LA CONSTANTE COSMOLOGICA:
¿UN ERROR DE EINSTEIN?.

Falcón, Nelson.
Universidad de Carabobo. FACYT. Dpto. de Física.
Email nelsonfalcon@hispavista.com

Resumen.
Se discute el rol de la constante cosmológica propuesta por A. Einstein en 1917 en el desarrollo de la cosmología relativista. Se enfatiza la aportación teórica en Modelos de Friedmann-Robertson-Walker con constante cosmológica y en el paradigma Inflacionario (Modelo de Guth). Adicionalmente se revisa su vinculación con el principio de Mach y con las mediciones recientes de los parámetros de: desaceleración cósmica, constante de Hubble y densidad de materia en el Universo.

1. Introducción.

La relatividad general esencialmente consiste en una formulación geométrica de la gravitación, partiendo de la expresión covariante de las leyes físicas y del llamado Principio de Equivalencia, según el cual las propiedades dinámicas de un sistema no inercial son las mismas que las de un sistema inercial con campo gravitacional. Es claro sin embargo que está equivalencia es solo válida localmente y que el comportamiento asintótico (en el infinito) difiere entre un campo gravitacional y el de un sistema no inercial equivalente.

Como consecuencia inmediata del Principio de Equivalencia resulta que la distribución de la materia en una cierta región del espacio acarrea la curvatura local del espacio. Ello se expresa en forma tensorial mediante la relación (Einstein, A.; 1916):

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -8\pi \frac{G}{c^4} T^{\mu\nu} \qquad (1)$$

Donde, como es usual, G es la constante de gravitación universal, c es la constante de la velocidad de la luz, $R^{\mu\nu}$ y R denotan el tensor y el escalar de Ricci respectivamente, $g^{\mu\nu}$ es el tensor métrico y con $T^{\mu\nu}$ se representa el tensor de energía-impulso.

El lado izquierdo de la ecuación (1) se suele denominar Tensor de Einstein y se le abrevia con el símbolo $G^{\mu\nu}$. La expresión (1) constituye en realidad un conjunto de diez ecuaciones diferenciales acopladas y no lineales. Ellas igualan las propiedades geométricas del espacio ("fuerza de atracción"), en el lado izquierdo de la ecuación, con las propiedades de la materia ("masas y energías") en el lado derecho de la expresión.

Es claro que las ecuaciones de Campo de Einstein (Ec. (1)) no determinan por completo la distribución y el movimiento de la materia, se requiere también especificar las condiciones iniciales y las Ecuaciones de Estado. Estas últimas vinculan la presión con la densidad y la temperatura del sistema físico, particularmente del Universo si se tratase el problema cosmológico.

Las ecuaciones de Campo de Einstein prescriben así un Universo dinámico toda vez que la única fuerza considerada es atractiva (gravitación) y por lo tanto las partículas del Universo ("galaxias") estarían en permanente movimiento. Históricamente cuando Albert Einstein formuló la Teoría General de la Relatividad (TGR) el Universo se creía estático, por ello postuló (Einstein, A.; 1917) un término adicional (“fuerza repulsiva”) que equilibraría al termino gravitacional, modificando la expresión (1) en la forma:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + \Lambda g^{\mu\nu} = -8\pi \frac{G}{c^4} T^{\mu\nu} \qquad (2)$$

El argumento original de la inclusión de la constante cosmológica (Λ) parte de la descripción Newtoniana del Universo.

En la descripción Newtoniana de un Universo con simetría esférica (isótropo) la ecuación de Poisson para el campo gravitacional (Φ) conllevaría a una contradicción a menos que se incluya, un término adicional de la forma $-\Lambda\Phi$, con Λ una constante universal.

En palabras del propio Einstein (Einstein, A.; 1917) “ *puede imaginarse un lugar alrededor del espacio universal sobre la cual el campo gravitatorio de materia, visto a gran escala, posee simetría esférica. Sigue entonces de la ecuación de Poisson que, para que Φ pueda tender a un límite en el infinito, la densidad media ρ debe disminuir más rápidamente que $1/r^2$ conforme la distancia r del centro aumenta. Por consiguiente, en este sentido, el universo según Newton es finito, aunque puede poseer una gran masa total infinita*”.

