



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
AREA DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA
PROGRAMA DE MAESTRÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA



ANÁLISIS DEL ENVENTANADO TEMPORAL DE SEÑALES DIGITALES
PARA DETERMINAR LOS EFECTOS FRECUENCIALES

AUTOR: Ing. Carlos R. Mejías M.

Bárbula, 16 de enero de 2014



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
AREA DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA
PROGRAMA DE MAESTRÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA



ANÁLISIS DEL ENVENTANADO TEMPORAL DE SEÑALES DIGITALES
PARA DETERMINAR LOS EFECTOS FRECUENCIALES

AUTOR: Ing. Carlos R. Mejías M.

TUTOR: Ing. Carlos Jiménez, Msc.

Bárbula, 16 de enero de 2014



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
AREA DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA
PROGRAMA DE MAESTRÍA
INGENIERÍA ELÉCTRICA



ANÁLISIS DEL ENVENTANADO TEMPORAL DE SEÑALES DIGITALES
PARA DETERMINAR LOS EFECTOS FRECUENCIALES

AUTOR: Ing. Carlos R. Mejías M.

Trabajo presentado ante el Área de Estudios de
Postgrado de la Universidad de Carabobo para
optar el Título de Magíster en Ingeniería Eléctrica

Bárbula, 16 de enero de 2014



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERIA
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
SECCIÓN DE GRADO



ACTA DE DISCUSIÓN DE TRABAJO DE GRADO

En atención a lo dispuesto en los Artículos 137, 138 y 139 del Reglamento de Estudios de Postgrado de la Universidad de Carabobo, quienes suscribimos como Jurado designado por el Consejo de Postgrado de la Facultad de Ingeniería, de acuerdo a lo previsto en el Artículo 135 del citado Reglamento, para estudiar el Trabajo de Grado titulado:

“ANÁLISIS DEL ENVENTANADO TEMPORAL DE SEÑALES DIGITALES PARA DETERMINAR LOS EFECTOS FRECUENCIALES”

Presentado para optar al grado de **MAGÍSTER EN INGENIERÍA ELÉCTRICA** por el (la) aspirante:

CARLOS MEJÍAS
V.- 17.067.186

Habiendo examinado el Trabajo presentado, decidimos que el mismo está **APROBADO**.

En Valencia, al veintidós (22) día del mes de Noviembre del año dos mil trece.


Prof. Víctor Barrios
C.I.: 3.896.992
Fecha: 22/11/2013
PE: 22/11/2013/D6.-




Prof. Miguel Fasanella
C.I.: 24.554.371
Fecha: 22/11/2013

DEDICATORIA

A Dios por darme la bendición de la vida.

A mis padres, Francisca y Alberto, quienes me han apoyado, han guiado y han sido fuente de inspiración en todo momento para trazar mis metas.

A mis hermanos, Isalbert, Alberto y Arianne, quienes son parte muy importante en mi vida.

A todos mis seres queridos y familiares, especialmente aquellos a los que Dios tiene en su gloria

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a todas aquellas personas que estuvieron allí directamente o indirectamente para ayudar en la realización de este trabajo, empezando por el profesor Carlos Jiménez por la valiosa colaboración ofrecida, el apoyo incondicional, por su amistad y la asesoría brindada para el desarrollo de este proyecto. También quiero agradecer al profesor José Antonio Díaz por ofrecerme el proyecto a desarrollar y siempre estar dispuesto a prestar su colaboración y asesoría.

Quiero agradecer a mis padres por darme siempre su apoyo, a mis familiares y amigos por ser las personas que siempre estuvieron allí durante el desarrollo del proyecto y que ahora implícitamente forman parte de este trabajo.

Por último quiero darle las gracias a mis amigos y compañeros de trabajo Grecia Romero, Ahmad Osman, Gabriel Aljibes, Carmen G. Hernández y Henry Fumero porque siempre estuvieron pendientes y motivándome para culminar dicho trabajo.

Índice general

Índice de Figuras	XIII
Índice de Tablas	XIX
Resumen	XXI
Introducción	1
I. El Problema	3
1.1. Planteamiento del Problema	3
1.2. Objetivos	4
1.2.1. Objetivo General	4
1.2.2. Objetivos Específicos	5
1.3. Justificación	5
1.4. Alcance y Delimitación de la Investigación	6
II. Marco Teórico	7
2.1. Antecedentes	7
2.2. Bases Teóricas	10
2.2.1. Señal Digital	10
2.2.2. Procesos Aleatorios de Tiempo Discreto	11
2.2.2.1. Procesos Estacionarios	11
2.2.2.2. Ergodicidad	12
2.2.3. Procesamiento Digital de Señales	13
2.2.4. Transformada Discreta de Fourier (DFT)	14
2.2.4.1. Propiedades de la DFT	17
2.2.5. Transformada Rápida de Fourier (FFT)	17
2.2.5.1. Cómputo Eficiente de la Transformada Discreta de Fourier	18
2.2.5.2. Algoritmo de FFT Mediante Diezmado en el Tiempo	19

2.2.5.3.	Algoritmo de FFT Mediante Diezmado en Frecuencia	21
2.2.6.	Análisis Espectral	22
2.2.6.1.	Análisis Espectral de Señales Deterministas	22
2.2.6.2.	Estimación del Espectro de Potencia de señales aleatorias estacionarias	23
	Estimación del Espectro de Potencia Usando el Periodograma	24
III.	Marco Metodológico	27
3.1.	Tipos y Diseño de Investigación	27
3.2.	Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos	28
3.3.	Técnicas de Procesamiento y Análisis de Datos	28
3.4.	Procedimiento Metodológico	29
3.4.1.	Fase I: Revisión de los documentos bibliográficos de las diferentes ventanas para la identificación de las ventanas comúnmente utilizadas en el área del DSP	29
3.4.2.	Fase II: Análisis de la expresión analítica en el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia que resulta del enventanado de una señal para la interpretación de la distorsión de la misma.	30
3.4.3.	Fase III: Selección de los indicadores espectrales para la evaluación del efecto frecuencial.	30
3.4.4.	Fase IV: Identificación de los efectos frecuenciales del enventanado en el tiempo a través de diferentes tipos de señales y tipos de ventanas.	31
3.4.5.	Fase V: Análisis del desempeño de las ventanas utilizadas con los diferentes tipos de señales para la determinación de la aplicación.	32
IV.	Análisis, Interpretación y Presentación de Resultados	33
4.1.	Identificación de las ventanas comúnmente utilizadas en el área de Procesamiento Digital de Señales	33
4.1.1.	Ventana Rectangular	36
4.1.2.	Ventana de Hamming	37
4.1.3.	Ventana de Hann	37
4.1.4.	Ventana Gaussiana	38
4.1.5.	Ventana de Parzen	41
4.1.6.	Ventana Exponencial	43
4.1.7.	Ventana de Kaiser	45
4.1.8.	Ventana de Blackman	46

4.2. Interpretación de la distorsión temporal y frecuencial causada por el enventanado de señales digitales	50
4.3. Indicadores Espectrales de las ventanas para el análisis del efecto frecuencial.	56
4.3.1. Nivel Máximo de Lóbulo Lateral (NPLL)	56
4.3.2. Decrecimiento Asintótico de Lóbulos Laterales (DALL)	56
4.3.3. Ganancia Coherente (GC)	56
4.3.4. Ancho de Banda Equivalente de Ruido (ABER)	57
4.3.5. Ancho de Banda del Lóbulo Principal (ABLP)	57
4.3.6. Pérdidas por Rizado (PR)	60
4.3.7. Pérdidas por Procesamiento del Peor Caso (PP _{PC})	61
4.4. Enventanado temporal en diferentes tipos señales para la identificación de los efectos frecuenciales	62
4.4.1. Señales sinusoidales con diferentes frecuencias de la base ortogonal de la DFT.	62
4.4.2. Señales exponenciales complejas con frecuencias diferentes a la base ortogonal de la DFT separadas al $ABLP_{6dB}$ de cada ventana.	63
4.4.3. Exponencial compleja contaminada con ruido blanco gaussiano.	76
4.4.4. Dos exponenciales complejas con diferentes frecuencias de la base ortogonal de la DFT contaminadas con ruido blanco gaussiano.	79
4.4.5. Estimación del Espectro de Potencia de Señales Aleatorias Estacionarias.	105
4.4.5.1. Estimación espectral de una secuencia de ruido blanco.	105
4.4.5.2. Estimación espectral de una secuencia aleatoria utilizando modelos AR (Auto-Regresivo).	115
V. Conclusiones y Recomendaciones	137
Referencias Bibliográficas	141

Índice de figuras

4.1. Resultados encontrados en diferentes textos y artículos científicos del área de procesamiento digital de señales.	34
4.2. Resultados encontrados por el motor de búsqueda de Science Direct e IEEE Xplorer	35
4.3. Ventana Rectangular y DTFT de dicha ventana.	36
4.4. Ventana de Hamming y la DTFT de dicha ventana.	37
4.5. Ventana de Hann y DTFT de dicha ventana	38
4.6. Ventana gaussiana y DTFT de dicha ventana para $\alpha = 2, 5$	40
4.7. Ventana gaussiana y DTFT de dicha ventana para $\alpha = 3$	40
4.8. Ventana gaussiana y DTFT de dicha ventana para $\alpha = 3, 5$	41
4.9. Ventana Parzen para $N = 25$	42
4.10. DTFT de la ventana de Parzen y DTFT de la ventana resultante de la convolución de 4 ventanas rectangulares.	43
4.11. Ventana Exponencial y DTFT de dicha ventana para $\alpha = 2$	44
4.12. Ventana Exponencial y DTFT de dicha ventana para $\alpha = 3$	45
4.13. Ventana Exponencial y DTFT de dicha ventana para $\alpha = 4$	45
4.14. Ventana de Kaiser y DTFT de dicha ventana	47
4.15. Ventana de Blackman exacta y DTFT de dicha ventana	48
4.16. Ventana de Blackman y DTFT de dicha ventana	49
4.17. Distorsión generada por el lóbulo principal	53
4.18. Distorsión generada por los lóbulos laterales	54
4.19. Componentes espectrales separadas al ancho de banda de 3 dB (arriba) y 6 dB (abajo) con $R = 0,75$	59
4.20. Componentes espectrales separadas al ancho de banda de 3 dB (arriba) y 6 dB (abajo) con $R = 0,72099$	59
4.21. Resolución de componentes espectrales separadas al ancho de banda de 3 dB (arriba) y 6 dB (abajo) con $R = 0,71122$	60
4.22. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana rectangular. . . .	68
4.23. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Hann. . . .	68

4.24. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Hamming.	69
4.25. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Parzen.	69
4.26. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana gaussiana con $\alpha = 2, 5$	70
4.27. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana gaussiana con $\alpha = 3, 0$	70
4.28. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana gaussiana con $\alpha = 3, 5$	71
4.29. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana exponencial con $\alpha = 2$	71
4.30. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana exponencial con $\alpha = 3$	72
4.31. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana exponencial con $\alpha = 4$	72
4.32. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Kaiser con $\alpha = 2, 0$	73
4.33. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Kaiser con $\alpha = 2, 5$	73
4.34. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Kaiser con $\alpha = 3, 0$	74
4.35. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Kaiser con $\alpha = 3, 5$	74
4.36. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Blackman.	75
4.37. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Blackman Exacta.	75

4.38. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana rectangular.	85
4.39. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Hann.	86
4.40. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Hamming.	87
4.41. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Parzen.	88
4.42. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana gaussiana con $\alpha = 2, 5$	89
4.43. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana gaussiana con $\alpha = 3, 0$	90
4.44. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana gaussiana con $\alpha = 3, 5$	91
4.45. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana exponencial con $\alpha = 2$	92
4.46. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana exponencial con $\alpha = 3$	93
4.47. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana exponencial con $\alpha = 4$	94
4.48. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Kaiser con $\alpha = 2, 0$	95
4.49. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Kaiser con $\alpha = 2, 5$	96
4.50. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Kaiser con $\alpha = 3, 0$	97
4.51. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Kaiser con $\alpha = 3, 5$	98

4.52. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Blackman.	99
4.53. Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Blackman exacta.	100
4.54. Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana rectangular.	107
4.55. Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana de Hann.	107
4.56. Espectro de potencia y estimado del ruido blanco utilizando la ventana de Hamming.	108
4.57. Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana de Parzen.	108
4.58. Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana gaussiana de $\alpha = 2, 5$	109
4.59. Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana gaussiana de $\alpha = 3$	109
4.60. Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana gaussiana de $\alpha = 3, 5$	110
4.61. Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana exponencial de $\alpha = 2$	110
4.62. Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana exponencial de $\alpha = 3$	111
4.63. Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana exponencial de $\alpha = 4$	111
4.64. Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 2$	112
4.65. Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 2, 5$	112
4.66. Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 3$	113
4.67. Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 3, 5$	113
4.68. Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana de Blackman.	114
4.69. Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana de Blackman exacta.	114
4.70. Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana rectangular.	117
4.71. Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana de Hann.	117

4.72. Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana de Hamming.	118
4.73. Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana de Parzen.	118
4.74. Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana gaussiana con $\alpha = 2, 5$	119
4.75. Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana gaussiana con $\alpha = 3$	119
4.76. Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana gaussiana con $\alpha = 3, 5$	120
4.77. Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana exponencial con $\alpha = 2$	120
4.78. Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana exponencial con $\alpha = 3$	121
4.79. Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana exponencial con $\alpha = 4$	121
4.80. Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 2$	122
4.81. Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 2, 5$	122
4.82. Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 3$	123
4.83. Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 3, 5$	123
4.84. Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana de Blackman.	124
4.85. Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana de Blackman exacta.	124
4.86. Espectro de potencia real, estimado y promedio de un proceso AR(4) utilizando la ventana rectangular.	127
4.87. Espectro de potencia real, estimado y promedio de un proceso AR(4) utilizando la ventana de Hann.	128
4.88. Espectro de potencia real, estimado y promedio de un proceso AR(4) utilizando la ventana de Hamming.	128
4.89. Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana de Parzen.	129
4.90. Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana gaussiana con $\alpha = 2, 5$	129
4.91. Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana gaussiana con $\alpha = 3$	130
4.92. Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana gaussiana con $\alpha = 3, 5$	130

4.93. Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana exponencial con $\alpha = 2$	131
4.94. Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana exponencial con $\alpha = 3$	131
4.95. Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana exponencial con $\alpha = 4$	132
4.96. Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 2$	132
4.97. Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 2, 5$	133
4.98. Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 3$	133
4.99. Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 3, 5$	134
4.100 Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana de Blackman.	134
4.101 Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana de Blackman exacta.	135

Índice de cuadros

2.1. Propiedades de la DFT	17
4.1. Indicadores Espectrales para las ventanas comúnmente utilizadas	61
4.2. Estimación de amplitud y frecuencia para la señal sinusoidal con frecuencia $\omega_A = \frac{20,5\pi}{N}$ para diferentes valores de N	64
4.3. Estimación de amplitud y frecuencia para la señal sinusoidal con frecuencia $\omega_A = \frac{20,2\pi}{N}$ para diferentes valores de N	65
4.4. Estimación de amplitud y frecuencia para la señal sinusoidal con frecuencia $\omega_A = \frac{10,1\pi}{16}$ para diferentes valores de N	66
4.5. Estimación de amplitud y frecuencia para dos exponenciales complejas de igual magnitud con $\omega_2 - \omega_1 = ABLP_{6dB}$ y $N = 64$	76
4.6. Valor medio (μ_{P_A}) y varianza ($\sigma_{P_A}^2$) de la estimación de la poten- cia promedio de la exponencial compleja contaminada con ruido blanco gaussiano con diferentes valores de desviación estándar. .	77
4.7. Valor medio (μ_{ω_1}) y varianza ($\sigma_{\omega_1}^2$) de la estimación de frecuen- cia para una exponencial compleja contaminada con ruido blan- co gaussiano con diferentes valores de desviación estándar σ_{ω_1} . .	78
4.8. Valor medio (μ_{P_A}) y varianza ($\sigma_{P_A}^2$) de la estimación de la po- tencia promedio de la exponencial compleja de amplitud A con- taminada con ruido blanco gaussiano con diferentes valores de desviación estándar.	82
4.9. Valor medio (μ_{P_B}) y varianza ($\sigma_{P_B}^2$) de la estimación de la po- tencia promedio de la exponencial compleja de amplitud B con- taminada con ruido blanco gaussiano con diferentes valores de desviación estándar.	82
4.10. Valor medio (μ_{ω_1}) y varianza ($\sigma_{\omega_1}^2$) de la estimación de frecuen- cia para una exponencial compleja de amplitud A contaminada con ruido blanco gaussiano con diferentes valores de desviación estándar σ_{ω_1}	83
4.11. Valor medio (μ_{ω_2}) y varianza ($\sigma_{\omega_2}^2$) de la estimación de frecuen- cia para una exponencial compleja de amplitud B contaminada con ruido blanco gaussiano con diferentes valores de desviación estándar σ_x	83

4.12. Valor medio (μ_{P_A}) y varianza ($\sigma_{P_A}^2$) de la estimación de la potencia promedio de la exponencial compleja de amplitud A contaminada con ruido blanco gaussiano con diferentes valores de desviación estándar.	102
4.13. Valor medio (μ_{P_B}) y varianza ($\sigma_{P_B}^2$) de la estimación de la potencia promedio de la exponencial compleja de amplitud B contaminada con ruido blanco gaussiano con diferentes valores de desviación estándar.	103
4.14. Valor medio (μ_{ω_1}) y varianza ($\sigma_{\omega_1}^2$) de la estimación de frecuencia para una exponencial compleja de amplitud A contaminada con ruido blanco gaussiano con diferentes valores de desviación estándar σ_{ω_1}	104
4.15. Valor medio (μ_{ω_2}) y varianza ($\sigma_{\omega_2}^2$) de la estimación de frecuencia para una exponencial compleja de amplitud B contaminada con ruido blanco gaussiano con diferentes valores de desviación estándar σ_x	104
4.16. Valor medio (μ_{ECM}) y la varianza (σ_{ECM}^2) del error cuadrático medio de la estimación del ruido blanco gaussiano con desviación estándar $\sigma_x = 1$	106
4.17. Valor medio (μ_{ECM}) y la varianza (σ_{ECM}^2) del error cuadrático medio de un proceso AR(2) con desviación estándar $\sigma_x = 1$	125
4.18. Valor medio (μ_{ECM}) y la varianza (σ_{ECM}^2) del error cuadrático medio de un proceso AR(4) con desviación estándar $\sigma_x = 1$	126

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA
Maestría en Ingeniería Eléctrica

**Análisis del inventanado temporal de señales digitales
para determinar los efectos frecuenciales**

Autor: Carlos R. Mejías M.

Tutor: Carlos Jimenez

Fecha: Julio 2013

Resumen

En esta investigación se determinaron los efectos frecuenciales de aplicar ventanas temporales para segmentar señales de tipo sinusoidales en presencia de ruido y señales aleatorias de tipo auto-regresivas (AR), limitando el estudio solamente a las ventanas comúnmente utilizadas en el área del Procesamiento Digital de Señales (DSP). En este sentido, primero se analizó matemáticamente la multiplicación temporal de una ventana con una señal arbitraria en el dominio de la frecuencia, lo que corresponde a la convolución de los espectros de estas dos señales, la cual causa distorsiones en el espectro de la señal segmentada debido al lóbulo principal y los lóbulos laterales presentes en el espectro de la ventana aplicada. Luego se seleccionaron los indicadores espectrales que caracterizan las diferentes ventanas para analizar la distorsión generada por cada ventana en los diferentes tipos de señales con la finalidad de estratificar cuáles son los parámetros espectrales influyentes en el comportamiento de dichas ventanas, con la finalidad de determinar las ventanas más apropiadas para las señales anteriormente mencionadas. Los resultados obtenidos en cada experimento muestran que la elección de la ventana depende del tipo de señal a segmentar, longitud del segmento y las características espectrales que se desean extraer de la estimación con el menor error posible.

Introducción

Debido a los avances tecnológicos del siglo pasado, se desarrollaron las comunicaciones digitales, los medios digitales, aplicaciones en el área de bio-ingeniería, acústica, radares, sismología y procesamiento de imágenes que demandaron métodos para procesar estos los datos. De estos requerimientos, nace el Procesamiento Digital de Señales (DSP), una rama de la ingeniería que se encarga de analizar y procesar las señales digitales en el dominio del tiempo, en el dominio de la frecuencia y en el plano complejo.

Actualmente, las nuevas tecnologías demandan mayor procesamiento debido a la inmediatez de respuesta en los sistemas que trabajan en tiempo real, por lo que es necesario utilizar apropiadamente las técnicas y algoritmos a implementar. En este sentido, el tiempo computacional exigido en el bloque de procesamiento de este tipo de sistemas es un punto crítico para su diseño, por lo que la cantidad de datos procesados dependerá de la técnica y algoritmos aplicados.

De acuerdo a lo anteriormente planteado, el tamaño de las tramas de datos a procesar dependerá de la aplicación, del tipo de memoria disponible, de la velocidad de procesamiento, entre otros. Por consiguiente, para reducir el tiempo computacional del bloque de procesamiento, es necesario segmentar temporalmente la información. Esta técnica de segmentar la señal se conoce como enventanado temporal y consiste en la multiplicación de la señal con una función de peso o ventana. Al realizar la segmentación de la señal, en los extremos del segmento se crean discontinuidades debido a la interrupción creada por la ventana lo que produce una distorsión en el espectro de potencia

de la señal que puede generar falsa información u ocultar información en dicho espectro.

Por lo tanto, este trabajo está orientado hacia el análisis de la distorsión frecuencial generada por cada ventana en diferentes tipos de señales. Para lograr este objetivo, primero se analizó matemáticamente el efecto de multiplicar una señal con una ventana en el dominio de la frecuencia. Luego se seleccionaron los indicadores espectrales de las diferentes ventanas que describen el comportamiento en el dominio de la frecuencia. Mediante una serie de experimentos, se analizó el derrame de potencia generado por las diferentes ventanas para cada tipo de señal y de esta forma estratificar cuáles son los parámetros espectrales influyentes, con la finalidad de determinar la ventana apropiada para las señales utilizadas en este trabajo.

La presente investigación se desarrollo a través de cinco capítulos. En el primer capítulo se describe la situación problemática, se indica el objetivo general y los objetivos específicos de la investigación, la justificación e importancia del mismo, además del alcance y sus limitaciones.

El segundo capítulo, se indican los antecedentes correspondientes a la investigación realizada y describen los conceptos básicos referentes al procesamiento digital de señales, procesos aleatorios, transformadas de Fourier y análisis espectral.

En el tercer capítulo se describen los procedimientos metodológicos empleados para el logro de los objetivos propuestos.

En el cuarto capítulo se presentan y discuten los resultados obtenidos del enventanado temporal de diferentes tipos de señales, aplicando las ventanas comúnmente utilizadas en el área de DSP para analizar el comportamiento de las mismas mediante los indicadores espectrales seleccionados.

Para finalizar la investigación, en el quinto capítulo se presentan las conclusiones pertinentes y se hace referencia sobre las recomendaciones correspondientes para dar inicio a otras investigaciones para ampliar la producción intelectual de esta línea de investigación

Capítulo I

El Problema

1.1. Planteamiento del Problema

Desde los inicios de la década de los años setenta, se han generado continuos avances tanto en el ámbito teórico como tecnológico del Procesamiento Digital de Señales (DSP), como una rama de la Ingeniería, que se encarga del análisis y el procesamiento de señales digitales en el dominio del tiempo, en el dominio de la frecuencia y en el plano complejo.

En el análisis de la señal en el dominio de la frecuencia o análisis espectral, la secuencia se descompone o proyecta sobre una base ortogonal de exponenciales complejas, lo que permite calcular el contenido espectral de la señal ([Harris, 1978](#)). Para realizar este análisis, se utiliza como herramienta la Transformada Discreta de Fourier (DFT), implementada mediante el algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (FFT).

El cálculo de la DFT asume implícitamente que la señal de longitud de N muestras espaciadas uniformemente es periódica ([Harris, 1978](#)), por lo tanto, si la secuencia es de larga duración, es necesario segmentar la señal a N muestras, lo que corresponde a una multiplicación de la señal digital por una ventana Rectangular de longitud N en el dominio del tiempo. Esta multiplicación de la señal con una función ventana es lo que se conoce como enventanado de la señal.

El enventanado en el tiempo dependiendo del número de muestras, puede generar una discontinuidad entre la primera y última muestra debido a la periodicidad implícita, produciendo un derrame de la potencia en el espectro. Por consiguiente, este efecto frecuencial puede generar interpretaciones erróneas, confundir y ocultar información presente en el espectro estimado ([Trethewey, 2000](#)).

En este sentido para reducir estos efectos del enventanado de la señal, se utilizan ventanas con un comportamiento suave, sin cambio abrupto en los extremos de la ventana e iniciando y finalizando con valor cero, lo que elimina la discontinuidad ya mencionada ([Lyons, 2010](#); [Harris, 1978](#); [T. S. Durrani y Prof. J. M. Nightingale, 1972](#)). Sin embargo, el uso de ventanas ocasiona un ensanchamiento del espectro, es decir, esta multiplicación temporal de la señal segmentada con la ventana produce la convolución de los espectros de estas dos señales en el dominio de la frecuencia. Por lo tanto, como la convolución es un promedio móvil, esta operación genera el ensanchamiento, lo que distorsiona el espectro de la señal.

De allí la importancia que tiene la selección y uso de una ventana determinada, lo cual significa cierto compromiso entre la resolución de frecuencia y exactitud en la medición del nivel de potencia.

Por lo antes planteado, en la presente investigación se propone realizar el análisis del enventanado en el tiempo mediante diferentes tipos de ventanas y tipos de señales para evidenciar los efectos en el análisis espectral con la finalidad de establecer el uso más apropiado para cada tipo de ventana.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

1. Analizar el enventanado en el dominio del tiempo de señales digitales utilizando diferentes tipos de ventanas para la determinación de los efectos en el dominio frecuencial .

1.2.2. Objetivos Específicos

1. Realizar una revisión de los documentos bibliográficos de las diferentes ventanas para la identificación de las ventanas comúnmente utilizadas en el área de DSP .
2. Analizar la expresión analítica en el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia que resulta del enventanado de una señal para la interpretación de la distorsión de la misma.
3. Seleccionar los indicadores espectrales para la evaluación del efecto frecuencial.
4. Identificar los efectos frecuenciales del enventanado en el tiempo a través de diferentes tipos de señales y tipos de ventanas.
5. Analizar el desempeño de las ventanas utilizadas con los diferentes tipos de señales para la determinación de la aplicación.

1.3. Justificación

La presente investigación proporcionará los parámetros necesarios para analizar el desempeño de de las ventanas más utilizadas en el área de DSP para una mejor comprensión de los efectos en la frecuencia.

Adicionalmente, este documento facilitará la elección de la ventana más adecuada para algunas aplicaciones de DSP, lo que evitará malas interpretaciones en el análisis espectral así como minimizar los errores en la estimación espectral o detección de un conjunto de señales en una observación dada. De allí la importancia de una selección correcta de la ventana, ya que esta estimación es realizada en distintas aplicaciones de la ingeniería y la ciencia. Por ejemplo, esta estimación se usa en la caracterización de la voz ya sea para determinar los sonidos tonales de la excitación de la glotis y de los formantes del tracto vocal ([Manolakis, Ingle, y Kogon, 2005](#)) o para el control por voz de un sistema domótico o en la síntesis del habla para diferentes aplicaciones ([To, Tokuda,](#)

(Kobayashi, Masuko, y Imai, 1994). Otro ejemplo podría ser el uso de la estimación de densidad de potencia de señales en los sistemas de comunicación de 4G (Villarreal-Reyes S., 2005), así como en sistemas de radio cognitiva. En los electroencefalogramas se utiliza la estimación espectral para estudiar desorden de sueños y los efectos de los medicamentos en las funciones cerebrales (Manolakis y cols., 2005). Siendo así, resulta claro que es necesario minimizar los efectos del derrame de potencia por del desconocimiento del enventanado temporal.

Desde el punto de vista académico se generará un documento de consulta para las diferentes áreas de las ingeniería y ciencia que involucren el procesamiento digital de señales y la estimación espectral.

1.4. Alcance y Delimitación de la Investigación

La investigación propuesta se realizará con la simulación de diferentes experimentos, en el lenguaje de alto nivel GNU OCTAVE, que involucren diferentes tipos de señales (deterministas y aleatorias), así como los diferentes tipos de ventanas comúnmente usadas en la estimación espectral mediante la DFT.

En este sentido los efectos frecuenciales del enventanado temporal se observarán con dos tipos de análisis, uno armónico y uno estocástico. De este modo, para el análisis armónico, las señales a utilizar en los experimentos serán señales sinusoidales o una combinación de señales sinusoidales en presencia de ruido blanco aditivo.

Por otra parte, en el análisis estocástico se utilizarán procesos aleatorios ergódicos en el valor medio ya que en aplicaciones prácticas, solamente se dispone de una realización, por lo que no se conoce a priori la autocorrelación, covarianza ni otros promedios estadísticos (Hayes, 1996). En este sentido, se observará los efectos frecuenciales al enventanar un segmento de la señal y las implicaciones en la estimación espectral.

Capítulo II

Marco Teórico

En este capítulo se describe los antecedentes referidos al análisis frecuencial de las ventanas temporales. En su totalidad, las investigaciones precedentes y sus antecedentes tienen referencia internacional, aunque no se descarta que existan investigaciones nacionales que sean antecedentes a esta investigación.

2.1. Antecedentes

Stefan Shuster, y otros (2009): analizaron los problemas presentes en la estimación frecuencial y fasorial basada en DFT en aplicaciones de medición sinusoidal con gran rango dinámico. Para ello, se investigó los efectos estadísticos (bias y varianza) del enventanado en la estimación frecuencial y fasorial.

La investigación propuesta analizará los efectos frecuenciales del enventanado en señales sinusoidales y no los efectos estadísticos (desviación del valor real y varianza) en la estimación de magnitud y frecuencia para diferentes tipos de ventana. En este orden de ideas, las estimaciones de las señales sinusoidales serán determinísticas ya que se controlará la aplicación de la ventana, sin considerar los efectos de del inicio de la ventana.

Por otro lado, **M. W. Trethewey** (2000), analizó el uso de las ventanas para la reducción del derrame de potencia debido al crecimiento de la amplitud de

la señal en los alrededores de los extremos. Se plantea entonces que con la combinación de ciertas señales no estacionarias y ventanas, los pesos temporales atenúan importantes características que afectan negativamente cualquier procesamiento. Dicho de otro modo, el uso de ventanas reduce significativamente secciones temporales de la señal, lo que influye en la estimación espectral de potencia. Adicionalmente se analiza la dependencia del porcentaje de solapamiento en la estimación espectral para la ventana rectangular, la ventana de Hamming, la ventana de Hanning y ventanas muy planas.

Esta investigación ofrece un aporte a la presente investigación ya que en la misma se propone analizar ventanas adicionales con la finalidad de completar el estudio para determinar la aplicación de las ventanas comúnmente usadas en los diferentes tipos de señales.

En este mismo orden de ideas, **Albert H. Nuttall** (1981) publicó en un artículo para corregir los valores del pico del primer lóbulo lateral de algunas ventanas presentados por Harris así como la corrección de las gráficas de las ventanas presentadas en esa publicación. También genera un conjunto de ventanas con bajos lóbulos laterales.

La investigación presentada por Nuttall, permitirá a la investigación propuesta corregir los valores de algunos indicadores obtenidos por Harris ([Harris, 1978](#)).

Igualmente, **Fredric J. Harris** (1978) dispone una revisión concisa de las ventanas de la época y sus efectos en la detección de señales armónicas en presencia de ruido de banda ancha e interferencia por un armónico fuerte cercano. Se incluye un catálogo de ventanas con parámetros de desempeño para las diferentes ventanas.

Esta investigación ofrece un aporte importante a la presente investigación ya que en la misma se utilizarán aquellos indicadores que caracterizan las ventanas para determinar cuales de ellos tienen mayor influencia en los efectos frecuenciales producidos por el enventanado.

Por último, **T. S. Durrani y otros** (1972) analizaron los efectos consecuentes en la desviación de la amplitud y la varianza del espectro estimado, así como la

especificación de los factores de compensación. Además los criterios son desarrollados por la comparación del incremento del ancho de banda en el análisis espectral causado por las diferentes secuencias de suavizado. Se consideraron tres familias de ventanas y los resultados computados de la elección de las diferentes ventanas.

La investigación propuesta se diferencia con esta investigación en que se estudiarán los efectos en la desviación del valor real y estimado, y la varianza para las ventanas comúnmente utilizadas que no fueron consideradas en el momento de la investigación.

2.2. Bases Teóricas

2.2.1. Señal Digital

Antes de definir una señal discreta, primero se debe entender el concepto de *señal*. Por lo tanto, una señal se define como una fenómeno físico cuantificable que varía con el tiempo, espacio o cualquier otra variable independiente. Matemáticamente, una señal es una función que depende de una o más variables independientes. Por ejemplo las funciones indicadas en las ecuaciones (2.1) y (2.2)

$$s_1(t) = 5t \quad (2.1)$$

$$s_2(x, y) = 3x + 2xy + 10y^2 \quad (2.2)$$

describen dos señales. $s_1(t)$ varía linealmente con la variable independiente t (tiempo), mientras que $s_2(x, y)$ describe una señal dependiente de las variables x y y que podrían representar dos coordenadas espaciales en un plano (Proakis y Manolakis, 1995).

Ahora bien, una vez entendido la definición de señal, queda por definir el término *digital*. De allí, es necesario clasificar los tipos de señales. En esta perspectiva, las señales dependiendo de la naturaleza de la variable independiente se clasifican como *señales de tiempo continuo* o *señales de tiempo discreto*. Las señales de tiempo continuo están definidas para todos los valores del tiempo en cualquier intervalo continuo (a, b) . Mientras que una señal de tiempo discreto se encuentra definida para valores discretos de tiempo, es decir, es una secuencia numérica o una serie temporal definida.

De igual modo si la señal toma cualquier valor de un rango finito o infinito, se dice que es una señal de valores continuos. En cambio, una señal que toma valores de un conjunto finito, se dice que es una señal de valores discretos.

Por consiguiente, una señal de tiempo discreto y valores discretos es una señal digital ([Proakis y Manolakis, 1995](#)).

2.2.2. Procesos Aleatorios de Tiempo Discreto

Un proceso aleatorio de tiempo discreto se define como la transformación del espacio muestral Ω al conjunto de señales de tiempo discretos $x(n)$ ([Hayes, 1996](#)). Por ejemplo, si se considera el experimento de lanzar un dado equilibrado y la salida del lanzamiento con igual probabilidad se asigna a la variable aleatoria A , entonces el proceso aleatorio

$$x(n) = A \cos(n\omega_o) \quad (2.3)$$

consiste en un conjunto de seis diferentes señales de tiempo discreto con igual probabilidad.

2.2.2.1. Procesos Estacionarios

En aplicaciones de procesamiento de señales, los promedios estadísticos (o de conjuntos) de un proceso aleatorio son generalmente independientes del desplazamiento temporal ([Hayes, 1996](#)), es decir, las funciones de densidad conjunta no cambian para distintos instantes de tiempo ([Wikipedia, 2011b](#)). Por lo tanto, los procesos que son estadísticamente invariantes en el tiempo se denominan estacionarios.

Ahora bien, la estacionaridad del proceso depende del orden de la función densidad que sea invariante en el tiempo. Por ejemplo, un proceso es *estacionario de primer orden* si la función densidad de primer orden del proceso aleatorio es independiente del tiempo, esto es,

$$f_{x(n)}(\alpha) = f_{x(n+k)}(\alpha) \quad (2.4)$$

para todo valor de k . Por consiguiente, el valor medio $m_x(n)$ y la varianza $\sigma_x^2(n)$ del proceso son constantes.

En efecto, un proceso es *estacionario de segundo orden* si la función densidad conjunta $f_{x(n_1), x(n_2)}(\alpha_1, \alpha_2)$ depende solamente de la diferencia temporal $n_2 - n_1$ y no de los tiempos individuales n_1 y n_2 . Además, estos procesos estacionarios de segundo orden tienen parámetros estadísticos de segundo orden que son invariantes al desplazamiento temporal (Hayes, 1996). En otras palabras, la secuencia de autocorrelación $r_x(k, l)$ entre dos variables aleatorias $x(k)$ y $x(l)$ dependen solamente de la diferencia temporal $k - l$.

En este sentido para funciones de densidad conjunta de orden superior, un proceso es estacionario de orden L si los procesos $x(n)$ y $x(n + k)$ tienen la misma función de densidad conjunta de orden L .

Por otro lado, existe otra clasificación de la estacionaridad que no depende directamente de las funciones de densidad, sino que depende principalmente del valor medio, autocorrelación y varianza del proceso. De allí un proceso *estacionario en sentido amplio* se define como aquel proceso con valor medio $m_x(n)$ constante, autocorrelación $r_x(k, l)$ que dependa sólo de la diferencia $k - l$ y varianza finita.

2.2.2.2. Ergodicidad

Un proceso aleatorio se denomina ergódico si todas sus propiedades estadísticas se pueden determinar para una sola muestra o realización (Papoulis, 1977). Debe señalarse que el valor medio y la autocorrelación de un proceso aleatorio son ejemplos de promedios de conjunto que describen los promedios estadísticos de un proceso a través de todas las posibles señales discretas en el tiempo del proceso. En este sentido, estos promedios para una realización se convierten en un problema, por lo tanto, la estimación de estos promedios es posible en ciertas condiciones al usar apropiadamente los promedios temporales del proceso aleatorio (Hayes, 1996).

Dentro de esta perspectiva si el valor promedio estimado $\hat{m}_x(N)$ de un proceso estacionario en sentido amplio converge al valor medio m_x en el sentido cuadrático medio, es decir,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \{ |m_x(N) - m_x|^2 \} = 0 \quad (2.5)$$

entonces el proceso es ergódico en el valor medio. De allí si se conoce la autocovarianza $c_x(k)$, es suficiente con que se satisfagan las siguientes condiciones

1. $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_x(k) = 0$
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} c_x(k) = 0$

para que la convergencia de la ecuación (2.5) se cumpla.

2.2.3. Procesamiento Digital de Señales

En el mundo de la ingeniería y las ciencias, la mayoría de las señales son de variable continua y valores continuos (señal analógica), que son procesadas a través de sistemas analógicos, con el propósito de cambiar sus características o extraer alguna información (Proakis y Manolakis, 1995).

El procesamiento digital de señales o DSP es un sistema digital que realiza modificaciones en las características de las señales digitales para la extracción de información en el dominio temporal, en el dominio frecuencial o en el plano complejo. Por este motivo, es necesario utilizar un convertidor Analógico-Digital (A/D), que transforma las señales analógicas en señales digitales a través del muestreo, cuantificación y codificación. En otras palabras, las señales analógicas en la entrada del convertidor A/D salen del dispositivo codificadas en binario y entran a un computador digital programable o a un microprocesador para realizar las operaciones deseadas en la señal digital.

Debido a que el procesador digital de señales es programable, proporciona la flexibilidad de cambiar o reconfigurar las operaciones ya programadas en el

procesador, que en sistemas analógicos resultaría complicado implementar. Por otro lado, una señal digital que experimenta cierta atenuación o perturbaciones leves, puede ser reconstruida y amplificada mediante sistemas de regeneración de señales ([Wikipedia, 2011a](#)), lo que representa una ventaja de los sistemas digitales respecto a los sistemas analógicos.

