la dimensión, nos muestra los siguiente: “Son líneas divisorias, que conforman un sistema de referencia creado por el hombre en el cual es posible representar y ubicar puntos, conjuntos y elementos”. Acá se puede observar un ejemplo de ligeras distorsiones en las formaciones primitivas de conceptos geométricos. Dependiendo de cómo estén conformados los campos cognitivos individuales previamente, habrá o no una formación de nuevos campos cognitivos distorsionados a raíz de la generación de murmullo cuántico.

En cuanto al término dimensión fraccionaria, un alumno dijo lo siguiente: “es una dimensión oculta, la que los fractales son puntos intermedios de una o varias dimensiones. Es demasiado irregular, son formas donde se aprecia la autosimilitud, su forma es hecha de copias más pequeñas de la misma figura”. En este tetimonio se observan enlaces entre el concepto de dimensión y autosimilitud. En la parte final también se perciben conceptos relativos a procesos de constricción progresiva. Esta misma persona afirmó lo siguiente : “Un espacio curvo es un espacio ajustable, el tiempo y el espacio son maleables”. Acá se observa la existencia de conexiones entre el concepto de espacio curvo y el concepto de tiempo. Además, de nuevo se observa la generación de campos conceptuales dinámicos de características topológicas al utilizar términos como ajustable, flexible y maleable.

Los conceptos topológicos de flexibilidad y maleabilidad están relacionados en los campos conceptuales de este individuo, con el concepto de tiempo, que a su vez indica dinamismo en la Geometría fractal. Vemos como emerge un nuevo concepto enlazante no previsto, entre la Geometría Hiperbólica y la Geometría Fractal, este concepto es el de *Tiempo.* Es un elemento que presupone dinamismo en la fractalidad y malebilidad en la geometría hiperbólica.

En la siguiente cita también se observa algo bastante interesante: “al referirnos a espacio curvo se me vino a la mente un área en la cual posee como una semicircunferencia o media luna, donde deja de ser una linea recta para convertirse en espacio quebrado”. Se puede observar primeramente como el concepto de espacio curvo genera una idea, grosso modo, de uno de los modelos de la Geometría

Hiperbólica enlazándose al mismo tiempo como el concepto de quebradura, muy propio de la Geometría Fractal.

El siguiente testimonio trata de expresar de una manera más general el efecto de asimilar una dimensión fraccionaria: “ es otra forma de ver algo, tal vez con ese tipo de geometrías se pueda llegar a romper lo establecido y agregar formas, dimensiones o maneras de ver algunas cosas”. Se observa claramente el efecto caótico que genera el evocar el concepto de dimensión fraccionaria; de la misma manera expresa reordenamiento y reestructuración de los campos conceptuales individuales.

Otro alumno, al referirse al término dimensión fraccionaria, expresó lo siguiente: “Un caso sería si la sombra es un efecto creado únicamente por algo que se antepone a la luz creando un vacío o ausencia de la misma y de la misma manera un efecto ante la vista; no consta que esté ahí materialmente, pero si existiese podría ser una dimensión fraccionaria. No está del todo, pues depende de la luz y de lo que se le anteponga. Sin estos factores, este efecto no existiría ” . Se observa una postura totalmente empírica, así como también enlaces fuertes entre el concepto de dimensión fraccionaría y el concepto de luz. Generalmente el concepto de luz es usado en los espacios hiperbólicos; una vez más se evidencia un puente conceptual entre la Geometría Hiperbólica y la Geometría Fractal.

Otro individuo expresó lo siguiente:

> “...nada puede salirse de las medidas de una dimensión, es decir, que se salga de una dimensión y entre en la siguiente, sin dar cabida a la idea de que pase por un conjunto de dimensiones fraccionarias antes de llegar a la próxima dimensión entera, tampoco soy capaz de imaginarlo en un espacio curvo, entiendo por éste a un espacio similar al espacio en que vivimos, pero diferenciándose en la inexistencia de las líneas rectas, ya que hay líneas curvas en su lugar”.

Este argumento fue planteado en negación, un tanto confuso y aislado distorsionado, pero de igual manera establece enlaces entre conceptos como dimensión, espacio, línea recta y líneas curvas, estableciendo conexión entre la fractalidad y la hiperbolicidad.

Otro estudiante expresa lo siguiente: “una dimensión fraccionaria a primera vista se ve como una locura ya que cada dimensión es una coordenada y al decir que existe una dimensión fraccionaria diríamos que de esa misma dimensión nace otra parte no completa...un espacio curvo para mi es el universo ya que si la geometría hiperbólica está basada en un espacio curvo... es curvo porque si el espacio contiene algún objeto, éste se distorsiona o amolda en ese mismo objeto”. Acá se observa una serie de argumentos que evidencias la generación de campos conceptuales referentes al dinamismo. Términos como “nace” al evocar el concepto de dimensión fraccionaria y “amolda” al evocar el concepto de espacio curvo, genera nuevamente un enlace conceptual dinámico de construcción progresiva y constante transformación.

Un extracto de otra entrevista se muestra a continuación:

> “La dimensión es el tamaño correspondiente a una figura, objeto o cosa, con ella podemos definir si algo es más grande que otro algo, por ejemplo: un elefante es mucho más grande que un perro, un ratón es mucho más pequeño que un ser humano. Hay muchas formas de poder calcular la dimensión que posee determinada figura y que podemos usar para ver con exactitud y sin tanteos. Si tenemos una dimensión fraccionaria podemos decir que un tamaño exacto para una figura que no conocemos, pero cuyo número determina ese tamaño; puede ser una linea recta que mide esa cantidad o cualquier otra cosa ”.

Lo más significante en esta evidencia es que nuevamente el concepto de dimensión, se relaciona con el llenado del espacio físico, no es un concepto pulcro, es un concepto primitivo y un poco distorsionado también. Además establece un vago enlace entre el concepto de dimensión fraccionaria con el concepto de línea recta.

Otra entrevista arrojó lo siguiente:

> “Al escuchar la palabra dimensión lo primero que me viene a la mente es la imagen de un cubo, puesto que mi concepto de dimensión está referido al espacio, al tamaño, a objetos que ocupan un lugar en el espacio...nuestro amplio universo está formado por tres dimensiones y una cuarta que es completamente curvado”.

En este caso se manifiestan argumentos que nuevamente ratifican la tendencia a relacionar el concepto de dimensión con ocupación espacial concreta, de hecho tenemos vestigios de una metacognición realizada por el mismo individuo entrevistado. Al momento de argumentar con respecto al

término espacio curvo, interpreta la cuarta dimensión como el inicio de un proceso dinámico de deformación topológica. Nuevamente se observan indicios de la existencia de un concepto más amplio en un nivel de energía superior que acopla los campos cognitivos generados al evocar conceptos de Geometría Hiperbólica y conceptos de la Geometría Fractal.

De nuevo en la siguiente evidencia se puede notar el carácter dinámico del concepto de dimensión por parte del siguiente individuo:

> "Puedo entender que un espacio curvo, hace referencia a un objeto con masa demasiado abundante; tanto que su dimensión va enroscando poco a poco, hasta hacerlo completamente redondo... El espacio curvo se enrosca hacia el tiempo, al que puedo mencionar como una cuarta dimensión incierta "

También se observa conexión directa con el concepto de tiempo como ente atractor del fenómeno.

En el siguiente extracto se observa de manera clara como el individuo evoca conceptos relativos al infinito divergente: "Un espacio curvo para mi podría ser un lugar de forma hiperbólica que se expande al infinito y no se cierra en ninguno de sus puntos "

Otro alumno consideró lo siguiente: "...en lo que respecta a espacio curvo tiene que ver más o menos con infinidad de veces de las características de la curva Koch y la curva de Peano". Acá se muestran enlaces fuertes entre el concepto de espacio curvo con el concepto de infinito. A su vez remite directamente a curvas fractales, intuyendo nuevas formas de espacio curvo irregular.

En el siguiente argumento se relaciona el concepto de dimensión fraccionaria con los conceptos de tiempo y espacio:

> "Lo que entiendo de dimensión, según lo que he aprendido en geometría, es sobre el número distinto de ejes de coordenadas que puede tener un vector. Cuando hablo o pienso en distintas dimensiones, lo que me viene a la cabeza es que son mundos distintos y paralelos en la cual cada uno funciona independientemente del otro, lo que quiero decir es que no pueden interactuar entre ellos, aunque pienso que existen simultáneamente y por lo tanto diría que esa dimensión fraccionaria tiene su lugar en el tiempo y en el espacio"

Otro alumno manifestó lo siguiente:

> “La dimensión es el entorno comprendido en diferentes aspectos de la vida, el cual se ve afectado por diversos factores que definirán con claridad el ámbito de la dimensión. Los aspectos de la vida en el cual podemos ver la dimensión, pueden ser la: la vida familiar, política, social, ciencia. Pienso que la dimensión tiene un sin fin de aspectos dependiendo del espectador o protagonista, que se verá envuelto en la dimensión. La dimensión es infinita... ”

El extracto anterior es bastante interesante, ya que se establece una asociación entre el concepto de dimensión y varios términos pertenecientes a las ciencias sociales, es decir no se limita a relacionar a la dimensión con espacios matemáticos y físicos, sino con espacios derivados del análisis de los fenómenos sociales.