La inclusión de la constante Λ a la TGR impone su multiplicación por el tensor métrico, a fin de preservar la covariancia y la consistencia con las leyes de conservación. Para asegurar que la descripción fenomenológica coincida con las observaciones astronómicas en la vecindad solar, Einstein prescribe que el valor de Λ ha de "ser suficientemente pequeño" (en unidades de $[L]^{-2}$).

La inclusión del término cosmológico permite la finitud de la masa total M del Universo (Einstein, A.; 1917):

$$M = \pi^2 \sqrt{32/\kappa\rho} \tag{3}$$

donde $\kappa \equiv 8\pi G/c^4$ y la densidad $\rho = 2\lambda/\kappa$ se define como la densidad de materia con la cual el universo permanece en equilibrio en una esfera de radio R.

Posteriormente al trabajo de Einstein, Edwin Hubble demostró empíricamente la existencia de una correlación entre la velocidad de las galaxias y su distancia (Hubble, E.1929), vale decir mostró que el universo es dinámico (está en permanente expansión) y en consecuencia resultaba inútil la corrección de Einstein a su TGR.

Se dice que el propio Einstein, visto el trabajo de Hubble, calificó la introducción del término cosmológico como el "*error mas grande de mi vida*" (Eddington, A.S.; 1933). Sin embargo a la luz de los desarrollos recientes de la cosmología la inclusión del término cosmológico parece uno de los mayores aciertos de la mente creadora de Albert Einstein. Para ello pasaremos revista a la cosmología standard del "Big Bang" en la sección 2, la importancia de $\Lambda\neq 0$ en el desarrollo del Modelo inflacionario (sección 3) y las evidencias observacionales y teóricas a favor de la constante cosmológica en la última sección.

2. Modelos de Universo con $\Lambda\neq 0$

La inclusión del término cosmológico (con $\Lambda>0$) en las Ecuaciones de Campo (Ec. 2) le permitió a Einstein postular un modelo de Universo en reposo (Universo de Einstein) en el cual la densidad de materia es uniforme, su velocidad errática nula y que el espacio, a pesar de ilimitado, es finito.

Einstein razonó que no existían soluciones de la Ec. 2 para el espacio vacío (cuando $T^{\mu\nu}=0$). Pero ésta conclusión resultó errónea. Pronto se demostró (De Sitter, W., 1917) que existe una solución de (2) para el espacio vacío, que representa un modelo de Universo en expansión en donde las "partículas" de masa nula se alejan entre si con velocidad creciente (Universo de De Sitter). Si bien el modelo de De Sitter carece de base material, sirvió para ilustrar la dificultad del término cosmológico y, de soslayo, para corregir el desliz argumental de Einstein al intentar incorporar el Principio de Mach a la TGR, asunto al que me referiré posteriormente.

Así una descripción del Universo en el marco de la TGR debe incorporar un tensor energía-impulso no nulo y considerar un supuesto razonablemente válido sobre la uniformidad del Universo a gran escala. La uniformidad del Universo, visto a escala global, es más bien una posición filosófica positiva, suerte de extensión del Principio Copernicano, según el cual no existen lugares "privilegiados" en el Universo. Este principio se suele denominar como Principio Cosmológico y se expresa a través de la suposición de isotropía y homogeneidad a gran escala en el Universo.

Considérese un modelo de Universo isótropo y homogéneo a gran escala (Principio Cosmológico), y que se expande continuamente con un factor de escala R(t). Bajo esas condiciones, la métrica del espacio-tiempo puede escribirse (Robertson, H. P. 1935; Walker, A.G. 1936) como:

$$ds^2 = c^2dt^2 - R^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2d\theta^2 + r^2sen^2\theta.d\phi^2\right) \quad (4)$$

donde el escalar de curvatura k toma los valores de -1,0,+1 para un Universo con geometría hiperbólica, euclídea y esférica respectivamente.

Considérese también el caso mas simple de distribución de la materia en el Universo, donde las partículas del substrato (cúmulos de galaxias) se encuentran en el espacio-tiempo en un haz de geodésicas divergentes desde un punto en el pasado finita o infinitamente distante, vale decir acéptese el Postulado de Weyl (Weyl, H.; 1923). Entonces puede asumirse que el tensor energía–impulso de las partículas del substrato, se puede modelar como el de un fluido perfecto con presión P y densidad ρ, esto es:

$$T^{\mu\nu} = (\rho_\phi + \frac{P_\phi}{c^2})u^\mu u^\nu - P_\phi g^{\mu\nu} \quad (5)$$

adicionalmente la isotropía demanda que μ=ν, equivalentemente demanda que $T^{\mu\nu}$ es diagonal.