2.2.4. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

El análisis frecuencial de una señal digital es usualmente realizado en un procesador digital de señales, que puede ser un computador digital de propósito general o un hardware digital especialmente diseñado. Para realizar este análisis se debe convertir la secuencia temporal en una representación equivalente en el dominio de la frecuencia mediante la *Transformada de Fourier de Tiempo Discreto* (DTFT) $X(e^{j\omega})$ de la secuencia $x(n)$. Sin embargo, $X(e^{j\omega})$ es una función de variable continua, por lo que no es una representación computacional conveniente de la secuencia $x(n)$ ([Proakis y Manolakis, 1995](#)).

En este orden de ideas la *Transformada Discreta de Fourier* (DFT) se presenta como alternativa de la Transformada de Fourier, desarrollada para secuencias de duración finita. La DFT es una secuencia de muestras equiespaciadas en frecuencia de la *Transformada de Fourier en Tiempo Discreto* (DTFT) de la señal ([Oppenheim y Schaffer, 1999](#)).

Centrados en este enfoque, se considerará inicialmente la transformada de Fourier de una secuencia temporal aperiódica para luego establecer la relación entre la transformada de Fourier muestreada y la DFT. Por lo tanto, la DTFT de una señal aperiódica $x(n)$ viene dada por la expresión

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad (2.6)$$

En función de lo anteriormente expuesto se muestrea periódicamente en la frecuencia a $X(e^{j\omega})$ en espacios de $\delta\omega$ radianes entre muestras sucesivas. Debido a que $X(e^{j\omega})$ es periódica con período 2π , solamente es necesario muestras en

el rango fundamental de frecuencia ($0 \leq \omega < 2\pi$) (Proakis y Manolakis, 1995). Por lo tanto, se tomarán N muestras equidistantes en el intervalo $0 \leq \omega < 2\pi$ con espaciado $\delta\omega = \frac{2\pi}{N}$, esto es

$$X(e^{jk\delta\omega}) = X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (2.7)$$

Desarrollando la suma de la ecuación (2.7) en sumatorias de N términos se obtiene que

$$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \dots + \sum_{n=-N}^{-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=N}^{2N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \dots$$

$$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=mN}^{mN+N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Al cambiar el índice n por $n - mN$ e intercambiar el orden de la suma, el resultado es

$$X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n - mN) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (2.8)$$

De la ecuación (2.8) se definirá la secuencia periódica $x_p(n)$ de período N , esto es

$$x_p(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n - mN)$$

donde $x_p(n)$ es una versión solapada de $x(n)$. Si se analiza la consideración de que $x_p(n)$ es periódica, entonces se puede sintetizar a partir de la serie de Fourier

$$x_p(n) = \sum_{n=0}^{N-1} c_k e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Siendo c_k los coeficientes del desarrollo de la serie de Fourier y definidos por

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (2.9)$$

Si se compara las ecuaciones (2.8) y (2.9) se concluye que

$$c_k = \frac{1}{N} X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)$$

Ahora si $x(n)$ es de duración finita y longitud $L \leq N$, entonces $x_p(n)$ es simplemente una repetición periódica de $x(n)$. Esto es

$$x_p(n) = \begin{cases} x(n) & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & L \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

Por lo tanto, las muestras frecuenciales $X\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k}\right)$ para $k = 0, 1, \dots, N-1$, de la ecuación (2.8), representan únicamente la secuencia de duración finita $x(n)$ [Proakis]. De este resultado se define la relación de transformación (DFT) para la secuencia $x(n)$ de longitud $L \leq N$ en una secuencia de muestras frecuenciales $X(k)$ de longitud N como

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.10)$$

En caso de que $L \leq N$, la señal $x(n)$ se rellena con $N-L$ ceros para que tenga longitud N . Esta operación se conoce como *zero padding* y es importante notar que no proporcionará información adicional acerca del espectro $X(e^{j\omega})$. Esta operación simplemente aumenta la densidad de muestras espaciales.

Para reconstruir $x(n)$ a partir de las muestras frecuenciales $X(k)$, se utiliza la Transformada Discreta Inversa de Fourier (IDFT), que se define como

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.11)$$

2.2.4.1. Propiedades de la DFT

Siendo $x(n) \xleftrightarrow{DFT} X(k)$. Se definen en la Tabla 2.1 un resumen de las propiedades de la DFT.

Cuadro 2.1: Propiedades de la DFT

Propiedad	Dominio Temporal	Dominio Frecuencial
Notación	$x(n), y(n)$	$X(k), Y(k)$
Periodicidad	$x(n) = x(n + N)$	$X(k) = X(k + N)$
Linealidad	$a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$	$a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$
Desplazamiento Circular Temporal	$x((n-l))_N$	$X(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kl}$
Desplazamiento Circular Frecuencial	$x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}ln}$	$X((k-l))_N$
Conjugada	$x^*(n)$	$X^*(N-k)$
Convolución Circular	$x_1(n) \oplus x_2(n)$	$X_1(k) X_2(k)$
Correlación Circular	$x(n) \oplus y^*(-n)$	$X(k) Y^*(k)$
Multiplicación Temporal	$x_1(n) x_2(n)$	$\frac{1}{N} X_1(k) \oplus X_2(k)$

Fuente: Mejías, 2013

2.2.5. Transformada Rápida de Fourier (FFT)

La transformada discreta de Fourier (DFT) tiene un papel importante en el diseño, análisis y realización de sistemas y algoritmos de procesamiento digital de señales (Oppenheim y Schaffer, 1999), por lo que es necesario el uso de algoritmos eficientes para el cálculo explícito de la DFT cuando la velocidad y complejidad computacional son relevantes en la aplicación. En atención a la problemática expuesta este conjunto de algoritmos eficientes se conocen colectivamente como la *Transformada Rápida de Fourier* (FFT).

Los algoritmos FFT se basan en el principio fundamental de descomponer el cálculo de la DFT de una secuencia de longitud N en DFT sucesivamente más pequeñas (Oppenheim y Schaffer, 1999), que mejora la velocidad de cómputo y disminuye la complejidad computacional (número de sumas y multiplicaciones aritméticas) .

2.2.5.1. Cómputo Eficiente de la Transformada Discreta de Fourier

Para entender la complejidad computacional requerida, se debe expresar la DFT e IDFT como transformaciones lineales, esto es

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.12)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn} \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.13)$$

siendo $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ una de las raíces N -ésimas complejas de uno. La ecuación (2.12) se puede expresar de forma matricial como

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{W}_N \mathbf{x}_N \quad (2.14)$$

Donde $\mathbf{W}_N$ es la matriz de la transformación lineal de $N \times N$, esto es

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

Si se asume que la inversa de $\mathbf{W}_N$ existe, entonces se obtiene que

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{X}_N$$

Al comparar la expresión (2.13) y (2.15), y expresando la IDFT de forma matricial como

$$\mathbf{x}_N = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^* \mathbf{X}_N \quad (2.15)$$

Se concluye que la matriz $\mathbf{W}_N^{-1}$ es igual a la matriz $\mathbf{W}_N$ conjugada y escalada por $1/N$, esto es

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^*$$

En este sentido, evaluando directamente las ecuaciones (2.14) y (2.15), el cómputo de un punto de la DFT requiere de N multiplicaciones complejas y $N - 1$ sumas complejas. Por tanto, para obtener todos los N valores de la DFT se requiere de N^2 multiplicaciones complejas y $N(N - 1)$ sumas complejas. Por consiguiente, como cada multiplicación compleja requiere cuatro multiplicaciones reales y dos sumas reales, y cada suma compleja requiere dos sumas reales, entonces para el cálculo de la DFT de N puntos requiere $4N^2$ multiplicaciones reales y $N(4N - 2)$ sumas reales (Oppenheim y Schafer, 1999).

Adicionalmente, se debe notar que en los algoritmos de FFT se explora la propiedad de simetría y periodicidad del factor W_N , esto significa que:

- Propiedad de Simetría: $W_N^{k+\frac{N}{2}} = -W_N^k$
- Propiedad de Periodicidad: $W_N^{k+N} = W_N^k$

2.2.5.2. Algoritmo de FFT Mediante Diezmado en el Tiempo

El siguiente algoritmo explora tanto la simetría como la periodicidad de W_N , para ello, se descompone la secuencia $x(n)$ que se divide sucesivamente en secuencias más pequeñas.

El principio del algoritmo se ilustra convenientemente considerando el caso especial de que N es una potencia entera de 2, es decir, $N = 2^n$. Como N es un número par, se puede considerar el cálculo de $X(k)$ separando $x(n)$ en dos secuencias de longitud $N/2$ formada por los puntos pares de $x(n)$ y los puntos impares de $x(n)$ [Oppenheim]. Por lo tanto, si $X(k)$ se está dado por la ecuación (2.12) y se aplica el algoritmo, entonces

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) (W_N^2)^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) (W_N^2)^{nk} \quad (2.16)$$

Siendo $W_N^2 = W_{N/2}$, entonces se puede reescribir la ecuación (2.16) como

$$X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n) W_{\frac{N}{2}}^{nk} + W_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1) W_{\frac{N}{2}}^{nk}$$

$$X(k) = G(k) + W_N^k H(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.17)$$

La primera suma ($G(k)$) es la DFT de longitud $N/2$ de los puntos pares de la secuencia $x(n)$. Mientras que la segunda suma ($W_N^k H(k)$) representa la DFT de longitud $N/2$ de los puntos impares de la secuencia $x(n)$.

Por otro lado, sólo es necesario valores de k entre 0 y $N/2$ para calcular $G(k)$ y $H(k)$ de la ecuación (2.17) ya que ambas expresiones son periódicas de período $N/2$ (Oppenheim y Schafer, 1999).

De este modo el cálculo de dos DFT de longitud $N/2$, requiere de $2(N/2)^2$ multiplicaciones complejas y aproximadamente $2(N/2)^2$ sumas complejas. Al combinar las dos DFT como se indica en la ecuación (2.17), se requiere de $N + 2(N/2)^2$ multiplicaciones complejas y sumas complejas.

Por tanto al aplicar el algoritmo iterativamente, $G(k)$ se puede calcular con la combinación de dos DFT de $N/4$ al dividir la secuencia $x(2n)$ en dos secuencias de longitud $N/4$. De igual modo se puede extender el procedimiento para calcular $H(k)$. En consecuencia, las operaciones complejas de multiplicación y

suma se reducen a $2N + 4(N/4)^2$. Debido a que $N = 2^v$, este procedimiento puede realizarse hasta un máximo de $v = \log_2 N$. Por lo tanto, al realizar la máxima descomposición se obtiene que el número de multiplicaciones y sumas complejas se reduce a $N_v = N \log_2 N$.

2.2.5.3. Algoritmo de FFT Mediante Diezmado en Frecuencia

Este algoritmo es un procedimiento alternativo para el cálculo eficiente de la DFT. Para lograr este objetivo, se divide la secuencia de salida $X(k)$ en subsecuencias más y más pequeñas.

En este caso, se restringe nuevamente a N como potencia de 2 y el cómputo de $X(k)$ se realiza por separado, es decir, se calcula por separado las DFT para los puntos pares e impares de $X(k)$. De este modo los puntos pares de la DFT se calculan como

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{2kn} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{2kn} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) W_N^{2kn}$$

Al realizar un cambio de variable en la segunda sumatoria y considerando la periodicidad $W_N^{2km} = W_N^{2k(n+\frac{N}{2})}$, se obtiene que

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_{\frac{N}{2}}^{kn}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (2.18)$$

Una vez obtenido los puntos pares de la DFT, de una forma similar se calculan los puntos impares de la DFT, es decir,

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) - x\left(n + \frac{N}{2}\right) \right] W_N^n W_N^{\frac{kn}{2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (2.19)$$

Al contar el número de operaciones aritméticas requeridas para calcular la DFT de $x(n)$ al dividir la secuencia $X(k)$ en sus puntos pares e impares hasta un máximo de $v = \log_2 N$, se obtiene que es necesario $\frac{N}{2} \log_2 N$ multiplicaciones complejas y $N \log_2 N$ sumas complejas. Por lo tanto, en los algoritmos mediante diezmado en el tiempo y diezmado en frecuencia, el número de operaciones es el mismo ([Oppenheim y Schafer, 1999](#)).

2.2.6. Análisis Espectral

La esencia del análisis en la frecuencia es la representación de una señal como una superposición de componentes sinusoidales. En teoría, la forma exacta de esta descomposición (espectro) depende de la señal y puede calcularse mediante herramientas matemáticas como la Transformada de Fourier o Serie de Fourier si la señal se conoce para todos los valores temporales. Por otro lado, en aplicaciones prácticas, donde un segmento finito de la señal está disponible, se puede calcular solamente una aproximación (estimación) del espectro real o teórico de la señal ([Manolakis y cols., 2005](#)).

2.2.6.1. Análisis Espectral de Señales Deterministas

Cuando las señales son deterministas, las herramientas matemáticas para el análisis espectral son las series de Fourier y las transformadas de Fourier. En estos casos se requiere los valores de la señal en el intervalo de $(-\infty, +\infty)$ ([Manolakis y cols., 2005](#)). El análisis espectral de señales deterministas se basa en los siguientes fundamentos:

1. Toda realización (función muestra) de un proceso estocástico es una función determinista.

2. Las funciones y secuencias deterministas se usan en el estudio de procesos estacionarios.
3. Los diferentes espectros definidos por señales deterministas pueden ser usados para resumir aspectos importantes de procesos estacionarios.

Debido a que en la mayoría de las aplicaciones prácticas, la estimación involucra señales de tiempo continuo, el cálculo numérico del espectro de las señales de tiempo continuo involucra tres aspectos:

1. Muestreo de la señal de tiempo continuo para obtener una secuencia de muestras.
2. Recolección de un número finito de segmentos contiguos inventanados en el tiempo.
3. Cálculo los valores del espectro para el conjuntos de frecuencias deseadas, generalmente a través de los algoritmos FFT.

2.2.6.2. Estimación del Espectro de Potencia de señales aleatorias estacionarias

Desde un punto de vista práctico, la mayoría de los procesos aleatorios tienen espectro continuo. Por lo que el análisis se centrará en la estimación de espectros continuos ([Manolakis y cols., 2005](#)).

La densidad espectral de potencia de un proceso estacionario de valor medio cero se define como

$$R_x(e^{j\omega}) \triangleq \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_x(l) e^{-j\omega l} \quad (2.20)$$

Donde $r_x(l)$ es la secuencia de autocorrelación.

El problema con la ecuación (2.20) surge para la estimación de la densidad de potencia ($R_x(e^{j\omega})$) de un proceso estacionario $x(n)$ a partir de la observación

del proceso en un segmento de longitud N con una sola realización. Lo ideal sería obtener una estimación que caracterice fielmente la distribución de la estimación potencia versus la frecuencia de un proceso estocástico utilizando un segmento de una sola realización. Para que esto sea posible, la estimación debería involucrar alguna especie de promedio para una gran cantidad de realizaciones o a lo largo de una sola realización ([Manolakis y cols., 2005](#)).

Estimación del Espectro de Potencia Usando el Periodograma El periodograma es un estimador de espectro de potencia definido para un segmento de datos de longitud N , esto es:

$$\hat{R}_X(e^{j\omega}) \triangleq \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} v(n) e^{-j\omega n} \right|^2 \quad (2.21)$$

Donde $v(n) = x(n)w(n)$, siendo $x(n)$ el proceso estocástico y $w(n)$ la ventana de longitud N . Cuando en el periodograma se utiliza una ventana diferente a la rectangular, se conoce como *periodograma modificado* ([Manolakis y cols., 2005](#)). Dentro de este marco, el cálculo computacional del periodograma requiere que sea discretizado para el conjunto de frecuencias $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$. Por lo tanto, la estimación viene dada por

$$\tilde{\hat{R}}_x \triangleq \hat{R}_X(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = \frac{1}{N} |V(k)|^2 \quad (2.22)$$

Siendo $V(k)$ la DFT de N puntos del proceso segmentado $v(n)$. Si se quiere expresar el periodograma en función de la autocorrelación estimada $r_v(l)$ de la secuencia enventanada $v(n)$ es

$$\hat{R}_X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-(N-1)}^{N-1} \hat{r}_v(l) e^{-j\omega l} \quad (2.23)$$

Si se analiza ahora que las expresiones $\hat{R}_X(e^{j\omega})$, $r_v(l)$ forman un par transformado DTFT, y se evalúa la autocorrelación estimada para $l = 0$ se obtiene que

$$\hat{r}_v(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |v(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{R}_X(e^{j\omega}) d\omega \quad (2.24)$$

Esto significa que el periodograma $\hat{R}_X(e^{j\omega})$ muestra como la potencia de la secuencia inventanada $v(n)$, el cual proporciona una estimación de la varianza del proceso $x(n)$, se distribuye en función de la frecuencia ([Manolakis y cols., 2005](#)).

Dentro de este marco cabe destacar que el autor Manolakis en ([Manolakis y cols., 2005](#)) indica que el periodograma $\hat{R}_X(e^{j\omega})$ no converge al espectro real $R_X(e^{j\omega})$ en un sentido estadístico cuando $N \rightarrow \infty$ como ocurre en procesos deterministas. En este sentido, $\hat{R}_X(e^{j\omega})$ se caracteriza por su valor medio, varianza y error cuadrático medio en la frecuencia para cada valor de N .

Capítulo III

Marco Metodológico

En este capítulo se presenta la metodología que permitirá desarrollar la presente investigación, e igualmente. Se muestran aspectos como el tipo y diseño de investigación, las técnicas y los procedimientos para recabar, analizar, interpretar y presentar los datos que se utilizarán para llevar a cabo dicha investigación.

3.1. Tipos y Diseño de Investigación

De acuerdo a los propósitos planteados la misma se define como documental explicativa, con un diseño de campo experimental, es decir, en una etapa inicial será documental, ya que se analizará en base a los datos provenientes de documentos o archivos como fuente primordial. Tal como se presenta en las Normas ([U.P.E.L, 2006](#)), “se entiende por investigación documental, el estudio de problema con el propósito de ampliar y profundizar el conocimiento de su naturaleza, con apoyo, principalmente, en fuentes bibliográficas y documentales”. Posteriormente, la investigación será de tipo explicativo, debido a que se identificarán el efecto causado por la elección de un tipo de ventana para un tipo de señal. Por tanto, según Hernández, Fernández y Baptista ([Sampieri, Collado, y Lucio, 2006](#)), “este tipo de estudio busca el porqué de los hechos, estableciendo relaciones de causa- efecto”. Y es de campo experimental, ya que de acuerdo a lo planteado por Hernández, Fernández y Baptista ([Sampieri y cols.,](#)

2006), sostienen que este tipo de investigación se manipularán intencionalmente las señales en un ambiente con condiciones rigurosamente controladas, con la finalidad determinar por qué causa se produce el derrame de potencia en el espectro y la influencia de cada tipo de ventana sobre la estimación espectral.

3.2. Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos

La recolección de datos, en una etapa inicial, se realizará mediante la técnica documental para recopilar información en documentos, revistas científicas, congresos, seminarios, e Internet relacionados con la presente investigación.

Dentro de esta perspectiva también se utilizará como técnica la observación científica estructurada y sistematizada a través de la simulación de experimentos con diferentes tipos de señales (sinusoidales y aleatorias) y diferentes tipos de ventanas para observar cómo afecta temporalmente y frecuencialmente el enventanado de la señal en el dominio del tiempo.

Para estudiar el enventanado en el dominio frecuencial se utilizará como instrumento la DFT para transformar las señales temporales y estudiarlas en el dominio de la frecuencia. El cálculo de la DFT se realizará mediante los algoritmos FFT de la librería computacional presente en el lenguaje interpretado de alto nivel GNU Octave.

3.3. Técnicas de Procesamiento y Análisis de Datos

Los datos numéricos obtenidos de los experimentos, se presentarán mediante gráficas de la señal enventanada en el dominio del tiempo y dominio de la frecuencia, así como cuadros estadísticos cuando se trabaje con las señales de naturaleza estocástica. Estas técnicas mencionadas permitirán comparar

fácilmente la influencia o la distorsión que producen las diferentes ventanas utilizadas para DSP en la estimación espectral de potencia.

Para analizar los efectos frecuenciales del enventanado temporal de una señal digital, se utilizarán los indicadores espectrales publicados que permitan evaluar el desempeño de las ventanas para las diferentes tipos de señales, con la finalidad de determinar cuales indicadores tienen mayor influencia en el derrame de potencia del espectro y el compromiso implícito existente entre el espectro real y el estimado por la selección de la ventana utilizada para el análisis espectral.

3.4. Procedimiento Metodológico

3.4.1. Fase I: Revisión de los documentos bibliográficos de las diferentes ventanas para la identificación de las ventanas comúnmente utilizadas en el área del DSP .

Esta fase se iniciará con la recopilación bibliográfica de documentos o artículos nacionales como internacionales, publicados en diferentes medios como revistas científicas e Internet, acerca de los diferentes tipos de funciones ventanas que se usan para segmentar temporalmente la señal en el procesamiento de la misma.

En este sentido los documentos científicos internacionales de interés se buscarán en Science Direct, que es una base de datos de revistas y libros editados por Elsevier y por otras editoriales como Academic Press, North Holland o Pergamon. Del mismo modo se utilizará la base de datos de los artículos publicados en IEEE del área de Procesamiento Digital de Señales. Se debe señalar, como último recurso, el uso de referencias bibliográficas de aquellos documentos publicados sin ningún tipo de suscripción y que están a la disposición del público en general.

Finalmente, la información de ventanas utilizadas para segmentar la señal será sometida a un proceso de selección, organización y comparación para identificar las que comúnmente se utilizan en el área del DSP para limitar la cantidad de ventanas a estudiar en las siguientes fases.

3.4.2. Fase II: Análisis de la expresión analítica en el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia que resulta del enventanado de una señal para la interpretación de la distorsión de la misma.

En este paso se analizará la multiplicación de una señal arbitraria con una función ventana arbitraria en el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia para entender las implicaciones de esta operación en la distorsión de la señal temporal y el espectro de potencia estimado.

En función de lo anteriormente expuesto, la expresión matemática generada de la multiplicación de las dos señales se estudiará en el dominio del tiempo y se analizará cómo distorsiona la señal en el tiempo. De igual modo, se analizará en el dominio de la frecuencia con la DTFT y la DFT para observar los efectos frecuenciales de la multiplicación temporal en cada una de las transformadas.

3.4.3. Fase III: Selección de los indicadores espectrales para la evaluación del efecto frecuencial.

En esta fase, primero se recolectará la información acerca de las figuras de mérito o indicadores espectrales que caracterizan el comportamiento de cada ventana en la frecuencia, es decir, se identificarán las características frecuenciales de las ventanas.

Luego se seleccionarán los indicadores que definen el comportamiento frecuencial de las ventanas.

3.4.4. Fase IV: Identificación de los efectos frecuenciales del enventanado en el tiempo a través de diferentes tipos de señales y tipos de ventanas.

Una vez establecidos cuáles son los efectos que podrían provocar el enventanado temporal y las características espectrales de cada señal, se proseguirá con la selección de diferentes tipos de señales y tipos de ventanas con la finalidad de generar diferentes escenarios o experimentos.

En un primer lugar, se analizarán las ventanas para la estimación espectral de señales deterministas, es decir, se utilizará una señal sinusoidal a diferentes frecuencias para observar primero los efectos frecuenciales de está señal en la estimación de la amplitud y de la frecuencia. Luego se añadirá ruido de banda limitada para analizar la influencia en la estimación. En un tercer escenario, se añadirá otra señal sinusoidal con una frecuencia cercana a la anterior y se analizarán los efectos en la detección de las dos señales. Y por último, se analizará el caso de dos señales sinusoidales con frecuencias cercanas en presencia de ruido.

En segundo lugar, el análisis de las ventanas, en la estimación de procesos estocásticos, se utilizarán señales aleatorias con diferentes comportamientos estadísticos, es decir, procesos aleatorios ergódicos en el valor medio con la finalidad de analizar el efecto de la ventana en la estimación del espectro de potencia.

Desde la perspectiva que aquí se adopta, es evidente que estos experimentos serán controlados por el investigador, es decir, la generación de todos los tipos de señales y tipos de ventanas, así como el enventanado de la señal se realizará con `GNU OCTAVE`. Debido a que la investigación estará centrada en los efectos frecuenciales del enventanado, se calculará la DFT a través de los algoritmos FFT disponibles en `GNU OCTAVE` con la finalidad de observar el espectro de potencia estimado.

3.4.5. Fase V: Análisis del desempeño de las ventanas utilizadas con los diferentes tipos de señales para la determinación de la aplicación.

Como última fase de la investigación, se utilizarán los resultados anteriores, para estratificar cuáles son los parámetros espectrales importantes o influyentes en la estimación del espectro de potencia con la finalidad de analizar la ventana.

En este sentido como cada ventana será puesta a prueba con diferentes señales se analizará el desempeño que tuvo en cada escenario y de esta forma determinar la aplicación más apropiada de cada ventana.

Capítulo IV

Análisis, Interpretación y Presentación de Resultados

En este capítulo se presentan el análisis, la interpretación y la presentación de cada uno de los resultados obtenidos durante la investigación.

4.1. Identificación de las ventanas comúnmente utilizadas en el área de Procesamiento Digital de Señales

En primer lugar, se realizó una revisión del Estado del Arte en el área de Procesamiento Digital de Señales relacionado con el inventariado de señales, con la finalidad de identificar los diferentes tipos de ventanas utilizadas para la segmentación de datos.

De acuerdo a lo planteado, se obtuvo de la revisión un total de veintinueve funciones utilizadas para el inventariado. En la figura [4.1](#) se muestra el número de veces que se encontró cada ventana en las cuarenta y dos (42) fuentes indagadas, siendo la ventana Rectangular o Uniforme la de mayor mención.

Por otra parte, la ventana de Hamming y la ventana de Hann, se mencionan en un 83,3 % de dichas fuentes. Mientras que la ventana de Bartlett, la ventana de Blackman y la ventana de Kaiser, se mencionan en un 59,5 %, 45,2 % y 47,6 % respectivamente. En cuanto a la ventana de Chebyshev, la familia de ventanas Flat-Top, la ventanas Blackman-Harris, la ventana Gausiana y ventana de Parzen, se encuentran entre el 23,8 % y 11,9 % de las fuentes indagadas. El resto de las ventanas se mencionan en menos de un 5 % de dichas fuentes.

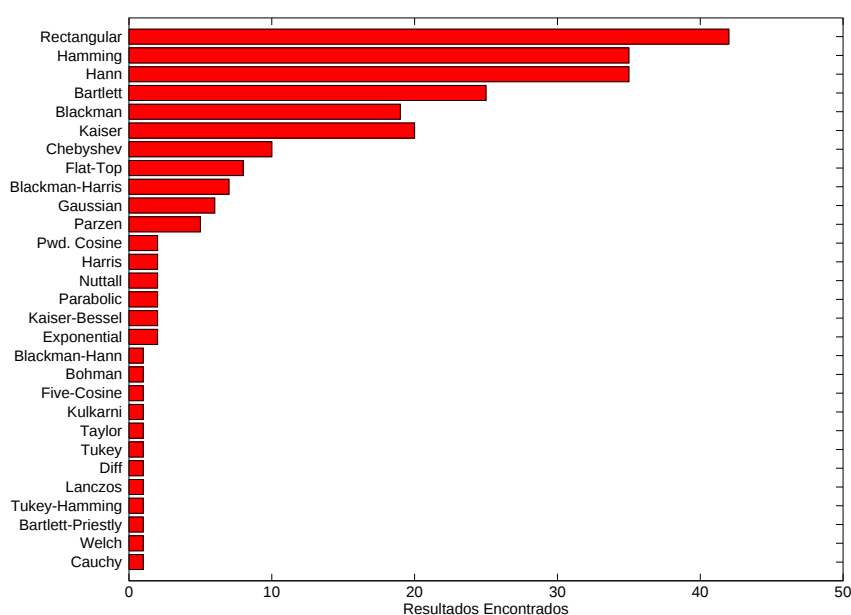


Figura 4.1: Resultados encontrados en diferentes textos y artículos científicos del área de procesamiento digital de señales.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

Una vez identificadas las funciones para inventanar, se realizó una búsqueda en Science Direct, la cual permitió visualizar de manera general, el uso de las diferentes ventanas en el procesamiento digital de señales. Del mismo modo se realizó una exploración en la base de datos de IEEE Xplorer, restringiéndose la búsqueda en el área de Procesamiento de Señales y Análisis, así como en el área de Cómputo y Procesamiento. En la figura 4.2, se muestran los resultados encontrados por los motores de búsqueda para las ventanas antes mencionadas.

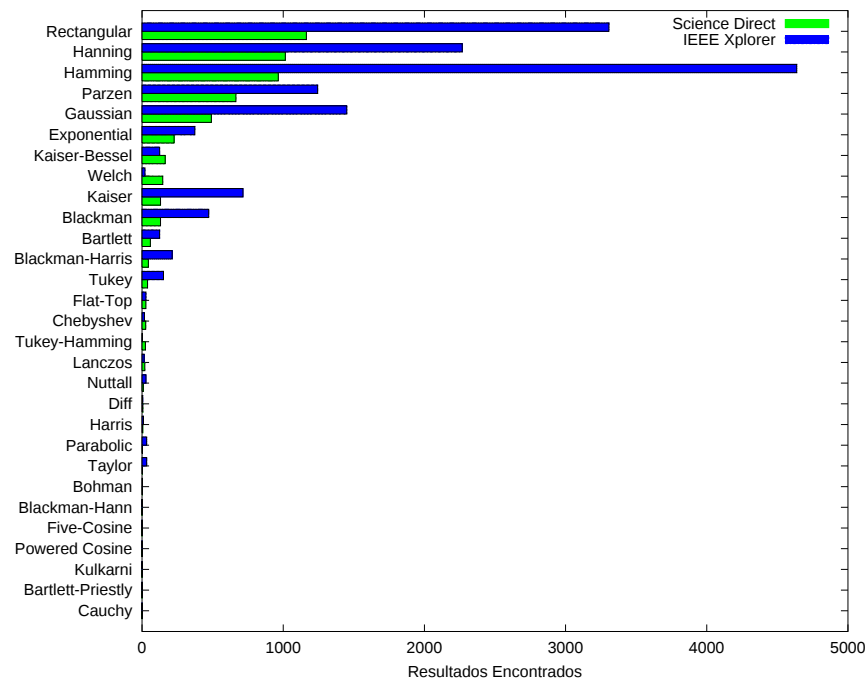


Figura 4.2: Resultados encontrados por el motor de búsqueda de Science Direct e IEEE Xplorer

Fuente: Carlos Mejías, 2013

En la figura 4.2, se observa que los resultados encontrados, en los motores de búsqueda de Science Direct y Xplorer IEEE, son similares, sin embargo, al compararlos con los resultados obtenidos en la revisión bibliográfica, se determinó que para algunas ventanas, como el caso de la ventana de Bartlett y la ventana de Kaiser, se utilizan más en textos del área de DSP que en artículos científicos. Sin embargo, estos resultados cambian para la ventana de Parzen, la ventana exponencial y la ventana gaussiana, ya que se utilizan más en artículos científicos que en los textos de DSP.

Por otro lado, en la base de datos de Xplorer IEEE, se encontró que la ventana de Hamming fue utilizada en 3307 artículos científicos, mientras que en Science Direct, la ventana rectangular se usó en 1164 artículos.

Al comparar los resultados obtenidos por los dos motores de búsquedas (Science Direct y Xplorer IEEE), se determinó que las ventanas que superan la media de estos resultados, forman el conjunto de ventanas comúnmente utilizadas en

el área de DSP, siendo éstas: la ventana Rectangular, ventana de Hamming, ventana de Hann, ventana de Parzen, ventana gaussiana, ventana exponencial, ventana de Kaiser y ventana de Blackman.

4.1.1. Ventana Rectangular

La ventana rectangular, ocasionalmente llamada ventana uniforme o *boxcar*, para N muestras viene dada por la expresión

$$w_{rect}[n] = \begin{cases} 1 & , n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & , \text{resto} \end{cases} \quad (4.1)$$

La DTFT de $w_{rect}[n]$ es

$$W_{rect}(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega(N-1)}{2}} \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (4.2)$$

En la figura 4.3 se muestra la ventana rectangular para $N = 25$ muestras y la DTFT en el rango fundamental.

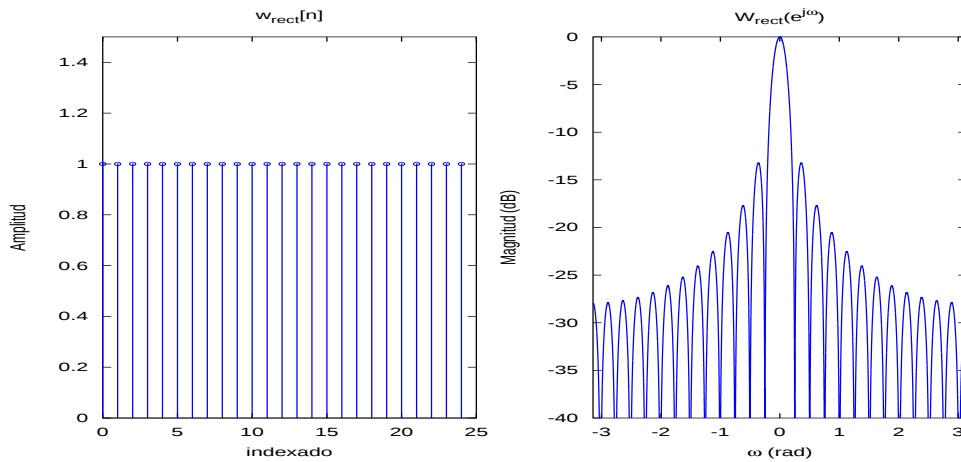


Figura 4.3: Ventana Rectangular y DTFT de dicha ventana.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

4.1.2. Ventana de Hamming

La ventana de hamming, en honor a su creador Richard Hamming, viene dada por la siguiente expresión

$$w_{\text{hamm}}[n] = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) & , n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & , \text{resto} \end{cases} \quad (4.3)$$

$$W_{\text{hamm}}(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}} \left\{ 0,23e^{j\frac{\pi}{N}} \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2} + \pi\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N}\right)} + 0,54 \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} + 0,23e^{-j\frac{\pi}{N}} \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2} - \pi\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\right)} \right\} \quad (4.4)$$

En la figura 4.4 se muestra la ventana de Hamming para $N = 25$ y la DTFT en el rango fundamental.

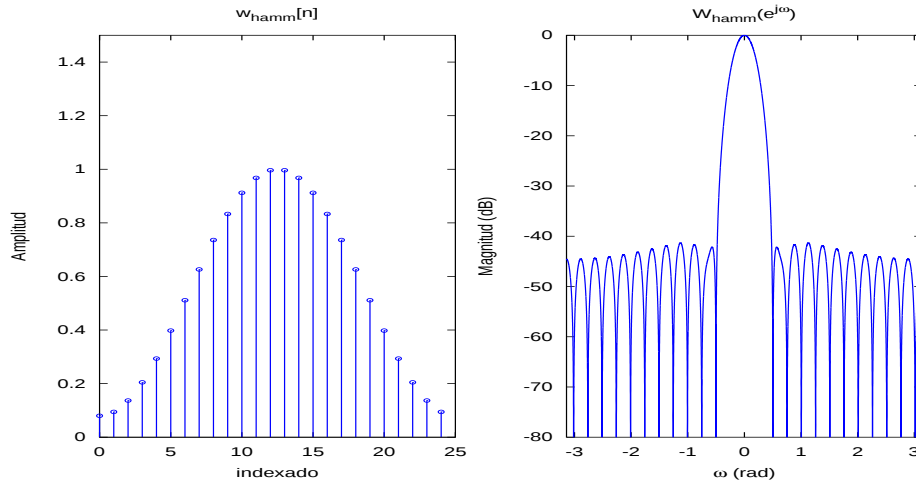


Figura 4.4: Ventana de Hamming y la DTFT de dicha ventana.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

4.1.3. Ventana de Hann

La ventana de Hann aparece frecuentemente como la ventana de Hanning, en antagonía a la ventana de Hamming. También suele llamarse coseno alzado, y la función matemática que describe la ventana y su DTFT son las siguientes

$$w_{hann}[n] = \begin{cases} 0,5 + 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) & , n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & , resto \end{cases} \quad (4.5)$$

$$W_{hann}(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}} \left\{ 0,25e^{j\frac{\pi}{N}} \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2} + \pi\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N}\right)} + 0,5 \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} + 0,25e^{-j\frac{\pi}{N}} \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2} - \pi\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N}\right)} \right\} \quad (4.6)$$

En la figura 4.5 se muestra la ventana de Hann para $N = 25$ muestras y la DTFT en el rango fundamental.

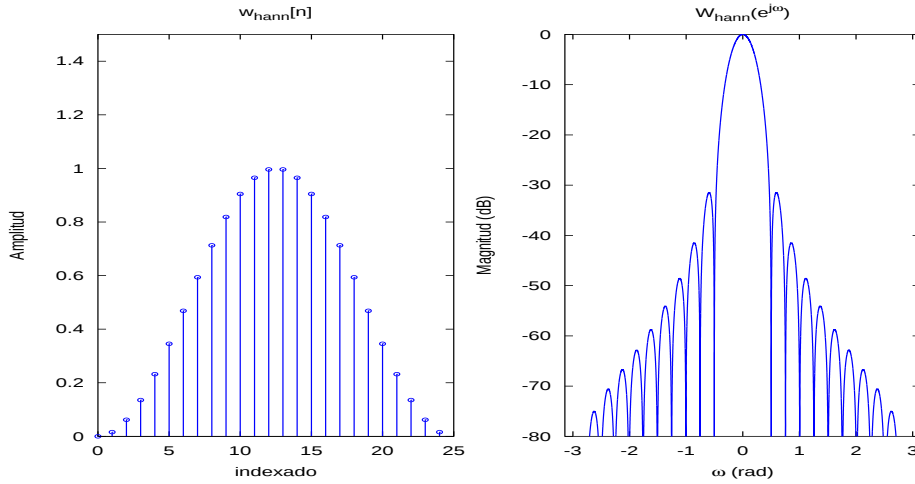


Figura 4.5: Ventana de Hann y DTFT de dicha ventana .

Fuente: Carlos Mejías, 2013

4.1.4. Ventana Gaussiana

La ventana gaussiana o Weierstrass, se basa en el principio de incertidumbre o límite de Gabor, el cual establece que no es posible conocer simultáneamente con exactitud a la señal y la transformada de Fourier asociada a esta señal, es decir, no se puede tener alta resolución temporal y frecuencial al mismo tiempo, ya que el producto de la duración temporal (T) y el ancho de banda (W) de cualquier señal es igual a ([Harris, 1978](#))

$$W \cdot T \geq \frac{1}{4\pi} \quad (4.7)$$

En este caso, el pulso gaussiano utilizado se caracteriza por tener el mínimo producto de tiempo - ancho de banda, por lo tanto, la expresión de la ventana gaussiana viene dada por

$$w_{gauss}[n] = \begin{cases} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(2\alpha \frac{n\pi}{N} \right)^2 \right] & , |n| \leq \frac{N}{2} \\ 0 & , resto \end{cases} \quad (4.8)$$

Siendo α el recíproco de la desviación estándar σ .