Por último tenemos el siguiente extracto:

“Ahora bien, hablemos del espacio curvo, entiendo que todo lo que nos rodea tiene características curvas, así como se establece en el tríptico entregado en el evento, las montañas no son conos, los árboles no son lisos y las costas no son círculos, es cierto, el espacio tiene características curvas ”

Se observa en esta última evidencia que nuevamente se establece un enlace entre el término espacio curvo y frases correspondientes a la teoría fractal.

Todo lo mostrado anteriormente da pie a pensar que los enlaces existentes entre la Geometría Hiperbólica y la Geometría Fractal no surgen de manera forzada, sino que surgen de manera natural desde el caos generado por los incentivos caotizantes. En primera instancia se pudiera hablar de enlaces dinámicos y caóticos supeditados a ciertas interferencias y distorsiones en el proceso de percepción, pero de igual manera se muestran interconectados de forma jerárquica autosemejante. Se establecen enlaces en ramas alejadas de los nodos de la red, así como también enlaces en niveles energéticos superiores, es decir en campos conceptuales más genéricos, generando una trilogía conceptual Espacio-Tiempo-Transformación.

Se muestra claramente como el hecho de evocar conceptos en ambas geometrías, se manifiestan en la generación de nuevos campos cognitivos que se ven atraidos por estructuras conceptuales inherentes a la trilogía citada anteriormente.

De los incentivos caotizantes referentes a la fractalidad pura

Con el objetivo de estudiar la formación de nuevos conceptos, evidenciar posibles enlaces conceptuales desde el punto de vista fenomenológico, se realizaron algunas entrevistas escritas con preguntas abiertas a estudiantes de La Facultad de Ingeniería de la Universidad de Carabobo de los últimos semestres en un Taller académico realizado el 25 de Abril del año 2011 titulado *La Geometría Fractal*. Este evento, además de servir de insumo teórico para esta investigación, sirvió para emular durante 8 horas un campo energético cognoscible contenedor de un caudal incentivador cognitivo.

Se inició la actividad con una dinámica discursiva de tipo dialógica mediante la cual se le propuso al alumno participar empíricamente en la construcción de nuevas formas geométricas. Luego, se abordó un cuestionario de preguntas abiertas que incentivó, de forma bastante general, la generación de conceptos como *Dimensión* y *Forma*. Finalmente, se dejó manifestar al discente comentarios y observaciones referentes al proceso.

De las Formas

En la actividad, uno de los participantes expresó lo siguiente con respecto a la curva de Koch: “Se obtiene una estrella con 3 puntos definidos y 2 sin definir”. En esta proposición se observa, más que un concepto estructurado, un vacío conceptual de naturaleza topológica. El alumno trata de definir la forma observada de manera informal haciendo uso de características esenciales de una figura aproximada dejando en evidencia la “no posesión del concepto de”. El proceso intuitivo de aproximación a una forma geométrica conocida, es el mismo que fundamente la geometría euclidiana. La diferencia es que el atractor conceptual no pertenece a las formas clásicas fundamentales de la geometría de Euclides. El hecho, que el alumno haya enunciado la frase “con 3 puntos definidos y 2 sin definir” deja en evidencia el haber advertido grados de imperfección y desacople con respecto a formas geométricas suaves y clásicas. El proceso no generó un nuevo nodo conceptual atractor. La red conceptual generada con el enunciado se sigue desplegando alrededor de los conceptos clásicos de punto, línea recta y formas geométricas euclidianas fundamentales.

Otro grupo de alumnos afirmó lo siguiente con respecto a la curva de Koch: “Se obtienen varios triángulos formando una estrella”. En la cita anterior se observa el mismo rasgo topológico que el enunciado anterior, desconociendo la existencia de cualquier otro tipo de vestigio conceptual referentes a nuevas formas geométricas. Se muestra como rasgo predominante intuición geométrica basada en el concepto clásico pre- establecido que describe la forma de estrella. Además, el proceso no generó un nuevo nodo conceptual atractor, la red conceptual generada con el enunciado se sigue desplegando con elementos conceptuales clásicos como el punto, línea recta y formas geométricas euclidianas fundamentales representadas mediante el concepto de estrella. Deja en evidencia el no haber advertido grados de imperfección y desacople con respecto a formas geométricas suaves y clásicas.

Otras personas, con respecto a la curva de Koch, expresaron lo siguiente: “Un copo de nieve”. En este caso, se observa un rasgo topológico distinto, mostrando posesión de un nuevo concepto geométrico haciendo referencia a formas generadas por la naturaleza. El proceso intuitivo de aproximación a una forma geométrica conocida, no es el mismo que fundamenta la geometría euclidiana, ya que se hace referencia a una forma no definida en las teorías geométricas clásicas. Se genera un enlace entre la idea y la sensación mostrando la existencia un nuevo atractor conceptual que no pertenece a las formas clásicas fundamentales de la geometría de Euclides. Deja en evidencia el haber advertido grados de imperfección y desacople con respecto a formas geométricas suaves y clásicas.

Otras personas, con respecto a la curva de Koch, expresaron lo siguiente: “Forma de montaña”. En este caso, se observa un rasgo topológico similar al anterior, mostrando posesión de un nuevo concepto geométrico haciendo referencia a formas generadas por la naturaleza. El proceso intuitivo de aproximación a una forma geométrica conocida, no es el mismo que fundamenta la geometría euclidiana, ya que se hace referencia a una forma no definida en las teorías geométricas clásicas. Se genera un enlace entre la idea y la sensación, mostrando la existencia de un nuevo atractor conceptual que no pertenece a las formas clásicas fundamentales de la geometría de Euclides. Deja en evidencia el haber percibido grados de imperfección y desacople con respecto a formas geométricas suaves y clásicas.

Otros participantes expresaron lo siguiente refiriéndose a la curva de Koch: “Segmentos de recta”. Se observan conceptos topológicos escasos, en una red conceptual reducida alrededor del concepto de línea. Se muestra un vago proceso de asociación sin hacer referencia a formas geométricas intuitivas. Además, el proceso no generó un nuevo nodo conceptual atractor. La red conceptual generada con el enunciado se sigue desplegando con elementos conceptuales clásicos como la línea recta. Deja en evidencia el no haber percibido grados de imperfección y desacople con respecto a formas geométricas suaves y clásicas. Solo cierto grado de dispersión geométrica.

Con respecto a la curva de Koch, otros participantes opinaron lo siguiente: “Son segmentos de recta cada vez más pequeños que el original”. Semejante al caso anterior, se observan conceptos topológicos escasos, en una red conceptual reducida alrededor del concepto de línea. Se muestra un vago proceso de asociación sin hacer referencia a formas geométricas intuitivas. Además, el proceso no generó un nuevo nodo conceptual atractor. La red conceptual generada con el enunciado se sigue desplegando con elementos conceptuales clásicos como la línea recta. Deja en evidencia el no haber advertido grados de imperfección y desacople con respecto a formas geométricas suaves y clásicas. Solo cierto grado de dispersión geométrica acompañado de cierto rasgos de dinamismo al momento de enunciar la frase : “cada vez más”.

Otro grupo de participantes opinó lo siguiente: “Pirámide sobre pirámides”. Esta percepción de la curva de Koch muestra el mismo rasgo topológico que el enunciado de las estrellas, pero en este caso haciendo referencia a la forma de pirámide, desconociendo la existencia de cualquier otro tipo de vestigio conceptual referentes a nuevas formas geométricas. Se muestra como rasgo predominante intuición geométrica basada en el concepto clásico pre- establecido que describe la forma de pirámide. Además, el proceso no generó un nuevo nodo conceptual atractor. La red conceptual generada con el enunciado se sigue desplegando con elementos conceptuales clásicos como el punto, línea recta y formas geométricas euclidianas fundamentales representadas mediante el concepto de pirámide. Deja en evidencia el no haber advertido grados de imperfección y desacople con respecto a formas geométricas suaves y clásicas. Se evidencias leves vestigios de dinamismo.