Bajo tales consideraciones la solución de (2), respecto a la métrica (4) con tensor energía-impulso (5) es:

$$\left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\right)^2+\frac{kc^2}{R^2(t)}=\frac{8\pi G}{3}\rho+\frac{\Lambda}{3} \qquad (6)$$

$$\frac{2\ddot{R}(t)}{R(t)}+\left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\right)^2+\frac{kc^2}{R^2(t)}=-\frac{8\pi G}{c^2}P+\Lambda \qquad (7)$$

donde, como es tradicional, el punto indica la derivación respecto al tiempo.

Nótese que si Λ=0 se obtienen las Ecuaciones de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) (Peebles, P.J.E. 1993). Las Ecuaciones (6) y (7) se interpretan como la conservación de la energía y la Ecuación de la dinámica respectivamente, en un Modelo de Universo FRW.

Obsérvese, de la Ec. (6), que el término Λ/8πG corresponde a una densidad de energía, también llamada “densidad de energía del vacío”, porque es la que existiría si, al comienzo de la deducción, tomáramos un tensor de energía-impulso nulo como en el Modelo de Universo de De Sitter. Análogamente el término $-\Lambda c^2/8\pi G$ denota la presión ejercida por el vacío.

Es claro entonces que el término proporcional a ΛR(T) constituye una aceleración cósmica. En efecto de ambas expresiones obtenemos:

$$\frac{3\ddot{R}(t)}{R(t)}=-4\pi G\left(\frac{3P}{c^2}+\rho\right)+\Lambda \qquad (8)$$

Un modelo de Universo donde el factor de escala sea constante ($\ddot{R}(t) \cong 0$) implica que la constante cosmológica actúa como una fuerza de atractiva (repulsiva) siempre que Λ negativa (positiva)

Una forma usual de expresar las Ecuaciones en los Modelos de Universo FRW es expresar éstas en términos del llamado parámetro de Hubble (H(t)) y la densidad crítica ρ_c; vale decir aquella densidad que se tendría en un Universo con k=0 (Euclídeo) y Λ=0, esto es:

$$H^2(t) \equiv \left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_c \tag{9}$$

Estas definiciones, junto al parámetro de densidad adimensional $\Omega_m \equiv \rho/\rho_c$ permiten rescribir las Ec. (6) y (7) en la forma:

$$\frac{kc^2}{R^2(t)} = H^2(\Omega_m - 1) + \frac{\Lambda}{3} \tag{10}$$

$$(1 - 2q + \frac{3P}{c^2 \rho_c} \Omega_m) H^2 + \frac{kc^2}{R^2(t)} = \Lambda \tag{11}$$

Donde se ha designado con $q_0 \equiv -\frac{\ddot{R}(t)}{R(t) H^2}$ el parámetro de desaceleración.

Es claro de la Ec. (10) que un modelo de Universo Euclídeo (k=0) con Λ≠0 no implica necesariamente un Universo cerrado (Ω_m=1), toda vez que el valor final de Ω_m dependerá del valor asumido para la constante cosmológica. Ésta también puede expresarse en término de la densidad crítica de la forma $\Omega_\Lambda \equiv \Lambda/3H^2$, así el parámetro de densidad cósmica contiene al menos dos términos a saber: $\Omega_T \equiv \Omega_m + \Omega_\Lambda$, con lo cual puede escribirse las Ec. (10) y (11) como:

$$\frac{kc^2}{R^2(t)} = H^2(\Omega_T - 1) \tag{12}$$

$$(1 - 2q + \frac{3\Omega_m P}{c^2 \rho_c} - 3\Omega_\Lambda)H^2 + \frac{kc^2}{R^2(t)} = 0 \tag{13}$$

La curvatura espacial del Universo está dada por el escalar de Ricci:

$$R = \frac{6k}{R^2(t)} \tag{14}$$

De ésta expresión y la Ec. (12) es claro que la curvatura será $R= 6\ H^2\ (\Omega_T-1)$ la cual es obviamente nula para un Universo plano (Ω_T =1), positiva si Ω_T es mayor que la unidad y negativa en caso de Ω_T menor que uno.