Ahora bien, para obtener la expresión de $W_{gauss}(e^{jw})$, primero se asume que la ventana es de duración infinita, por lo que la DTFT es igual a

$$W_G(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(2\alpha \frac{n\pi}{N} \right)^2 - j\omega n} \quad (4.9)$$

Si se realiza una completación de cuadrados y se reagrupan los términos, queda que

$$W_G(e^{jw}) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega N}{2\alpha} \right)^2} \vartheta_3 \left(0, e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{2\alpha}{N} \right)^2} \right) \quad (4.10)$$

donde $\vartheta_3 \left(0, e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{2\alpha}{N} \right)^2} \right)$ es la función theta de Jacobi, la cual se define como $\vartheta_3 \left(0, e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{2\alpha}{N} \right)^2} \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{2\alpha}{N} \right)^2 n^2}$. En vista de que la ventana no es de duración infinita, la DTFT de la ventana gaussiana de N muestras es igual a

$$W_{gauss}(e^{jw}) = \frac{1}{2\pi} W_G(e^{jw}) * W_{rect}(e^{jw}) \quad (4.11)$$

De acuerdo a lo planteado, en la figura 4.6, 4.7 y 4.8 se muestra la ventana gaussiana de 25 muestras de longitud para valores de $\alpha = 2, 5$, $\alpha = 3$ y $\alpha = 3, 5$, así como la DTFT en el rango fundamental de correspondiente con cada valor

de α . De este conjunto de figuras se observa que al incrementar el valor de α , aumenta el ancho del lóbulo principal y disminuye el nivel de los lóbulos laterales.

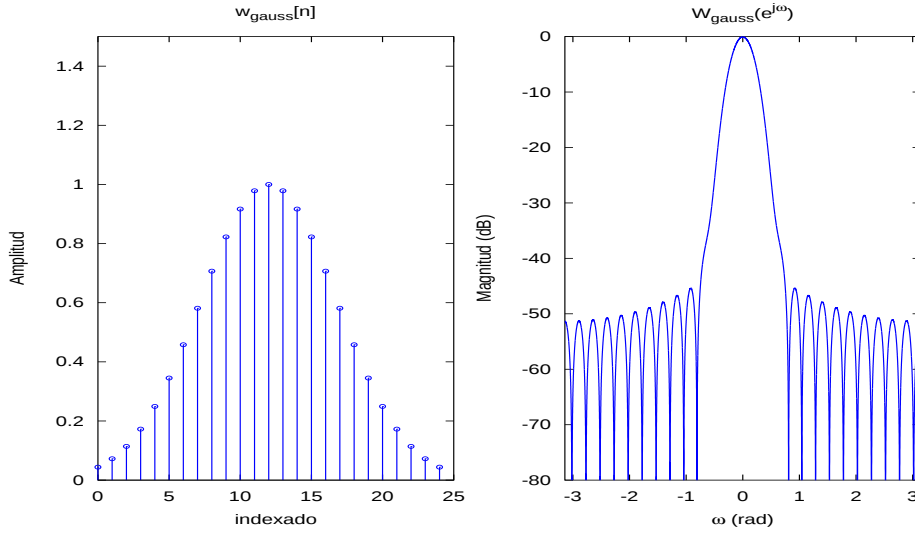


Figura 4.6: Ventana gaussiana y DTFT de dicha ventana para $\alpha = 2, 5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

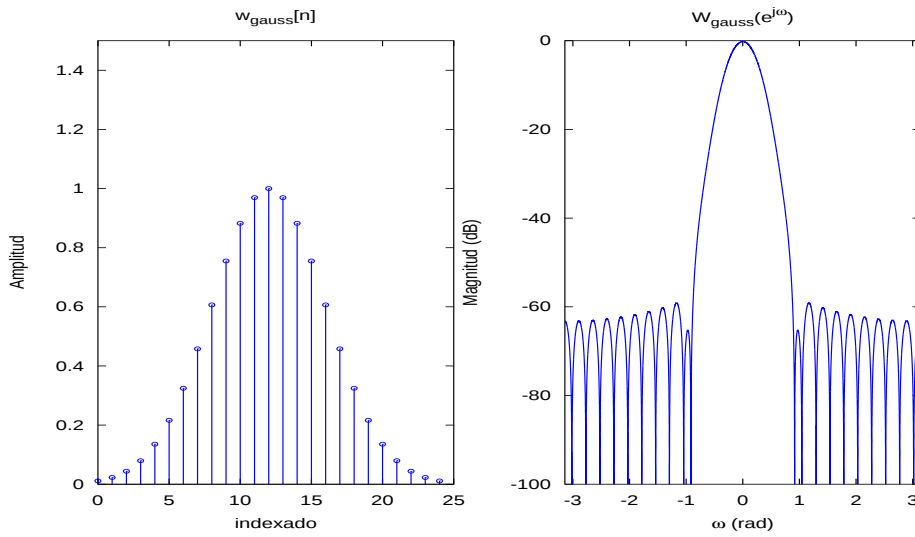


Figura 4.7: Ventana gaussiana y DTFT de dicha ventana para $\alpha = 3$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

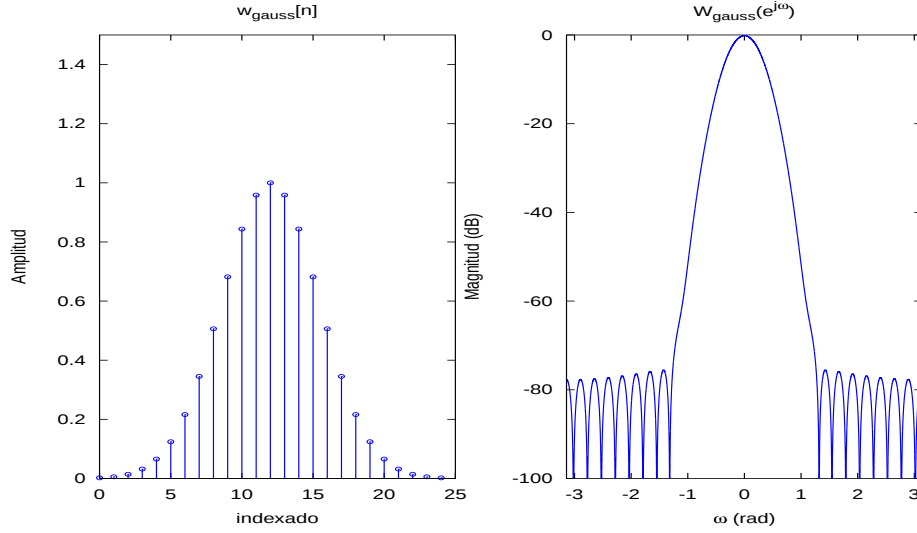


Figura 4.8: Ventana gaussiana y DTFT de dicha ventana para $\alpha = 3, 5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

4.1.5. Ventana de Parzen

La ventana de Parzen, también llamada ventana de la Vallé-Poussin, usualmente suele confundirse con la ventana de Bartlett (ventana triangular), sin embargo, esta ventana es una aproximación cúbica de la ventana gaussiana. El modelo matemático para esta aproximación viene dado por la siguiente expresión

$$w_{parz}[n] = \begin{cases} 1 - 24 \left(\frac{n}{N}\right)^2 + 48 \left(\frac{|n|}{N}\right)^3, & 0 \leq |n| \leq \frac{N}{4} \\ 2 \left[1 - \frac{2|n|}{N}\right]^3, & \frac{N}{4} \leq |n| \leq \frac{N}{2} \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad (4.12)$$

Esta curva cúbica definida por intervalos que proviene del resultado de la convolución de dos (2) ventanas triangulares de longitud $N/2$ o la convolución de cuatro (4) ventanas rectangulares de longitud $N/4$. No obstante, al realizar la convolución de las cuatro (4) ventanas rectangulares y calcular la DTFT se obtiene que

$$W_{conv}(e^{j\omega}) = \frac{4}{N^2} \left[\frac{\sin\left(\frac{N\omega}{8}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right]^4 e^{-j[2(\frac{N}{4}-1)\omega]} \quad (4.13)$$

Ahora bien, si se calcula la DTFT de la ventana de Parzen descrita en la ecuación 4.12 se obtiene la siguiente expresión

$$W_{parz}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{-\frac{N}{4}} 2 \left[1 + \frac{2n}{N} \right]^3 e^{-j\omega n} + \sum_{n=-\frac{N}{4}+1}^0 \left[1 - 24 \left(\frac{n}{N} \right)^2 - 48 \left(\frac{n}{N} \right)^3 \right] e^{-j\omega n} \\ \sum_{n=1}^{\frac{N}{4}} \left[1 - 24 \left(\frac{n}{N} \right)^2 + 48 \left(\frac{n}{N} \right)^3 \right] e^{-j\omega n} + \sum_{n=\frac{N}{4}+1}^{\frac{N}{2}-1} 2 \left[1 + \frac{2n}{N} \right]^3 e^{-j\omega n} \quad (4.14)$$

Se muestra en la figura 4.9 la representación de la ventana de Parzen para $N = 25$, la cual tiene una forma similar a la ventana gaussiana de α igual a 3,5.

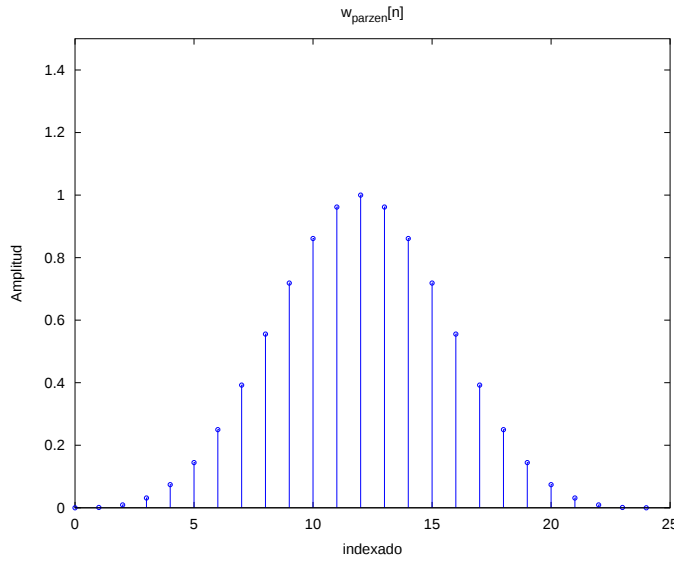


Figura 4.9: Ventana Parzen para $N = 25$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

En la figura 4.10 se muestran la DTFT de la ventana de Parzen, $W_{parz}(e^{j\omega})$, y la ventana obtenida de la convolución de cuatro ventanas rectangulares de $N/4$, $W_{conv}(e^{j\omega})$.

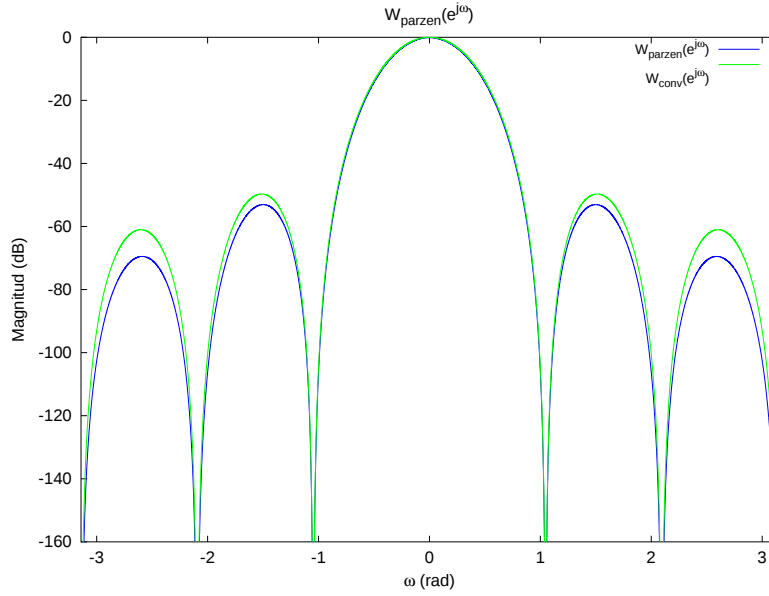


Figura 4.10: DTFT de la ventana de Parzen y DTFT de la ventana resultante de la convolución de 4 ventanas rectangulares.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

Al graficar y comparar ambas DTFT se observa en el espectro de magnitud, que la posición de los nulos coinciden para las dos ventanas, sin embargo, el decrecimiento de los lóbulos secundarios es mayor en la ventana de Parzen que en la resultante de la convolución. Esta discrepancia se debe a que la convolución descrita en la ecuación 4.13 es de longitud $N - 3$, mientras que la ventana definida por la ecuación 4.12 es de longitud N , por lo tanto, esta diferencia de muestras altera el contenido espectral.

4.1.6. Ventana Exponencial

La ventana exponencial o Poisson, es una familia de ventanas definidas por dos exponenciales decrecientes de la forma

$$w_{exp}[n] = \begin{cases} \exp\left(-\alpha \frac{2|n-\frac{N}{2}|}{N}\right) & , n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & resto \end{cases} \quad (4.15)$$

$$W_{exp}(e^{j\omega}) = e^{\frac{-\alpha - j\omega(N-1)}{2}} \left\{ e^{\left(-\frac{\alpha}{N} + j\frac{N\omega}{4}\right)} \frac{\sinh\left(-\frac{\alpha}{2} + j\frac{N\omega}{4}\right)}{\sinh\left(-\frac{\alpha}{N} + j\frac{\omega}{2}\right)} + e^{\left(\frac{\alpha}{N} - j\frac{N\omega}{4}\right)} \frac{\sinh\left(\frac{\alpha}{2} + j\frac{N\omega}{4}\right)}{\sinh\left(\frac{\alpha}{N} + j\frac{\omega}{2}\right)} \right\} \quad (N \text{ par}) \quad (4.16)$$

$$W_{exp}(e^{j\omega}) = e^{\frac{-2\alpha - j\omega(N-1)}{4}} \left\{ e^{\left[-\frac{\alpha}{N-1} + j\frac{\omega}{2}\right]} \frac{\sinh\left(-\frac{\alpha}{2} + j\frac{(N-1)\omega}{4}\right)}{\sinh\left(-\frac{\alpha}{N-1} + j\frac{\omega}{2}\right)} + e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}} \frac{\sinh\left[(N+1)\left[\frac{\alpha}{2(N-1)} + j\frac{\omega}{4}\right]\right]}{\sinh\left(\frac{\alpha}{N-1} + j\frac{\omega}{2}\right)} \right\} \quad (N \text{ impar}) \quad (4.17)$$

donde α es la constante de tiempo que parametriza esta familia de curvas.

En las figuras 4.11, 4.12 y 4.13 se muestran las ventanas de exponencial de 25 muestras para $\alpha = 2$, $\alpha = 3$ y $\alpha = 4$ y la DTFT en el rango fundamental. De este conjunto de figuras se observa que al aumentar el valor de α , se incrementa el ancho de banda de todos los lóbulos (principal y laterales) y decrece el nivel de los lóbulos laterales, lo que produce un solapamiento y combinación de dichos lóbulos con el lóbulo principal.

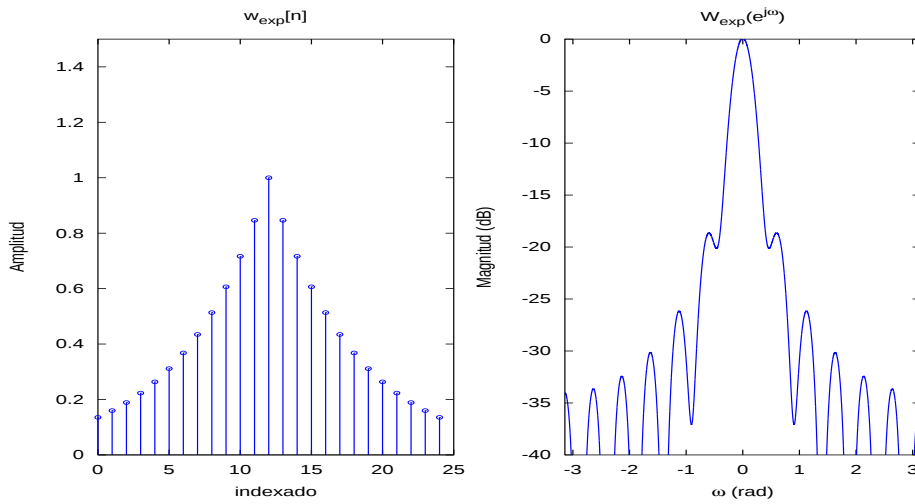


Figura 4.11: Ventana Exponencial y DTFT de dicha ventana para $\alpha = 2$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

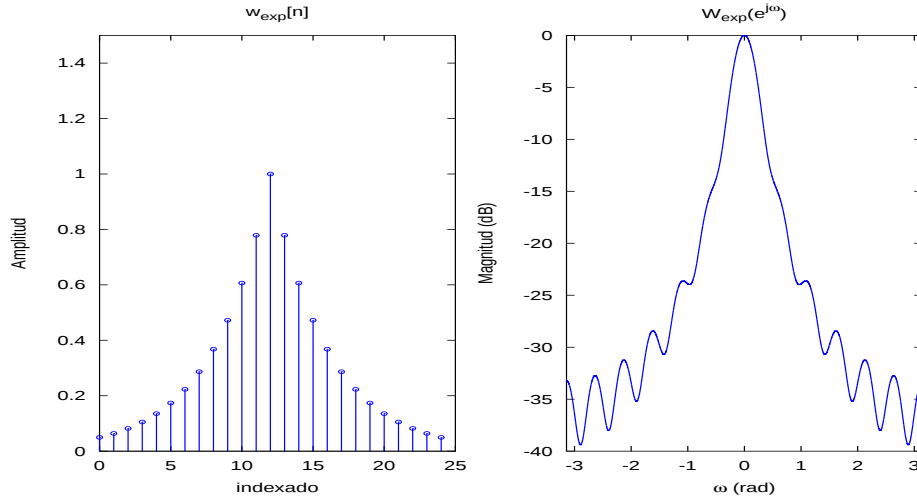


Figura 4.12: Ventana Exponencial y DTFT de dicha ventana para $\alpha = 3$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

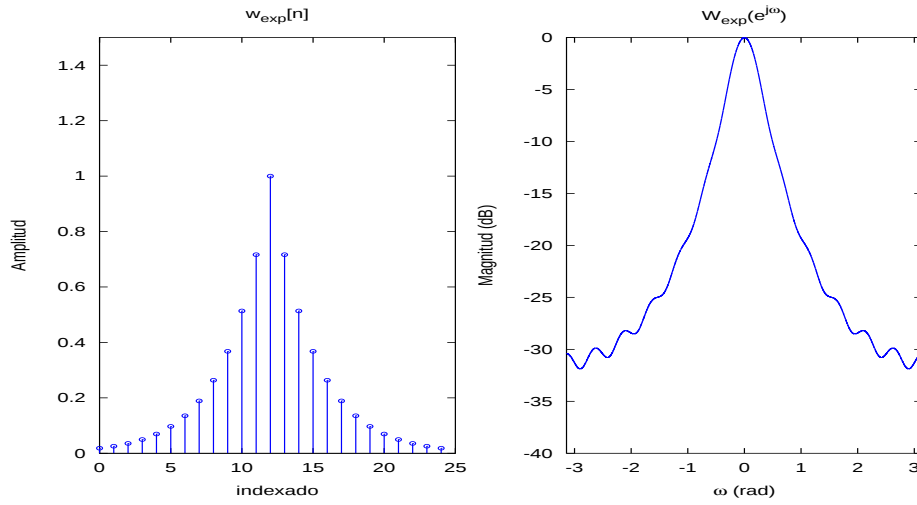


Figura 4.13: Ventana Exponencial y DTFT de dicha ventana para $\alpha = 4$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

4.1.7. Ventana de Kaiser

La ventana de Kaiser es una función parametrizada en términos de la función de Bessel modificada de primera especie de orden cero (I_0). Esta función para una duración de tiempo, maximiza la energía en un ancho de banda, permitiendo

variar las características de la Transformada de Fourier de dicha ventana, a través del parámetro α (Harris, 1978). La ventana de Kaiser se describe como

$$w_{ka}[n] = \begin{cases} \frac{I_0\left[\alpha\pi\sqrt{1-\left(\frac{2n}{N}-1\right)^2}\right]}{I_0(\alpha\pi)} & , n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & , resto \end{cases} \quad (4.18)$$

donde $I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{k!}\right)^2$.

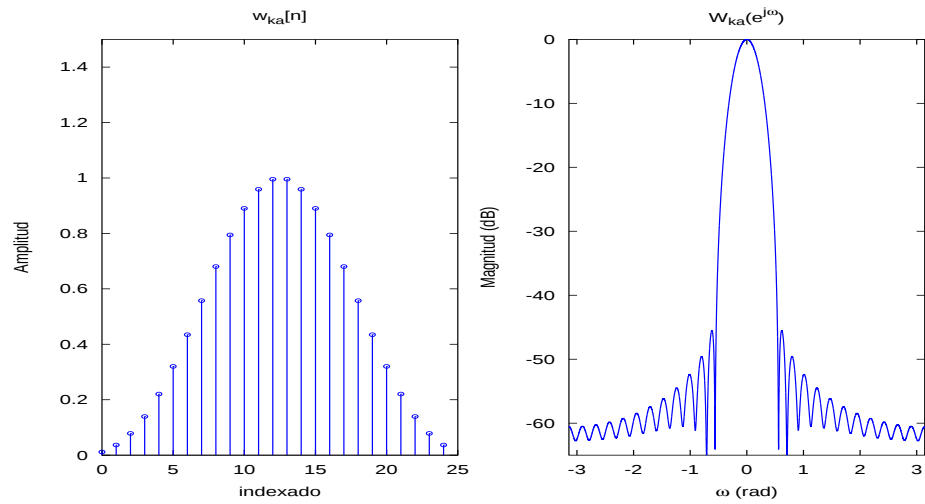
La DTFT de esta ventana, $W_{ka}(e^{j\omega})$, viene expresada por

$$W_{ka}(e^{j\omega}) = \frac{N}{I_0(\alpha\pi)} \frac{\sinh\left[\sqrt{(\alpha\pi)^2 - \left(\frac{N\omega}{2}\right)^2}\right]}{\sqrt{(\alpha\pi)^2 - \left(\frac{N\omega}{2}\right)^2}} \quad (4.19)$$

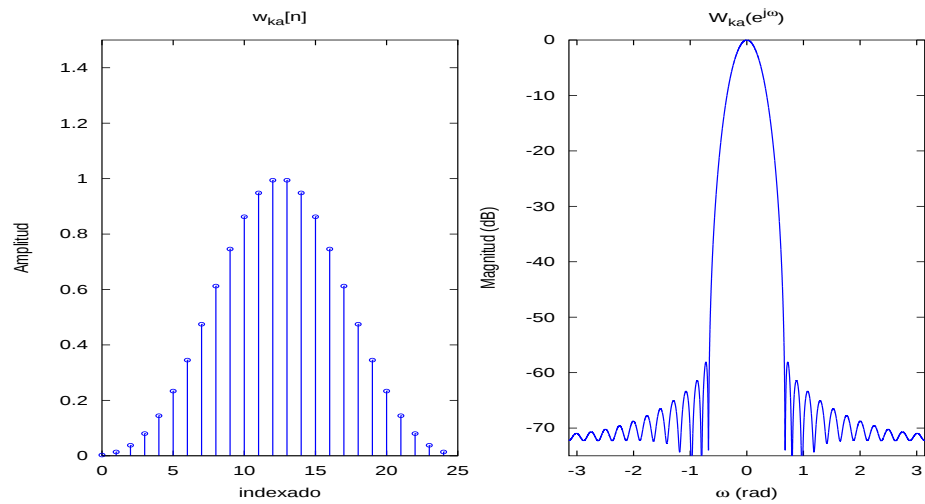
En la figura 4.14 se muestran la ventana $w_{ka}[n]$ de 25 muestras y la DTFT de dicha ventana en el rango fundamental para $\alpha = 2$, $\alpha = 2,5$ y $\alpha = 3$, donde se observa que el incremento de α , aumenta el ancho de banda del lóbulo principal y disminuye el nivel de los lóbulos laterales.

4.1.8. Ventana de Blackman

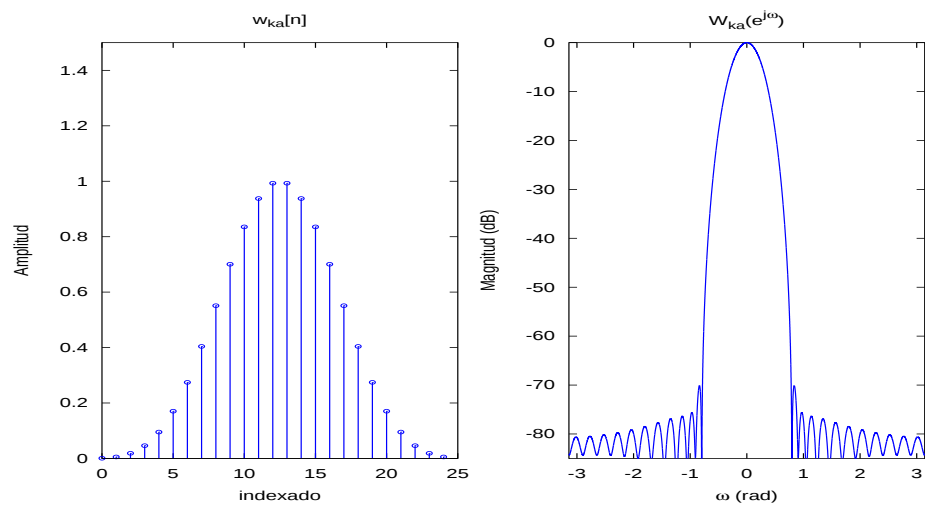
La ventana de Blackman proviene de una suma de cosenos relacionados armónicamente y escalados por los coeficientes a_m y luego sumados, estos es, $w[n] = \sum_{m=0}^M a_m \cos\left(\frac{2\pi m}{N}n\right)$. Se debe señalar que estos coeficiente a_m deben satisfacer la condición $\sum_{m=0}^M a_m = 1$. Por lo tanto, para $M = 3$ y nulos de la DTFT ubicados en $\theta = \frac{7\pi}{N}$ y $\theta = \frac{9\pi}{N}$, se obtiene $a_1 = \frac{7938}{18608}$, $a_2 = \frac{9240}{18608}$ y $a_3 = \frac{1430}{18608}$. Debido a que estos coeficientes son números fraccionarios, la exactitud dependerá de la cantidad de decimales tomados para cada coeficiente. Por lo tanto, existen dos expresiones para esta ventana, ya que al utilizar los coeficientes “exactos”, dicha ventana se conoce como la ventana de Blackman exacta y es descrita por la expresión



(a) $\alpha = 2$



(b) $\alpha = 2, 5$



(c) $\alpha = 2, 5$

Figura 4.14: Ventana de Kaiser y DTFT de dicha ventana

Fuente: Carlos Mejías, 2013

$$w_{black_{ex}}[n] = \begin{cases} \frac{7938}{18608} + \frac{9240}{18608} \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + \frac{1430}{18608} \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) & , n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & , resto \end{cases} \quad (4.20)$$

y la DTFT de dicha ventana viene dada por la siguiente expresión

$$W_{black_{ex}}(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}} \left\{ \frac{715}{18608} e^{j\frac{2\pi}{N} \frac{\sin(\frac{N\omega}{2} + 2\pi)}{\sin(\frac{\omega}{2} + \frac{2\pi}{N})}} + \frac{4620}{18608} e^{j\frac{\pi}{N} \frac{\sin(\frac{N\omega}{2} + \pi)}{\sin(\frac{\omega}{2} + \frac{\pi}{N})}} + \frac{7938}{18608} \frac{\sin(\frac{N\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right. \\ \left. + \frac{4620}{18608} e^{-j\frac{\pi}{N} \frac{\sin(\frac{N\omega}{2} - \pi)}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{N})}} + \frac{715}{18608} e^{j\frac{2\pi}{N} \frac{\sin(\frac{N\omega}{2} - 2\pi)}{\sin(\frac{\omega}{2} - \frac{2\pi}{N})}} \right\} \quad (4.21)$$

En la figura 4.15 se muestran la ventana de Blackman exacta para $N = 25$ y la DTFT en el rango fundamental.

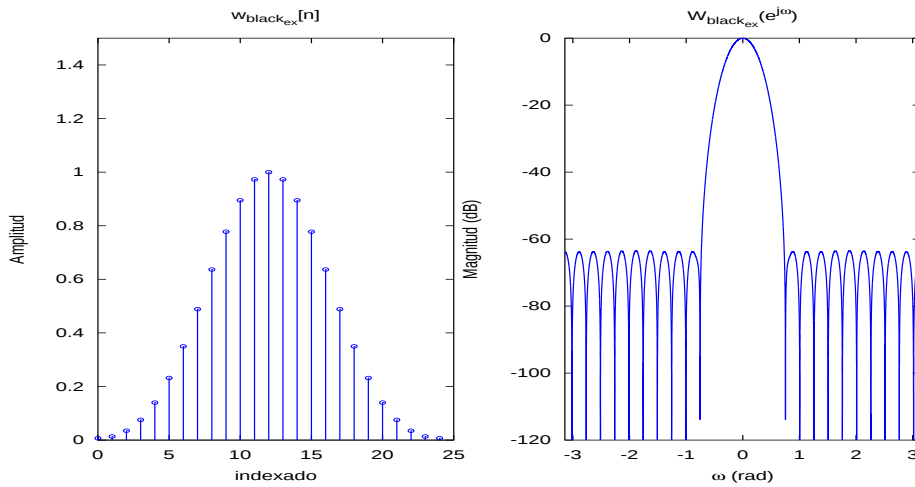


Figura 4.15: Ventana de Blackman exacta y DTFT de dicha ventana .

Fuente: Carlos Mejías, 2013

Por otro lado, la expresión con coeficientes aproximados es la que suele referirse como la ventana de Blackman y viene dada por la expresión

$$w_{black}[n] = \begin{cases} 0,42 + 0,50 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) & , n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & , resto \end{cases} \quad (4.22)$$

y la expresión que describe la DTFT de dicha ventana es

$$W_{black}(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{(N-1)\omega}{2}} \left\{ 0,04e^{j\frac{2\pi}{N}\frac{\sin(\frac{N\omega}{2}+2\pi)}{\sin(\frac{\omega}{2}+\frac{2\pi}{N})}} + 0,25e^{j\frac{\pi}{N}\frac{\sin(\frac{N\omega}{2}+\pi)}{\sin(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{N})}} + 0,42\frac{\sin(\frac{N\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right. \\ \left. + 0,25e^{-j\frac{\pi}{N}\frac{\sin(\frac{N\omega}{2}-\pi)}{\sin(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N})}} + 0,04e^{j\frac{2\pi}{N}\frac{\sin(\frac{N\omega}{2}-2\pi)}{\sin(\frac{\omega}{2}-\frac{2\pi}{N})}} \right\} \quad (4.23)$$

Se muestran en la figura 4.16 la ventana de Blackman con coeficientes aproximados para una longitud de 25 muestras y la DTFT correspondiente en el periodo fundamental.

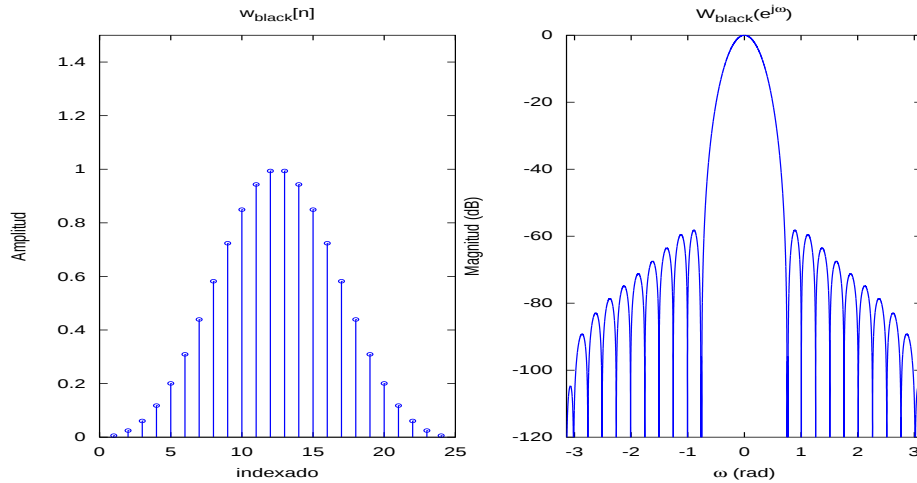


Figura 4.16: Ventana de Blackman y DTFT de dicha ventana .

Fuente: Carlos Mejías, 2013

Al comparar la figura 4.15 y 4.16 se observa que la ventana de Blackman tiene un mayor decrecimiento de lóbulos laterales respecto de la ventana de Blackman exacta a expensa de un incremento del ancho de banda del lóbulo principal.

4.2. Interpretación de la distorsión temporal y frecuencial causada por el enventanado de señales digitales

Para determinar el contenido espectral de una señal digital $x[n]$, se utiliza la Transformada de Fourier en Tiempo Discreto (DTFT) para caracterizar dicha señal en el dominio de la frecuencia, esto es,

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad (4.24)$$

donde $X(e^{j\omega})$ es la DTFT de $x[n]$. Sin embargo, esta transformada solamente puede determinarse si se conoce la señal digital en el intervalo de $(-\infty, +\infty)$. Por consiguiente, si el estudio se limita a una cantidad finita de N muestras, como es el caso del procesamiento en tiempo real, se obtiene que

$$\hat{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n} \quad (4.25)$$

siendo $\hat{X}(e^{j\omega})$ una representación aproximada de $X(e^{j\omega})$, existe diferencia entre ambos espectros, debido a la distorsión provocada por la segmentación de la señal a N muestras. Cabe señalar que la DTFT no es posible implementarla computacionalmente, debido a que $X(e^{j\omega})$ es una función continua de ω . Por lo tanto, si se toman N muestras de $X(e^{j\omega})$, se define la Transformada Discreta de Fourier (DFT) de N puntos. De ahí que la DFT de la señal enventanada temporalmente, $x_w[n]$, es igual a

$$X_w(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_w[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.26)$$

Ahora bien, para analizar el enventanado temporal de la señal, se define $x_w[n]$ como el producto de la señal $x[n]$ por una función matemática $w[n]$, donde

$w[n] = 0 \quad \forall n \geq N$. En este sentido, la DTFT de esta señal aperiódica viene dada por la expresión

$$X_w(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot w[n] e^{-j\omega n} \quad (4.27)$$

Conviene señalar que $\hat{X}(e^{j\omega})$ es un caso particular de $X_w(e^{j\omega})$ cuando se utiliza la ventana rectangular, $w[n] = 1 \quad \forall n = 0, 1, \dots, N-1$. Teniendo en cuenta que la multiplicación temporal de dos señales equivale, en el dominio de la frecuencia, a una convolución de la DTFT de cada señal, entonces,

$$X_w(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (4.28)$$

donde $X(e^{j\omega})$ y $W(e^{j\omega})$ corresponden con la DTFT de $x[n]$ y $w[n]$ respectivamente.

De acuerdo a lo antes planteado, al considerar $x[n] = e^{j\omega_1 n}$, resulta $X(e^{j\omega}) = 2\pi\delta(\omega - \omega_1)$, sin embargo, cuando se realiza la misma operación para $x_w[n]$, la DTFT es igual a $X_w(e^{j\omega}) = W(e^{j(\omega-\omega_1)})$. Al comparar ambas expresiones se puede afirmar que $X_w(e^{j\omega}) \neq X(e^{j\omega})$. Por lo tanto, al inventanar temporalmente una señal digital, se produce un “derrame” de las componentes espectrales que distorsiona el espectro de la señal $x[n]$.

Para comprender cómo este derrame afecta el análisis espectral, se descompone a $W(e^{j\omega})$ como

$$W(e^{j\omega}) = W_{LP}(e^{j\omega}) + W_{LS}(e^{j\omega}) \quad (4.29)$$

siendo $W_{LP}(e^{j\omega})$ y $W_{LS}(e^{j\omega})$ el contenido espectral del lóbulo principal y lóbulos secundarios respectivamente, esto es

$$W_{LP}(e^{j\omega}) = \begin{cases} W(e^{j\omega}) & , \omega \leq \omega_{1^{er} nulo} \\ 0 & resto \end{cases} \quad (4.30)$$

$$W_{LS}(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) - W_{LP}(e^{j\omega}) \quad (4.31)$$

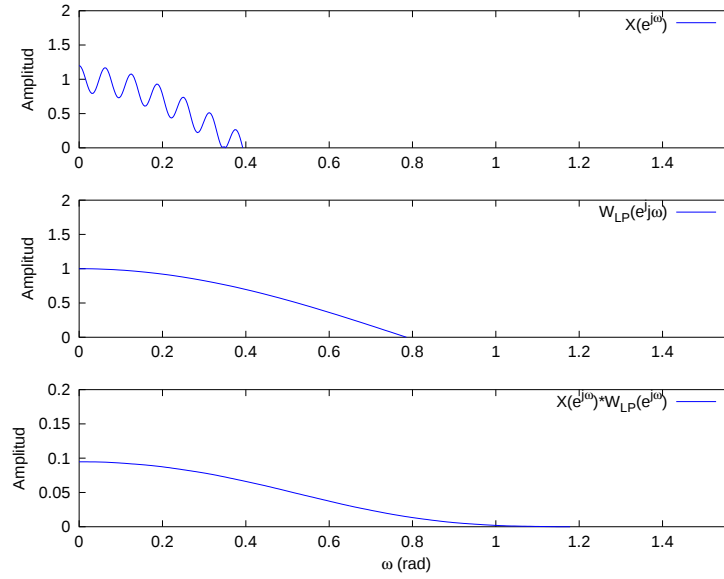
Por lo tanto, al sustituir (4.29) en (4.28), se obtiene que

$$X_w(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) * W_{LP}(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega}) * W_{LS}(e^{j\omega}) \quad (4.32)$$

De esta expresión, se puede decir que la convolución $X(e^{j\omega}) * W_{LP}(e^{j\omega})$ produce un ensanchamiento del espectro debido al ancho de banda del lóbulo principal, lo que genera problemas en la detección de tonos con frecuencias similares, ya que quedarán enmascarados por el lóbulo principal. Por otro lado, como la convolución es un promedio móvil ponderado respecto de ω , entonces, el rizado presente en $X(e^{j\omega})$ se suaviza, ya que el efecto es el mismo de un filtro pasa bajo.

En este sentido, mientras mayor sea el ancho de banda de lóbulo principal, mayor es la cantidad de componentes espectrales que son promediadas, ocasionando una disminución del rizado, y en consecuencia, un espectro más suavizado, con mayor derrame de potencia, y con pocas oscilaciones en el espectro de potencia, lo que agudiza la detección e identificación de tonos. Para ilustrar mejor la distorsión provocada por el lóbulo principal, se muestra en la figura 4.17 la convolución entre $X(e^{j\omega})$ con cierto rizado y el lóbulo principal representado por $W_{LP}(e^{j\omega})$.