Uno de los participantes expresó lo siguiente con respecto a la curva de Koch: “ Estrellas que se van a ir disminuyendo cada vez...”. En esta proposición se observa, más que un concepto estructurado, un dinamismo conceptual basado en formas topológicas clásicas. El alumno trata de definir la forma observada de manera informal haciendo uso de términos que dejan en evidencia la presencia de un proceso de construcción progresiva. El proceso intuitivo de aproximación a una forma geométrica conocida, es el mismo que fundamenta la geometría euclidiana la diferencia es que el atractor conceptual no pertenece a las formas clásicas fundamentales de la geometría de Euclides. No advierte grados de imperfección y desacople con respecto a formas geométricas suaves y clásicas. El proceso no generó un nuevo nodo conceptual atractor, pero se manifiesta el concepto de convergencia. La red conceptual generada con el enunciado se sigue desplegando alrededor de los conceptos clásicos de punto, línea recta y formas geométricas euclidianas fundamentales.

Por último, un grupo de alumnos plasmó un par de enunciados referentes a la curva de Koch que expresaban lo siguiente: “Varios segmentos de recta que forman algo parecido a una pirámide” y “Una semejanza a un copo de nieve...”. En este caso, se observan rasgos topológicos, de intuición, de atracción y de generación nodal ya descritos anteriormente. Adicionalmente se manifiesta el haber percibido grados de imperfección y desacople con respecto a formas geométricas clásicas y con respecto a formas geométricas existentes en la naturaleza.

De la Dimensión

En la misma actividad anterior, los alumnos expresaron distintos argumentos enmarcados dentro del concepto de dimensión haciendo referencia al conjunto de Cantor. Algunos participantes expresaron lo siguiente: “mientras más dividimos el segmento de recta, mayor va a ser la dimensión”. Acá se observan principios de reordenamiento de la estructura de la red conceptual que se genera al evocar el concepto de dimensión. Se manifiestan conceptos de espacio y dinamismo de manera simultánea basados en constituyentes fundamentales como el de línea recta. Se

evidencia de igual manera el concepto de fragmentación basado en el término clásico de división regular.

Otro grupo de participantes afirmó lo siguiente: “La dimensión del conjunto de Cantor es menor que la dimensión del segmento inicial. Es mayor que la dimensión del punto y menor que la dimensión de la recta ”. Se observan, al igual que la experiencia anterior, principios de reordenamiento de la estructura de la red conceptual que se genera al evocar el concepto de dimensión. También se manifiesta la formación de un concepto de dimensión intermedia, apoyado en tres nodos conceptuales fundamentales como lo son el punto, la línea recta y la dimensión topológica.

Otro grupo de participantes afirmó lo siguiente: “Todos los segmentos de recta tienen la misma dimensión que la recta anterior”. En este caso no se observa generación de nodos conceptuales nuevos. Se manifiestan conceptos inherentes a la geometría clásica sin vestigio alguno de formación ni reordenamiento conceptual. El concepto de dimensión topológica se mantiene constante en el proceso.

Integración de las unidades temáticas, tema central y descripción del fenómeno en lenguaje científico.

Una vez realizadas las entrevistas escritas a los discentes y grabadas en audio a los docentes, se extrajo las unidades temáticas más significativas para someterlas a un proceso de integración que pretende generar la descripción formal del fenómeno de manera individual para cada sujeto.

De los discentes:

Unidades temáticas.(Sujeto discente)	Tema Central	Descripción del fenómeno.
1) Mi punto de vista en cuanto a la dimensión es que, ésta está relacionada con la percepción del mundo físico, en este caso, a la medida de los objetos,	El sujeto número 1 relaciona el concepto de dimensión fraccionaria con conceptos relacionados con espacio y magnitudes físicas concretas. *	Se generan enlaces conceptuales entre el nodo referente a la dimensión y el nodo referente a espacio concreto.

su longitud, área y volumen...ahora bien, referente a las dimensiones fraccionarias no cuestiono su existencia...implican divisiones fraccionarias entre los valores enteros de las dimensiones y propone la medición mediante conteo de cajas.		
2) La dimensión Son líneas divisorias, que conforman un sistema de referencia creado por el hombre en el cual es posible representar y ubicar puntos, conjuntos y elementos.	El sujeto número 2 relaciona el concepto de dimensión con el concepto de línea, punto y conjunto. *	Se generan enlaces conceptuales entre el nodo referente a la dimensión y los nodos referentes a línea, punto y conjunto.
3) Un espacio curvo es un espacio ajustable, el tiempo y el espacio son maleables	El sujeto número 3 relaciona el concepto de espacio curvo con los conceptos de tiempo, maleabilidad y ajuste. *	Se generan enlaces conceptuales entre el nodo referente a espacio curvo y nodos que refieren a conceptos de tiempo y transformación.
4)...nada puede salirse de las medidas de una dimensión, es decir, que se salga de una dimensión y entre en la siguiente, sin dar cabida a la idea de que pase por un conjunto de dimensiones fraccionarias antes de llegar a la próxima dimensión entera, tampoco soy capaz de imaginarlo en un espacio curvo, entiendo por éste a un espacio similar al espacio en que vivimos, pero diferenciándose en la inexistencia de las líneas rectas, ya que hay líneas curvas en su lugar.	El sujeto número 4 relaciona el concepto de dimensión fraccionaria con el concepto de espacio y el concepto de línea. También relaciona conceptos de salida y entrada . Relaciona también el concepto de espacio curvo con el concepto de línea y espacio concreto. *	Se generan enlaces conceptuales entre el nodo referente a la dimensión y los nodos referente a espacio concreto, línea. También genera enlaces con nodos sistémicos como entrada-salida.
5)Una dimensión	El sujeto número 5 relaciona	Se generan enlaces

fraccionaria a primera vista se ve como una locura ya que cada dimensión es una coordenada y al decir que existe una dimensión fraccionaria diríamos que de esa misma dimensión nace otra parte no completa...un espacio curvo para mi es el universo.	el concepto de dimensión fraccionaria con el concepto de sistemas de referencia y el concepto de nacimiento. Además relaciona el concepto de espacio curvo con el concepto de universo. *	conceptuales entre el nodo referente a la dimensión fraccionaria y el nodo referente a espacio concreto. De igual manera genera enlaces entre el nodo referente a espacio curvo y al nodo referente al infinito.
6) Al escuchar la palabra dimensión lo primero que me viene a la mente es la imagen de un cubo, puesto que mi concepto de dimensión está referido al espacio, al tamaño, a objetos que ocupan un lugar en el espacio...nuestro amplio universo está formado por tres dimensiones y una cuarta que es completamente curvado.	El sujeto número 6 relaciona el concepto de dimensión con el concepto de espacio concreto y el concepto de curvatura. El concepto de dimensión lo relaciona con el concepto de universo *	Se generan enlaces conceptuales entre el nodo referente a la dimensión y los nodos referentes a espacio concreto y a infinito.
7) Un espacio curvo para mi podría ser un lugar de forma hiperbólica que se expande al infinito y no se cierra en ninguno de sus puntos.	El sujeto número 7, relaciona el concepto de espacio curvo con el concepto de hipérbola, punto, infinito y cerradura. *	Se generan enlaces conceptuales entre el nodo referente a espacio curvo y los nodos referentes a punto, hipérbola, infinito y cerradura topológica.
8)...en lo que respecta a espacio curvo tiene que ver más o menos con infinidad de veces de las características de la curva Koch y la curva de Peano.	El sujeto número 8 relaciona el concepto de espacio curvo con el concepto de infinito y el concepto generado por algunas estructuras fractales. *	Se generan enlaces conceptuales entre el nodo referente a espacio curvo y los nodos referentes a infinito y curvas fractales.
9)...diría que esa dimensión fraccionaria tiene su lugar	El sujeto número 9 Relaciona el concepto de	Se generan enlaces conceptuales entre el

en el tiempo y en el espacio	dimensión con el concepto de tiempo y el concepto de espacio. *	nodo referente a la dimensión y los nodos referentes a espacio y tiempo.
10) La dimensión es el entorno comprendido en diferentes aspectos de la vida, el cual se ve afectado por diversos factores que definirán con claridad el ámbito de la dimensión. Los aspectos de la vida en el cual podemos ver la dimensión, pueden ser la: la vida familiar, política, social, ciencia. Pienso que la dimensión tiene un sin fin de aspectos dependiendo del espectador o protagonista, que se verá envuelto en la dimensión. La dimensión es infinita...	El sujeto número 10 relaciona el concepto de dimensión con espacios de desarrollo humano, familia, política, ciencia. Relaciona de manera directa con el concepto de relatividad y con el concepto de infinito. *	Se generan enlaces conceptuales entre el nodo referente a la dimensión y los nodos referentes a espacios de desarrollo humano, relatividad e infinitud.