Eliminando el término de curvatura en las relaciones (12) y (13) obtenemos:

$$q = \frac{\Omega_m}{2}\left(\frac{3P}{c^2 \rho_c} - 1\right) - \Omega_\Lambda \tag{15}$$

Esta relación evidencia mas cláramente que el término cosmológico actúa en el vacío (Ω_m=0) como una aceleración negativa (fuerza atractiva) para valores positivos de Λ. También nos dice que si se asume Λ=0 entonces la aceleración del Universo dependerá de su ecuación de Estado, vale decir de la relación entre la densidad crítica y la presión.

Más aún, la ecuación (15),nos indica que un modelo de Universo de Expansión Uniforme (q=0) y sin constante cosmológica (Λ=0) implica que la ecuación de Estado del Universo ha de ser: P= 1/3 $\rho_c c^2$, que equivale a afirmar que la presión permanece constante. Claramente esto es contradictorio con la observación de que el Universo está en expansión. Así queda en evidencia que las condiciones q=0 y Λ=0 no pueden satisfacerse simultáneamente.

3. Modelo Inflacionario

Se ha puesto de manifiesto la importancia de la Ecuación de Estado para establecer la dinámica (evolución) del Universo. En efecto de las Ec. (6) y (7) se obtiene fácilmente:

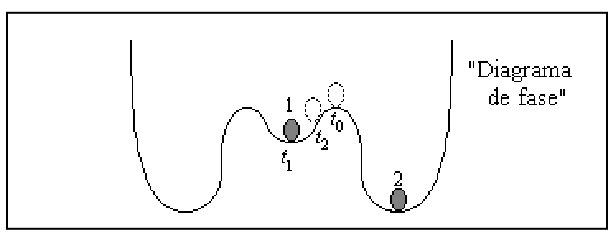
$$\ddot{R}(t) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P).R(t) \tag{16}$$

Esta ecuación expresa que la gravedad es atractiva (aceleración negativa) siempre que la presión sea positiva. Sin embargo podemos inquirir si el Universo, en épocas muy tempranas, pudo tener una gravedad negativa y suficientemente grande de modo que la aceleración resultase positiva y en cuyo caso la fuerza de gravedad sería repulsiva (aceleración positiva). Si la gravedad actuó en los primeros instantes como una fuerza repulsiva ella sería la causa de la expansión observada actualmente.

En el universo temprano, cuando la temperatura era tan grande como 10^{30} K y a solo 10^{-43} s luego de Big Bang, la densidad debió ser muy alta y las partículas constituyentes estaban en un régimen relativista con igual posibilidad de movimiento en el tri-espacio por lo que la Ecuación de Estado pudo ser $P=\rho/3$, en esas condiciones la densidad resulta proporcional a $R(t)^{-4}$.

Claramente luego de que la temperatura disminuyó por la expansión adiabática de la materia la presión prácticamente se anuló, con lo que la densidad de la materia en este régimen no relativista debió ser proporcional a su volumen (proporcional a $R(t)^{-3}$). La transición del régimen relativista al no relativista constituyó, desde el punto de vista termodinámico una transición de fase en el Universo. Esa transición de fase y la ruptura de simetría correspondiente es el denominado Modelo Inflacionario, postulado por Alan Guth (Guth, A; 1981).

Se suele acompañar la descripción de los mecanismos de inflación con un esquema figurativo bidimensional donde se muestran el equilibrio mecánico de una esfera sobre una superficie tipo sombrero mexicano, la esfera representa el Universo, y la superficie bidimensional los posibles estadios con sus puntos de equilibrio.



Como se indicó en el apartado anterior, el término cosmológico actúa en el vacío como una presión negativa, por lo cual puede suponerse para lo primeros instantes de la formación del Universo, estadio 1 de la figura o régimen ultrarelativista, que:

$$\frac{\lambda}{3} \equiv \frac{8\pi G}{3}\langle V_0 \rangle \tag{17}$$

donde V_0 es una constante independiente de la temperatura.

Reemplazando (17) en la Ec. (6) tenemos al vacío actuando como una fuerza repulsiva, suerte de remembranza del Modelo de Universo de Einstein :

$$\left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\right)^2 + \frac{kc^2}{R^2(t)} = \frac{8\pi G}{3}(\rho + V(0,T)) \tag{18}$$

Para un modelo de Universo plano cuando la temperatura disminuye significativamente ($T \rightarrow 0$), vale decir cuando $T \approx 2{,}73$ K; la expansión o crecimiento del radio del Universo resulta de integrar la ecuación precedente, con lo cual:

$$R(t) = Exp\left\{\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\langle V_0 \rangle}\, t\right\} \equiv e^{H.t} \tag{19}$$