Se observa en la figura 4.17 que el rizado presente en $X(e^{j\omega})$ desaparece al realizar la convolución $X(e^{j\omega}) * W_{LP}(e^{j\omega})$. Además, se observa que el ancho de banda de $X(e^{j\omega})$ aumenta y la amplitud disminuye debido al derrame que produce dicha convolución espectral, entre la señal $X(e^{j\omega})$ y el lóbulo principal $W_{LP}(e^{j\omega})$, lo que dificulta la detección de tonos con frecuencias similares.

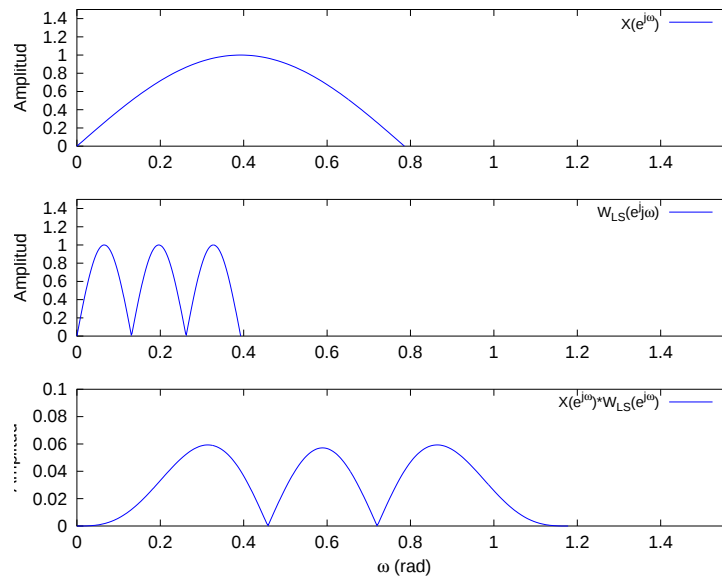
**Figura 4.17:** Distorsión generada por el lóbulo principal

Fuente: Carlos Mejías, 2013

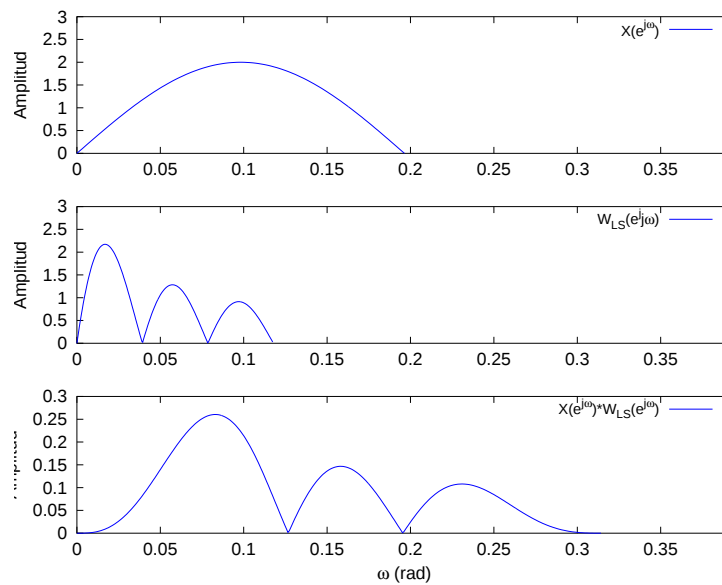
Ahora bien, al analizar el efecto de la convolución entre la señal $X(e^{j\omega})$ y los lóbulos secundarios de la ventana $W_{LS}(e^{j\omega})$ en la figura 4.18(a), se observó que el espectro de esta convolución presenta el derrame de potencia, lo que implica una distorsión del espectro de $X(e^{j\omega})$ que sugiere falsas componentes espectrales.

Hay que mencionar, además, que el decrecimiento asintótico de estos lóbulos secundarios influye en la distorsión espectral mencionada anteriormente, ya que mientras mayor sea el decrecimiento, menor es el aporte de dichos lóbulos en las frecuencias vecinas, por consiguiente, un menor número de lóbulos presentes en $X(e^{j\omega}) * W_{LS}(e^{j\omega})$ producto de la distorsión ocasionada por dicha convolución, siendo este resultado engañoso ya que se puede inferir la presencia de tonos que realmente no existen, lo que influye en la caracterización del contenido espectral de la señal. Este efecto puede observarse en la figura 4.18(b).

En relación al ancho de banda de los lóbulos laterales $W_{LS}(e^{j\omega})$, se puede mencionar que mientras menor sea el ancho de banda de estos lóbulos, menor será la amplitud de los lóbulos resultante de la convolución de $X(e^{j\omega}) * W_{LS}(e^{j\omega})$.



(a) Lóbulos laterales de igual magnitud



(b) Lóbulos laterales decrecientes

Figura 4.18: Distorsión generada por los lóbulos laterales

Fuente: Carlos Mejías, 2013

Por otra parte, si los lóbulos laterales decrecen asintóticamente con mayor rapidez, el rizado tiene menos oscilaciones con un mayor decrecimiento, lo que mejora el análisis espectral, debido a la poca influencia de los lóbulos laterales sobre el espectro de la señal.

Para comprender la influencia del decrecimiento de los lóbulos, se analizó el problema desde el punto de vista de la DFT de N puntos de $x_w[n]$, mostrada en la ecuación (4.26). Teniendo en cuenta que la DFT puede interpretarse como un banco de filtros pasa banda, fijados a frecuencias de resonancia $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$, entonces, los lóbulos laterales se superponen en cada frecuencia, siendo las componentes espectrales de frecuencias vecinas a ω_k las más afectadas. No obstante, las componentes espectrales más alejadas también pueden verse afectadas dependiendo del decrecimiento asintótico de los lóbulos laterales. Por consiguiente, mientras mayor sea el decrecimiento asintótico menor es la distorsión sobre otras componentes espectrales, aumentando de esta forma, la detección de tonos de poca potencia.

Por otro lado, si se considera que la DFT de N puntos es una transformación lineal, que utiliza una base ortogonal formada por N exponenciales complejas de la forma $e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$, entonces, $X_w(k)$ representa la proyección de $x[n]$ sobre la exponencial $e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$. En este sentido, si la señal es de un tono frecuencia $\omega_1 = \frac{2\pi}{N}$, solamente existirá la proyección sobre $e^{j\omega_1 n}$, cuyo resultado es $X_w(k) = N\delta(k - 1)$. Sin embargo, este resultado cambia cuando la frecuencia del tono no pertenece a la base ortogonal, por lo tanto, las proyecciones sobre la base ortogonal serán diferentes de cero, lo que implica una disminución de potencia para la componente espectral en $k = 1$, produciendo derrame de potencia y ensanchamiento del espectro.

De lo planteado anteriormente, se observa que el derrame espectral depende directamente de la longitud de la secuencia $x[n]$ y las características de $W(e^{j\omega})$.

4.3. Indicadores Espectrales de las ventanas para el análisis del efecto frecuencial.

4.3.1. Nivel Máximo de Lóbulo Lateral (NPLL)

Es la relación (en dB) que existe entre el valor pico máximo presente en los lóbulos laterales y el pico del lóbulo principal ([Harris, 1978](#)), es decir,

$$NPLL = 20 \log \left| \frac{W(e^{jw_{pk}})}{W(e^{j0})} \right| (dB) \quad (4.33)$$

siendo w_{pk} la frecuencia del máximo lóbulo lateral.

4.3.2. Decrecimiento Asintótico de Lóbulos Laterales (DALL)

Es una medida que indica el decrecimiento asintótico de los lóbulos laterales, en vista de que este comportamiento se relaciona directamente con la continuidad de la ventana y las derivadas de dicha función. Por lo tanto, si la ventana $w[n]$ es una función acotada y las derivadas hasta el orden “ n ” existen y también son acotadas en el intervalo de $(-\infty, +\infty)$, la Transformada de Fourier tiende a cero asintóticamente a $\frac{1}{\omega^{n+1}}$ a medida que $|\omega| \rightarrow \infty$ ([Harris, 1978](#)). En otras palabras, el decrecimiento de lóbulos laterales viene dado por

$$DALL = 20(n+1)[1 - \log(5)] (dB/oct) \quad (4.34)$$

donde “ n ” representa el orden de la derivada de $w[n]$ que es discontinua.

4.3.3. Ganancia Coherente (GC)

Este parámetro corresponde con la ganancia que presenta la amplitud estimada de una exponencial compleja (sin ruido) al ser enventanada con $w[n]$ ([Harris, 1978](#)), esto es,

$$GC = \sum_{n=0}^{N-1} w[n] = |W(e^{j0})| \quad (4.35)$$

siendo $|W(e^{j0})|$ ganancia pico de la ventana, es decir, la magnitud del espectro de dicha ventana para $\omega = 0$.

4.3.4. Ancho de Banda Equivalente de Ruido (ABER)

El ancho de banda equivalente de ruido es la relación normalizada que existe entre la potencia del ruido blanco enventanado con $w[n]$ y la densidad de potencia pico que presenta dicha ventana (Harris, 1978), esto es,

$$ABER = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} w^2[n]}{\left[\sum_{n=0}^{N-1} w[n] \right]^2} \quad (4.36)$$

Siendo $\sum_{n=0}^{N-1} w^2[n]$ la normalización de la potencia de ruido acumulada por la ventana y $\left[\sum_{n=0}^{N-1} w[n] \right]^2 = |W(e^{j0})|^2$ la densidad de potencia pico de la ventana.

En este sentido, el ABER representa el ancho de banda de un filtro pasa-bajas ideal que tiene una amplitud igual al valor pico de la densidad espectral de la ventana $w[n]$, donde dicho filtro acumula la misma potencia de ruido que $w[n]$, es decir, este parámetro estima la cantidad de ruido acumulada por la ventana. Por lo tanto, para minimizar problemas de detección de tonos de baja potencia en presencia de ruido, se debe utilizar ventanas con el menor ABER posible para que dichos tonos no queden enmascarados por el ruido acumulado.

4.3.5. Ancho de Banda del Lóbulo Principal (ABLP)

Es la separación mínima en frecuencia que deben estar separadas dos componentes espectrales de igual magnitud para que se puedan detectar como dos

tonos diferentes. En este sentido, como la DFT es un banco de filtros, el concepto de ancho de banda de 3dB no es suficiente para la resolución de estas componentes debido a contribución de cada filtro ajustado a cada frecuencia de la base ortogonal. Por consiguiente, se utiliza el ancho de banda de 6 dB, el cual permite discernir las dos componentes como dos picos separados ([Harris, 1978](#)) .

Cabe señalar que al analizar este parámetro y considerando que la DFT es un banco de filtro, se observó en la DFT de dos tonos separados en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 3 dB y 6 dB, presentaba un pico adicional en la zona de solapamiento de los lóbulos centrados en cada tono. Mediante la variación del factor de forma del lóbulo principal se determinó que para evitar este tipo de distorsión, el cociente entre el ancho de banda de 3 dB y el ancho de banda de 6 dB, debe ser menor a 73 %, esto es

$$R = \frac{ABLP_{3dB}}{ABLP_{6dB}} < 0,73 \quad (4.37)$$

En las figuras [4.19](#), [4.20](#) y [4.21](#), se muestra la distorsión mencionada anteriormente para diferentes valores de R , considerando sólo el efecto del lóbulo principal para dos componentes espectrales separadas en frecuencia a una distancia equivalente al ancho de banda de 3 dB y al ancho de banda de 6 dB.

De estos resultados se puede afirmar que para valores de cociente $R > 0,73$ (en la zona de solapamiento de los lóbulos principales) se genera un pico adicional, lo que trae como consecuencia, una estimación incorrecta del contenido espectral de la señal, sin embargo, cuando el valor de R es menor a 0,73 dicha distorsión no aparece. Se debe agregar que a medida que el valor de R es menor, se evidencia más la presencia de los dos tonos separados al ancho de banda de 6 dB, lo que implica una mayor resolución en frecuencia de la ventana.

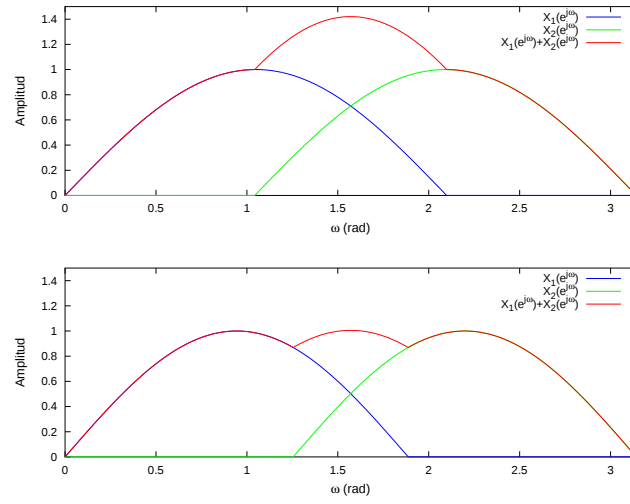


Figura 4.19: Componentes espectrales separadas al ancho de banda de 3 dB (arriba) y 6 dB (abajo) con $R = 0, 75$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

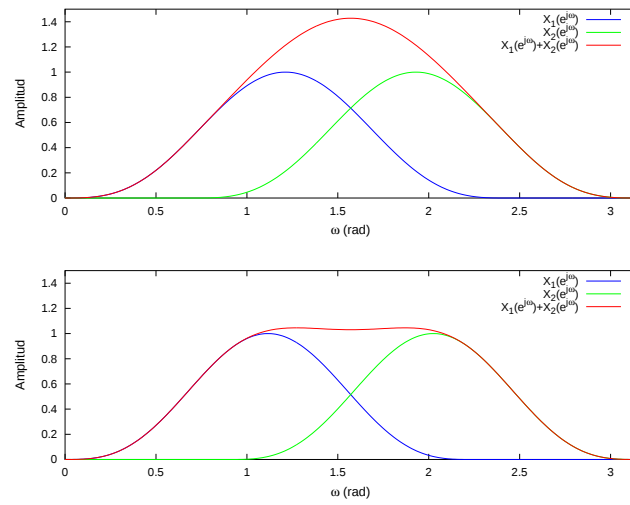


Figura 4.20: Componentes espectrales separadas al ancho de banda de 3 dB (arriba) y 6 dB (abajo) con $R = 0, 72099$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

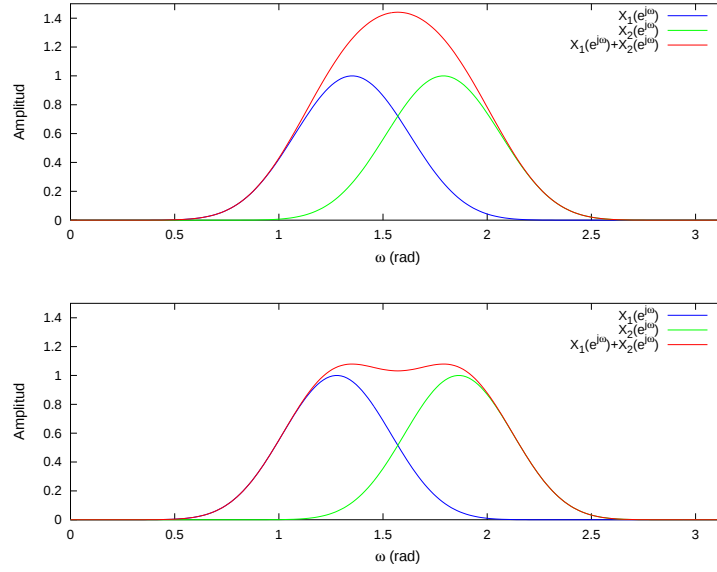


Figura 4.21: Resolución de componentes espectrales separadas al ancho de banda de 3 dB (arriba) y 6 dB (abajo) con $R = 0,71122$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

4.3.6. Pérdidas por Rizado (PR)

Es una medición de la resolución en frecuencia de la ventana para detectar componentes de baja potencia. En este caso, se considera una exponencial compleja que no pertenece a la base ortogonal y con frecuencia entre dos Bins, es decir, $w_{1/2}$. Desde el punto de vista de que la DFT se comporta como un banco de filtros, entonces

$$PR = \left| \frac{W(1/2)}{W(0)} \right| \quad (4.38)$$

donde $W(0) = GC$ y $W(1/2) = \sum_{n=0}^{N-1} w[n] e^{-j\frac{\pi}{N}n}$.

4.3.7. Pérdidas por Procesamiento del Peor Caso (PP_{PC})

Esta medida indica el mínimo valor que puede detectarse cuando una señal se encuentra contaminada con ruido, es decir, al enventanar temporalmente, la relación señal-ruido (S_o/N_0) se reduce debido a que el ABER es mayor a uno. Por otro lado, si se considera que el tono se encuentra en una frecuencia entre dos Bins, se ha de considerar las pérdidas por rizado, por lo tanto, el caso con más pérdidas incluye las pérdidas por el enventanado y las pérdidas por rizado, esto es

$$PP_{PC} = 10 \log (ABER) + 10 \log (PR) \quad (4.39)$$

En la tabla 4.1 se muestran los indicadores espectrales para cada una de estas ventanas.

Cuadro 4.1: Indicadores Espectrales para las ventanas comúnmente utilizadas

Ventana	NPLL (dB)	DALL (dB/oct)	GC	ABER (BINS)	$ABLP_{3dB}$ (BINS)	$ABLP_{6dB}$ (BINS)	PR (dB)	PP _{PC} (dB)	R
Rectangular	-13	-6	1,00	1,00	0,89	1,21	3,922	3,922	0,7355
Hann	-31,47	-18	0,50	1,50	1,44	2,00	1,423	3,184	0,72
Hamming	-43	-6	0,54	1,36	1,30	1,82	1,751	3,095	0,7142
Parzen	-53	-24	0,375	1,92	1,85	2,59	0,897	3,725	0,7142
Gaussian	$\alpha = 2, 5$	-42	0,495	1,45	1,39	1,94	1,580	3,181	0,7165
	$\alpha = 3, 0$	-55	0,417	1,70	1,63	2,28	1,163	3,472	0,7149
	$\alpha = 3, 5$	-69	0,358	1,98	1,89	2,66	0,870	3,829	0,7105
Exponencial	$\alpha = 2$	-19	0,432	1,31	1,22	1,71	2,032	3,216	0,7134
	$\alpha = 3$	-21	0,317	1,66	1,46	2,11	1,437	3,631	0,6919
	$\alpha = 4$	-31	0,245	2,08	1,77	2,62	1,022	4,192	0,6755
Kaiser	$\alpha = 2, 0$	-46	0,489	1,50	1,43	1,99	1,450	3,204	0,7185
	$\alpha = 2, 5$	-57	0,439	1,65	1,57	2,20	1,198	3,382	0,7136
	$\alpha = 3, 0$	-69	0,402	1,80	1,71	2,39	1,020	3,566	0,7154
	$\alpha = 3, 5$	-82	0,373	1,93	1,83	2,57	0,888	3,745	0,7120
Blackman	-58,11	-18	0,42	1,73	1,64	2,30	1,098	3,471	0,7130
Blackman Exacta	-68,24	-6	0,427	1,69	1,63	2,28	1,150	3,438	0,7149

Fuente: [Harris, 1978](#); [Mejías, 2013](#); [Nuttall, 1981](#)

4.4. Enventanado temporal en diferentes tipos señales para la identificación de los efectos frecuenciales

4.4.1. Señales sinusoidales con diferentes frecuencias de la base ortogonal de la DFT.

Para analizar los efectos frecuenciales del enventanado, se utilizó la señal $x[n] = A \sin(\omega_1 n)$ y se estimó la amplitud y la frecuencia de la señal, considerando que la longitud de la ventana es de N muestras. En el primer caso, $A = 10$, $\omega_A = \frac{20,5\pi}{N}$ y se varió la longitud de cada ventana para $N = 32, 64, 128$ y 256 muestras. La estimación de dichos parámetros se muestra en la tabla 4.2, en la cual la ventana de Kaiser con $\alpha = 3,5$ presenta el menor error en la estimación de la amplitud en la señal sinusoidal para ventanas con longitudes menores a 64 muestras; sin embargo, a medida que se aumenta esta longitud, se manifiesta un comportamiento diferente ya que la ventana gaussiana de $\alpha = 3,5$ comienza a estimar con menor error la amplitud. Se debe agregar que para los diferentes valores de N , la ventana de Kaiser con $\alpha = 3,5$, la ventana gaussiana con $\alpha = 3,5$ y la ventana de Parzen permitieron estimar la amplitud con error menor al 2,5 %. El resto de las ventanas genera errores en la estimación de amplitud hasta del 12 %. Cabe señalar que en la estimación frecuencial, todas las ventanas generaron el mismo error.

Para el siguiente caso, se ajustó la frecuencia $\omega_A = \frac{20,2\pi}{N}$ y nuevamente se varió la longitud de cada ventana, con la finalidad de examinar el comportamiento de las pérdidas por rizado presentes en el experimento anterior. Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 4.3, en la que se observa el mismo comportamiento de las ventanas para la estimación espectral, es decir, las ventanas con menor error en la estimación son: la ventana de Kaiser con $\alpha = 3,5$, la ventana gaussiana con $\alpha = 3,5$ y la ventana de Parzen. De igual manera, al aumentar la cantidad de muestras, la ventana gaussiana con $\alpha = 3,5$ genera el menor error en la estimación de amplitud. Hay que mencionar, además que el error de estimación es menor al primer caso ya que cuando ω_A es igual a $\frac{20,5\pi}{N}$,

la frecuencia se encuentra a la mitad de dos puntos de la DFT, lo cual produce la mayor pérdida por rizado y en consecuencia, un mayor error de estimación de amplitud.

Seguidamente, se fijó la frecuencia ω_A en $\frac{10,1\pi}{16}$ y se varió la longitud de cada ventana para 32, 64, 128, 256 y 512 muestras. En este caso, los resultados de la tabla 4.4 muestran que la ventana exponencial de $\alpha = 4$ tuvo el menor error de estimación en la amplitud cuando era de 128 muestras; sin embargo, para el resto de las longitudes, el comportamiento fue el mismo al de casos anteriores, donde las ventanas con menor estimación eran la ventana de Kaiser con $\alpha = 3,5$, la ventana gaussiana con $\alpha = 3,5$ y la ventana de Parzen.

Al analizar los parámetros espectrales en los diferentes casos, se identificó una correlación aproximada de $-0,99$ entre el error en la estimación de amplitud y las Pérdidas por rizado (PR), es decir, a medida que el valor de PR es menor, el error de estimación de amplitud también lo será, es por ello que la ventana de Kaiser con $\alpha = 3,5$, la ventana gaussiana con $\alpha = 3,5$ y la ventana de Parzen siempre permitían obtener el menor error en la estimación. No obstante, al incrementar la cantidad de muestras de la ventana, la Ganancia Coherente (GC) tiene mayor influencia, es decir, las ventanas con menor error de estimación tiene una GC cercana a $0,35$, por lo tanto, a medida que sean mayores las pérdidas por rizado y la GC se aleje de $0,35$, entonces, el error estimado será mayor. En este sentido, se observó que las ventanas con mayor de estimación espectral son: la rectangular, la de Hamming y la exponencial con $\alpha = 2$.

4.4.2. Señales exponenciales complejas con frecuencias diferentes a la base ortogonal de la DFT separadas al $ABLP_{6dB}$ de cada ventana.

En este experimento se analizó la resolución frecuencial de manera visual mediante la DTFT, y luego considerando los valores obtenidos en la estimación de amplitud y frecuencia de cada exponencial compleja para diferentes longitudes N . Para ello, se utilizó la señal $x[n] = Ae^{j\omega_A n} + Be^{j\omega_B n}$, siendo $A = 10$,

Cuadro 4.2: Estimación de amplitud y frecuencia para la señal sinusoidal con frecuencia $\omega_A = \frac{20,5\pi}{N}$ para diferentes valores de N .

	Longitud de la ventana (N)								
	32		64		128		256		
Ventana	A	ω_A	A	ω_A	A	ω_A	A	ω_A	
Rectangular	8,786	$0,625\pi$	8,894	$0,656\pi$	8,949	$0,656\pi$	8,977	$0,656\pi$	
Hann	9,546	$0,625\pi$	9,578	$0,656\pi$	9,591	$0,625\pi$	9,597	$0,625\pi$	
Hamming	9,438	$0,625\pi$	9,476	$0,656\pi$	9,495	$0,656\pi$	9,505	$0,656\pi$	
Parzen	9,746	$0,656\pi$	9,746	$0,656\pi$	9,746	$0,656\pi$	9,746	$0,656\pi$	
Gaussiana	$\alpha = 2,5$	9,540	$0,625\pi$	9,549	$0,656\pi$	9,554	$0,656\pi$	9,557	$0,656\pi$
	$\alpha = 3,0$	9,666	$0,625\pi$	9,669	$0,656\pi$	9,670	$0,656\pi$	9,671	$0,656\pi$
	$\alpha = 3,5$	9,752	$0,625\pi$	9,752	$0,656\pi$	9,752	$0,656\pi$	9,753	$0,656\pi$
Exponencial	$\alpha = 2$	9,370	$0,656\pi$	9,404	$0,656\pi$	9,421	$0,656\pi$	9,429	$0,656\pi$
	$\alpha = 3$	9,561	$0,656\pi$	9,576	$0,656\pi$	9,584	$0,656\pi$	9,589	$0,656\pi$
	$\alpha = 4$	9,694	$0,656\pi$	9,699	$0,656\pi$	9,702	$0,656\pi$	9,704	$0,656\pi$
Kaiser	$\alpha = 2,0$	9,617	$0,656\pi$	9,605	$0,625\pi$	9,599	$0,625\pi$	9,597	$0,625\pi$
	$\alpha = 2,5$	9,683	$0,656\pi$	9,672	$0,625\pi$	9,667	$0,625\pi$	9,665	$0,625\pi$
	$\alpha = 3,0$	9,729	$0,656\pi$	9,720	$0,625\pi$	9,716	$0,625\pi$	9,713	$0,625\pi$
	$\alpha = 3,5$	9,763	$0,625\pi$	9,756	$0,625\pi$	9,752	$0,625\pi$	9,750	$0,625\pi$
Blackman	9,690	$0,656\pi$	9,690	$0,625\pi$	9,690	$0,625\pi$	9,690	$0,625\pi$	
Blackman Exacta	9,672	$0,625\pi$	9,674	$0,656\pi$	9,675	$0,656\pi$	9,676	$0,656\pi$	

Fuente: Mejías, 2013

$\omega_A = \frac{20\pi}{N}$ y la separación entre ω_A y ω_B igual al ancho de banda de 6 dB del lóbulo principal de cada ventana señalado en la tabla 4.1. El conjunto formado por las figuras desde la 4.22 hasta la 4.37 muestran el espectro obtenido de la señal $x[n]$ para las diferentes ventanas y separaciones entre exponenciales complejas.

Para el conjunto de figuras mencionadas anteriormente, se observó que la ventana rectangular permite distinguir las componentes espectrales de cada exponencial compleja, ya que presenta la mayor diferencia entre los máximos principales y el mínimo entre ellos, la cual fue de 11,87 dB. Resultados similares se obtuvieron con la ventana de gaussiana de $\alpha = 3,5$, la ventana de Parzen, la ventana de Kaiser con $\alpha = 3,5$ y la ventana exponencial de $\alpha = 4$, sin embargo, esta diferencia se encuentra entre 4 y 5 dB. Para el resto de las

Cuadro 4.3: Estimación de amplitud y frecuencia para la señal sinusoidal con frecuencia $\omega_A = \frac{20,2\pi}{N}$ para diferentes valores de N .

Ventana	Longitud de la ventana (N)							
	32		64		128		256	
	A	ω_A	A	ω_A	A	ω_A	A	ω_A
Rectangular	9,815	$0,625\pi$	9,782	$0,625\pi$	9,786	$0,625\pi$	9,790	$0,625\pi$
Hann	9,927	$0,625\pi$	9,932	$0,625\pi$	9,934	$0,625\pi$	9,935	$0,625\pi$
Hamming	9,871	$0,625\pi$	9,890	$0,625\pi$	9,902	$0,625\pi$	9,909	$0,625\pi$
Parzen	9,959	$0,625\pi$	9,959	$0,625\pi$	9,959	$0,625\pi$	9,959	$0,625\pi$
Gaussiana	$\alpha = 2,5$	$0,625\pi$	9,925	$0,625\pi$	9,925	$0,625\pi$	9,925	$0,625\pi$
	$\alpha = 3,0$	$0,625\pi$	9,946	$0,625\pi$	9,946	$0,625\pi$	9,946	$0,625\pi$
	$\alpha = 3,5$	$0,625\pi$	9,960	$0,625\pi$	9,960	$0,625\pi$	9,960	$0,625\pi$
Exponencial	$\alpha = 2$	$0,625\pi$	9,880	$0,625\pi$	9,883	$0,625\pi$	9,885	$0,625\pi$
	$\alpha = 3$	$0,625\pi$	9,900	$0,625\pi$	9,906	$0,625\pi$	9,908	$0,625\pi$
	$\alpha = 4$	$0,625\pi$	9,903	$0,625\pi$	9,913	$0,625\pi$	9,916	$0,625\pi$
Kaiser	$\alpha = 2,0$	$0,625\pi$	9,936	$0,625\pi$	9,935	$0,625\pi$	9,935	$0,625\pi$
	$\alpha = 2,5$	$0,625\pi$	9,947	$0,625\pi$	9,946	$0,625\pi$	9,946	$0,625\pi$
	$\alpha = 3,0$	$0,625\pi$	9,955	$0,625\pi$	9,954	$0,625\pi$	9,954	$0,625\pi$
	$\alpha = 3,5$	$0,625\pi$	9,961	$0,625\pi$	9,960	$0,625\pi$	9,960	$0,625\pi$
Blackman	9,950	$0,625\pi$	9,950	$0,625\pi$	9,950	$0,625\pi$	9,950	$0,625\pi$
Blackman Exacta	9,947	$0,625\pi$	9,947	$0,625\pi$	9,947	$0,625\pi$	9,947	$0,625\pi$

Fuente: Mejías, 2013

ventanas, esta diferencia fue menor a 1 dB, lo que dificulta la detección de las dos exponenciales complejas cercanas entre sí.

Con las observaciones anteriores, se evidenció que las ventanas con Pérdidas de Procesamiento del Peor Caso (PP_{PC}) cercana a los 4 dB y Ancho de Banda de 6 dB del Lóbulo Principal ($ABLP_{6dB}$) alejados de dos Bins presentan una diferencia entre los máximos y el mínimo entre ellos mayor a 4 dB. Por lo tanto, a medida que la PP_{PC} se aleja de 4dB y el $ABLP_{6dB}$ se acerca a dos Bins, la diferencia entre los máximos y el mínimo entre ellos disminuye, dificultando la detección de las dos exponenciales complejas cercanas entre si. En este sentido, la ventana rectangular presenta una diferencia de 11,87 dB ya que es la ventana con PP_{PC} más cercano a 4dB y $ABLP_{6dB}$ más alejado de 2 Bins. Para el resto de ventanas con PP_{PC} cercana a los 4 dB, el comportamiento se define por el $ABLP_{6dB}$. Así mismo, cabe señalar que las ventanas con una diferencia entre

Cuadro 4.4: Estimación de amplitud y frecuencia para la señal sinusoidal con frecuencia $\omega_A = \frac{10,1\pi}{16}$ para diferentes valores de N .

Ventana	Longitud de la ventana (N)									
	32		64		128		256		512	
	A	ω_A	A	ω_A	A	ω_A	A	ω_A	A	ω_A
Rectangular	9,815	$0,625\pi$	9,281	$0,625\pi$	9,814	$0,632\pi$	9,330	$0,632\pi$	9,835	$0,631\pi$
Hann	9,927	$0,625\pi$	9,728	$0,625\pi$	9,934	$0,632\pi$	9,741	$0,632\pi$	9,935	$0,631\pi$
Hamming	9,871	$0,625\pi$	9,653	$0,625\pi$	9,906	$0,632\pi$	9,678	$0,632\pi$	9,918	$0,631\pi$
Parzen	9,959	$0,625\pi$	9,837	$0,625\pi$	9,959	$0,632\pi$	9,837	$0,632\pi$	9,959	$0,631\pi$
Gaussiana	$\alpha = 2,5$	$0,625\pi$	9,710	$0,625\pi$	9,927	$0,632\pi$	9,714	$0,632\pi$	9,928	$0,631\pi$
	$\alpha = 3,0$	$0,625\pi$	9,787	$0,625\pi$	9,946	$0,632\pi$	9,788	$0,632\pi$	9,947	$0,631\pi$
	$\alpha = 3,5$	$0,625\pi$	9,841	$0,625\pi$	9,960	$0,632\pi$	9,841	$0,632\pi$	9,960	$0,631\pi$
Exponencial	$\alpha = 2$	$0,625\pi$	9,610	$0,625\pi$	9,904	$0,632\pi$	9,629	$0,632\pi$	9,908	$0,631\pi$
	$\alpha = 3$	$0,625\pi$	9,718	$0,625\pi$	9,936	$0,632\pi$	9,733	$0,632\pi$	9,934	$0,631\pi$
	$\alpha = 4$	$0,625\pi$	9,791	$0,625\pi$	9,960	$0,632\pi$	9,808	$0,632\pi$	9,953	$0,631\pi$
Kaiser	$\alpha = 2,0$	$0,625\pi$	9,745	$0,625\pi$	9,935	$0,632\pi$	9,740	$0,632\pi$	9,934	$0,631\pi$
	$\alpha = 2,5$	$0,625\pi$	9,789	$0,625\pi$	9,946	$0,632\pi$	9,784	$0,632\pi$	9,945	$0,631\pi$
	$\alpha = 3,0$	$0,625\pi$	9,820	$0,625\pi$	9,954	$0,632\pi$	9,816	$0,632\pi$	9,953	$0,631\pi$
	$\alpha = 3,5$	$0,625\pi$	9,843	$0,625\pi$	9,960	$0,632\pi$	9,839	$0,632\pi$	9,960	$0,631\pi$
Blackman	9,950	$0,625\pi$	9,801	$0,625\pi$	9,950	$0,632\pi$	9,801	$0,632\pi$	9,950	$0,631\pi$
Blackman Exacta	9,947	$0,625\pi$	9,790	$0,625\pi$	9,947	$0,632\pi$	9,791	$0,632\pi$	9,947	$0,631\pi$

Fuente: Mejías, 2013

los máximos y el mínimo entre ellos menor a 1 dB se debe a que los valores de $ABLP_{6dB}$ son cercanos a 2 Bins y PP_{PC} cercana a los 3 dB. Se debe agregar que la diferencia entre los máximos y el mínimo entre ellos, depende de la longitud de la ventana, por lo que al aumentar el número de muestras, esta diferencia disminuye.

Por otra parte, se debe señalar que aunque en este experimento se pudo detectar las exponenciales complejas, si la diferencia entre los máximos y el mínimo entre ellos es menor a 1 dB, se dificultará la detección de las dos componentes espectrales cuando la señal esté contaminada de ruido a medida que el ruido presente mayor densidad espectral, ya que generará derrame de potencia en ambas exponenciales y al estar cercanas entre sí, se detectarán algunas veces una sola exponencial compleja.

Ahora bien, si se analiza la ventana desde el punto de vista de estimación de amplitud y frecuencia con menor error, se observó que al variar la longitud N

para valores de 64, 128, 256, 512 y 1024 muestras, la ventana de Kaiser de $\alpha = 3,5$ es la que estima con menor error las componentes espectrales. Así mismo, la ventana de Parzen permite estimar la amplitud de cada exponencial con un error similar al generado por la ventana de Kaiser con $\alpha = 3,5$. Las ventanas con mayor error de estimación en amplitud fueron: la ventana rectangular y la ventana exponencial con $\alpha = 2$ y $\alpha = 3$. Por otro lado, al estimar la frecuencia de cada exponencial compleja, se observó el menor error con la ventana exponencial de $\alpha = 4$ y la ventana de Parzen. Se debe agregar que las ventanas con mayor error de estimación en frecuencia fueron: la ventana de Hann y la ventana de Kaiser con $\alpha = 2$ y $\alpha = 2,5$. Cabe señalar que en ninguno de los experimentos se obtuvo el valor exacto de la frecuencia, debido a que las características del lóbulo principal y laterales de cada ventana influyen en la estimación.

De la tabla 4.5, se puede señalar que las ventanas con menor error (de estimación en amplitud) tienen el Nivel del Primer Lóbulo Lateral ($NPLL$) cercano a los 80 dB o Decrecimientos Asintóticos de Lóbulos Laterales ($DALL$) mayor a -18 dB/oct. No obstante, si el Ancho de Banda Equivalente de Ruido ($ABER$) es cercano a 2 o la Ganancia Coherente (GC) es cercana a 0,5, disminuye el error generado al inventanar. Por otro lado, se evidenció que las ventanas con mayor error en dicha estimación presentan una diferencia entre el $ABER$ y $ABLP_{3dB}$ mayor al 6 %. En cuanto a la estimación frecuencial, se detectó que el parámetro más influyente es la Pérdida por Rizado (PR), el cual debe estar cercano a dos o a uno para que el error cometido sea menor. No obstante las ventanas con mayor error tienen una GC cercana a 0,5.