Cuadro 5.1 Integración discente
Fuente: Elaboración Propia

De los docentes especialistas en geometría:

Unidades temáticas.(Sujeto docente)	Tema Central	Descripción del fenómeno.
1)Cuando se habla de dimensión fraccionaria tiene que haber algo que lo mida, debe haber una métrica que establezca que es eso, debe existir esa definición. Cuando se habla de dimensión tiene que haber un espacio y ese espacio tiene que estar definido de alguna manera. Con respecto al termino espacio curvo sigue habiendo un problema de definición.	El sujeto número 1 relaciona el concepto de dimensión fraccionaria con conceptos relacionados métrica y con el concepto de definición. *	Se generan enlaces conceptuales entre el nodo referente a la dimensión y el nodo referente a espacio métrico de tipo axiomático.

2) Con respecto a la dimensión fraccionaria me imagino la imagen que forman los fractales.	El sujeto número 2 relaciona el concepto de dimensión fraccionaria con el concepto de fractal. ***	Se generan enlaces conceptuales entre el nodo referente a la dimensión y el nodo referente al término fractal.
3) La dimensión fraccionaria me da la idea de algo que modifica los ejes que haga que ya no sean perpendiculares, algo que no se pudiera llenar por completo. Con respecto al término espacio curvo pienso en una figura relacionada con una silla de montar.	El sujeto número 3 relaciona el concepto de dimensión fraccionaria el concepto de línea, espacio y llenado. Relaciona espacio curvo con una función en el espacio concreto. *	Se generan enlaces conceptuales entre el nodo referente a la dimensión con nodos referentes a línea, espacio y dinamismo espacial. Genera enlaces conceptuales entre el nodo referente a espacio curvo y nodos que refieren conceptos espaciales.
4) Al escuchar el término dimensión fraccionaria me imagino algo espacial. Y con respecto a espacio curvo, no tendría nada que ver con el espacio que conocemos, lo veo como algo abstracto.	El sujeto número 4 relaciona el concepto de dimensión fraccionaria con el concepto de espacio. Relaciona también el concepto de espacio curvo con un ente abstracto. *	Se generan enlaces conceptuales entre el nodo referente a la dimensión y los nodos referente a espacio concreto. También genera enlaces con nodos referentes a entes abstractos sin definir.
5)El término dimensión fraccionaria geométricamente no lo puedo concebir. Al escuchar espacio curvo imagino una curva de R3 y un sistema de ejes cartesiano pero curvo.	El sujeto número 5 no relaciona el concepto de dimensión fraccionaria con nada. Además relaciona el concepto de espacio curvo con el concepto de línea. *	No generan enlaces conceptuales en el nodo referente a la dimensión fraccionaria. Genera enlaces entre el nodo referente a espacio curvo y el nodo referente a línea.
6) Nunca había escuchado dimensión fraccionaria. Se debe definir las reglas. Espacio curvo lo relaciono con la teoría de la relatividad, espacio-tiempo,gravedad como consecuencia de la curvatura espacio-tiempo.	El sujeto número 6 no relaciona el concepto de dimensión fraccionaria con nada. Refiere a alguna estructura axiomática. Además relaciona el concepto de espacio curvo con el concepto de espacio y de tiempo. *	Se generan enlaces conceptuales entre el nodo referente a la dimensión y los nodos referentes a axioma. Genera enlaces conceptuales entre el nodo referente a espacio curvo y los nodos referentes a espacio

		tiempo.
7) Es un espacio pero en fracciones, un sistema fraccionario sería una parte del sistema lineal. Un espacio curvo es un espacio medido alrededor de una curva, espacio curvo serian líneas curvas.	El sujeto número 7, Relaciona el concepto de dimensión fraccionaria con el concepto de línea. Relaciona el concepto de espacio curvo con el concepto de línea. *	Se generan enlaces conceptuales entre el nodo referente dimensión y el nodo referente a línea. Genera enlaces conceptuales entre el nodo referente a espacio curvo y el nodo referente a línea.
8) Al escuchar dimensión fraccionaria imagino figuras que van transformándose, que haciendo un llenado parcial del espacio. Por ejemplo figuras que son de dimensión entre uno y dos. Un espacio curvo es una deformación del espacio, no existirían lineas rectas, solo líneas curvas.	El sujeto número 8 relaciona el concepto de dimensión fraccionaria y el concepto de espacio, llenado y transformación. Relaciona el concepto de espacio curvo con el concepto de línea. *	Se generan enlaces conceptuales entre el nodo referente a la dimensión fraccionaria y nodos referentes a espacio , llenado y transformación. Se generan enlaces conceptuales entre el nodo referente a espacio curvo y el nodo referente a línea.
9)Para tener idea de una Dimensión Fraccionaria es necesario diferenciarla de una Dimensión Fraccionada ésta última es asi como si un TODO lo dividiéramos en varias partes (particiones) donde éstas se comportan como un conjunto para lo cual éste tiene en escencia menor número de elementos pero que al definir una unión de esas particiones, se obtiene el TODO. El Espacio Curvo, en lenguaje coloquial, es algo así como que nos imaginaramos todo tipo de objeto y superficies que tiendan a tener una curvatura, bien sea una curvatura finita o una	El sujeto número 9 relaciona el concepto de dimensión fraccionaria con los conceptos de espacio concreto y de superposición. De la misma manera relaciona el concepto de espacio curvo con vestigios de formas irregulares propias de la fractalidad que responden a estructuras de autosimilitud y divergencia	Se generan enlaces conceptuales entre el nodo referente a la dimensión fraccionaria y nodos referentes a espacio concreto. Se generan enlaces conceptuales entre el nodo referente a espacio curvo y formas fractales.

curvatura infinita, en ambos casos, regular o irregular. Que significa eso ?, bueno, si pensamos en la superficie de la tierra, si observamos la superficie de algunas frutas, o bien, la superficie de cualquier ente natural, nos damos cuenta que en dimensiones; macro o micro, la superficie tiende a ocupar un Espacio definidamente Curvo.		

Cuadro 5.1 Integración docente
Fuente: Elaboración Propia

Triangulación

Una vez realizada la integración de las unidades temáticas, tema central y descripción del fenómeno en lenguaje científico, se tomó el tema central correspondiente a cada unidad temática para someterlo al proceso de triangulación. A continuación se desplegará un cuadro donde se mostrará de manera explicita el punto de vista del alumno, el punto de vista del docente y el punto de vista del investigador. La comparación se realizará con los testimonios cuyo tema central pertenezcan a una misma clase. Se seleccionó cada tema central del dicente y se hizo un barrido de lista en los temas centrales del docente para buscar los argumentos, mediante asociación no biyectiva de elementos pertenecientes a la misma clase.

El número de unidades temáticas procesadas fueron 10 para cada informante, generando un ambiente de comparación que se considera completo en cuanto a los datos que lo constituyen ya que ningún testimonio adicional añade nada distinto de lo que aportaron los relatos precedentes. Se estaría en presencia de una saturación del tema. (Martínez,2006)

Alumno	Docente	Investigador	Referente fenomenológico
Discente1:Rela-ciona el concepto de dimensión fraccionaria con conceptos relacionados con espacio y magnitudes físicas concretas.	Docente 3: Relaciona el concepto de dimensión fraccionaria el concepto de línea, espacio y llenado. Relaciona espacio curvo con una función en el espacio concreto.	Se genera una red conceptual con elementos enlazantes visibles en la sintaxis del discurso. Enlace robusto común presente entre los conceptos de dimensión y de espacio concreto.	manifiesta un enlace conceptual generado entre el concepto de dimensión y los conceptos relativos a magnitudes físicas y a objetos concretos. Representa una visión clásica de la geometría. Se manifiesta una conexión notoria entre el objeto sensible y la idea trascendental. La red conceptual generada con el enunciado se sigue desplegando alrededor de los conceptos clásicos de punto, línea recta y formas geométricas euclidianas ***fundamentales.***
Discente 2: Relaciona el concepto de dimensión con el concepto de línea, punto y conjunto.	Docente 7: Relaciona el concepto de dimensión fraccionaria con el concepto de línea. Relaciona el concepto de espacio curvo con el concepto de línea.	Se genera una red conceptual con elementos enlazantes visibles en la sintaxis del discurso. Enlace robusto común presente entre los conceptos de dimensión y de línea.	observa como el nodo de espacio curvo despliega redes que generan enlaces indirectos con nodos conectados a la dimensión fraccionaria.
Discente 3: Relaciona el concepto de	Docente 5: No relaciona el concepto de dimensión	Se genera una red conceptual con elementos	Subord. axiomática por parte del individuo,