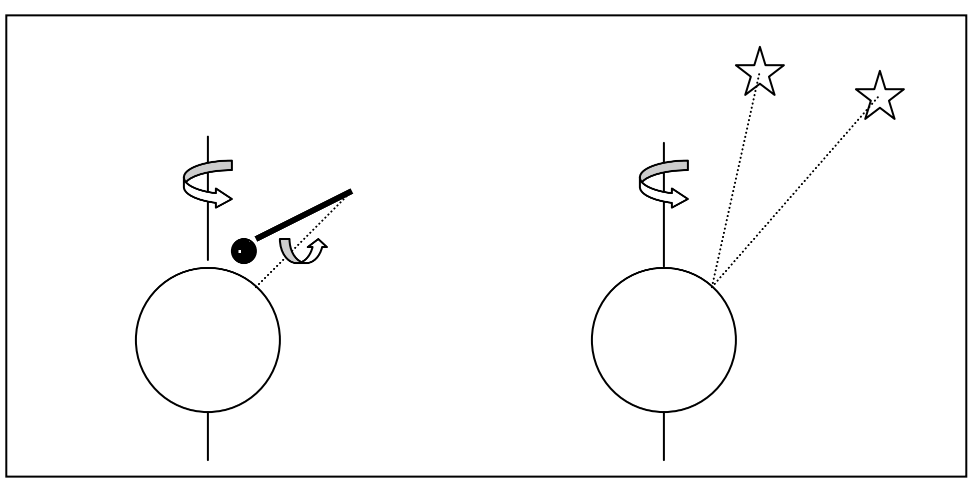
Nótese que la expansión del Universo es exponencial durante su fase inicial, de allí la denominación de inflacionario. En el régimen de "rodamiento lento" o estadío 2 de la figura, el potencial $V_0=0$ ($\Lambda=0$) y la expansión es la usual de los modelos FRW.

Esta breve descripción del Modelo del Universo, durante sus instantes primordiales, manifiesta la importancia de la inclusión de la constante cosmológica y de su influencia, en los modelos mas modernos de la cosmología. Como se verá en seguida, la introducción de la constante cosmológica fue el intento, fallido quizá, que emprendió Einstein para reconciliar su TRG con el principio de Mach.

4. Principio de Mach

El pensamiento de Mach influyó decisivamente en el pensamiento de Einstein como el mismo refiere en sus notas autobiográficas (Einstein, A; 1948) "*Fue Ernst Mach quien con sus Historia de la Mecánica...ejerció una profunda influencia sobre mi... también durante mis años jóvenes influyó mucho sobre mí la postura epistemológica de Mach, postura que hoy se me antoja esencialmente insostenible".*

En la obra Ernst Mach (Mach, E.; 1893) llega a la conclusión que el marco inercial local se halla determinado de alguna forma por el movimiento de los objetos astronómicos lejanos. Esta conclusión, conocida como el Principio de Mach, surge de la coincidencia, muy exacta por demás, de las dos formas de medir la velocidad de rotación de la velocidad angular de la Tierra: dinámicamente (Péndulo de Foulcault) y astronómicamente (respecto a las "estrellas fijas"), como indica la figura.



Para algunos el Principio de Mach, que esboza una conexión entre la inercia local y la distribución de masas a gran escala del Universo, es más filosófico que científico por cuanto hasta la actualidad han fracasados todos lo intentos de su formulación matemática precisa.

La TRG al conectar los campos gravitacionales con la inercia, a través de las Ecuaciones de Campo, parecen dar entrada al Principio de Mach, pero no lo verifican a plenitud pues deben establecerse las condiciones límites de las Ecuaciones de Campo. Desde el punto de vista de Einstein, la "relatividad de la inercia" era una parte integral de su Teoría General (Bondi, H. ; 1951), vale decir: el campo inercial definido por el tensor métrico ($g^{\mu\nu}$) debía quedar completamente determinado por la distribución de masas y energías en el Universo ($T^{\mu\nu}$); pero ello no es completamente cierto porque la relación establecida por la Ecuaciones de Campo son diferenciales (Ec. 1) y es menester imponer condiciones límites en el infinito para determinar unívocamente las $g^{\mu\nu}$ a partir de un $T^{\mu\nu}$ dado. Como se discutió en el aparte 2, esa necesidad de imponer condiciones adicionales impulsó la incorporación del término cosmológico en el Modelo de Universo de Einstein. En un modelo de Universo en reposo y homogéneo como éste, puede decirse que la distribución de las masas define en todas partes un marco inercial, en el cual podría incorporarse el Principio de Mach.