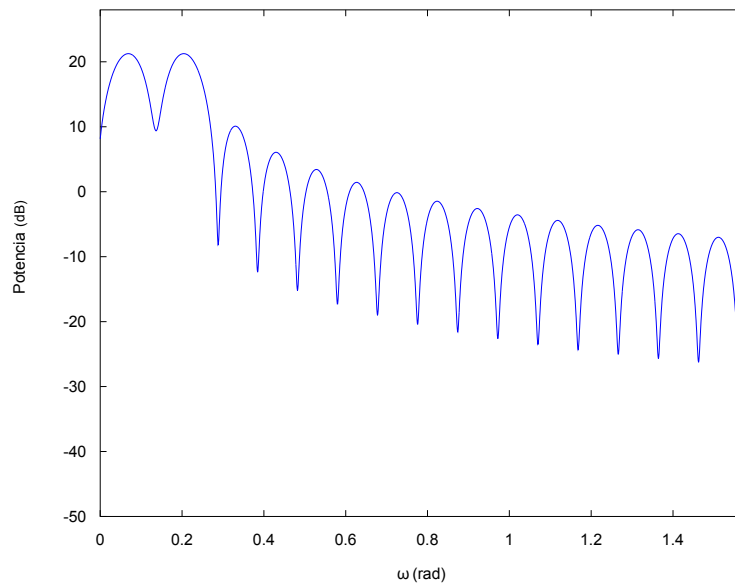


Figura 4.22: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana rectangular.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

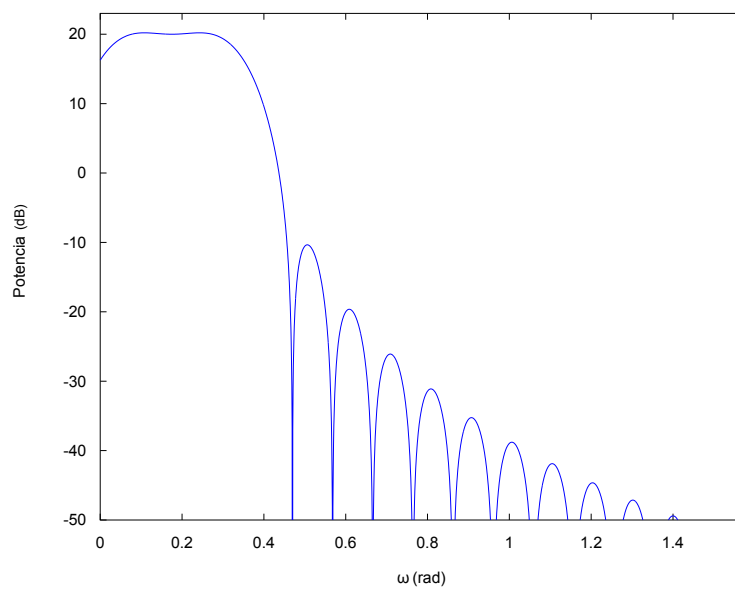


Figura 4.23: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Hann.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

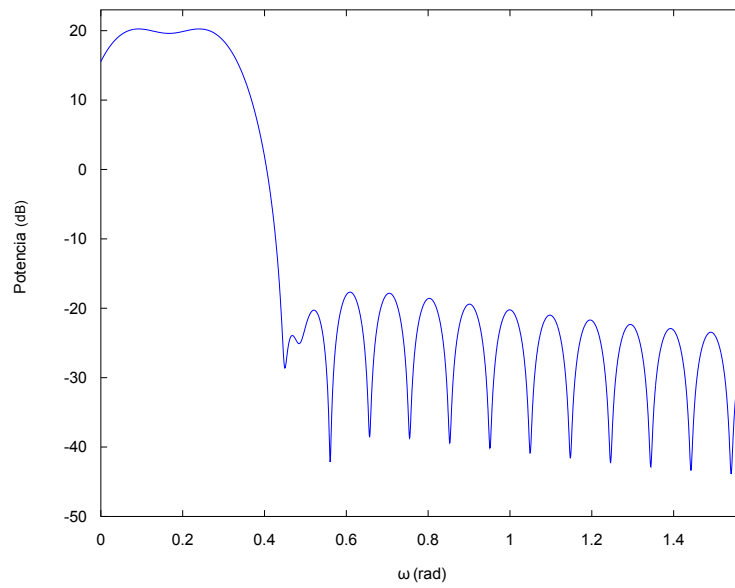


Figura 4.24: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Hamming.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

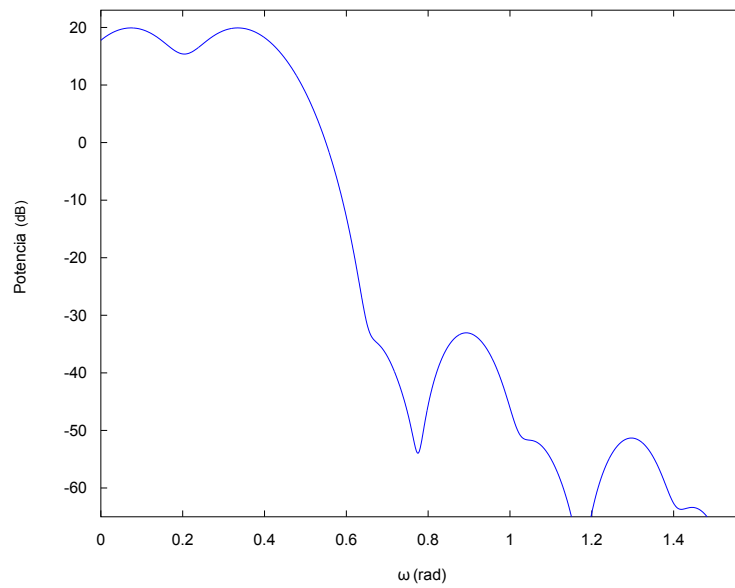


Figura 4.25: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Parzen.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

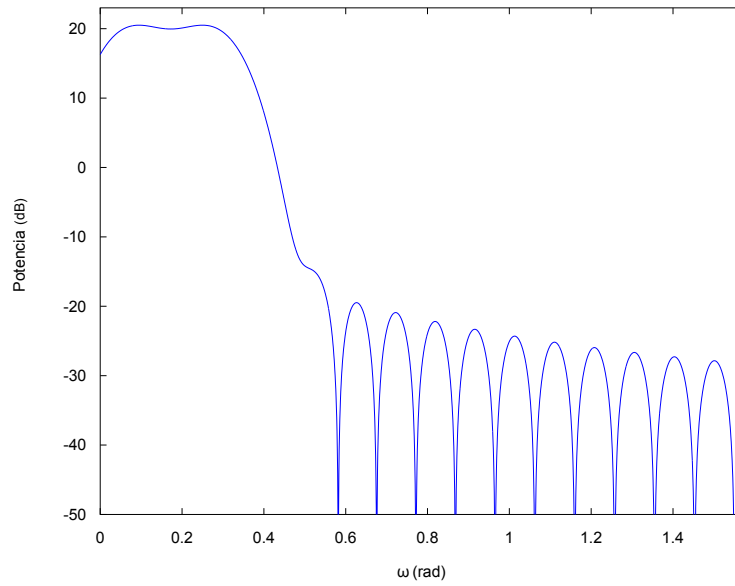


Figura 4.26: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana gaussiana con $\alpha = 2, 5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

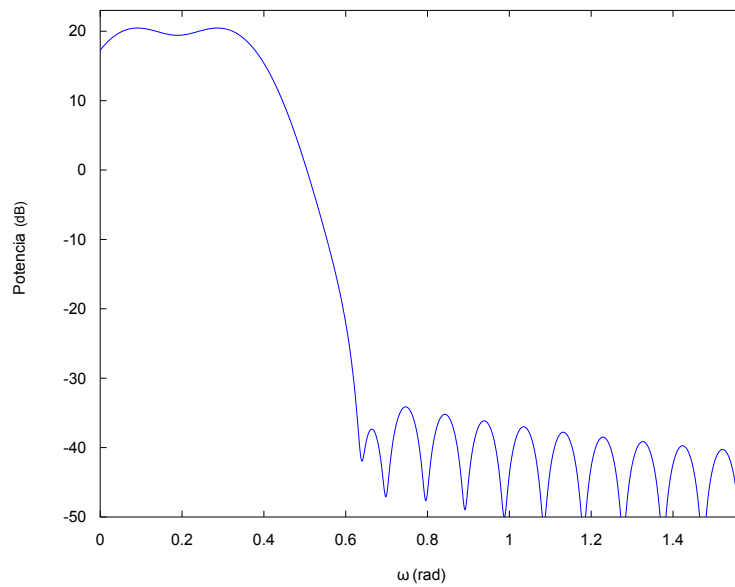


Figura 4.27: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana gaussiana con $\alpha = 3, 0$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

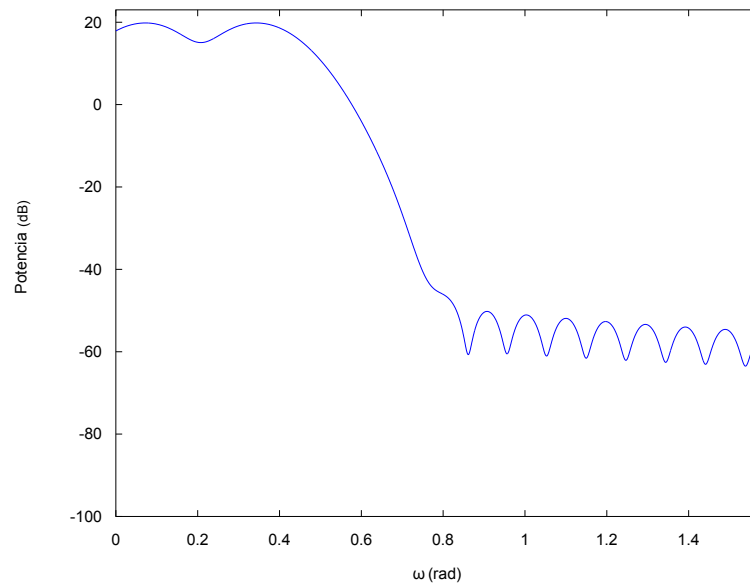


Figura 4.28: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana gaussiana con $\alpha = 3, 5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

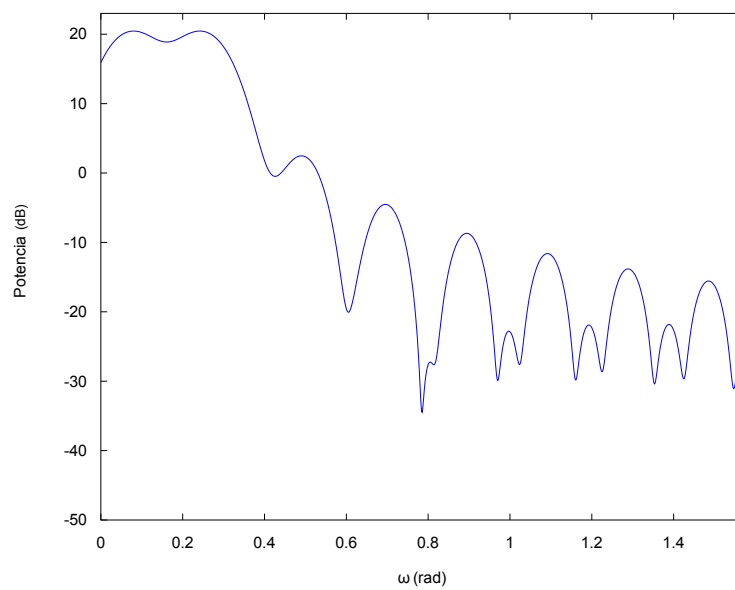


Figura 4.29: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana exponencial con $\alpha = 2$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

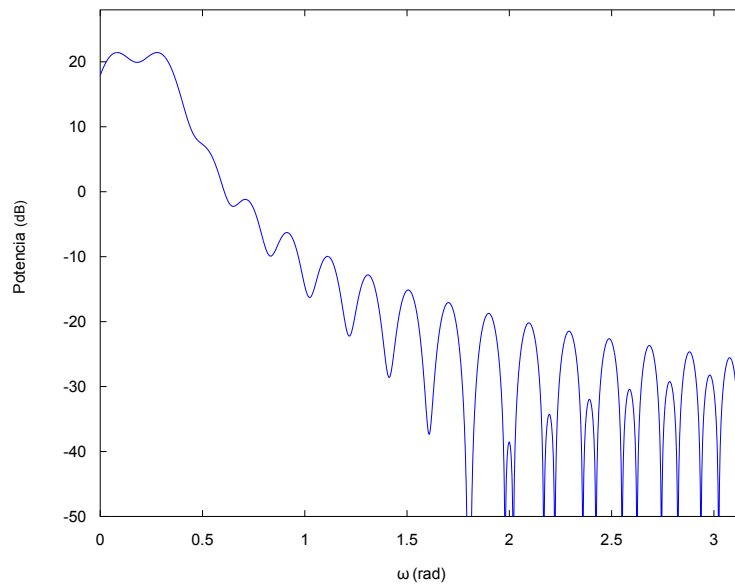


Figura 4.30: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana exponencial con $\alpha = 3$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

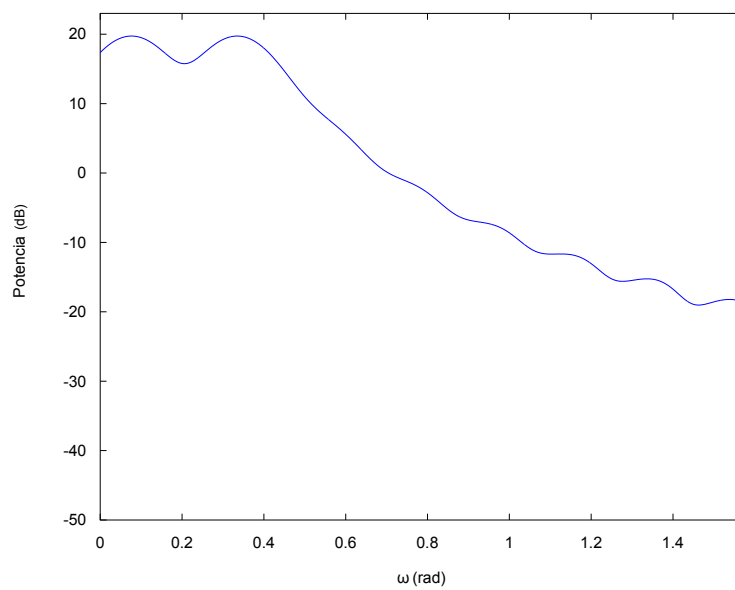


Figura 4.31: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana exponencial con $\alpha = 4$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

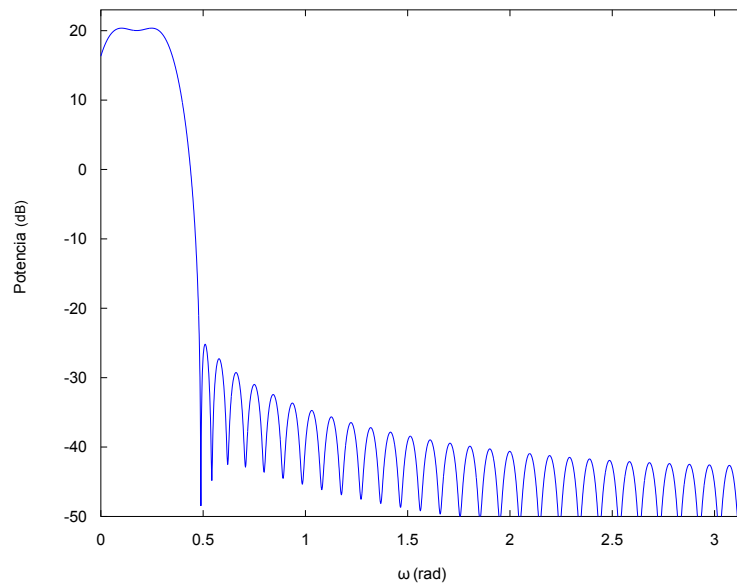


Figura 4.32: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Kaiser con $\alpha = 2, 0$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

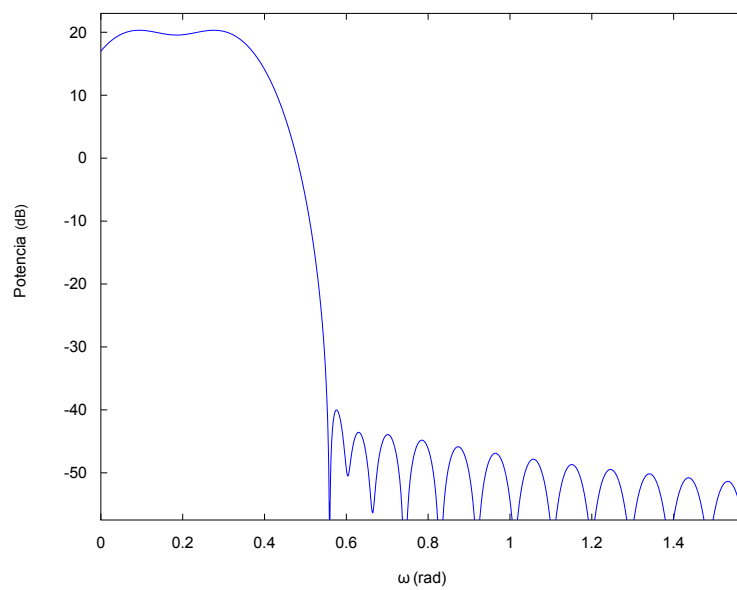


Figura 4.33: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Kaiser con $\alpha = 2, 5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

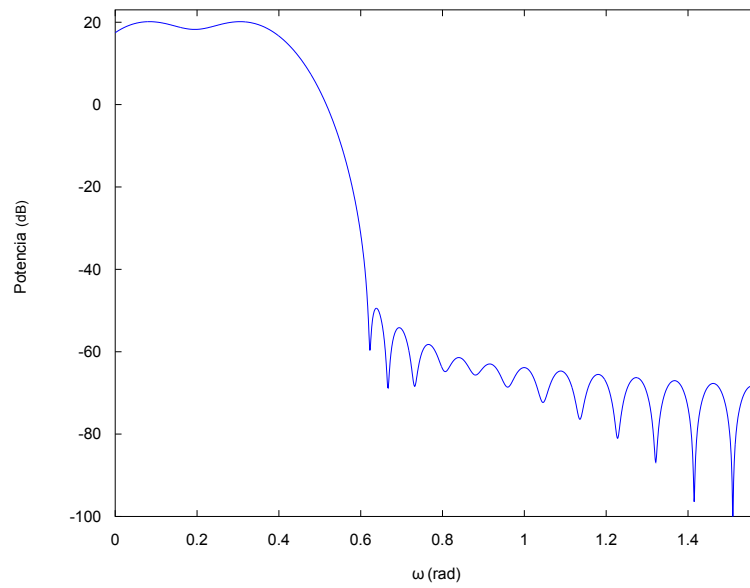


Figura 4.34: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Kaiser con $\alpha = 3, 0$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

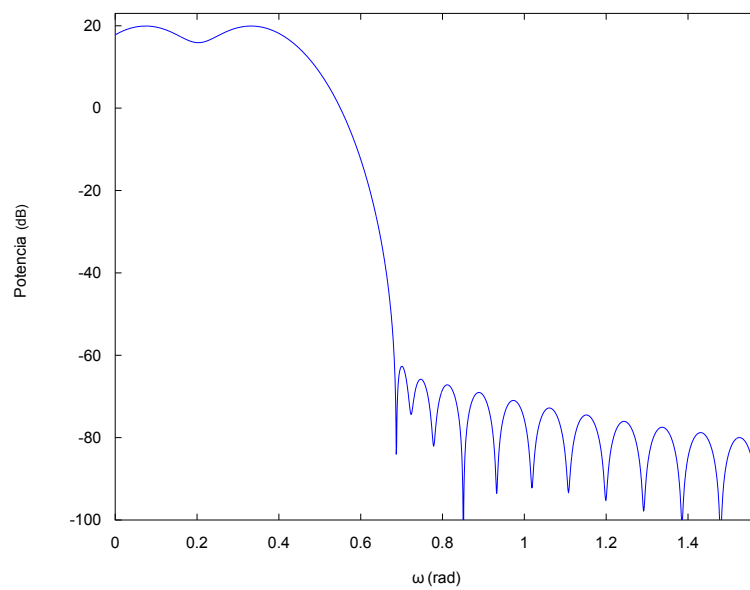


Figura 4.35: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Kaiser con $\alpha = 3, 5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

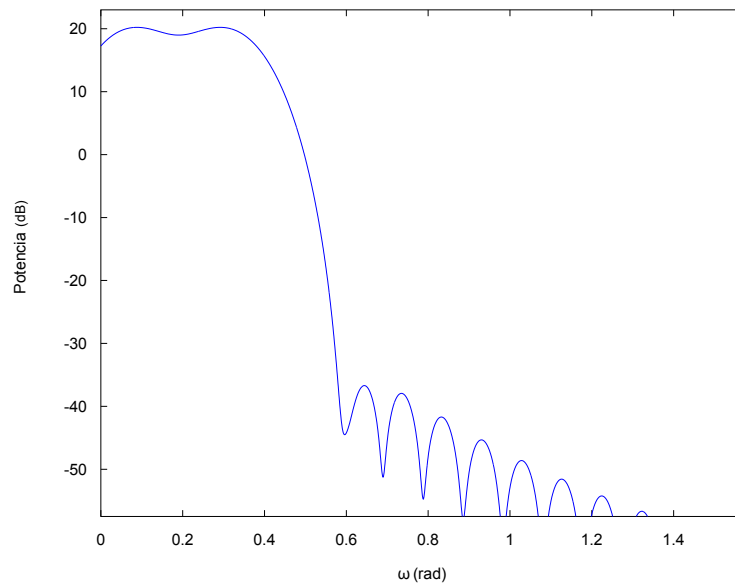


Figura 4.36: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Blackman.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

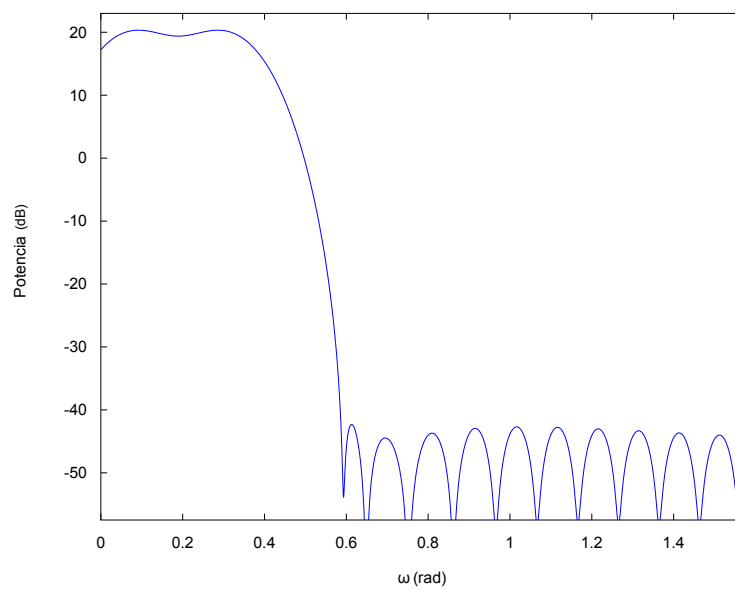


Figura 4.37: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Blackman Exacta.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

Cuadro 4.5: Estimación de amplitud y frecuencia para dos exponenciales complejas de igual magnitud con $\omega_2 - \omega_1 = ABLP_{6dB}$ y $N = 64$

Ventana	A	B	ω_1	$e_{\omega_1} (\%)$	ω_2	$e_{\omega_2} (\%)$	(Max/Min) dB
Rectangular	11,5581	11,5580	$0,309875\pi$	0,84	$0,3529661\pi$	0,758	11,87
Hann	10,2347	10,2347	$0,318848\pi$	2,03	$0,368652\pi$	1,693	0,20
Hamming	10,2919	10,2919	$0,317444\pi$	1,58	$0,364441\pi$	1,336	0,64
Parzen	9,9068	9,9068	$0,311462\pi$	0,33	$0,394470\pi$	0,262	4,54
Gaussiana	$\alpha = 2,5$	10,5334	$0,317627\pi$	1,64	$0,367981\pi$	1,379	0,61
	$\alpha = 3,0$	10,4301	$0,315979\pi$	1,1	$0,380310\pi$	0,896	1,35
	$\alpha = 3,5$	9,7500	$0,310608\pi$	0,61	$0,397522\pi$	0,479	5,81
Exponencial	$\alpha = 2$	10,6068	$0,313599\pi$	0,35	$0,364868\pi$	0,292	1,54
	$\alpha = 3$	11,7076	$0,314209\pi$	0,55	$0,376770\pi$	0,441	1,62
	$\alpha = 4$	9,4544	$0,311890\pi$	0,20	$0,395020\pi$	0,163	4,67
Kaiser	$\alpha = 2,0$	10,5297	$0,321472\pi$	2,87	$0,365723\pi$	2,393	0,26
	$\alpha = 2,5$	10,4905	$0,319519\pi$	2,25	$0,374268\pi$	1,831	0,52
	$\alpha = 3,0$	10,2437	$0,315613\pi$	1,00	$0,384094\pi$	0,799	1,43
	$\alpha = 3,5$	9,9666	$0,312256\pi$	0,08	$0,393066\pi$	0,065	3,24
Blackman	10,2572	10,2573	$0,316040\pi$	1,13	$0,380798\pi$	0,931	1,23
Blackman Exacta	10,2879	10,2879	$0,316040\pi$	1,13	$0,380188\pi$	0,928	1,26

Fuente: Mejías, 2013

4.4.3. Exponencial compleja contaminada con ruido blanco gaussiano.

En el siguiente experimento se contaminó la señal exponencial compleja de amplitud A con ruido blanco gaussiano de valor medio cero y varianza σ_w^2 . En este sentido, al analizar la expresión de la densidad espectral de potencia queda que:

$$\hat{R}_x(e^{j\omega}) = A^2 |W[e^{j(\omega-\omega_1)}]|^2 + ABER \cdot |W(e^{j0})|^2 \cdot \sigma_w^2 \quad (4.40)$$

Al estimar el valor valor pico del espectro de la señal para $\omega = \omega_1$ queda

$$\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{A}} = A^2 + ABER \cdot \sigma_w^2 \quad (4.41)$$

donde N es el número de muestras utilizadas para inventanar.

Al estimar la densidad espectral de potencia de la señal contaminada mediante la DFT, se evidenció que el valor estimado de A fluctúa de manera aleatoria para las diferentes ventanas, por lo que no es posible determinar en una realización cuál ventana genera el menor error en dicha estimación, ya que depende del instante en el que se aplica el enventanado. Por lo tanto, se promedió la estimación de M realizaciones, el cual se aproxima al valor estimado de la ecuación (4.41).

En vista de que el ruido es aleatorio, la estimación espectral se analizará con los promedios estadísticos (valor medio y varianza) de la estimación de la potencia y frecuencia producidos por cada ventana, los cuales se muestran en las tablas 4.6 y 4.7 para $A = 10$, $B = 0$, $M = 2^{17}$, $\omega_A = \frac{25\pi}{1024}$, y $\sigma_w = 1, 10$ y 15 .

Cuadro 4.6: Valor medio (μ_{P_A}) y varianza ($\sigma_{P_A}^2$) de la estimación de la potencia promedio de la exponencial compleja contaminada con ruido blanco gaussiano con diferentes valores de desviación estándar.

	Desviación Estándar (σ_x)					
	1		10		15	
Ventana	μ_{P_A}	$\sigma_{P_A}^2$	μ_{P_A}	$\sigma_{P_A}^2$	μ_{P_A}	$\sigma_{P_A}^2$
Rectangular	100,05	3,0055	102,33	316,03	105,78	659,22
Hann	100,06	5,0252	102,87	524,52	106,37	1115,06
Hamming	100,05	4,5203	102,58	471,19	105,83	997,55
Parzen	100,03	6,7116	103,63	699,55	107,66	1477,49
Gaussiana	$\alpha = 2,5$	100,05	4,8652	102,71	506,67	1071,19
	$\alpha = 3,0$	100,04	5,8789	103,17	612,10	1292,59
	$\alpha = 3,5$	100,03	6,9590	103,71	724,99	1528,35
Exponencial	$\alpha = 2$	100,03	4,4291	102,54	462,56	967,57
	$\alpha = 3$	100,02	5,8115	103,10	607,51	1273,77
	$\alpha = 4$	100,01	7,4526	103,85	782,07	1645,42
Kaiser	$\alpha = 2,0$	100,05	4,9814	102,87	519,86	1100,76
	$\alpha = 2,5$	100,04	5,5651	103,17	580,77	1227,81
	$\alpha = 3,0$	100,03	6,0991	103,45	636,58	1343,67
	$\alpha = 3,5$	100,03	6,5930	103,73	688,25	1450,70
Blackman	100,04	5,9537	103,26	620,60	107,01	1313,27
Blackman Exacta	100,04	5,8290	103,18	607,38	106,87	1284,86

Fuente: Mejías, 2013

Cuadro 4.7: Valor medio (μ_{ω_1}) y varianza ($\sigma_{\omega_1}^2$) de la estimación de frecuencia para una exponencial compleja contaminada con ruido blanco gaussiano con diferentes valores de desviación estándar σ_{ω_1} .

Ventana	Desviación Estándar (σ_x)					
	1		10		15	
	μ_{ω_A}	$\sigma_{\omega_A}^2 (10^{-6})$	μ_{ω_A}	$\sigma_{\omega_A}^2 (10^{-6})$	μ_{ω_A}	$\sigma_{\omega_A}^2 (10^{-6})$
Rectangular	0,024414	0,030341	0,024403	2,4451	0,024422	5,6584
Hann	0,024415	0,064961	0,024514	6,1002	0,024637	13,8030
Hamming	0,024413	0,046820	0,024477	4,2664	0,024586	10,1875
Parzen	0,024418	0,101519	0,024564	10,0812	0,024654	21,5957
Gaussiana	$\alpha = 2,5$	0,024413	0,051188	0,024487	4,6440	0,024596
	$\alpha = 3,0$	0,024414	0,070611	0,024522	6,7207	0,024610
	$\alpha = 3,5$	0,024419	0,099123	0,024560	9,8647	0,024645
Exponencial	$\alpha = 2$	0,024413	0,036513	0,024445	3,0942	0,024506
	$\alpha = 3$	0,024415	0,043443	0,024472	3,9809	0,024535
	$\alpha = 4$	0,024417	0,059974	0,024496	5,5325	0,024568
Kaiser	$\alpha = 2,0$	0,024414	0,060828	0,024487	5,6361	0,024588
	$\alpha = 2,5$	0,024411	0,074300	0,024501	7,1615	0,024566
	$\alpha = 3,0$	0,024414	0,090732	0,024512	8,8251	0,024561
	$\alpha = 3,5$	0,024415	0,106279	0,024522	10,6112	0,024557
Blackman	0,024414	0,081123	0,024536	7,8502	0,024636	16,5358
Blackman Exacta	0,024413	0,076055	0,024528	7,2345	0,024626	15,2892

Fuente: Mejías, 2013

De los resultados de la tabla 4.6 se observó que la ventana con menor error y menor varianza en la estimación espectral de la exponencial compleja fue la ventana rectangular para los diferentes valores de σ_w . La ventana exponencial de $\alpha = 2,0$ mostró un comportamiento similar; sin embargo, la varianza presentada en la estimación de amplitud y frecuencia es mayor en un 47 % y 20 % respectivamente. Con la ventana de Hamming también se obtuvo menor error pero la varianza fue 50 % mayor a la presentada por la ventana rectangular en la estimación de amplitud y hasta un 80 % de incremento de la varianza en la estimación de frecuencia. El resto de las ventanas produce mayores varianzas a las mencionadas.

Por otro lado, al comparar los resultados de las tablas 4.6 y 4.7, se observó un comportamiento estadístico similar para las diferentes densidades de potencia del ruido blanco, es decir, las ventanas con menor varianza en la estimación de amplitud, también tuvieron menor varianza en la estimación de frecuencia.

Por consiguiente, el indicador espectral dominante, cuando se analiza el contenido espectral de una exponencial compleja contaminada con ruido gaussiano, es el *ABER*. En este sentido, las ventanas con menor error en la estimación de potencia y frecuencia presentan un *ABER* cercano a uno. Por esta razón, la ventana con mejor desempeño en este experimento fue la rectangular ya que el *ABER* es igual a 1 BINS. Así mismo, La ventana exponencial de $\alpha = 2, 0$ y la ventana de Hamming tienen un *ABER* de 1,31 y 1,36 BINS respectivamente, las cuales son los menores ABER después de la ventana rectangular.

4.4.4. Dos exponenciales complejas con diferentes frecuencias de la base ortogonal de la DFT contaminadas con ruido blanco gaussiano.

En este experimento, la señal $x[n]$ se ajustó con los parámetros: $A = B = 10$, $\omega_A = \frac{5\pi}{16}$, $\omega_B = \frac{15\pi}{32}$ y se contaminó la señal con ruido blanco gaussiano ($\sigma_w = 1, 10$ y 15) aplicando las diferentes ventanas de longitud $N = 64$ muestras para estimar el valor medio (μ_{P_A}, μ_{P_B}), varianza ($\sigma_{P_A}^2, \sigma_{P_B}^2$) de la potencia de cada exponencial compleja, así como el valor medio ($\mu_{\omega_A}, \mu_{\omega_B}$) y varianza ($\sigma_{\omega_A}^2, \sigma_{\omega_B}^2$) de la frecuencia estimada para 2^{17} realizaciones.

Como se mencionó anteriormente, la presencia del ruido en la señal $x[n]$ afecta la estimación espectral de cada exponencial compleja, modificando el comportamiento de las diferentes ventanas. Al comparar los resultados de las tablas 4.8, 4.10, 4.9 y 4.11, se evidencia un comportamiento diferente al mostrado en el experimento de dos exponenciales complejas sin ruido blanco, debido a que otros indicadores son los que influyen en la estimación espectral.

En este sentido, se observa que la varianza $\sigma_{P_A}^2$ y $\sigma_{P_B}^2$ dependen del indicador *ABER*, es decir, las ventanas con mayor *ABER* son aquellas que presentan mayor varianza en la estimación espectral de potencia, por lo tanto, las ventanas con menor varianza tienen un *ABER* $< 1, 4$. Cabe señalar que el aumento de la densidad de potencia del ruido, no modifica considerablemente el desempeño de cada ventana, sin embargo, al aumentar el valor de σ_w , la varianza depende más del parámetro $ABLP_{3dB}$; no obstante, este último parámetro

está relacionado con el indicador $ABER$, por lo que las ventanas con menor varianza tienen un valor de $ABER$ cercano a 1.

En cuanto a la exactitud de la estimación de potencia, el indicador de Nivel del Primer Lóbulo Lateral ($NPLL$) y las Pérdidas por Rizado (PR) son los parámetros de mayor influencia en dicha exactitud, es decir, las ventanas con $NPLL$ cercano a -60 dB y PR cercano a 1 tienen una mejor estimación en la potencia de las exponenciales complejas cuando σ_w es bajo. En este sentido, la ventana de gaussiana de $\alpha = 3,5$ permite estimar la potencia con menor error, seguido de la ventana de Kaiser de $\alpha = 2,5$ y la ventana de Blackman. Por otro lado, las ventanas que producen mayor error tienen una diferencia entre $ABER$ y $ABLP_{3dB}$ mayor a 6 %, es por ello que las ventanas exponenciales con α igual a 2, 3 y 4, así como la ventana rectangular son las que generan los mayores errores de estimación de potencia. No obstante, al aumentar la densidad de potencia de ruido, el comportamiento de las ventanas cambia, siendo las ventanas con $ABER$ cercano a 1,3 las ventanas con menor error cuando σ_w es igual a 10. Sin embargo, al seguir aumentando σ_w , se observa que las ventanas con menor error tienen una diferencia entre $ABER$ y $ABLP_{3dB}$ mayor a 6 % y $NPLL$ cercano a -20 dB.

Ahora bien, si se analiza el comportamiento de la ventana para la estimación de la frecuencia, se observa que las ventanas con mayor exactitud son las que tienen un $\frac{ABER*PR}{GC}$ cercano a 4,5 y el Nivel del Primer Lóbulo Lateral $NPLL$ cercano a -60 dB cuando σ_w es bajo. Es por esto que la ventana de Kaiser con α igual a 2, 3 y 3,5, la ventana de Blackman exacta permiten estimar la frecuencia con un error menor al 0,005 % respecto del fijado para ω_A y ω_B . Por otro lado, Las ventanas que generan mayor error tienen una diferencia entre $ABER$ y $ABLP_{3dB}$ mayor a 6 %, de modo que la ventanas exponenciales con α igual a 2, 3 y 4, la ventana de Hamming y la ventana rectangular generan los mayores errores de estimación, presentando un error mayor al 0,2 %. Así mismo, se debe agregar que al aumentar el valor de σ_w , el parámetro más influyente en la estimación frecuencial es el $\frac{ABER}{GC}$ y el $ABLP_{6dB}$. Por lo tanto, las ventanas con menor estimación en ω_A tienen un valor de $\frac{ABER}{GC}$ cercano a 3 y un $ABLP_{6dB}$ cercano a 2, mientras que para la estimación de ω_B , las ventanas tiene un valor de $\frac{ABER}{GC}$ menor a 3 y GC mayor a 0,5.

De las observaciones realizadas, se identificó que el factor $\frac{ABER}{ABLP_{3dB}}$ y el $NPLL$ definen el comportamiento promedio de la varianza ($\sigma_{\omega_A}^2$ y $\sigma_{\omega_B}^2$) de la frecuencia estimada. Teniendo en cuenta lo anteriormente mencionado, las ventanas con una diferencia entre $ABER$ y $ABLP_{3dB}$ mayor a 6 % y niveles de $NPLL$ mayor a -20 dB producen menor varianza en la estimación de la frecuencia promedio, por lo que la ventana rectangular y las ventanas exponenciales con α igual a 2 y 3 permiten estimar la frecuencia con menor varianza. Por otro lado, al aumentar el factor $ABER$ se genera mayor varianza; por consiguiente, la ventana de Kaiser con $\alpha = 3,5$, la ventana gaussiana $\alpha = 3,5$ y la ventana de Parzen proporcionan la mayor varianza, ya que tienen un valor de $ABER$ cercano a 2. Sin embargo, este comportamiento cambia al aumentar el valor de σ_w , donde el parámetro mas influyente en la varianza es el $ABER$, es decir, las ventanas con menor varianza tienen valores de $ABER$ cercanos a 1. Cabe señalar que las ventanas con mayor exactitud en la estimación de la frecuencia generan mayor varianza en dicha estimación, por lo tanto, existe un compromiso entre la exactitud y la varianza entre las medidas.

En las tablas 4.8, 4.10, 4.9 y 4.11 se muestran los resultados de la potencia promedio (μ_{P_A} y μ_{P_B}) y varianza de dicha potencia ($\sigma_{P_A}^2$ y $\sigma_{P_B}^2$), así como la frecuencia promedio (μ_{ω_A} y μ_{ω_B}) y varianza ($\sigma_{\omega_A}^2$ y $\sigma_{\omega_B}^2$) de cada exponencial compleja.

Al observar la influencia del ruido gaussiano en los resultados de este experimento, se puede afirmar que los indicadores $ABER$ y GC dominan el comportamiento de las ventanas para la estimación de potencia cuando se disminuye la relación señal-ruido.

Una vez examinado el efecto del ruido en la estimación espectral de dos exponenciales complejas, se analizó la resolución frecuencial de cada ventana en presencia de ruido blanco con desviación estándar $\sigma_w = 1, 10$ y 15 , donde la separación entre ω_A y ω_B es igual a el ancho de banda de 6 dB del lóbulo principal de cada ventana señalado en la tabla 4.1.

Cuadro 4.8: Valor medio (μ_{P_A}) y varianza ($\sigma_{P_A}^2$) de la estimación de la potencia promedio de la exponencial compleja de amplitud A contaminada con ruido blanco gaussiano con diferentes valores de desviación estándar.

Ventana	Desviación Estándar (σ_x)					
	1		10		15	
	μ_{P_A}	$\sigma_{P_A}^2$	μ_{P_A}	$\sigma_{P_A}^2$	μ_{P_A}	$\sigma_{P_A}^2$
Rectangular	101,159	3,155	103,472	320,131	106,400	730,44
Hann	99,775	4,554	102,758	463,013	106,528	1060,87
Hamming	99,594	4,239	102,333	430,504	105,784	985,30
Parzen	99,823	5,998	103,663	613,015	108,510	1406,98
Gaussiana	$\alpha = 2, 5$	99,624	4,518	102,516	459,253	106,152
	$\alpha = 3, 0$	99,872	5,328	103,242	543,129	107,478
	$\alpha = 3, 5$	99,984	6,192	103,890	633,005	108,810
Exponencial	$\alpha = 2$	96,044	3,979	98,631	404,089	101,857
	$\alpha = 3$	92,395	4,868	95,499	495,846	99,367
	$\alpha = 4$	87,695	5,845	91,467	597,702	96,230
Kaiser	$\alpha = 2, 0$	99,769	4,753	102,841	483,695	106,706
	$\alpha = 2, 5$	99,984	5,259	103,357	536,113	107,599
	$\alpha = 3, 0$	100,042	5,718	103,697	583,744	108,295
	$\alpha = 3, 5$	100,041	6,141	103,961	627,783	108,898
Blackman	100,031	5,415	103,502	552,271	107,877	1266,59
Blackman Exacta	100,029	5,312	103,419	541,482	107,689	1241,54

Fuente: Mejías, 2013

Cuadro 4.9: Valor medio (μ_{P_B}) y varianza ($\sigma_{P_B}^2$) de la estimación de la potencia promedio de la exponencial compleja de amplitud B contaminada con ruido blanco gaussiano con diferentes valores de desviación estándar.