espacio curvo con los conceptos de tiempo, maleabilidad y ajuste.	fraccionaria con nada. Refiere a alguna estructura axiomática. Además relaciona el concepto de espacio curvo con el concepto de espacio y de tiempo.	enlazantes visibles en la sintaxis del discurso. Enlace robusto común presente entre los conceptos de Espacio y tiempo. Presencia de vacío conceptuales en cuanto a dimensión fraccionaria.	generando un enlace conceptual ascendente entre el concepto de dimensión. Enlace entre los conceptos espacio y tiempo. Se manifiestan ejemplos de ráfagas de vacíos conceptuales en las formaciones primitivas de conceptos geométricos. Se evidencia de manera frecuente cierto vacío conceptual en lo que respecta al término dimensión fraccionaria.
Discente 4: Relaciona el concepto de dimensión fraccionaria con el concepto de espacio y el concepto de línea. También relaciona conceptos de salida y entrada . Relaciona también el concepto de espacio curvo con el concepto de línea y espacio concreto.	Docente 8: Relaciona el concepto de dimensión fraccionaria y el concepto de espacio, llenado y transformación. Relaciona el concepto de espacio curvo con el concepto de línea. Docente 6: no relaciona el concepto de dimensión fraccionaria con nada. Además relaciona el concepto de espacio curvo con el concepto de línea	Se genera una red conceptual con elementos enlazantes visibles en la sintaxis del discurso. Enlace robusto común presente entre los conceptos de dimensión espacio, línea y transformación. Presencia de vacío conceptuales en cuanto a dimensión fraccionaria	observa en primera instancia fuertes enlaces entre los conceptos, dimensión, espacio y línea pero además de eso se evidencia de nuevo un concepto dinámico divergente del espacio. De alguna manera el alumno generó conceptos que no son estáticos en el tiempo como parte de un proceso de construcción dinámico y divergente. evidencia de manera frecuente cierto vacío conceptual en lo que respecta al término dimensión

			fraccionaria. Este argumento fue planteado un tanto confuso aislado y distorsionado, pero de igual manera establece enlaces entre conceptos como dimensión, espacio. Se manifiestan ejemplos de ráfagas de vacíos conceptuales en las formaciones primitivas de conceptos geométricos.
Discente 5: Relaciona el concepto de dimensión fraccionaria con el concepto de sistemas de referencia y el concepto de nacimiento. Además relaciona el concepto de espacio curvo con el concepto de universo.	Docente 2: Relaciona el concepto de dimensión fraccionaria con el concepto de fractal.	Se genera una red conceptual con elementos enlazantes implícitos en la sintaxis del discurso. Enlace robusto común presente entre los conceptos de dimensión y transformación.	Evidente atracción hacia nodos referentes a transformación espacial.
Discente 6: Relaciona el concepto de dimensión con el concepto de espacio concreto y el concepto de curvatura. El concepto de dimensión lo relaciona con el	Docente 2: Relaciona el concepto de dimensión fraccionaria con el concepto de fractal.	Se genera una red conceptual con elementos enlazantes implícitos en la sintaxis del discurso. Enlace robusto común presente entre los conceptos de dimensión espacio	Se generan enlaces conceptuales con nodos divergentes y en constante transformación.

concepto de universo.		y transformación.	
Discente 7: Relaciona el concepto de espacio curvo con el concepto de hipérbola, punto, infinito y cerradura.	Docente 1: Relaciona el concepto de dimensión fraccionaria con conceptos relacionados métrica y con el concepto de definición. Docente4:Relaciona concepto de espacio curvo con un ente abstracto.	Se genera una red conceptual con elementos enlazantes implícitos en la sintaxis del discurso. Enlace robusto común presente entre los conceptos topológicos.	Subordinación axiomática por parte del individuo, generando un enlace conceptual ascendente entre el concepto de dimensión. La red conceptual generada con el enunciado se sigue desplegando alrededor de los conceptos clásicos de punto, línea recta y formas geométricas euclidianas ***fundamentales.***
Dicente 8: Relaciona el concepto de espacio curvo con el concepto de infinito y el concepto generado por algunas estructuras fractales.	Docente 2: Relaciona el concepto de dimensión fraccionaria con el concepto de fractal.	Se genera una red conceptual con elementos enlazantes implícitos en la sintaxis del discurso. Enlace robusto común presente entre los conceptos de infinito y fractal.	Se generan enlaces conceptuales con nodos divergentes y en constante transformación.
Discente 9: Relaciona el concepto de dimensión con el concepto de tiempo y el concepto de	Docente 3: Relaciona el concepto de dimensión fraccionaria el concepto de línea, espacio y llenado. Relaciona espacio curvo con una función	Se genera una red conceptual con elementos enlazantes visibles en la sintaxis del discurso. Enlace robusto común	La red conceptual generada con el enunciado se sigue desplegando alrededor de los conceptos clásicos de punto, línea recta

espacio.	en el espacio concreto.	presente entre los conceptos de dimensión y de espacio concreto.	y formas geométricas euclidianas ***fundamentales.***
Discente 10: relaciona el concepto de dimensión con espacios de desarrollo humano, familia, política, ciencia. Relaciona de manera directa con el concepto de relatividad y con el concepto de infinito.	No se encontró argumento de esta clase.	Se genera una red conceptual con elementos enlazantes visibles en la sintaxis del discurso. Enlace presente entre los conceptos de dimensión y de espacio desarrollo humano.	Se genera un campo energético entrópico representativo del caos generado por los incentivos caotizantes. Se generan campos energéticos a frecuencias distintas a las anteriores.

Cuadro 5.3 Triangulación
Fuente: Elaboración Propia

Categorización

Categorías Fundamentales

Categoría fundamental	Descripción	Referencia fenomenológica
Enlace métrico-dimensional (E.M.D.)	❿ Relación directa entre conceptos de dimensión y magnitudes geométricas.	❿ Se manifiesta un enlace conceptual generado entre el concepto de dimensión y los conceptos relativos a magnitudes físicas , con enlaces existentes entre la dimensión y los objetos reales. Representa una visión clásica de la geometría. Se manifiesta una conexión notoria entre el objeto sensible y la idea

		trascendental.
Enlace Fracto-Hiperbólico (E.F.H.)	❿ Relación indirecta entre conceptos fundamentales de la geometría fractal y conceptos fundamentales de la geometría hiperbólica.	❿ Se observa como el concepto de espacio curvo despliega redes que generan enlaces indirectos con nodos conectados a la dimensión fraccionaria.
Enlace axiomático-dimensional (E.A.D.)	❿ Relación directa entre conceptos de dimensión el conceptos de axioma.	❿ Subordinación axiomática por parte del individuo, generando un enlace conceptual ascendente entre el concepto de dimensión .
Enlace divergente (E.D.)	❿ Relación directa entre el concepto de espacio el concepto de infinito.	❿ Se observa en primera instancia fuertes enlaces entre los conceptos dimensión, espacio y línea pero además de eso se evidencia de nuevo un concepto dinámico divergente del espacio. De alguna manera el alumno generó conceptos que no son estáticos en el tiempo como parte de un proceso de construcción dinámico y divergente.
Enlace conceptual entrópico(E.C.E.)	❿ Enlace conceptual representativo de caos, libertad y transición dualidad orden-desorden.	❿ Se genera un campo energético entrópico representativo del caos generado por los incentivos caotizantes. Se generan campos energéticos a frecuencias

		distintas a las anteriores.
Trema conceptual (T. C.)	❿ Forma asociada a los vacíos existentes en estructuras conceptuales . Las tremas generan discontinuidades energéticas.	❿ Se evidencia de manera frecuente cierto vacío conceptual en lo que respecta al término dimensión fraccionaria.
Grumo conceptual (G.C.)	❿ Elemento primario conceptual energético presente en un coágulo conceptual.	❿ Este argumento fue planteado en negación, un tanto confuso aislado y distorsionado, pero de igual manera establece enlaces entre conceptos como dimensión, espacio.
Coágulo conceptual (C.C.)	❿ Forma asociada a la posesión estructuras conceptuales con ciertas discontinuidades energéticas.	❿ Se manifiestan ejemplos de ráfagas de vacíos conceptuales en las formaciones primitivas de conceptos geométricos.
Nodo Conceptual (N.C.)	❿ Cada concepto inicial emitido como incentivo caotizante genera conceptos con múltiples enlaces en la red conceptual, desencadenando un cambio entrópico en las estructuras cognitivas y por ende en las estructuras energéticas.	❿ La red conceptual generada con el enunciado se sigue desplegando alrededor de los conceptos clásicos de punto, línea recta y formas geométricas ***clásicas.***