Así, Einstein yerra al creer que no existe solución, para $\Lambda>0$, en la Ec. (2) para el espacio vacío, como demostró De Sitter. En consecuencia el Principio de Mach no queda satisfecho por completo pero si es introducido a través del término cosmológico.

Pero no fue ni de lejos "el mayor error" de su vida, puesto que su inclusión además de inspirar el Modelo de Universo Inflacionario, que extiende y valida al Big Bang, parece ser fenoménicamente correcto.

En efecto un grupo de cerca de cuarenta investigadores pertenecientes a una decena de prestigiosos Institutos, Observatorios y Universidades, han desarrollaron un magno proyecto cosmológico de observación de Supernovas (Perlmutter, S et al; 1998) con el fin de estimar experimentalmente los parámetros cosmológicos de densidad de masa (Ω_m), densidad de energía de la constante cosmológica (Ω_Λ), constante de Hubble (H_0), tiempo de Hubble (t_H) o edad del Universo, y el parámetro de aceleración cósmica (q_0). Basándose en la observación de 42 supernovas de tipo Ia, como bujías estándar para calibrar las distancias y el redshift cosmológico de galaxias lejanas, han concluido (Perlmutter, S et al; 1999) que "los datos indican que la constante cosmológica es distinta de cero y positiva, con una confidencia del 99%, incluyendo los errores sistemáticos identificables" en las medidas. Para el caso de un universo plano(k=0) han reportado (Perlmutter, S et al; 1999, 1998): $t_H \sim 14.9$ Gyr , Ω_m~0,28 y Ω_Λ~ 0,4±0,2; señalando además que las medidas son incompatible con las condiciones k=0 y Λ=0 simultáneamente.

Por otro lado Observaciones actuales (Riess, et al, 1998)han permitido establecer muy recientemente que el Universo se expande aceleradamente (q_0>0).

Las galaxias mas lejanas, y por tanto mas antiguas, muestran que las supernovas Ia son menos brillantes que lo esperado, de ello se desprende que esas galaxias estarían mas lejanas hoy día y en consecuencia el ritmo del crecimiento de la expansión crece monótonamente, vale decir $d^2R(t)/dt^2$ es positivo ($q_0>0$).

En suma, al momento de escribir estas líneas, parece existir consenso entre los Astrónomos y Cosmólogos en que el Universo es plano, está expandiéndose aceleradamente, es tan viejo como 12-15 mil millones de años, contiene una muy baja densidad de materia (Ω_m~0,28) y existe, además de la gravedad, una "repulsión cósmica" ($\Omega_\Lambda \neq 0$), como lo intuyó acertadamente Einstein a través de la constante cosmológica.

Referencias

Bondi, H. (1951) Cosmology. Cambridge University Press. Londres

De Sitter, W. (1917) Mon. Not. R. Ast. Soc. 78, 3.

Eddington, A.S. (1933) The Expanding Universe. Cambridge.

Einstein, A. (1916) Ann. Phys. 49,769.

(1919) "Do Gravitational Fields Play an Essential Part in the Structure of the Elementary Particles of Matter". Sitzungsberichte der Preussischen Akad. Wissenschaften

(1948) "Autobiographical Notes" en "Albert Einstein: Philosopher-Scientist", Paul Schilpp Ed., Illinois 1970.

Friedmann, A. (1922) Z. Phys. 10, 377.

Guth, A. H. (1981) Physics Review D 23, 347.

Hubble, E. (1929) Proc. Nat. Acad. Sci. 15, 168.

Mach, E. (1893) The Science of Mechanics, Cambridge University Press. Londres.

Peebles, P.J.E. (1993) Principles of Physical Cosmology. Princenton University Press, New Jersey.

Perlmutter, S. et al. (1999) Ap. J. 517; 565-586. (1998) Nature, 391, 51.

Riess, A et al.(1998) Ap. J. 116;1015-1037

Robertson, H.P. (1935) Ap. J. 82, 284.

Sommerfeld, A. (1923) The Principle of Relativity. Dover Publications, N. Y.

Walker, A. G. (1936) Proc. Lond. Math. Soc. 42 (2), 90.

Weyl, H. (1923) Z. Phys. 24, 230.