Ventana	Desviación Estándar (σ_x)					
	1		10		15	
	μ_{P_B}	$\sigma_{P_B}^2$	μ_{P_B}	$\sigma_{P_B}^2$	μ_{P_B}	$\sigma_{P_B}^2$
Rectangular	101,150	3,167	103,543	321,26	106,380	726,77
Hann	99,767	4,547	102,832	463,28	106,428	1055,92
Hamming	99,585	4,232	102,404	430,61	105,694	980,99
Parzen	99,815	5,995	103,692	612,52	108,428	1397,50
Gaussiana	$\alpha = 2, 5$	99,616	4,511	102,578	459,24	106,056
	$\alpha = 3, 0$	99,864	5,324	103,285	542,83	107,379
	$\alpha = 3, 5$	99,976	6,189	103,909	632,40	108,744
Exponencial	$\alpha = 2$	96,035	3,965	98,674	402,96	101,785
	$\alpha = 3$	92,387	4,840	95,515	493,25	99,314
	$\alpha = 4$	87,687	5,794	91,455	592,80	96,358
Kaiser	$\alpha = 2, 0$	99,761	4,746	102,906	483,61	106,611
	$\alpha = 2, 5$	99,976	5,254	103,409	535,76	107,505
	$\alpha = 3, 0$	100,034	5,713	103,735	583,15	108,212
	$\alpha = 3, 5$	100,032	6,136	103,986	626,98	108,838
Blackman	100,022	5,411	103,548	552,05	107,774	1260,66
Blackman Exacta	100,021	5,307	103,467	541,26	107,586	1236,05

Fuente: Mejías, 2013

Cuadro 4.10: Valor medio (μ_{ω_1}) y varianza ($\sigma_{\omega_1}^2$) de la estimación de frecuencia para una exponencial compleja de amplitud A contaminada con ruido blanco gaussiano con diferentes valores de desviación estándar σ_{ω_1} .

	Desviación Estándar (σ_x)									
	1			10			15			
Ventana	μ_{ω_1}	$\sigma_{\omega_1}^2 (10^{-6})$	$e_{\omega_1} (\%)$	μ_{ω_1}	$\sigma_{\omega_1}^2 (10^{-6})$	$e_{\omega_1} (\%)$	μ_{ω_1}	$\sigma_{\omega_1}^2 (10^{-6})$	$e_{\omega_1} (\%)$	
Rectangular	0,3107 π	0,0215	0,575	0,3107 π	2,182	0,575	0,3107 π	6,02	0,581	
Hann	0,3126 π	0,0511	0,046	0,3126 π	5,240	0,044	0,3125 π	42,04	0,012	
Hamming	0,3121 π	0,0379	0,138	0,3121 π	3,874	0,137	0,3120 π	24,56	0,153	
Parzen	0,3126 π	0,0963	0,030	0,3126 π	9,978	0,027	0,3120 π	182,41	0,155	
Gaussiana	$\alpha = 2,5$	0,3122 π	0,0427	0,111	0,3122 π	4,376	0,111	0,3121 π	38,64	0,140
	$\alpha = 3,0$	0,3124 π	0,0633	0,039	0,3124 π	6,526	0,040	0,3121 π	105,32	0,139
	$\alpha = 3,5$	0,3125 π	0,0951	0,012	0,3125 π	9,868	0,013	0,3118 π	203,97	0,219
Exponencial	$\alpha = 2$	0,3113 π	0,0277	0,369	0,3114 π	2,824	0,368	0,3113 π	23,96	0,388
	$\alpha = 3$	0,3115 π	0,0364	0,334	0,3115 π	3,736	0,334	0,3110 π	125,28	0,467
	$\alpha = 4$	0,3113 π	0,0516	0,388	0,3113 π	8,192	0,392	0,3096 π	464,58	0,918
Kaiser	$\alpha = 2,0$	0,3125 π	0,0530	0,004	0,3125 π	5,441	0,005	0,3123 π	54,35	0,050
	$\alpha = 2,5$	0,3125 π	0,0674	0,010	0,3125 π	6,949	0,008	0,3122 π	98,05	0,082
	$\alpha = 3,0$	0,3125 π	0,0836	0,005	0,3125 π	8,648	0,003	0,3121 π	146,59	0,139
	$\alpha = 3,5$	0,3125 π	0,1016	0,001	0,3125 π	10,546	0,002	0,3119 π	197,11	0,197
Blackman	0,3126 π	0,0732	0,027	0,3124 π	7,547	0,024	0,3122 π	113,14	0,083	
Blackman Exacta	0,3125 π	0,0672	0,003	0,3125 π	6,921	0,005	0,3122 π	101,87	0,100	

Fuente: Mejías, 2013

Cuadro 4.11: Valor medio (μ_{ω_2}) y varianza ($\sigma_{\omega_2}^2$) de la estimación de frecuencia para una exponencial compleja de amplitud B contaminada con ruido blanco gaussiano con diferentes valores de desviación estándar σ_x .

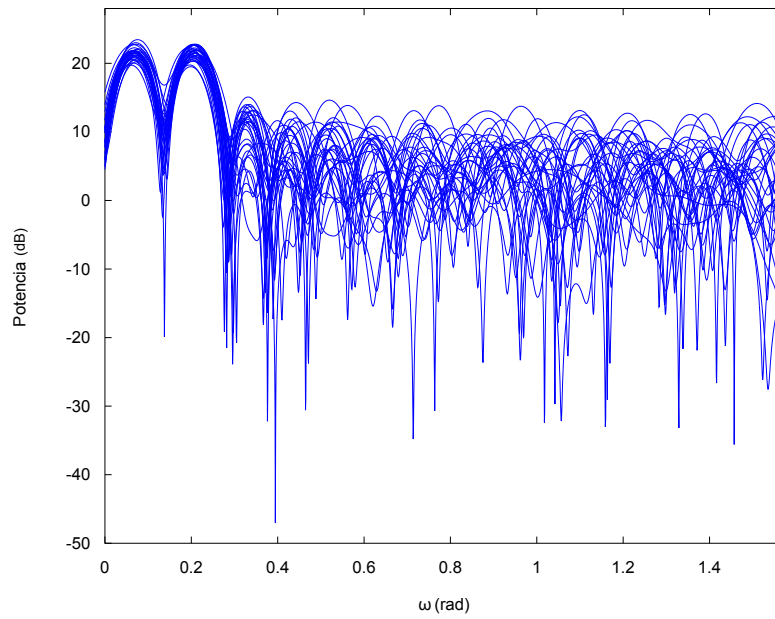
Ventana	Desviación Estándar (σ_x)									
	1			10			15			
	μ_{ω_2}	$\sigma_{\omega_2}^2 (10^{-6})$	$e_{\omega_2} (\%)$	μ_{ω_2}	$\sigma_{\omega_2}^2 (10^{-6})$	$e_{\omega_2} (\%)$	μ_{ω_2}	$\sigma_{\omega_2}^2 (10^{-6})$	$e_{\omega_2} (\%)$	
Rectangular	0,4705 π	0,0213	0,383	0,4705 π	2,185	0,383	0,4689 π	6,21	0,042	
Hann	0,4686 π	0,0509	0,031	0,4686 π	5,281	0,029	0,4689 π	52,07	0,037	
Hamming	0,4692 π	0,0378	0,092	0,4692 π	3,910	0,092	0,4689 π	34,66	0,035	
Parzen	0,4687 π	0,0960	0,020	0,4687 π	44,782	0,011	0,4696 π	185,33	0,177	
Gaussiana	$\alpha = 2,5$	0,4691 π	0,0426	0,074	0,4691 π	4,413	0,074	0,4690 π	38,64	0,046
	$\alpha = 3,0$	0,4689 π	0,0631	0,026	0,4689 π	15,154	0,028	0,4692 π	108,27	0,106
	$\alpha = 3,5$	0,4688 π	0,0948	0,008	0,4688 π	52,980	0,018	0,4697 π	210,21	0,200
Exponencial	$\alpha = 2$	0,4699 π	0,0276	0,246	0,4699 π	2,849	0,246	0,4690 π	21,60	0,056
	$\alpha = 3$	0,4698 π	0,0363	0,223	0,4698 π	12,581	0,225	0,4696 π	127,32	0,171
	$\alpha = 4$	0,4700 π	0,0515	0,258	0,4702 π	267,353	0,310	0,4711 π	473,22	0,507
Kaiser	$\alpha = 2,0$	0,4688 π	0,0527	0,003	0,4688 π	5,479	0,003	0,4690 π	57,57	0,055
	$\alpha = 2,5$	0,4687 π	0,0671	0,007	0,4687 π	15,593	0,004	0,4692 π	99,01	0,096
	$\alpha = 3,0$	0,4687 π	0,0832	0,003	0,4688 π	25,832	0,001	0,4694 π	149,02	0,142
	$\alpha = 3,5$	0,4688 π	0,1012	0,000	0,4688 π	44,893	0,008	0,4697 π	201,16	0,195
Blackman	0,4687 π	0,0729	0,018	0,4687 π	16,176	0,014	0,4693 π	118,25	0,107	
Blackman Exacta	0,4688 π	0,0669	0,002	0,4688 π	15,553	0,005	0,4692 π	106,69	0,100	

Fuente: Mejías, 2013

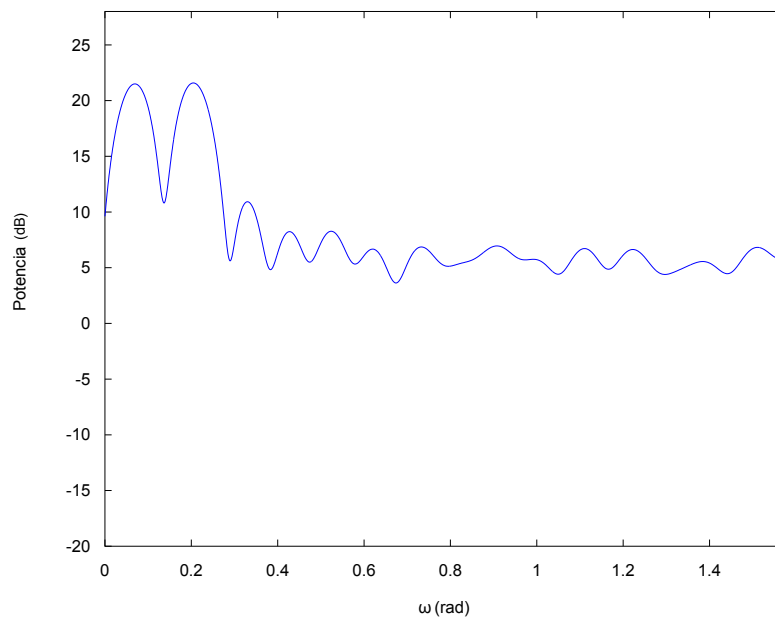
En el conjunto formado por las figuras 4.38 hasta 4.53 se muestra el espectro de potencia de la señal $x[n]$ a la cual se le aplicó una ventana de longitud igual a 64 muestras y se contaminó con ruido gaussiano de σ_w igual 15. En este conjunto de figuras se detalla el derrame de potencia y las variaciones que presenta el espectro debido al comportamiento de cada una de las ventanas en 32 realizaciones. Así mismo, se muestra el espectro de potencia promedio obtenido de las 32 realizaciones.

Al inspeccionar el conjunto de imágenes anteriormente mencionadas se observó que la presencia de ruido produce variaciones en los valores picos y frecuencia central de los lóbulos principales de cada tono. Sin embargo, el espectro de los lóbulos laterales presenta mayor varianza entre muestras enventanadas debido al derrame de potencia y al piso de ruido presente en esta zona del espectro, lo que afecta el comportamiento promedio de la ventana y en consecuencia los indicadores que influyen en la estimación del espectro de potencia.

Cabe señalar que al aumentar la densidad de potencia del ruido, se observó que resolución en frecuencia promedio se deteriora, lo que dificulta la identificación de tonos que estén separados (en frecuencia) una distancia cercana al ancho de banda de 6 dB del lóbulo principal. Por consiguiente, las ventanas con una diferencia entre los máximos y el mínimo entre ellos mayor a 3dB permiten dicha identificación para detectar cada tono por separado. Este comportamiento se observa en las figuras 4.38, 4.41, 4.44, 4.47, 4.51, las cuales muestran el comportamiento promedio de la ventana rectangular, la ventana de Parzen, la ventana gaussiana con $\alpha = 3, 5$, la ventana exponencial con $\alpha = 4$ y la ventana de Kaiser con $\alpha = 3, 5$. Para el resto de las ventanas se observó que en algunas realizaciones no era posible detectar uno de los tonos ya que quedaba enmascarado en un lóbulo principal, lo que trae como consecuencia una caracterización errónea de la señal para estas realizaciones.



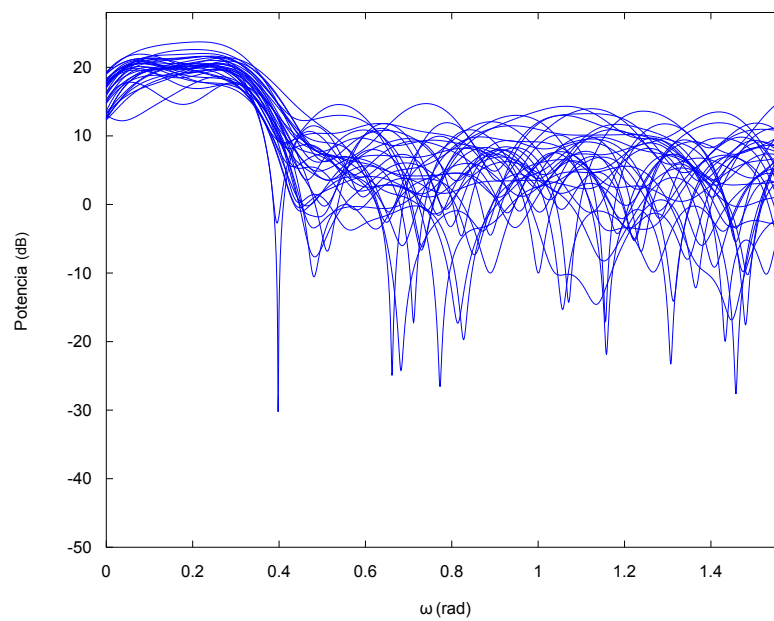
(a)



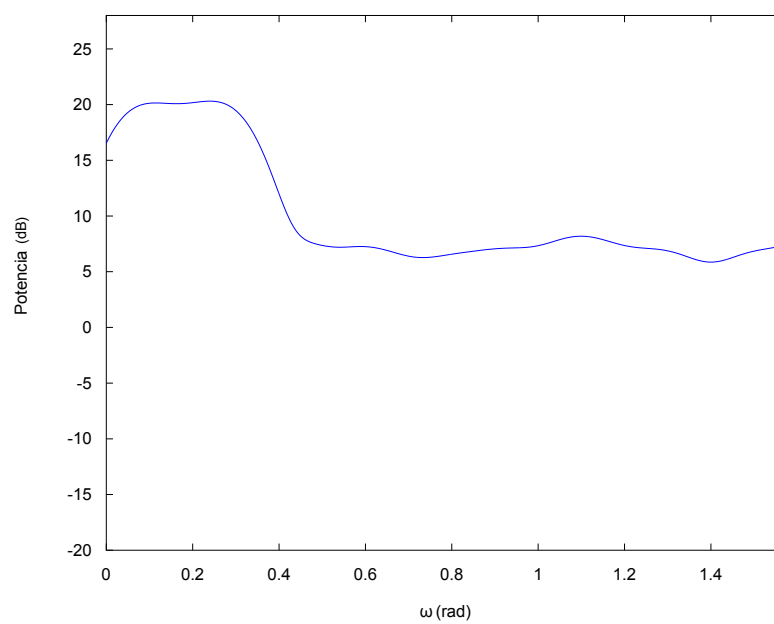
(b)

Figura 4.38: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana rectangular.

Fuente: Carlos Mejías, 2013



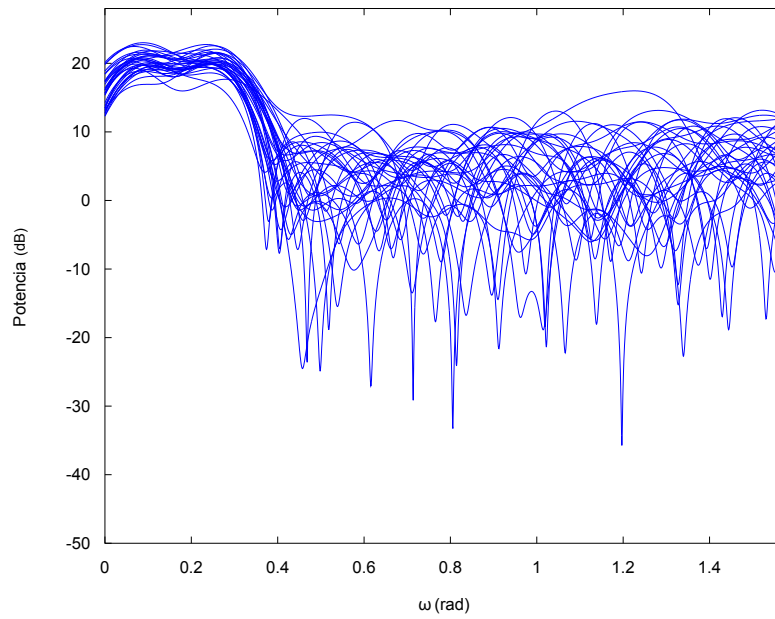
(a)



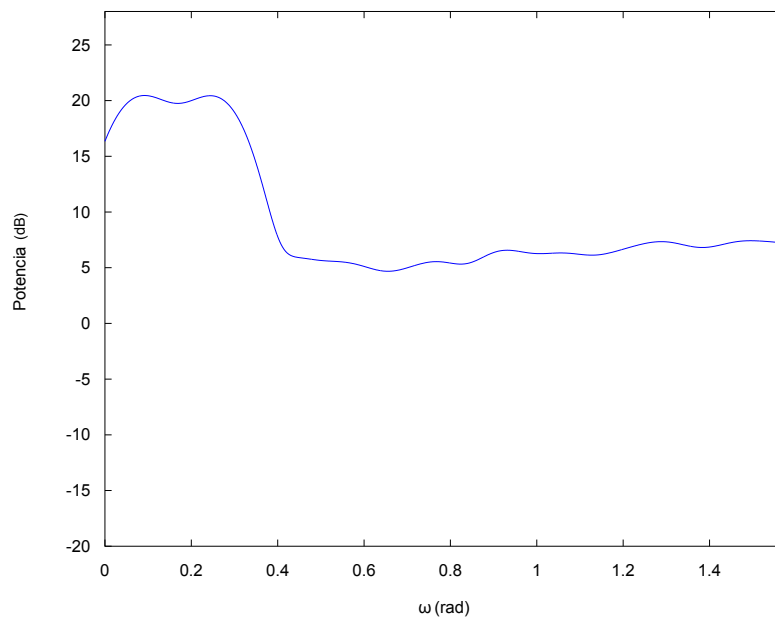
(b)

Figura 4.39: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Hann.

Fuente: Carlos Mejías, 2013



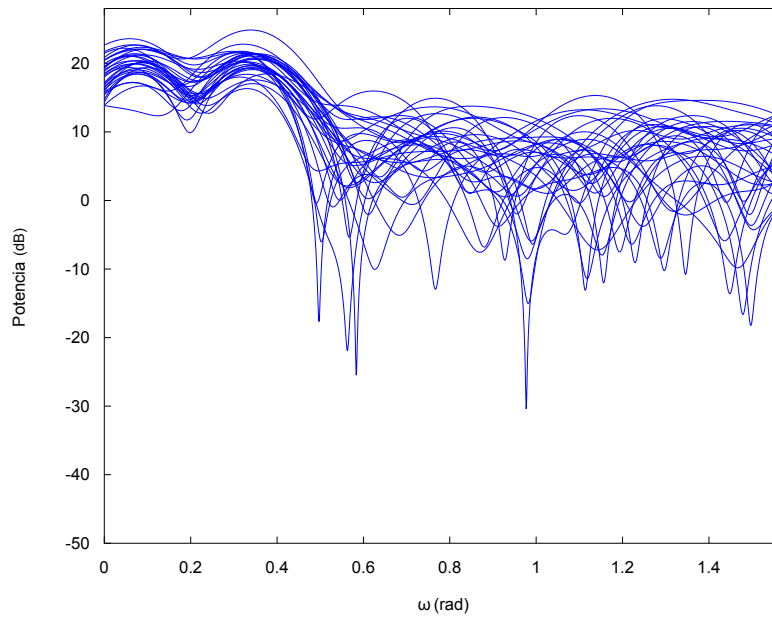
(a)



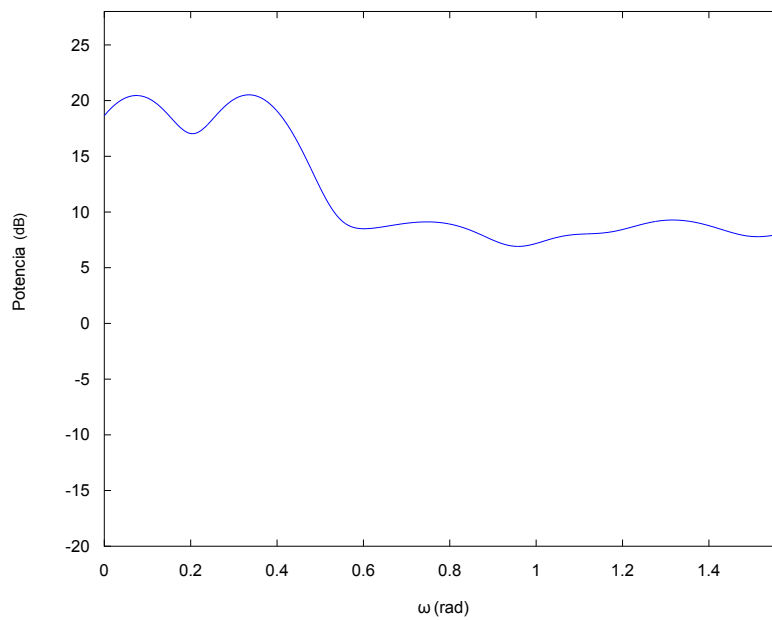
(b)

Figura 4.40: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Hamming.

Fuente: Carlos Mejías, 2013



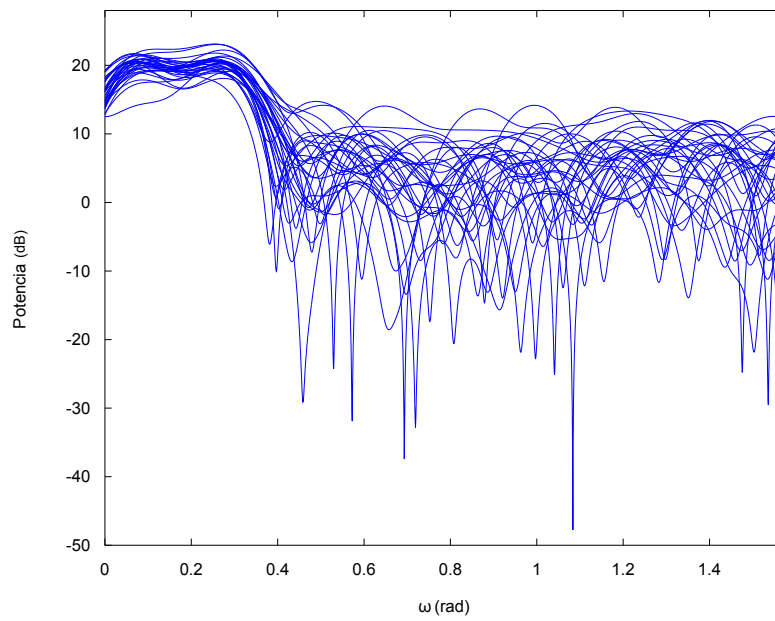
(a)



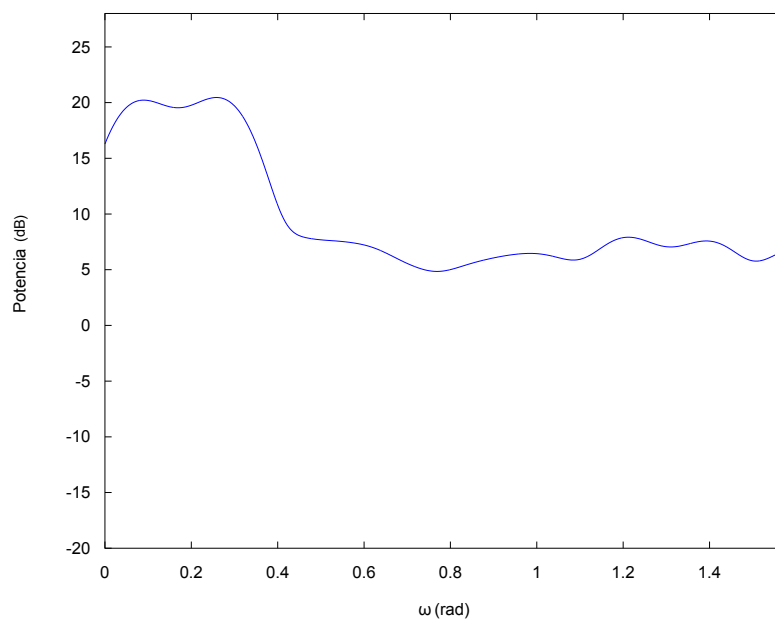
(b)

Figura 4.41: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Parzen.

Fuente: Carlos Mejías, 2013



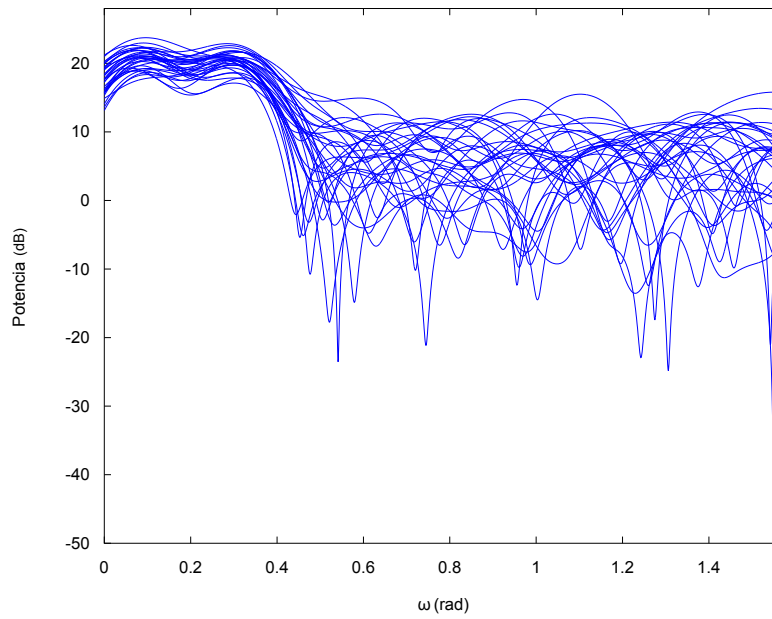
(a)



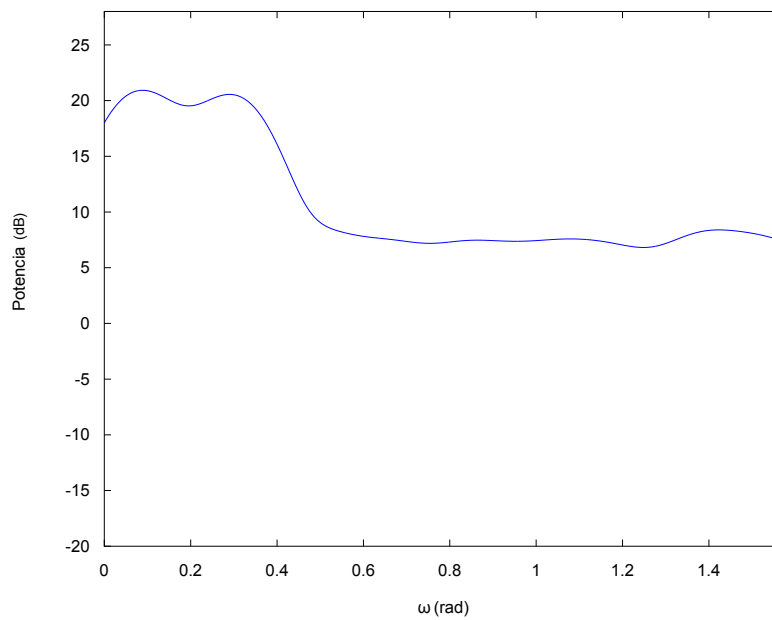
(b)

Figura 4.42: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana gaussiana con $\alpha = 2, 5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013



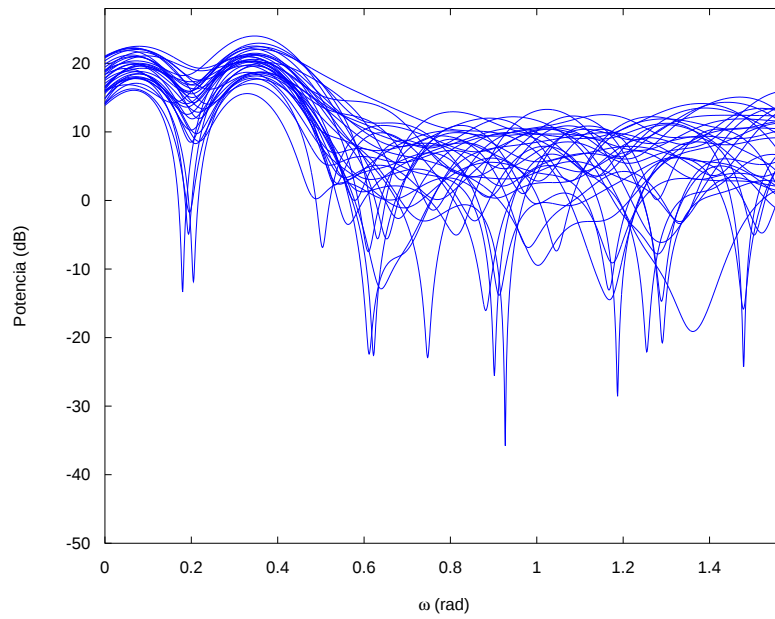
(a)



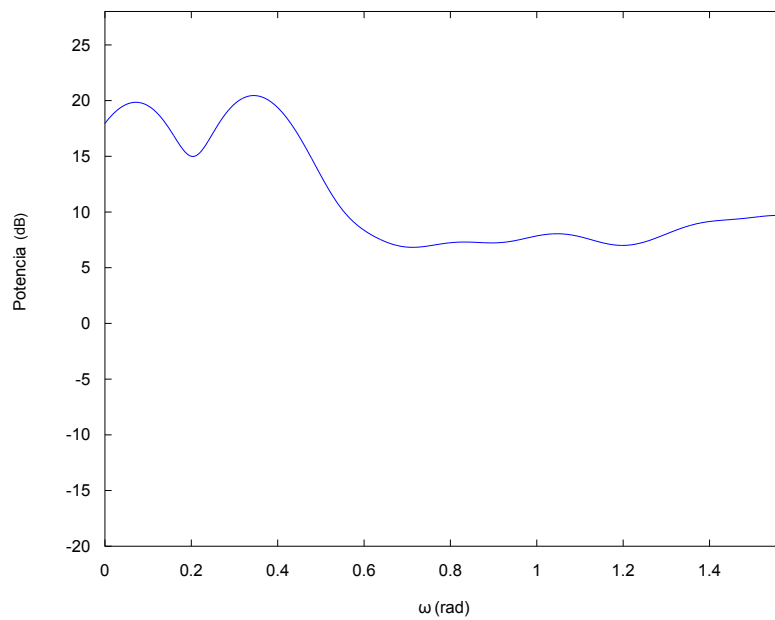
(b)

Figura 4.43: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana gaussiana con $\alpha = 3, 0$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013



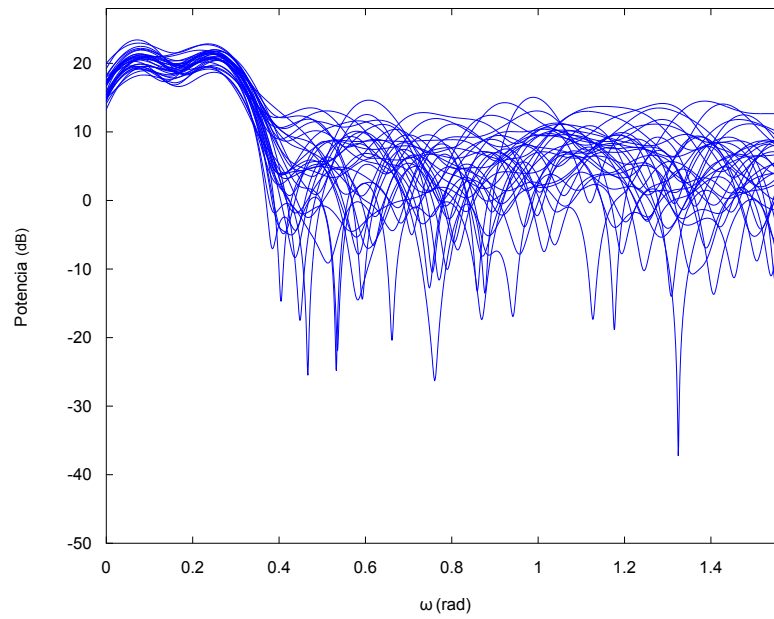
(a)



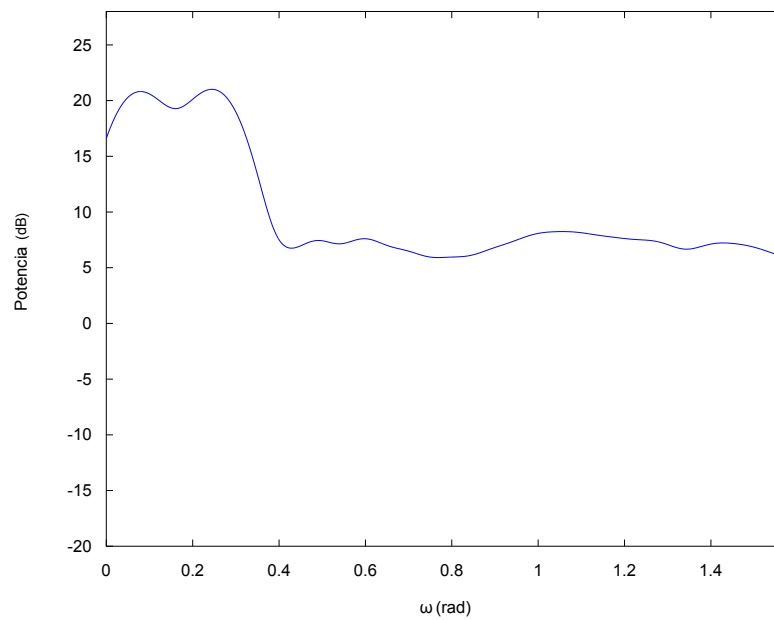
(b)

Figura 4.44: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana gaussiana con $\alpha = 3, 5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013



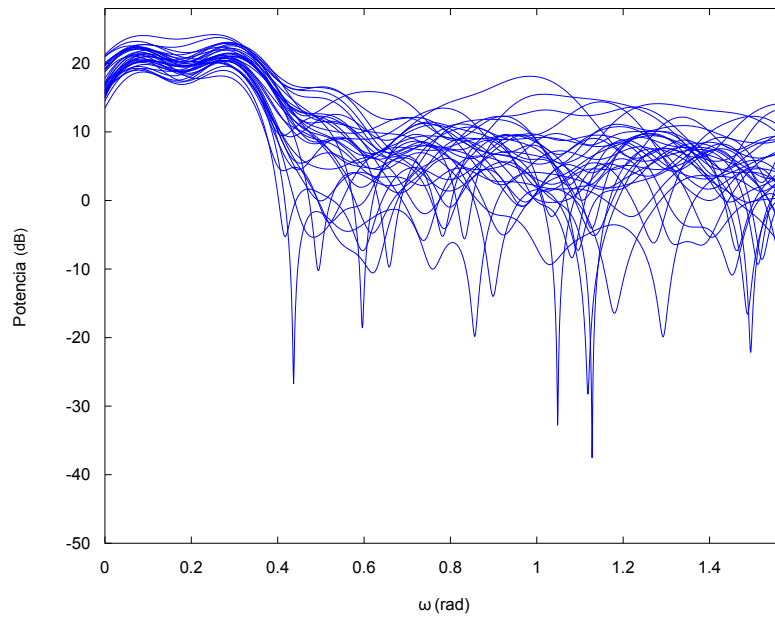
(a)



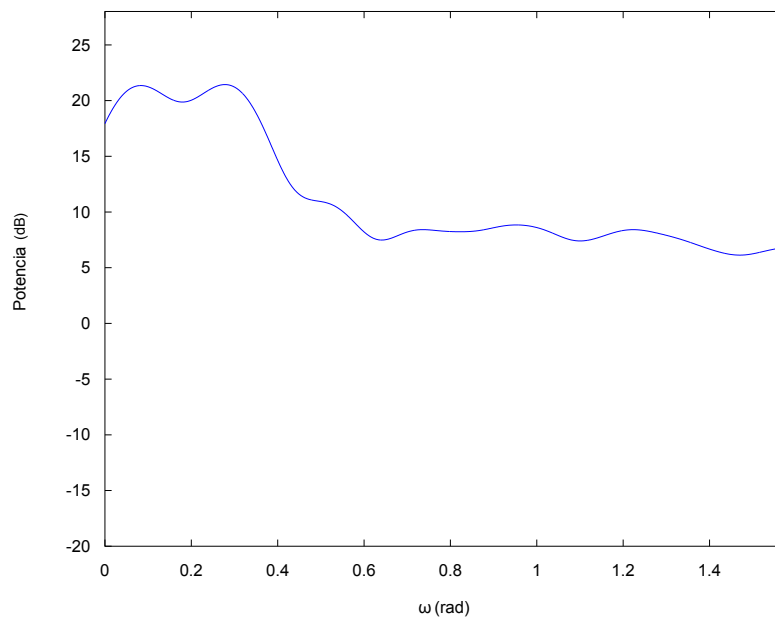
(b)

Figura 4.45: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana exponencial con $\alpha = 2$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013