Cuadro 5.4 Categorización específica.
Fuente: Elaboración Propia

Categorías Generales

Categorías Generales	Descripción	Referente fenomenológico
Atractor conceptual	➓ Campo energético conceptual al cual la red evoluciona en un tiempo suficientemente largo.	➓ Se muestra claramente como el hecho de evocar conceptos en ambas geometrías, se manifiestan en la generación de nuevos campos cognitivos que se ven atraidos por estructuras conceptuales inherentes a la trilogía Espacio-Tiempo-Tranformación.
Atractor conceptual espacial	➓ Campo energético conceptual espacial al cual la red evoluciona en un tiempo suficientemente largo.	➓ Se manifiestan argumentos que nuevamente ratifican la tendencia a relacionar el concepto de dimensión con ocupación espacial concreta, de hecho tenemos vestigios de una metacognición realizada por el mismo individuo entrevistado.
Atractor conceptual Temporal	➓ Campo energético conceptual de tiempo al cual la red evoluciona en un tiempo suficientemente largo.	➓ Los conceptos topológicos de flexibilidad y maleabilidad están relacionados en los campos conceptuales, con el concepto de tiempo, que a su vez indica dinamismo .
Atractor conceptual de transformación	➓ Campo energético conceptual de transformación al cual la red evoluciona en un tiempo suficientemente largo.	➓ Se observa la generación de campos conceptuales dinámicos de características topológicas al utilizar términos como ajustable, flexible y maleable. ➓ Se observan efectos caóticos que generan el evocar el concepto de

		dimensión fraccionaria; de la misma manera expresa reordenamiento y reestructuración de los campos conceptuales individuales. ➓ Al momento de argumentar con respecto al término. espacio curvo, interpreta la cuarta dimensión como el inicio de un proceso dinámico de deformación topológica. ➓ Se establece una asociación entre el concepto de dimensión y varios términos pertenecientes a las ciencias sociales, es decir no se limita a relacionar a la dimensión con espacios matemáticos y físicos, sino con espacios derivados del análisis de los fenómenos sociales. ➓ Se observa una serie de argumentos que evidencian la generación de campos conceptuales referentes al dinamismo. Términos como “nace” al evocar el concepto de dimensión fraccionaria y “amolda” al evocar el concepto de espacio curvo, genera nuevamente un enlace conceptual dinámico de construcción progresiva y constante transformación.
Enlaces Conceptuales	Relación directa o indirecta de tipo referencial lingüístico, entre uno o mas nodos conceptuales. Acoplamiento energético entre campos	➓ En primera instancia se pudiera hablar de enlaces dinámicos y caóticos supeditados a ciertos grumos y tremas en el proceso de percepción,

	electromagnéticos conceptuales.	pero de igual manera se muestran interconectados de forma jerárquica autosemejante. Se establecen enlaces en ramas alejadas de los nodos de la red, así como también enlaces en niveles energéticos superiores, es decir en campos conceptuales más genéricos, generando una trilogía conceptual Espacio-Tiempo-Tranformación.

Cuadro 5.4 Categorización general.
Fuente: Elaboración Propia

Estructura de las categorías

A continuación se muestra la estructura jerárquica de las categorías establecidas en la sección anterior. Esta estructura no pretende expresar la forma de la red. Con lo expresado en las secciones anteriores se puede interpretar muy fácilmente que la red conceptual es de forma compleja y que posiblemente responda a modelos fractales. Esta estructura presentada más bien pretende establecer un nivel jerárquico energético de evolución de la red conceptual.

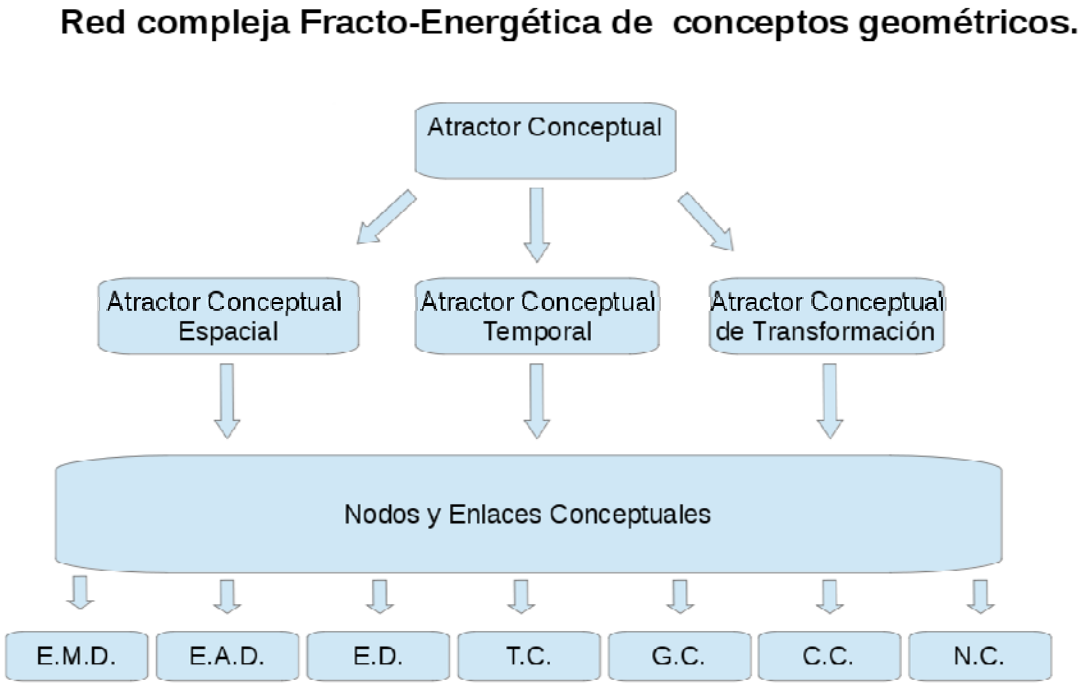


Figura 5.1 Red Fracto-Energética de Conceptos Geométricos

Fuente: Elaboración Propia

CAPÍTULO VI

CLAUSURA DELCONTRASTE

Proceso de contraste final

Una vez realizado el proceso de análisis conceptual teórico y el proceso de categorización se establece, a manera de cierre, un argumento de contraste final dividido en tres partes. La primera parte, se establece un cierre con los resultados obtenidos con aquellos estudios similares que se presentaron en el marco teórico referencial con el fin de percibir los diferentes ángulos y ampliar visiones reducidas para poder expresar de una manera más contundente el significado de este estudio. En la segunda parte se genera un argumento que tiende un puente entre los enlaces generados en el análisis conceptual teórico y los enlaces generados mediante el análisis fenomenológico. Y por último se genera un argumento de cierre y de retorno, de lo planteado en la segunda parte, en función de las distintas corrientes epistemológicas de la matemática.

Contraste con estudios anteriores.

Más que un contraste para analizar discrepancias, es un contraste para vislumbrar elementos constructivos entre los estudios, ya que cada una de las investigaciones previas tiene su enfoque muy particular y por ende resultados en áreas conceptuales que se pueden considerar mapeos recíprocos.

Por ejemplo lo siguiente, en esta investigación se analizaron los enlaces conceptuales generados entre los conceptos fundamentales de dos enfoques geométricos, el enfoque hiperbólico y en enfoque fractal. Esta investigación adquiere un nivel más esencial y genético con respecto a la investigación de Gámez(2001) en donde a partir de las definiciones estructuradas, se abordan distintos problemas constructivos que se pueden presentar con el grupo de transformaciones del plano hiperbólico.

El estudio de Gámez(2001) permitió considerar un punto de vista centrado en el análisis del comportamiento de propiedades y consistencia de definiciones de una figura geométrica en particular desde los modelos no euclidianos. En este caso se está en presencia del intento más representativo que se ha realizado con el fin de observar la conservación de las propiedades y el comportamiento de las transformaciones de algunos objetos geométricos, dentro de un modelo distinto al euclidiano. Los resultados de la investigación de Gámez(2001) ofrece luces para esta investigación en el sentido de proporcionar vestigios de solapamiento conceptual entre modelos geométricos distintos al euclidiano.

De la misma manera Farrés(2004) sirve de referencia mapeada a la presente investigación, ya que se observa como se estudia el concepto geométrico de longitud utilizando definiciones de un modelo geométrico distinto al modelo clásico euclidiano.

Los dos trabajos citados anteriormente establecen una dualidad para cada enfoque de tipo definición -definición y concepto-definición respectivamente mentras que en la investigación que se desarrolla acá la dualidad es de tipo concepto-concepto.