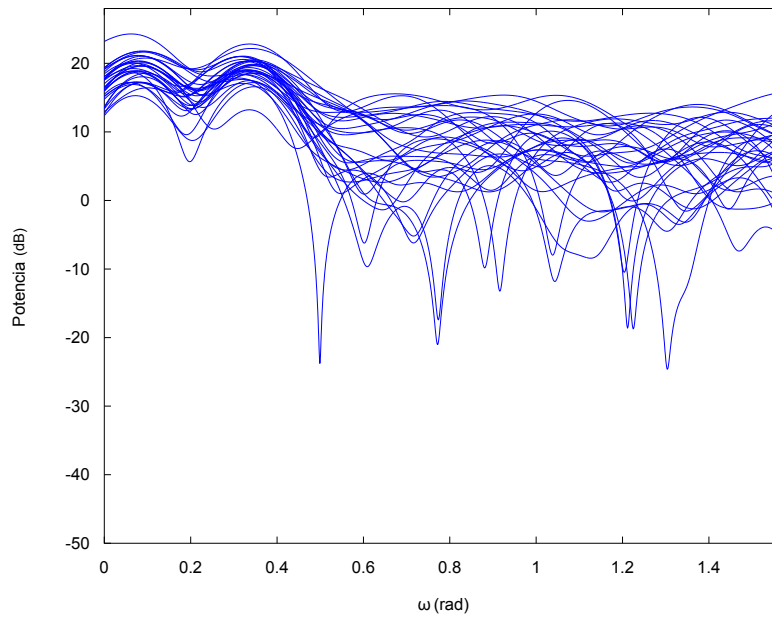
(a)



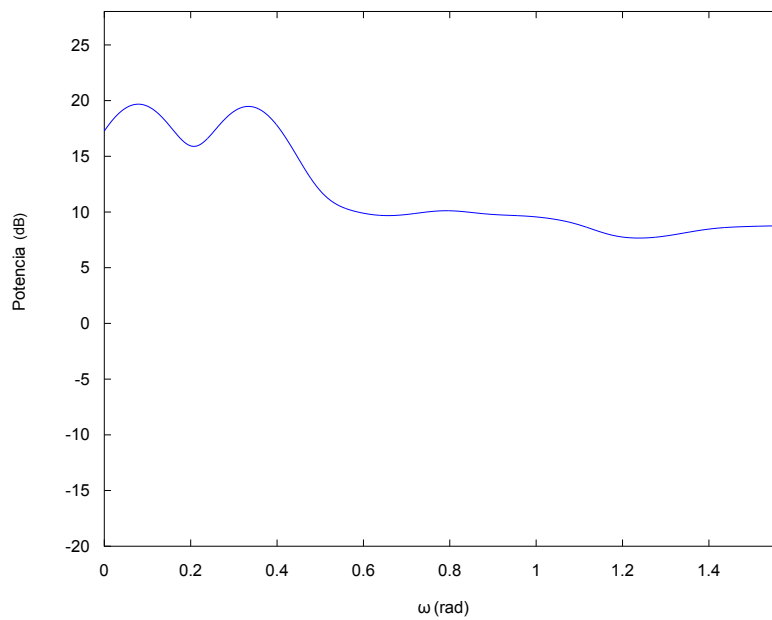
(b)

Figura 4.46: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana exponencial con $\alpha = 3$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013



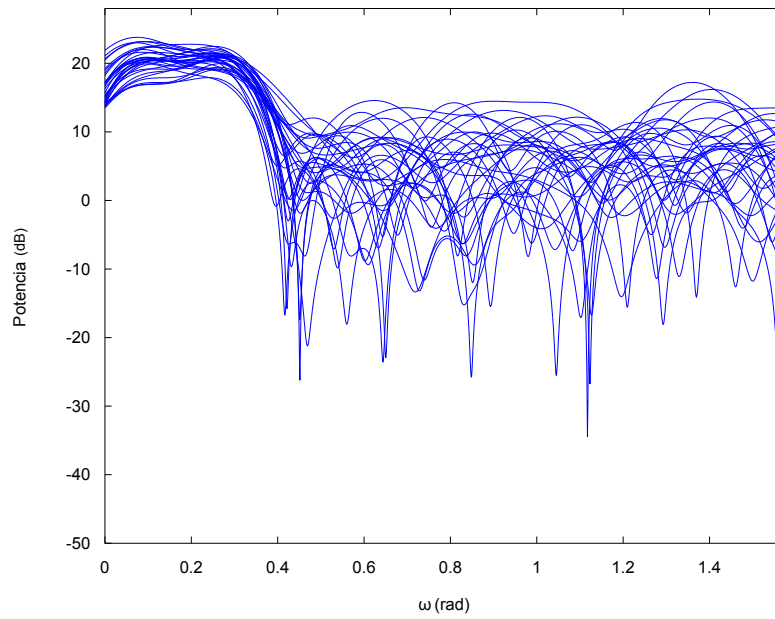
(a)



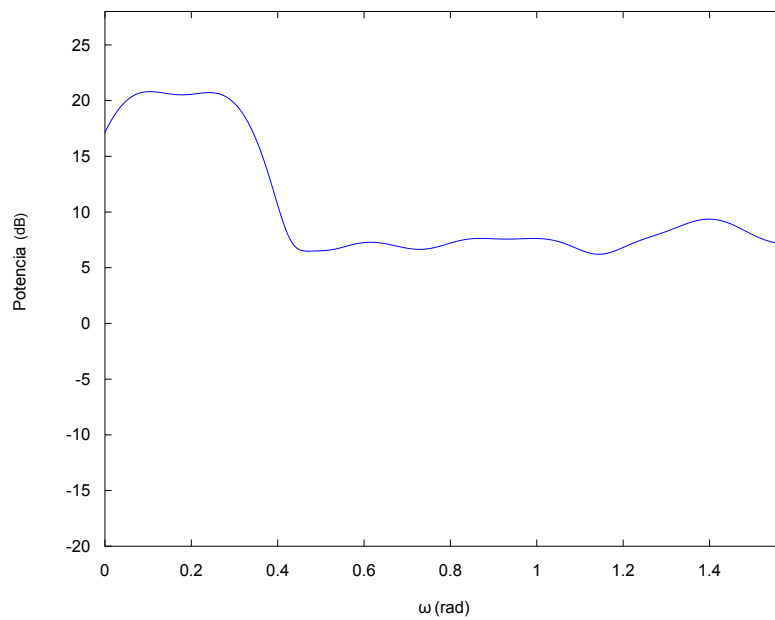
(b)

Figura 4.47: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana exponencial con $\alpha = 4$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013



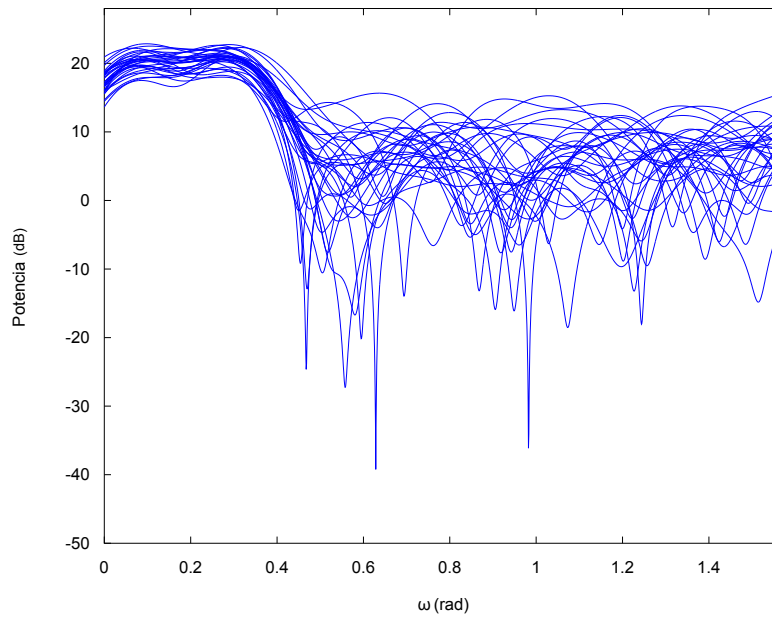
(a)



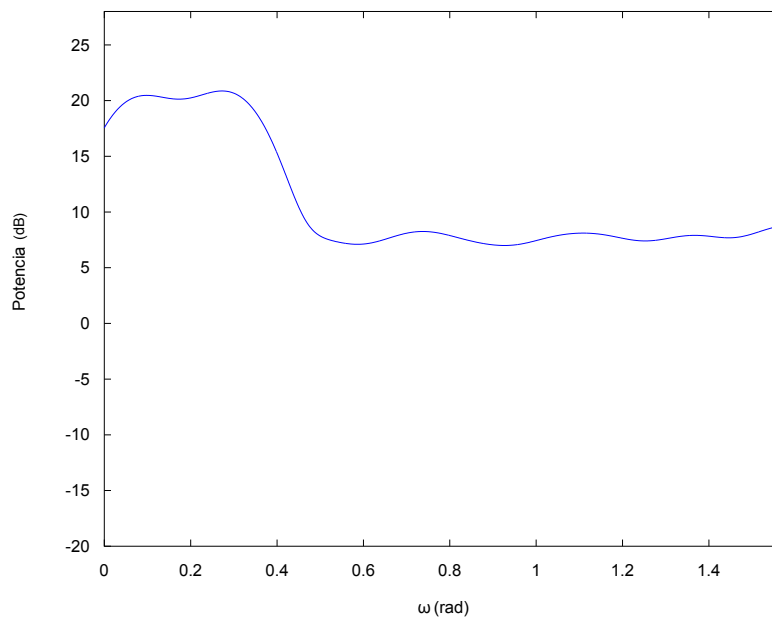
(b)

Figura 4.48: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Kaiser con $\alpha = 2, 0$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013



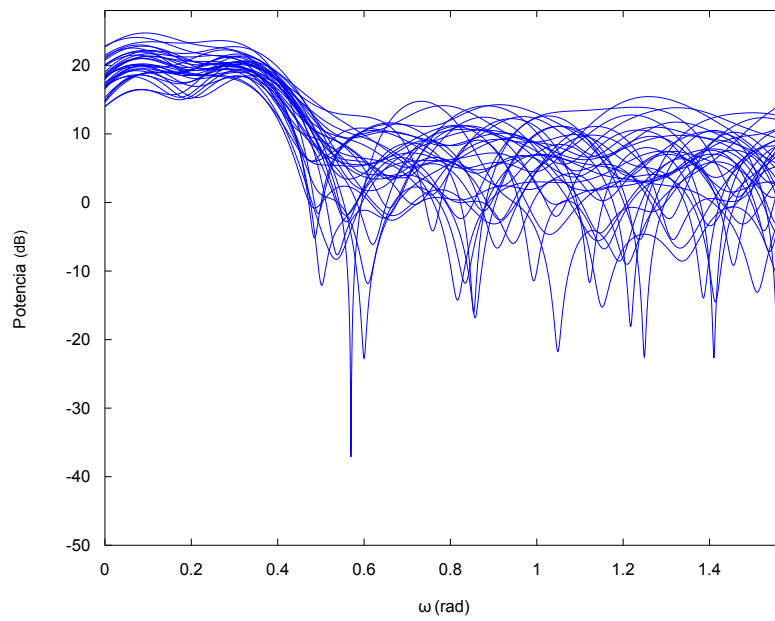
(a)



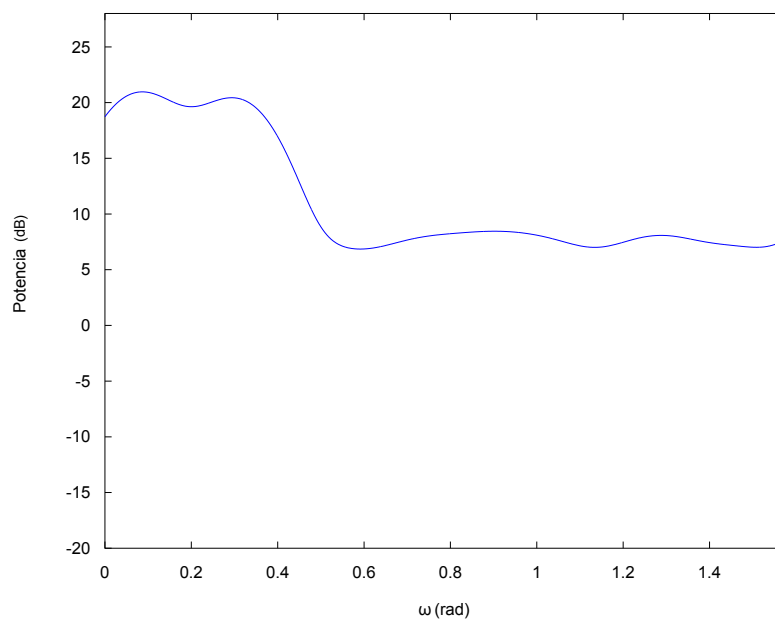
(b)

Figura 4.49: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Kaiser con $\alpha = 2, 5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013



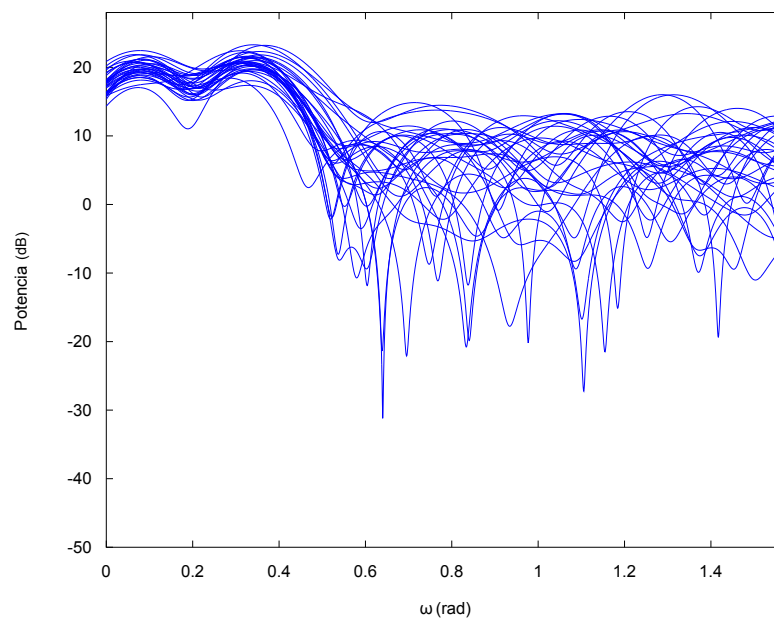
(a)



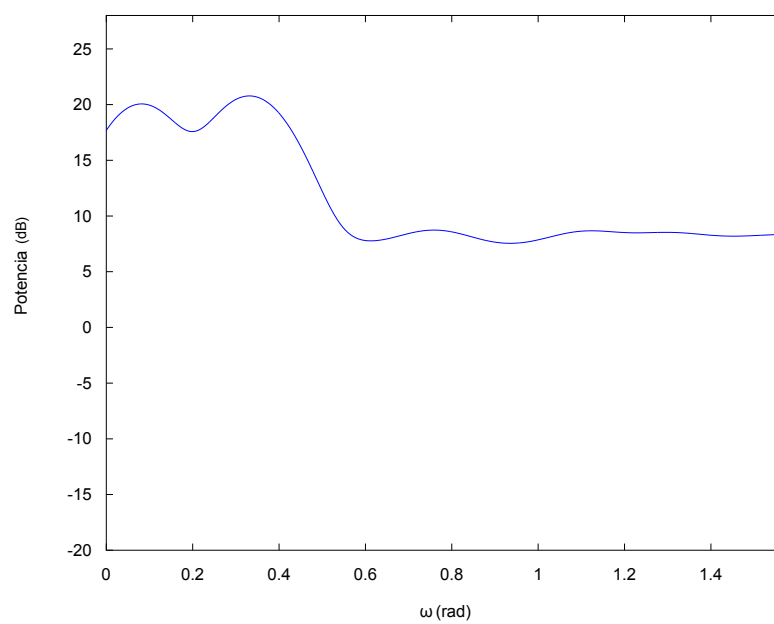
(b)

Figura 4.50: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Kaiser con $\alpha = 3, 0$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013



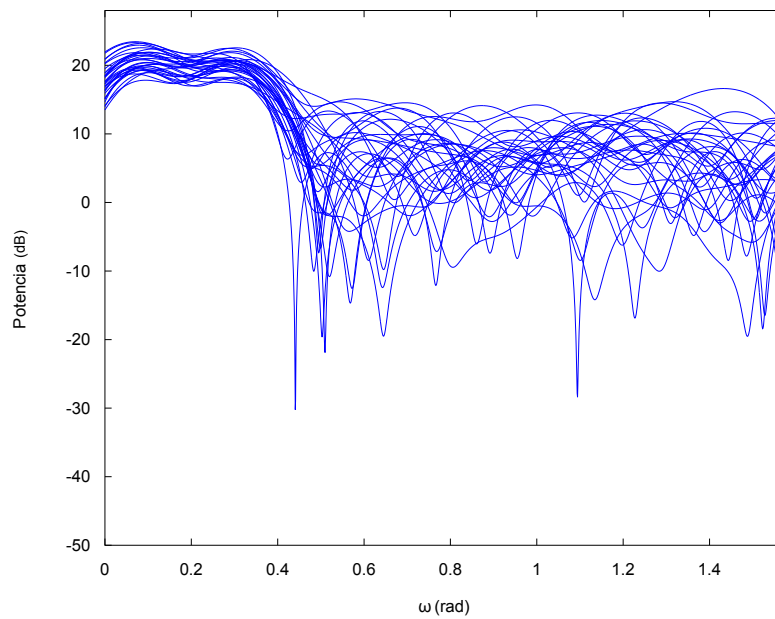
(a)



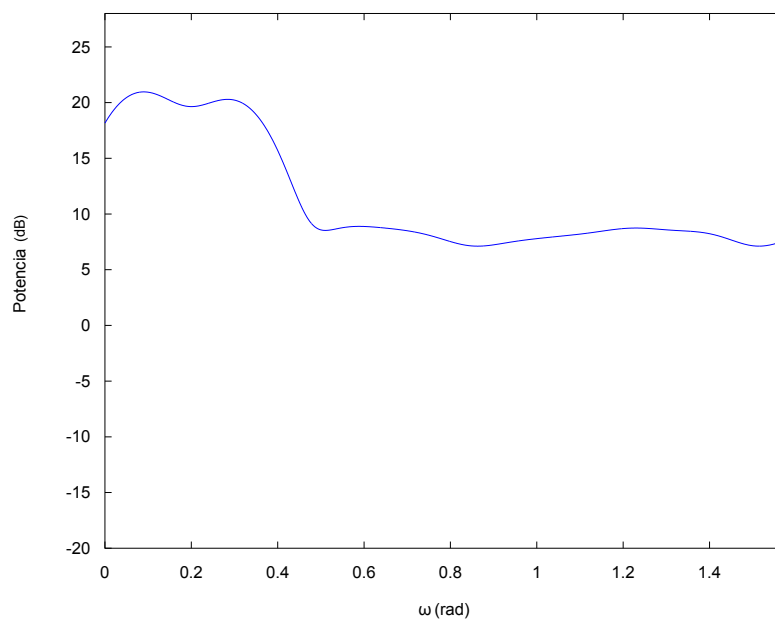
(b)

Figura 4.51: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Kaiser con $\alpha = 3, 5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013



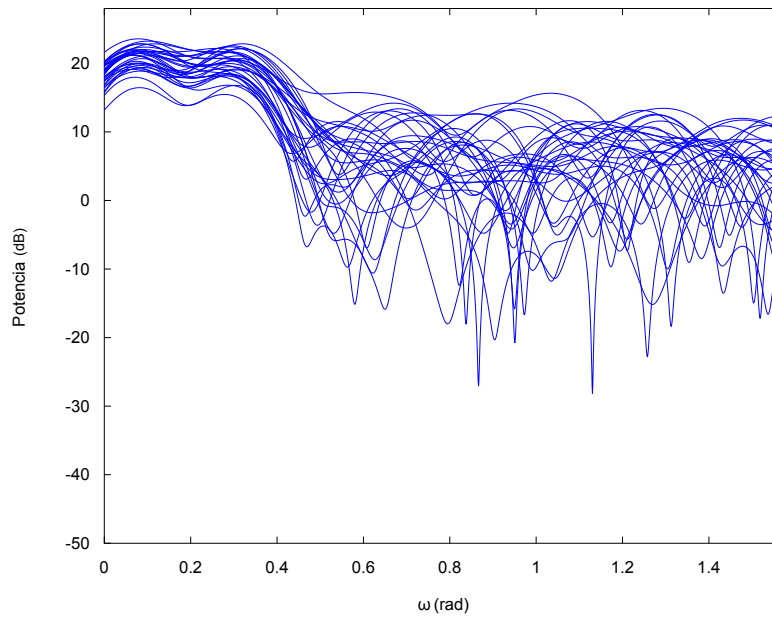
(a)



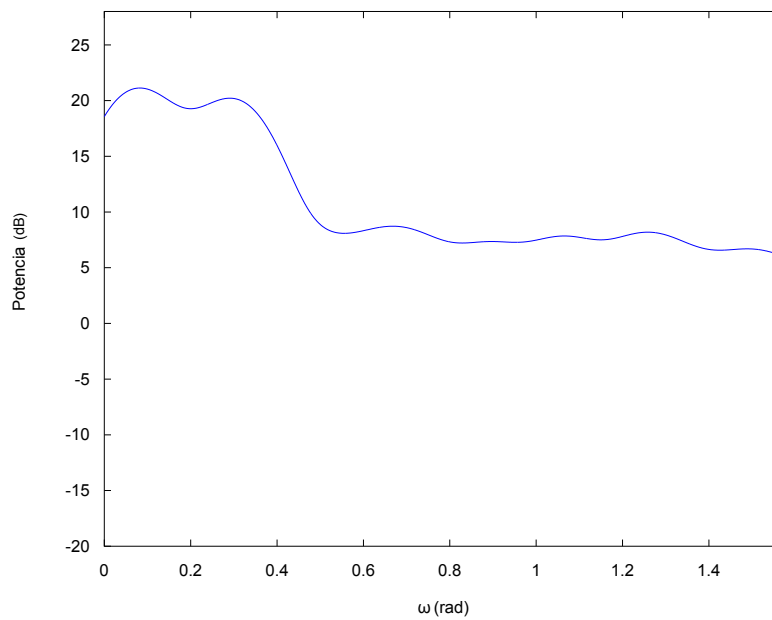
(b)

Figura 4.52: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Blackman.

Fuente: Carlos Mejías, 2013



(a)



(b)

Figura 4.53: Contenido espectral de dos exponenciales complejas separadas en frecuencia a una distancia igual al ancho de banda de 6 dB de la ventana de Blackman exacta.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

En las tablas 4.12, 4.14, 4.13 y 4.15 se muestran los promedios estadísticos para la potencia estimada y la frecuencia estimada de cada exponencial compleja obtenidos de la simulación.

En las tablas 4.12 y 4.13 se observa que los indicadores influyentes en la estimación de potencia es el $NPLL + DALL$ y la GC . En este sentido, aquellas ventanas que producen los menores errores en la estimación de potencia tienen un $NPLL$ menores a -60 dB o un $DALL$ menor a -18 dB/oct. Por consiguiente, la ventana de Kaiser con $\alpha = 3,5$ tiene la mejor estimación de amplitud, ya que posee el menor $NPLL + DALL$ igual a -88 dB. No obstante, a medida que el $NPLL + DALL$ aumenta, la Ganancia Coherente (GC) influye en el comportamiento, siempre y cuando esté cercana a 0,5. Cabe señalar que a partir de la ventana de Kaiser con $\alpha = 3,5$, el error generado por las diferentes ventanas se incrementa al menos en un 250 % respecto de la ventana de Kaiser y para el caso de la ventana rectangular y la ventana exponencial de $\alpha = 3$, el incremento es mayor al 5000 %. Esto significa que si el error cometido con la ventana de Kaiser con $\alpha = 3,5$ es de 0,06 %, entonces el error cometido por estas ventanas será mayor al 30 % respecto del valor real de potencia.

Hay que mencionar además que las ventanas con mayor error tienen una diferencia entre el $ABER$ y el $ABLP_{3dB}$ mayor al 6 %. Se debe agregar que al aumentar la densidad de potencia de ruido, el comportamiento de las ventanas no cambió significativamente; sin embargo, el indicador $ABER$ cercano a 2, es la condición más influyente para generar menor error de estimación de potencia.

Por otro lado, al examinar las tablas 4.12 y 4.13 se observó que las ventanas con menor $ABER$ generan menor varianza $\sigma_{P_A}^2$ y $\sigma_{P_B}^2$, por lo que al utilizar la ventana rectangular se obtuvo la menor varianza en la estimación de potencia. Resultados similares se obtuvieron con la ventana de Hamming, la ventana exponencial de $\alpha = 2$ y la ventana de Hann con incremento mayor al 10 % respecto de la varianza de la ventana rectangular. La ventana de Kaiser con $\alpha = 3,5$ y $\alpha = 3,0$, y la ventana exponencial de $\alpha = 3$ representan el grupo de ventanas con mayor varianza, alcanzando un incremento del 112 % respecto de la varianza de la ventana rectangular. Este comportamiento en este último

Cuadro 4.12: Valor medio (μ_{P_A}) y varianza ($\sigma_{P_A}^2$) de la estimación de la potencia promedio de la exponencial compleja de amplitud A contaminada con ruido blanco gaussiano con diferentes valores de desviación estándar.

Ventana	Desviación Estándar (σ_x)					
	1		10		15	
	μ_{P_A}	$\sigma_{P_A}^2$	μ_{P_A}	$\sigma_{P_A}^2$	μ_{P_A}	$\sigma_{P_A}^2$
Rectangular	133,604	4,152	133,997	206,43	135,284	465,53
Hann	107,097	5,186	108,237	251,76	111,202	569,42
Hamming	105,950	4,521	107,584	225,83	109,976	506,32
Parzen	98,175	5,898	99,979	295,80	102,317	671,31
Gaussiana	$\alpha = 2,5$	110,980	5,025	112,748	251,47	115,154
	$\alpha = 3,0$	108,816	5,803	110,568	290,71	112,871
	$\alpha = 3,5$	95,094	5,888	96,902	295,41	99,257
Exponencial	$\alpha = 2$	112,525	4,653	113,534	232,22	115,286
	$\alpha = 3$	137,092	7,212	138,555	359,67	140,537
	$\alpha = 4$	89,418	5,937	91,169	296,97	93,475
Kaiser	$\alpha = 2,0$	110,912	5,276	112,181	258,95	115,009
	$\alpha = 2,5$	110,085	5,789	110,874	284,12	113,564
	$\alpha = 3,0$	104,967	6,001	105,901	295,65	108,339
	$\alpha = 3,5$	99,365	6,102	100,687	301,87	103,088
Blackman	105,243	5,695	107,110	285,37	109,568	645,24
Blackman Exacta	105,872	5,619	107,677	281,58	110,056	636,48

Fuente: Mejías, 2013

grupo se debe a que dichas ventanas tienen una $GC < 0,4$. Cabe señalar que al aumentar la densidad de potencia de ruido (σ_w^2), el parámetro $\frac{ABER}{GC}$ se vuelve mas influyente debido a que las ventanas con menor valor de dicha relación generan menor varianza; mientras que las ventanas con $\frac{ABER}{GC} > 5$ generan mayor varianza.

Desde el punto de vista de estimación frecuencial, se debe considerar que algunas de las frecuencias fijadas para ω_B no se encuentran en la base ortogonal, por lo que existe una diferencia en el comportamiento de las ventanas al estimar ω_A y ω_B debido a las pérdidas por rizado que se presenta en cada caso. Al examinar las tablas 4.14 y 4.15 se observa que la ventana de Kaiser con $\alpha = 3,5$ genera el menor error de estimación en la frecuencia ω_A , no obstante, este error es mayor para la frecuencia ω_B . Por otro lado, la ventana de Kaiser con $\alpha = 2,0$ y la ventana rectangular permite estimar ω_B con el menor error de estimación, pero el error cometido para ω_A es mayor al obtenido por la ventana de Kaiser de $\alpha = 3,5$. En este sentido, las ventanas con mayor exactitud en la

Cuadro 4.13: Valor medio (μ_{P_B}) y varianza ($\sigma_{P_B}^2$) de la estimación de la potencia promedio de la exponencial compleja de amplitud B contaminada con ruido blanco gaussiano con diferentes valores de desviación estándar.

Ventana	Desviación Estándar (σ_x)					
	1		10		15	
	μ_{P_B}	$\sigma_{P_B}^2$	μ_{P_B}	$\sigma_{P_B}^2$	μ_{P_B}	$\sigma_{P_B}^2$
Rectangular	133,608	4,244	134,044	211,41	135,337	477,47
Hann	107,105	5,225	109,937	238,29	114,224	541,00
Hamming	105,954	4,545	108,066	219,18	111,310	484,89
Parzen	98,186	5,910	100,106	288,86	103,483	617,41
Gaussiana	$\alpha = 2,5$	110,986	5,058	113,404	243,09	116,858
	$\alpha = 3,0$	108,827	5,794	111,138	279,22	114,834
	$\alpha = 3,5$	95,105	5,911	96,981	289,31	100,319
Exponencial	$\alpha = 2$	112,529	4,634	113,558	231,16	115,455
	$\alpha = 3$	137,102	7,194	138,620	357,96	140,782
	$\alpha = 4$	89,430	5,741	91,267	283,21	94,547
Kaiser	$\alpha = 2,0$	110,922	5,292	113,778	246,94	117,874
	$\alpha = 2,5$	110,095	5,797	112,402	265,86	116,805
	$\alpha = 3,0$	104,979	5,987	106,606	279,32	110,755
	$\alpha = 3,5$	99,376	6,108	100,920	291,78	104,624
Blackman	105,254	5,685	107,989	268,86	112,136	591,51
Blackman Exacta	105,883	5,612	108,412	267,53	112,335	587,75

Fuente: Mejías, 2013

estimación de ω_A , tienen una GC cercana a 0,37 y/o un $ABER$ cercano a 2 y las ventanas con mayor error tienen una GC cercana a 0,5. Sin embargo, al momento de analizar el comportamiento para ω_B , se observa que los parámetros influyentes en una estimación con menor error es una GC cercana a 0,5 y las que generan mayor error tienen un $ABER$ cercano a 2. Por consiguiente, las ventanas que permiten estimar con menor error ω_A , estiman con mayor error ω_B y viceversa, aquellas ventanas que estiman con menor error ω_B , estiman con mayor error ω_A .

En relación con la varianza $\sigma_{\omega_A}^2$ y $\sigma_{\omega_B}^2$ mostradas en las tablas 4.14 y 4.15 respectivamente, se obtuvo que la ventana rectangular proporciona la menor varianza en la estimación frecuencial, mientras que la ventana de Kaiser con $\alpha = 2,5$ y $\alpha = 2,0$, y la ventana de Hann generan la mayor varianza, con un incremento mayor al 3000 % respecto del obtenido con la ventana rectangular. Cabe señalar que la familia de ventanas exponenciales permiten obtener las menores varianzas seguidas de la ventana rectangular.

Cuadro 4.14: Valor medio (μ_{ω_1}) y varianza ($\sigma_{\omega_1}^2$) de la estimación de frecuencia para una exponencial compleja de amplitud A contaminada con ruido blanco gaussiano con diferentes valores de desviación estándar σ_{ω_1} .

	Desviación Estándar (σ_x)									
	1			10			15			
Ventana	μ_{ω_1}	$\sigma_{\omega_1}^2(10^{-6})$	$e_{\omega_1}(\%)$	μ_{ω_1}	$\sigma_{\omega_1}^2(10^{-6})$	$e_{\omega_1}(\%)$	μ_{ω_1}	$\sigma_{\omega_1}^2(10^{-6})$	$e_{\omega_1}(\%)$	
Rectangular	0,3099 π	0,0092	0,845	0,3099 π	0,1172	0,828	0,3099 π	0,2670	0,831	
Hann	0,3188 π	0,3267	2,026	0,3219 π	9,5523	3,006	0,3223 π	15,3063	3,142	
Hamming	0,3174 π	0,1514	1,575	0,3180 π	3,8862	1,770	0,3189 π	9,7260	2,037	
Parzen	0,3115 π	0,0872	0,325	0,3115 π	1,1307	0,312	0,3115 π	2,6158	0,311	
Gaussiana	$\alpha = 2,5$	0,3176 π	0,1659	1,647	0,3182 π	3,6719	1,827	0,3190 π	9,3082	2,070
	$\alpha = 3,0$	0,3160 π	0,1181	1,107	0,3161 π	1,6557	1,165	0,3164 π	4,5696	1,248
	$\alpha = 3,5$	0,3106 π	0,0811	0,609	0,3106 π	1,0491	0,600	0,3106 π	2,4155	0,605
Exponencial	$\alpha = 2$	0,3136 π	0,0529	0,351	0,3136 π	0,7121	0,361	0,3138 π	2,3133	0,415
	$\alpha = 3$	0,3142 π	0,0487	0,538	0,3143 π	0,6277	0,569	0,3143 π	1,5140	0,590
	$\alpha = 4$	0,3119 π	0,0579	0,202	0,3117 π	0,7531	0,202	0,3119 π	1,7470	0,200
Kaiser	$\alpha = 2,0$	0,3215 π	0,4733	2,880	0,3222 π	8,5010	3,111	0,3227 π	13,8519	3,251
	$\alpha = 2,5$	0,3195 π	0,2936	2,245	0,3193 π	4,6966	2,172	0,3199 π	10,5377	2,369
	$\alpha = 3,0$	0,3156 π	0,1541	0,993	0,3152 π	1,8933	0,858	0,3154 π	5,0749	0,934
	$\alpha = 3,5$	0,3123 π	0,1074	0,078	0,3120 π	1,2945	0,161	0,3120 π	3,0587	0,152
Blackman	0,3161 π	0,1558	1,144	0,3163 π	2,3295	1,220	0,3167 π	6,4665	1,342	
Blackman Exacta	0,3161 π	0,1404	1,138	0,3163 π	2,0476	1,208	0,3166 π	5,7088	1,317	

Fuente: Mejías, 2013

Cuadro 4.15: Valor medio (μ_{ω_2}) y varianza ($\sigma_{\omega_2}^2$) de la estimación de frecuencia para una exponencial compleja de amplitud B contaminada con ruido blanco gaussiano con diferentes valores de desviación estándar σ_x .

	Desviación Estándar (σ_x)									
	1			10			15			
Ventana	μ_{ω_2}	$\sigma_{\omega_2}^2 (10^{-6})$	$e_{\omega_2} (\%)$	μ_{ω_2}	$\sigma_{\omega_2}^2 (10^{-6})$	$e_{\omega_2} (\%)$	μ_{ω_2}	$\sigma_{\omega_2}^2 (10^{-6})$	$e_{\omega_2} (\%)$	
Rectangular	0,3530 π	0,0086	6,501	0,3529 π	0,1105	6,495	0,3529 π	0,2522	6,496	
Hann	0,3687 π	0,4311	7,248	0,3595 π	50,8808	4,598	0,3584 π	60,1884	4,274	
Hamming	0,3645 π	0,1502	6,898	0,3618 π	19,1028	6,117	0,3597 π	32,6010	5,522	
Parzen	0,3945 π	0,0875	11,753	0,3934 π	14,5109	11,480	0,3902 π	58,7055	10,555	
Gaussiana	$\alpha = 2,5$	0,3680 π	0,164	7,341	0,3644 π	27,5126	6,310	0,3621 π	43,7457	5,631
	$\alpha = 3,0$	0,3803 π	0,1182	9,240	0,3771 π	33,2391	8,348	0,3736 π	66,1155	7,334
	$\alpha = 3,5$	0,3975 π	0,0814	12,276	0,3967 π	12,6600	12,054	0,3936 π	57,210	11,177
Exponencial	$\alpha = 2$	0,3648 π	0,0518	7,553	0,3648 π	1,0806	7,540	0,3641 π	6,4157	7,346
	$\alpha = 3$	0,3768 π	0,0482	9,057	0,3766 π	1,6258	9,014	0,3755 π	12,9860	8,699
	$\alpha = 4$	0,3950 π	0,0578	11,761	0,3941 π	14,0924	14,700	0,3908 π	58,1851	10,594
Kaiser	$\alpha = 2,0$	0,3655 π	7,8958	6,365	0,3591 π	47,7233	3,526	0,3579 π	56,6920	4,188
	$\alpha = 2,5$	0,3742 π	0,5345	7,886	0,3680 π	60,6417	5,193	0,3654 π	79,1426	5,349
	$\alpha = 3,0$	0,3841 π	0,1548	9,788	0,3809 π	43,6726	8,006	0,3767 π	84,2049	7,699
	$\alpha = 3,5$	0,3931 π	0,1078	11,456	0,3917 π	22,7469	10,997	0,3879 π	72,0829	10,007
Blackman	0,3808 π	0,1561	9,288	0,3762 π	47,5193	7,988	0,3726 π	79,8722	6,932	
Blackman Exacta	0,3802 π	0,1405	9,212	0,3763 π	40,7590	8,097	0,3727 π	73,0621	7,060	

Fuente: Mejías, 2013

Teniendo en cuenta el comportamiento anterior de la varianza $\sigma_{\omega_A}^2$ y $\sigma_{\omega_B}^2$, se observó que las ventanas con menor varianza tiene un factor $\frac{ABER}{ABLP_{3dB}} > 1,07$ y/o una PR cercana a 4. Así mismo, el grupo de ventanas con GC cercana a 0,5 generan la mayor varianza $\sigma_{\omega_A}^2$ y $\sigma_{\omega_B}^2$.

4.4.5. Estimación del Espectro de Potencia de Señales Aleatorias Estacionarias.

4.4.5.1. Estimación espectral de una secuencia de ruido blanco.

Para analizar el comportamiento de cada ventana para un secuencia de ruido blanco, se calculó el error cuadrático medio del espectro de potencia del ruido (σ_x^2) y el espectro de la señal enventanada para cada realización. Debido a que el ruido es ergódico, entonces se podrá utilizar los promedios temporales para obtener los promedios estadísticos, es decir, se obtendrá el promedio del error cuadrático medio (μ_{ECM}) y la varianza (σ_{ECM}^2) de todas las realizaciones. Para este experimento, se utilizaron ventanas de longitud $N = 128$ muestras y 2^{15} realizaciones, las cuales son suficientes para analizar un comportamiento promedio invariante del error.

Al comparar el espectro obtenido de la señal enventanada con el espectro real del ruido gaussiano, se obtuvo de la tabla 4.16 que tanto μ_{ECM} como σ_{ECM}^2 dependen de la GC , es decir, aquellas ventanas con menor error y varianza con aquellas con GC cercana a 1. Por lo tanto, a medida que la GC disminuye, mayor será el error y la varianza generada. En este sentido, la ventana rectangular al tener una GC igual a 1, genera en promedio el menor error cuadrático medio y la menor varianza. En cambio, las ventanas exponenciales con $\alpha = 3$ y $\alpha = 4$ generan los mayores valores μ_{ECM} y σ_{ECM}^2 debido a que tienen los menores valores de GC . Hay que mencionar, además que el comportamiento de la ventana es independiente de la longitud de la ventana, es decir, a medida que se aumentó dicha longitud se obtuvo que la ventana rectangular generaba en promedio el menor error cuadrático medio.

Cuadro 4.16: Valor medio (μ_{ECM}) y la varianza (σ_{ECM}^2) del error cuadrático medio de la estimación del ruido blanco gaussiano con desviación estándar $\sigma_x = 1$.