Con respecto a la investigación de De Pablo (2006) el análisis enfocado en cómo el ser humano carece de un mundo de la experiencia innato, genera una serie sus estructuras racionales referentes a objetos sensibles. Al final emerge la conclusión de que la existencia de la estructura no euclidiana de los fenómenos viene dada de un modo comparativo, es decir, en relación con otra existencia dada según las leyes de la conexión de los fenómenos en una experiencia en general.

Este último trabajo enuncia por primera vez la existencia de una estructura conceptual supeditada a modelos geométricos no euclidianos. Mientras que en esta investigación se trata de mapear, extrapolar y buscar la esencia y la dinámica de estructuras conceptuales generadas a partir de una dialéctica trascendental entre los conceptos fundamentales de la geometría hiperbólica y los conceptos fundamentales de la geometría fractal.

Puente Fenómeno-Epistémico

Del análisis conceptual teórico se genera la posibilidad de una compatibilidad geométrica existente al modificar el quinto postulado hiperbólico de Lobachevsky realizando injertos de curvas fractales generadas a partir del punto exterior desde donde se trazan rectas paralelas a otra, con el objetivo de generar un nuevo modelo geométrico que pretenda ir unificando de una manera estructural compleja la totalidad de la teoría geométrica.

A partir de lo propuesto anteriormente es muy probable que se generen enlaces conceptuales de una manera distinta a la analizada en el capítulo IV. Los enlaces conceptuales dejarán de ser aislados y pasarán a constituir un nuevo sistema geométrico unificado alrededor de nuevos conceptos fundamentales.

Es entonces cuando deberá existir una correspondencia biunívoca entre los enlaces conceptuales generados en el nuevo sistema geométrico con los enlaces conceptuales generados desde el individuo.

Dentro de este afán de vislumbrar una nueva racionalidad conceptual geométrica se observó la generación de un conjunto de enlaces estructurados de forma caótica reflejado en el discurso de cada uno de los individuos entrevistados. Se generaron dos clases de enlaces, la primera clase es referente a los solapamientos conceptuales que se generan alrededor de los términos en el discurso y la segunda clase refiere a conceptos que se manifiestan como supra conjuntos unificadores que desempeñan, en ocasiones, funciones de atractor.

Con respecto a la primera clase de enlaces se pudo determinar lo siguiente:

- Existe relación directa entre el concepto de dimensión fraccionaria correspondiente a la geometría fractal y el concepto de longitud perteneciente a la geometría hiperbólica.
- Existe relación directa entre el concepto de dimensión fraccionaria correspondiente a la geometría fractal y el concepto de axioma correspondiente a la geometría hiperbólica.

- Existe relación indirecta entre el concepto de dimensión fraccionaria correspondiente a la geometría fractal y los conceptos de espacio curvo y línea recta correspondientes a la geometría hiperbólica.
- Existe relación directa entre los conceptos de espacio curvo y línea correspondiente a la geometría hiperbólica y el concepto de divergencia correspondiente a la geometría fractal.
- Existe relación directa entre el concepto de espacio curvo correspondiente a la geometría hiperbólica y el concepto de infinito correspondiente a ambas geometrías.
- Existe relación directa entre el concepto de espacio curvo correspondiente a la geometría hiperbólica y los términos relativos a las curvas fractales.

Con respecto a la segunda clase de enlaces, se puede aproximar a partir de las entrevistas, que existen tres grandes conceptos que subyacen las redes conceptuales generadas en el individuo, estos son : Espacio, Tiempo y Transformación.

En los análisis realizados a las entrevistas se encontró la intención de relacionar los conceptos geométricos con ocupación espacial concreta y axiomática. De la misma manera se generan conceptos que manifiestan cierto grado de dinamismo, flexibilidad y maleabilidad, que se relacionan de manera directa con el tiempo y las transformaciones.

Por último, es bueno destacar que si bien la metodología nos refiere a una contrastación final, este proceso no fue para nada lineal. Es decir, durante toda la investigación se observa un proceso de constante constrastación entre las teorías de Kant, Mandelbrot, Lobachevski y Mussa, que permitieron dar luces y descubrir la estructura que se propone en el capítulo anterior.

El retorno a lo epistemológico

La dualidad entre la epistemología y la fenomenología observada en toda la investigación nos hace, necesariamente, retornar a las corrientes epistemológicas de la matemática.

El enfoque epistemológico que se asume en esta investigación es un enfoque basado en la diversidad, acorde con la complejidad de un sistema geométrico

moderno. Por ello, existen enlaces conceptuales inmutables, con independencia del individuo; argumentos correspondientes a la corriente Platonista, afirmando que los enlaces conceptuales geométricos existen, que son abstractos, y que son independientes a toda actividad racional, es decir, que los objetos y teoremas geométricos existen en forma aislada del mundo material e independientemente del espacio y del tiempo.

Por otro lado, durante esta investigación se vislumbran enlaces conceptuales que surgen de definiciones y teoremas formales que responden a enunciados que pierden el carácter de verdad en si mismos; dejan de ser proposiciones sobre objetos bien definidos generando una perspectiva que permite ver a los enlaces conceptuales, entre las dos geometrías, como relaciones que se establecen entre algunos símbolos.

Se manifiestan enlaces en donde la lógica, como disciplina, es anterior o más fundamental que la geometría, reduciendo algunos argumentos geométricos a proposiciones lógicas, pero que no terminan de definirse bajo la lógica aristotélica. Este es el caso del punto de enlace correspondiente a la *Dimensión. B*ajo la concepción logicísta de la geometría, este enlace conceptual estaría acoplandose mejor a la estructura de la lógica borrosa, privilegiando, y en algunos casos reduciendose a sus lógicamente formulables. En esta investigación se evidencia como el concepto de dimensión tiende puentes que adoptan la postura del estudio de los lenguajes naturales de conceptos geométricos desarrollados en la lógica, relacionados con la extensión, la estabilidad de las categorías, el significado y la denotación, así como por la tendencia a reducir el estudio lingüístico a los aspectos lógicos, en detrimento de algunos enfoques formalistas e ideales.

El proceso que vislumbró la dimensión fractal se desarrolló mediante un proceso constructivista, así como también lo es la esencia de la modificación propuesta del quinto postulado con injertos de curvas fractales. Estos argumentos están en sintonía con el hecho de que los objetos geométricos tienen significado y existen en la medida en que se construyan mediante un número finito de pasos a partir de entes fundamentales; quedando así en evidencia la postura Constructivista-Intuicionista, proponiendo que el conocimiento geométrico se basa en la aprehensión que antecede cualquier lenguaje o lógica. La modificación del quinto postulado se fundamenta epistemológicamente en una intuición primordial como base del

conocimiento geométrico, y a partir de este cimiento, el conocimiento matemático se comienza a construir nuevamente.

CAPÍTULO VII

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Conclusiones

Con la pretensión de dar respuesta al objetivo general y por ende a los objetivos específicos, en este capítulo expresaremos de manera sintetizada las observaciones y resultados más contundentes arrojados por esta investigación.

En cuanto al objetivo general descrito como “Analizar el enlace conceptual existente entre la Geometría Fractal y la Geometría Hiperbólica. ” se obtuvo un desarrollo bastante exhaustivo que vislumbró, no la existencia de un enlace, sino la existencia de una red conceptual energética de tipo compleja que posee características esenciales propias de los sistemas dinámicos.

Del desarrollo del primer objetivo ubicado en el capítulo 2 y descrito como “ Indagar sobre el estado del arte de los cambios de concepción geométrica a través de la historia.” se observó el prominente dinamismo del pensamiento geométrico, de donde de manera simultanea emergieron las direcciones de búsqueda para lograr vislumbrar los conceptos fundamentales de los modelos geométricos fractal e hiperbólico trazados por los objetivos descritos como “Identificar algunos de los conceptos fundamentales de la Geometría Fractal.” e “Identificar algunos de los conceptos fundamentales de la Geometría Hiperbólica.”

El objetivo número 4 descrito como “Contrastar los conceptos fundamentales de la Geometría Fractal y la Geometría Hiperbólica resaltando algunas de sus relaciones.” y el objetivo número 5 descrito como “Contrastar los conceptos fundamentales de la Geometría Fractal y la Geometría Hiperbólica describiendo los posibles puntos de enlace” tuvo dos etapas de desarrollo, un primer desarrollo teórico plasmado en el capítulo IV titulado zona de contraste teórico conceptual y un desarrollo fenomenológico plasmado en el capítulo V.

Por último el objetivo 6 descrito como “Formular el o los criterios de enlace obtenidos a través del estudio de los conceptos fundamentales de la Geometría Fractal y la Geometría Hiperbólica.” fue desarrollado en la etapa de categorización y

estructuración plasmado en el capítulo VI y descrito de manera sintetizada en los siguientes párrafos.

A continuación se enumeran de manera más específica y concreta las observaciones más significativas de los resultados o criterios de enlace obtenidos de esta investigación en sintonía con el objetivo general y los objetivos específicos:

1) Existen enlaces múltiples, teóricos y fenomenológicos, entre la Geometría Fractal y la Geometría Hiperbólica.

2) Existes tres conceptos unificadores que cumplen funciones de atractor conceptual. Los conceptos son : Espacio, Tiempo y Transformación.

3) Existen tres espacios independientes en este estudio conceptual, el espacio geométrico en sí mismo, el espacio lingüístico de los conceptos geométricos y el espacio energético correspondiente al fenómeno que desencadena cada individuo en el proceso de construcción de conceptos.

4) Existe un principio de unificación de la dinámica conceptual para los tres espacios independientes, para el espacio geométrico en sí mismo, para la forma escrita de los conceptos geométricos (lingüística), y para el espacio fenomenológico (energía). Es decir, los tres espacios en estudio, el matemático, el lingüístico y el energético estarían supeditados a los principios hologramáticos, recursivos y dialógicos duocomplementarios; obviamente esto último implica una dinámica de tipo fractal.

5) Se considera la posible existencia del nuevo concepto geométrico de espacio curvo irregular, producto de la modificación del injerto de curvas fractales en el quinto postulado de Lobachevsky.

6) Los conceptos previos del individuo correspondientes a la geometría plana y a la geometría hiperbólica, sufre una transformación energética caótica bajo el efecto de los incentivos caotizantes de tipo fractal.

7) Se demuestra la existencia de vacíos conceptuales y vacíos de contenido en los programas de geometría correspondientes a las instituciones de educación superior en carreras como Licenciatura en Educación Matemática.

Recomendaciones

Luego de esta investigación se recomienda fundamentalmente diseñar una nueva estructura geométrica curricular tanto en educación media como en educación superior, en donde la geometría plana aparezca supeditada a un nuevo modelo geométrico en donde las competencias giren alrededor del estudio de los espacios curvos irregulares. Esto, inevitablemente requiere de impregnar el currículo de geometrías no euclidianas como la geometría fractal, la geometría hiperbólica y la geometría elíptica.

Por último y en otro orden de ideas, se recomienda desarrollar un nuevo modelo geométrico formal que enuncie definiciones y teoremas que se originen del injerto de curvas fractales en el quinto postulado de Lobachevsky.

REFERENCIAS

Abbagnano, N. (1961). *Diccionario de Filosofía*. Mestre Jou. Sao Paulo.

Aguirre,J (2002) *Curvas Fractales*. *Sigma, 20*, 79-92.

Alsin C. y Perez R. (2000) *¿Porque geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. Madrid: Síntesis.

Aussubel, D. (1983*). Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Babini, J (1974) *Historia de las ideas modernas en matemática*. Argentina: Universidad de Buenos Aires.

Braun, E. (1996). *Caos, fractales y Cosas Raras*. México: Fondo de Cultura Económica

Capra, F. (1998). *El punto Crucial: Ciencia, Sociedad y Cultura Naciente*. Argentina: Troquel S.A.

Courant, R (2002). *¿ Que son las matemáticas?. Conceptos y métodos fundamentales.* México: Fondo de Cultura Económica.

De pablo, J. (2006). *La crítica de la razón pura como ontología a priori de la naturaleza.* Tesis de doctorado publicada. Universidad Complutense de Madrid.

Estrada,W. (2004). *Geometría fractal. Conceptos y procedimientos para la construcción de fractales.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ewald, W.B. (1996).*From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

Farrés, G. (2004) *Integrals de curvatura i geometría integral a l'espai hiperbólic*. Tesis de doctorado publicada. Universidad Autónoma de Barcelona. Barcelona.

Flores, S.(2013). Estudio de la Geometría Hiperbólica. Conferencia: Enlace conceptual entre la Geometría Fractal y la Geometría Hiperbólica. Dirección de Estudios de Postgrado de la Universidad de Carabobo.

Florián, V. (2002). *Diccionario de filosofía.* Bogatá: Panamericana.

Fodor, J.(1999) *Conceptos*. Barcelona: Gedisa.

Garcia, J. (2007). *La Destruccion Heiderggeriana de la Epistemología y la Concepción Actual de la Ciencia.* Revista de la Academia, 12, 93-115.

Gámez D. (2001) . *Construcciones en geometría hiperbólica y teselaciones mediante grupos N.E.C. Poligonales. Algoritmos de automatización.* Tesis de Doctorado publicada. Universidad de Granada. Granada.

González, J. (2004).*Tunning-América Latina: Un proyecto de las univerisdades.* Revista Iberoamericana de Educación, 35, 151-164.

Hernández, R. y Fernández, C. (2008). *Metodología de la investigación*. Mexico: Mac Graw Hill.

Hilbert, D. (1930). *Fundamentos de la Geometría*. México: Mc Graw Hill.

Kant, I (1781). *Crítica a la razón pura*. BuenosAires: López

Kosko, B. (1995). *Pensamiento borroso. La nueva ciencia de la lógica borrosa*. Barcelona: Grijalbo Mondadori.

Kuhn, Thomas (1971). *La estructura de las revoluciones científicas.* Madrid: Fondo de Cultura Económica S.L.

Lascurain, O. (2005). *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional.* México: Facultad de Ciencias, UNAM.

LipSchutz, S. (1970) *Topología general*. México: McGraw Hill

Mandelbrot, B. (1997). *La Geometría Fractal de la Naturaleza*. Barcelona: Tusquets.

Mandelbrot, B. (2006). *Los Objetos Fractales.* Barcelona: Tusquets.

Mandelbrot, B. (2009). *La Geometría Fractal de la Naturaleza*. Barcelona: Tusquets.

Martínez,M. (1997) *El paradigma emergente. Hacia una nueva teoría de la racionalidad científica.* México: Trillas.

Martínez, M. (2006). *Ciencia y arte en la metodología cualitativa*. México: Trillas

Martinez, M. (2007). *La Investigación Cualitativa Etnográfica en Educación.* México: Trillas.

Maynadé, J. (1955), La vida serena de Pitágoras. Orión. México.

Mayr, E. y William, B. (*1998). The Evolutionary Synthesis: Perspectives on the Unification of Biology.* Boston: Harvard University Press.

Miguez, J. 1983, Parménides-Zenon-Meliso-Heráclito. Orbis. Argentina.

Ministerio del Poder Popular para la Educación.(2007). *Subsistema de Educación Secundaria Bolivariana.* Caracas

Morin, E. (1994). *Introducción al pensamiento complejo.* Gedisa. Paris.

Mussa, J. (2008). *Cognición Cuántica. Mendoza*: Inca Editorial.

Popper, K. (1972). *Objective Knowledge: An Evolutionary Approach*. New York: Oxford Univeristy Press Inc.

Popper, K. (2001). *La Lógica de la investigación científica*. Madrid: Tecnos.

Ruggiero, R. (2013). Fundamentos conceptuales de la Geometría Hiperbólica y la Geometría Fractal . Conferencia: Enlace conceptual entre la Geometría Fractal y la Geometría Hiperbólica. Dirección de Estudios de Postgrado de la Universidad de Carabobo.

Sanguino, O.(2013). Geometría Fractal y Sociedad . Conferencia: Enlace conceptual entre la Geometría Fractal y la Geometría Hiperbólica. Dirección de Estudios de Postgrado de la Universidad de Carabobo.

Smogorzhevski, S (1978) *Acerca de la geometría de Lobachevski.* Moscú: MIR.

Tesorero, J. (2013). Cambio de concepción geométrica a través de la historia; tránsito de la geometría euclidiana otras geometrías. Conferencia: Enlace conceptual entre la Geometría Fractal y la Geometría Hiperbólica. Dirección de Estudios de Postgrado de la Universidad de Carabobo.

Torres, C. (2009) De la matemática clásica a la matemática moderna: Hilbert y el esquematismo Kantiano. *Diánoia*, *54*(63), 37-70.

Urbaneja, P (2007). *Raíces Históricas y Trascendencia de la Geometría Analítica.* Sigma, 30, 205-236.

Vergnaud, G. (1990). La Teoría de los Campos Conceptuales. *Investigaciones en Didáctica de la matemática, 10*(23), 133-170.

Villegas, M. y González F. (2008) *Línea de investigación conocimiento e investigación (LICOIN).* Revista Paradigma, 19(2), 223-236.

Vygotsky, L. S. (1978). Pensamiento y lenguaje. Madrid: Paidós.

Wallerstein, Innmanuel. (2004). *Impensar las Ciencias Sociales.* México: Siglo XXI Editores S. A. de C. V.