	128		256	
	μ_{ECM}	σ_{ECM}^2	μ_{ECM}	σ_{ECM}^2
Rectangular	258,462	6915,3	513,5412	14004,9
Hann	259,9974	14102,1	516,1149	28120,0
Hamming	259,8392	13323,3	515,8694	26390,1
Parzen	261,3118	19619,6	517,4279	38536,8
Gaussiana	$\alpha = 2,5$	260,1643	14647,9	516,2187
	$\alpha = 3,0$	260,8859	17718,5	516,9800
	$\alpha = 3,5$	261,6230	20861,2	517,7675
Exponencial	$\alpha = 2$	260,3403	14724,2	516,5150
	$\alpha = 3$	262,0207	21749,7	518,6124
	$\alpha = 4$	263,7879	29530,3	520,8610
Kaiser	$\alpha = 2,0$	260,2003	14889,2	516,2644
	$\alpha = 2,5$	260,6319	16724,5	516,7113
	$\alpha = 3,0$	261,0268	18401,0	517,1167
	$\alpha = 3,5$	261,3922	19957,6	517,5028
Blackman	260,7931	17402,6	516,8871	34287,1
Blackman Exacta	260,7393	17162,7	516,8305	33826,7

Fuente: Mejías, 2013

En el conjunto formado por las figuras desde la 4.54 hasta la 4.69 se observó que al inventanar el ruido, la mayoría de los espectros de potencia obtenidos tienen formas similares, por lo que la diferencia entre el espectro obtenido y el espectro real no es apreciable. Sin embargo, el espectro de potencia obtenido por la ventana rectangular presenta mayor cantidad de oscilaciones respecto al obtenido en el resto de las ventanas. Este comportamiento se debe a que la ventana rectangular presenta el ancho de banda para el lóbulo principal, característica que permite una mayor resolución en frecuencia y detectar componentes espectrales cercanas en frecuencia. Para el resto de las ventanas, las variaciones o distorsiones que presenta el espectro de potencia del ruido por efecto del inventanado son mínimas y no tienen relevancia al momento de caracterizar el espectro de dicho ruido.

No obstante, aún cuando el uso de diferente ventanas no mejora la estimación de ruido, se evidenció menores oscilaciones en el espectro de potencia promediado cuando se utilizó ventanas diferentes a la rectangular, ya que esta última presentó mayores oscilaciones alrededor del espectro de potencia real.

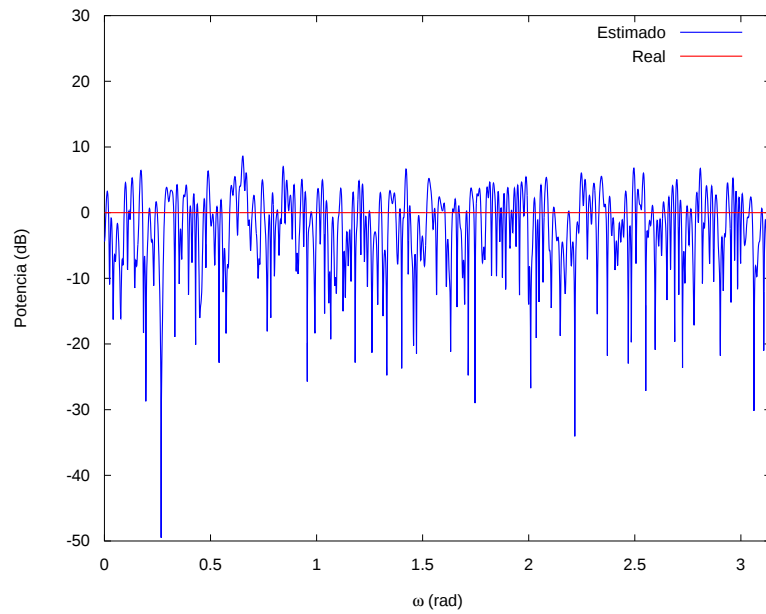


Figura 4.54: Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana rectangular.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

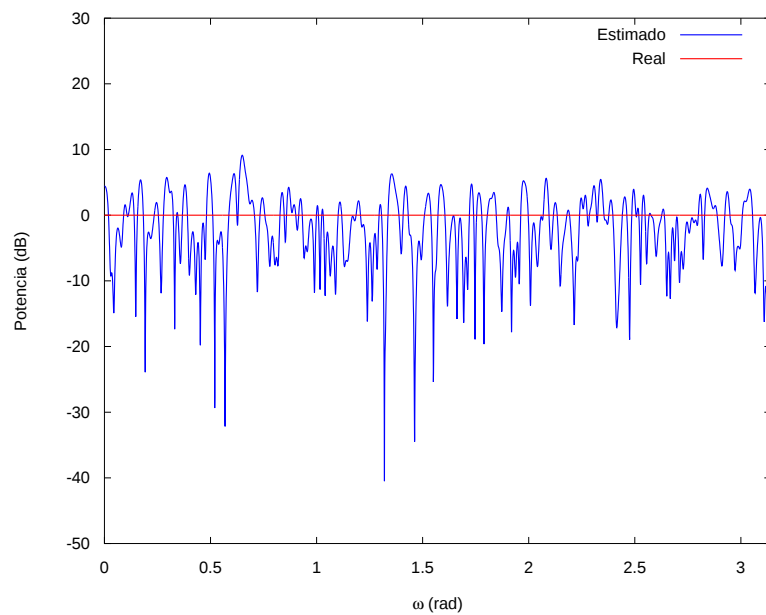


Figura 4.55: Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana de Hann.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

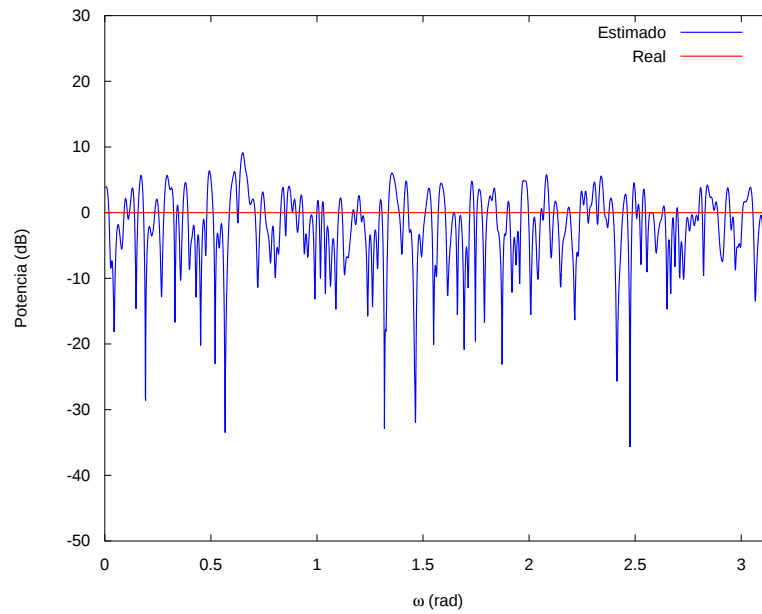


Figura 4.56: Espectro de potencia y estimado del ruido blanco utilizando la ventana de Hamming.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

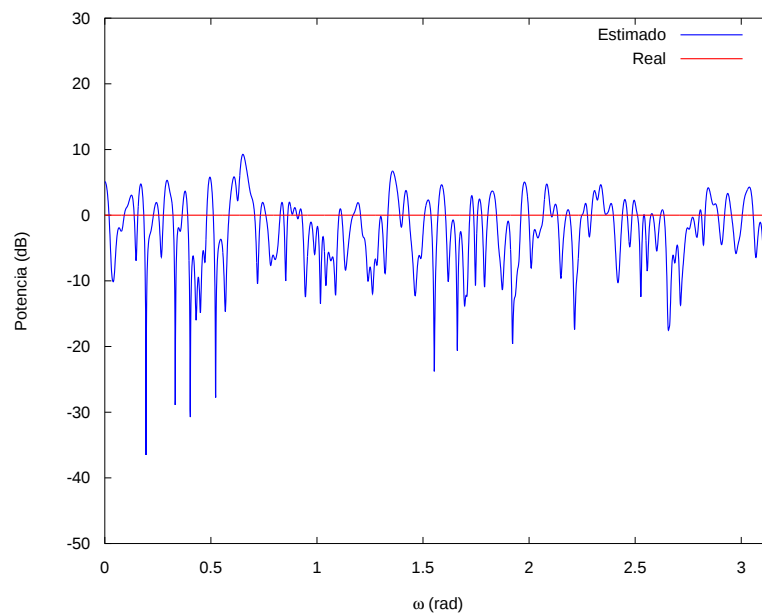


Figura 4.57: Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana de Parzen.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

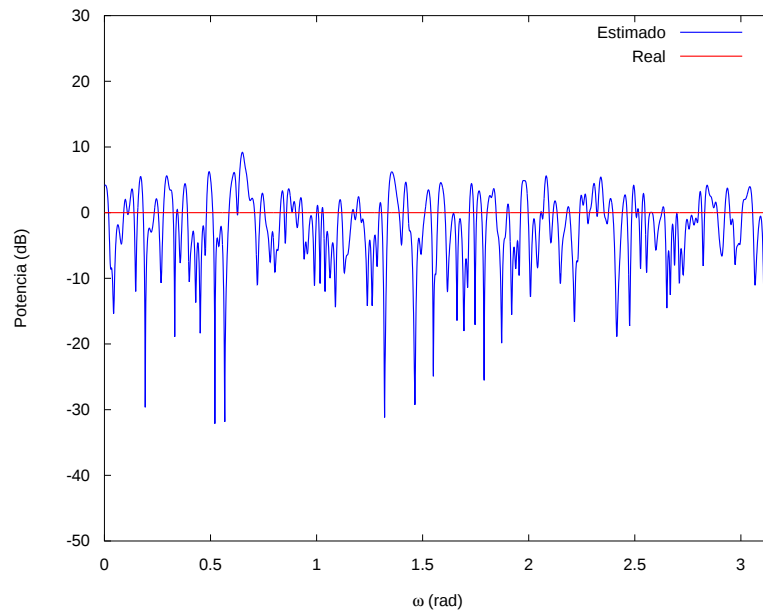


Figura 4.58: Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana gaussiana de $\alpha = 2,5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

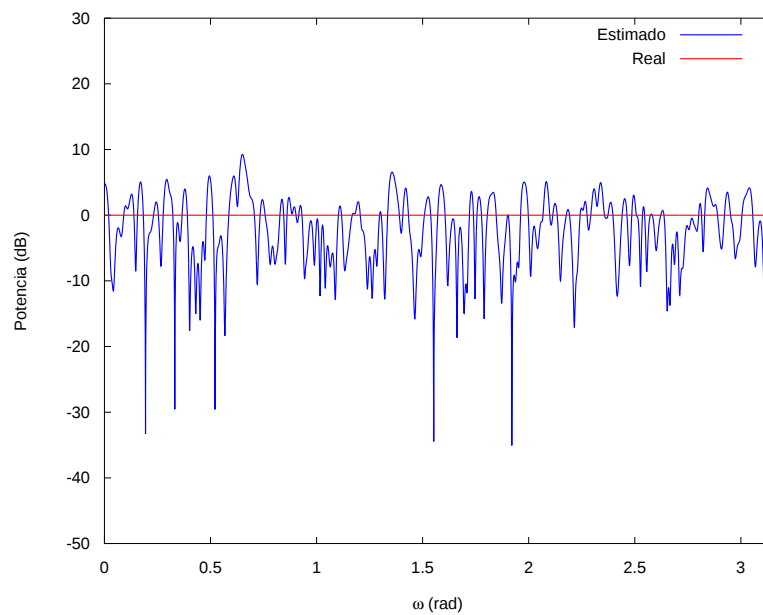


Figura 4.59: Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana gaussiana de $\alpha = 3$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

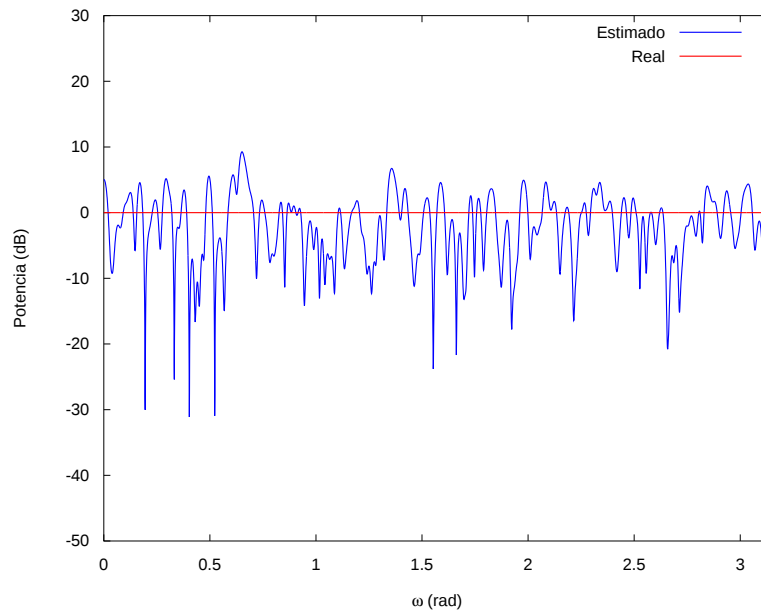


Figura 4.60: Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana gaussiana de $\alpha = 3, 5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

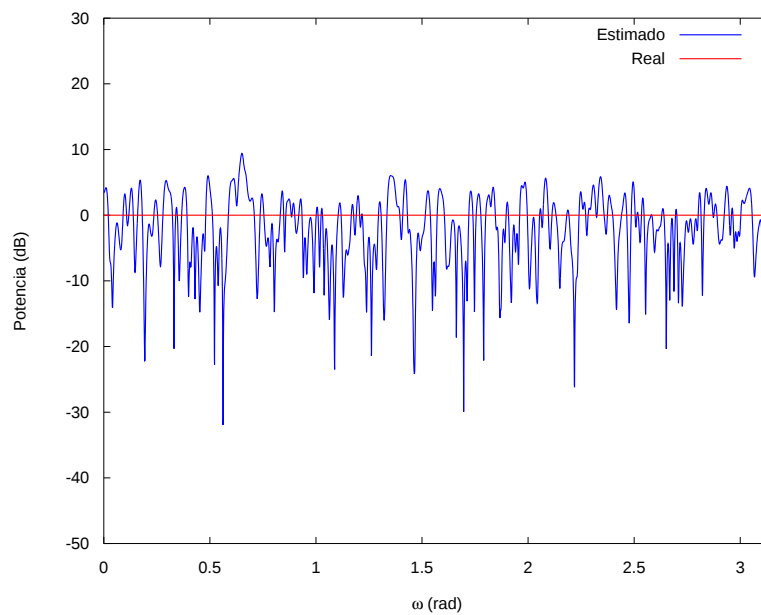


Figura 4.61: Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana exponencial de $\alpha = 2$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

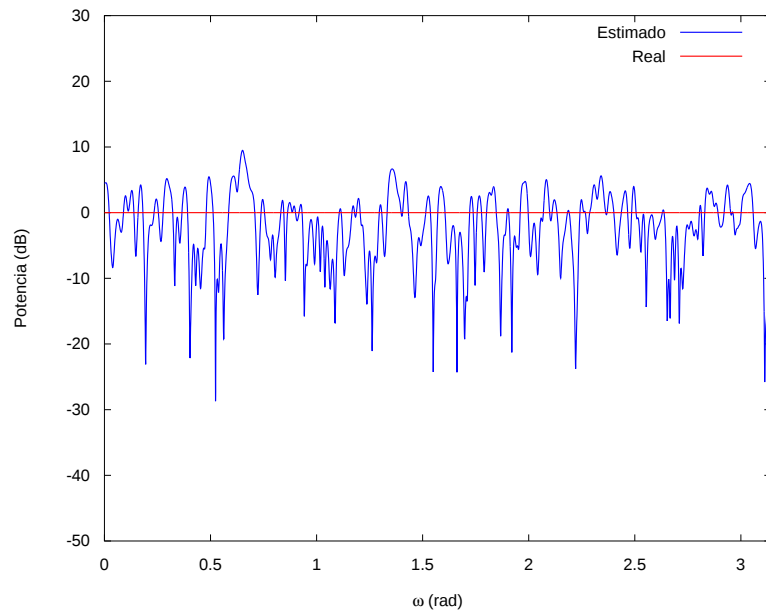


Figura 4.62: Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana exponencial de $\alpha = 3$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

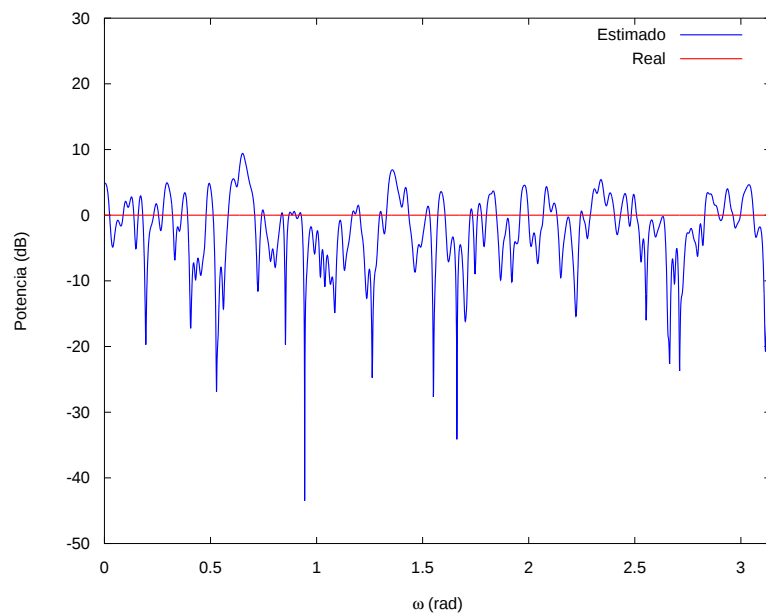


Figura 4.63: Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana exponencial de $\alpha = 4$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

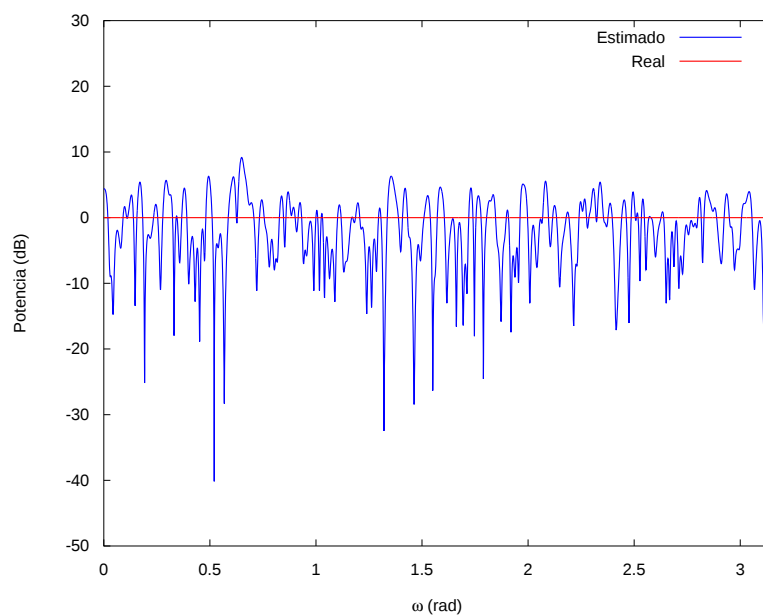


Figura 4.64: Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 2$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

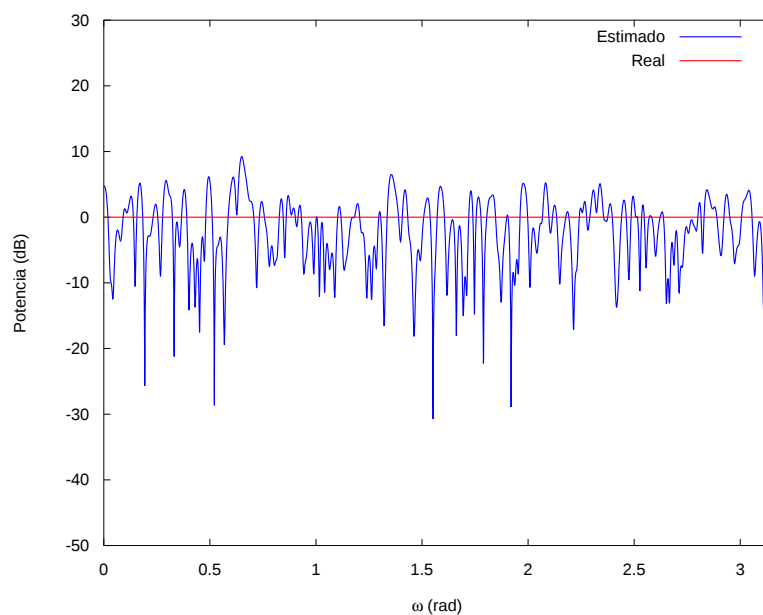


Figura 4.65: Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 2,5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

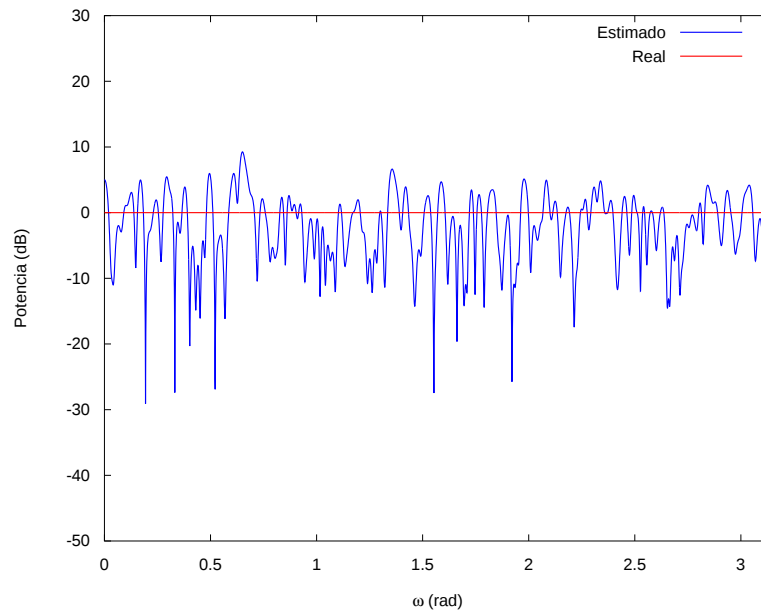


Figura 4.66: Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 3$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

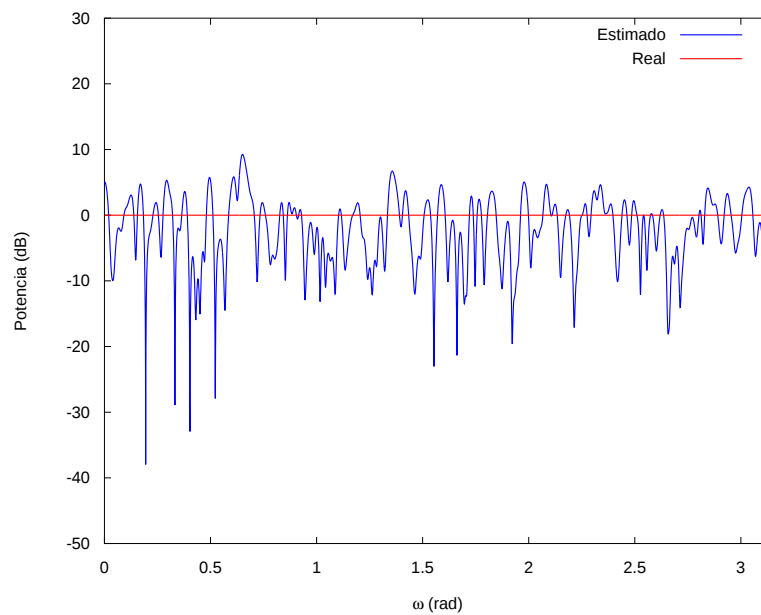


Figura 4.67: Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 3, 5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

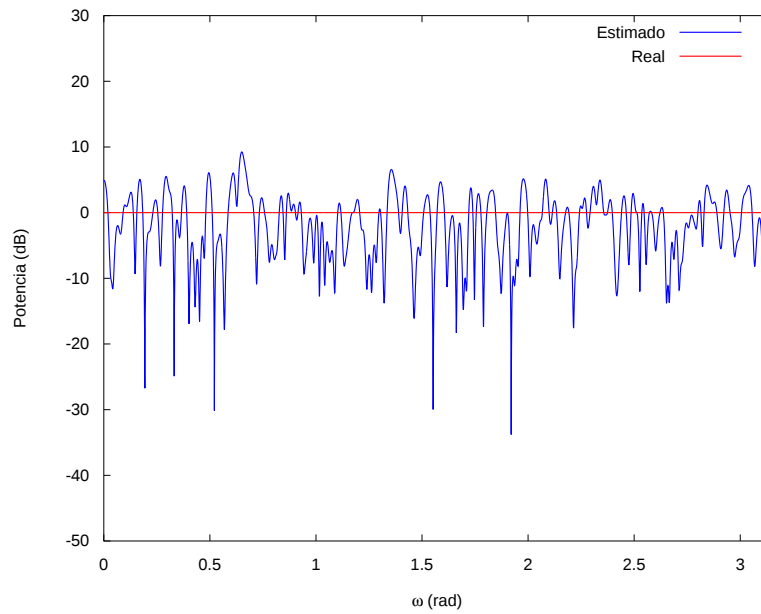


Figura 4.68: Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana de Blackman.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

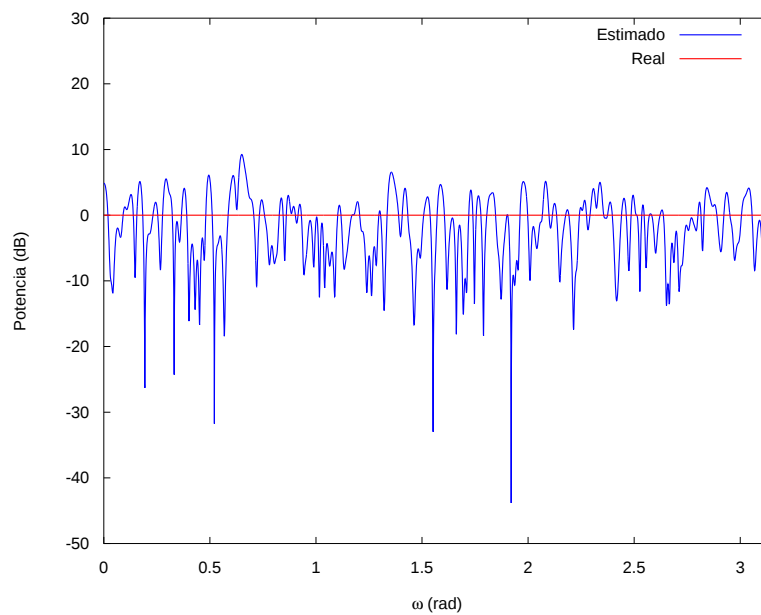


Figura 4.69: Espectro de potencia real y estimado del ruido blanco utilizando la ventana de Blackman exacta.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

4.4.5.2. Estimación espectral de una secuencia aleatoria utilizando modelos AR (Auto-Regresivo).

Para este experimento se utilizaron modelos Auto-Regresivos (AR), los cuales al introducir ruido blanco gaussiano como entrada del sistema, permitieron modelar procesos aleatorios ergódicos con diferentes rangos dinámicos para analizar el efecto frecuencial del enventanado sobre el espectro de potencia estimado. Para ello, se utilizó el periodograma modificado debido a las diferentes ventanas aplicadas.

Así mismo, si se considera que las señales son estacionarias, el cálculo en cada realización del error cuadrático medio depende del espectro de potencia real ($R_x(e^{j\omega})$) descrito en la ecuación 4.42 y el espectro de potencia estimado ($\hat{R}_x(e^{j\omega})$) de la señal enventanada.

$$R_x(e^{j\omega}) = \frac{\sigma_x^2}{\left| \sum_{k=0}^p a_k e^{j\omega k} \right|^2} \quad (4.42)$$

donde los valores de a_k representan los coeficientes del modelo AR.

Para el primer escenario, se utilizó un proceso AR(2) con coeficientes $a = \begin{bmatrix} 1 & -0,75 & 0,5 \end{bmatrix}^T$, el cual tiene un espectro de potencia con un rango dinámico aproximadamente de 15 dB. La longitud de cada ventana es de $N = 128$ muestras, considerando 2^{17} realizaciones para asegurar la convergencia del comportamiento promedio del error cuadrático medio (μ_{ECM}) y varianza promedio del error cuadrático medio (σ_{ECM}^2). Los resultados del experimento mostrados en la tabla 4.17 evidencian que las ventanas con menor μ_{ECM} tienen un $\frac{ABER}{ABLP_{3dB}} > 1,07$. En este sentido, la ventana rectangular genera el menor μ_{ECM} , seguido de la familia de ventanas exponenciales con un aumento del 2% en el error respecto de la ventana rectangular. Para el resto de las ventanas, la relación $\frac{ABER}{ABLP_{3dB}}$ tiene valores similares por lo que su comportamiento se ve influenciado por el indicador $ABER$, es decir, las ventanas con mayor error μ_{ECM} tienen un $ABER$ cercano a 1 y $\frac{ABER}{ABLP_{3dB}} < 1,07$. En consecuencia, la ventana gaussiana con $\alpha = 2,5$, la ventana de Hann y la ventana de Hamming

generan mayor μ_{ECM} , teniendo un aumento cercano al 2,4 % respecto de la ventana rectangular.

Por otro lado, al aumentar la longitud de la ventana, se observó que la relación $\frac{ABER}{ABLP_{3dB}}$ deja de influir en el comportamiento de las ventanas. Por consiguiente, para ventanas con longitud mayor a 512 muestras, el $ABER$ es el parámetro que define el comportamiento de las ventanas. Esto quiere decir, que las ventanas con menor $ABER$ generan menor μ_{ECM} , por lo tanto, la ventana rectangular genera el menor μ_{ECM} , mientras que la ventana exponencial con $\alpha = 4$ genera el mayor μ_{ECM} . Sin embargo, hay que señalar que a medida que se aumenta la longitud de la ventana, el error cuadrático medio disminuye y la diferencia entre el espectro estimado y el espectro real no supera el 0,7 % respecto de la ventana rectangular para el caso de $N = 512$ muestras.

Con respecto a la varianza promedio del error cuadrático medio (σ_{ECM}^2) se observó que las ventanas con mayor Ganancia Coherente (GC) generan una menor varianza, es decir, la ventana rectangular al tener la mayor GC igual a 1, presenta la menor varianza. En este sentido, las ventanas con mayor σ_{ECM}^2 tienen bajos valores de GC ; por consiguiente, la familia de ventanas exponenciales con α igual a 3 y 4 generan la mayor varianza registrada en el experimento, incrementando dicho valor en más del 200 % respecto al obtenido con la ventana rectangular. Se debe señalar que no se registró un cambio en el comportamiento de la varianza promedio en función de la longitud de la ventana.

En el conjunto formado por las figuras desde la 4.70 hasta la 4.85 no se observaron diferencias apreciables entre el espectro obtenido y el espectro real. Sin embargo, al utilizar la ventana rectangular, se pudo detallar el espectro componentes espectrales cercanas entre sí, las cuales quedan ocultas en el resto de las ventanas.

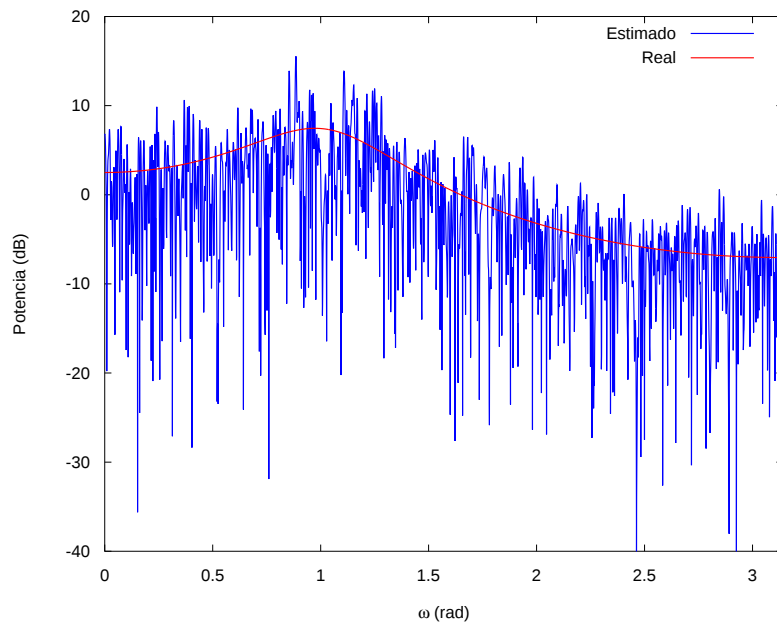


Figura 4.70: Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana rectangular.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

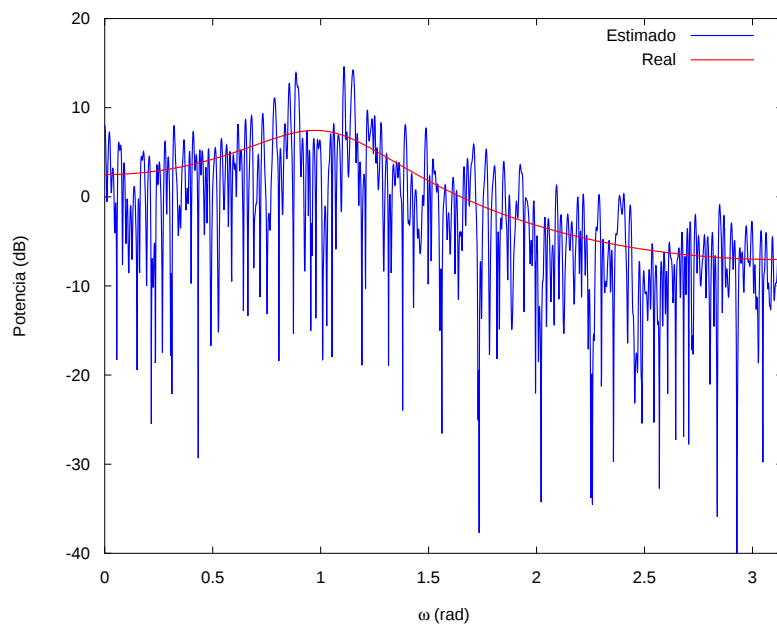


Figura 4.71: Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana de Hann.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

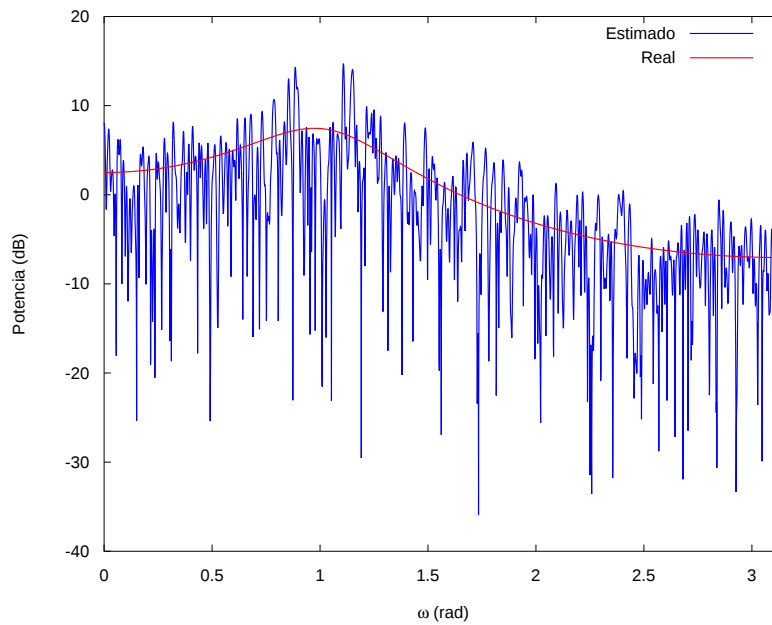


Figura 4.72: Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana de Hamming.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

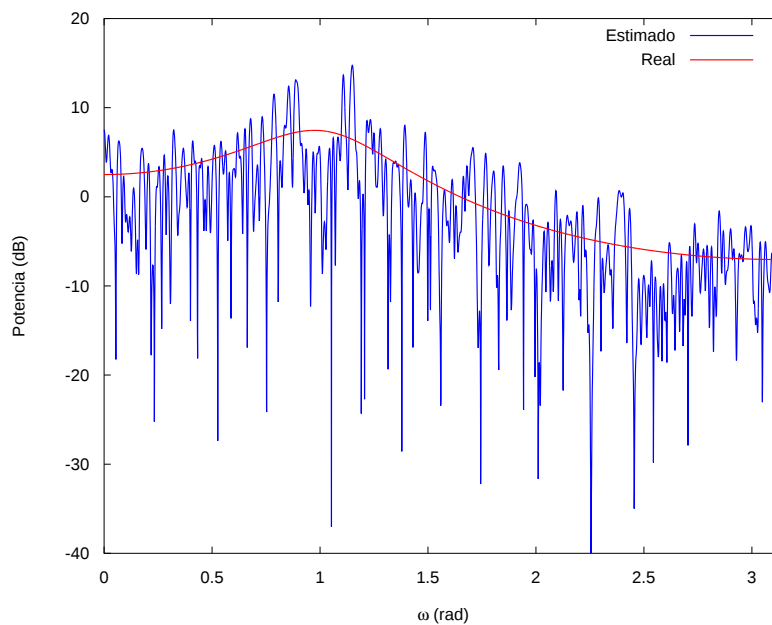


Figura 4.73: Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana de Parzen.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

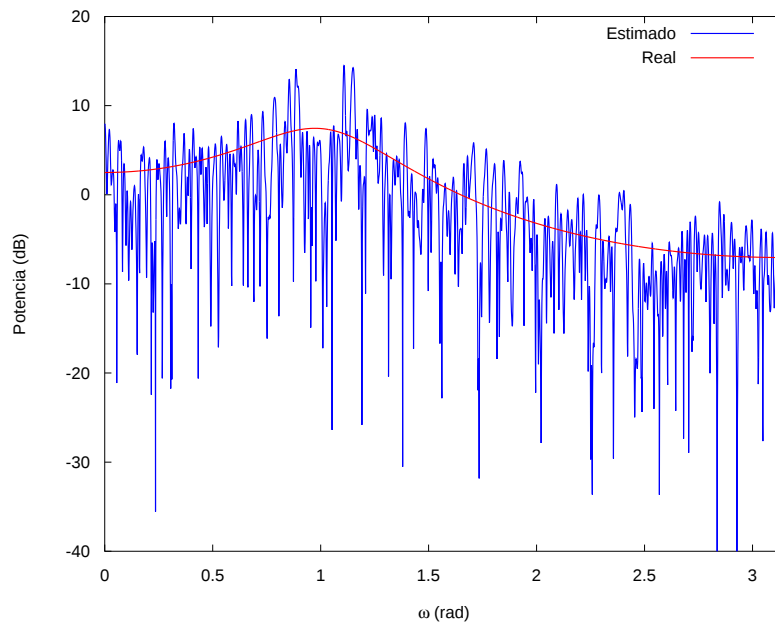


Figura 4.74: Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana gaussiana con $\alpha = 2,5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

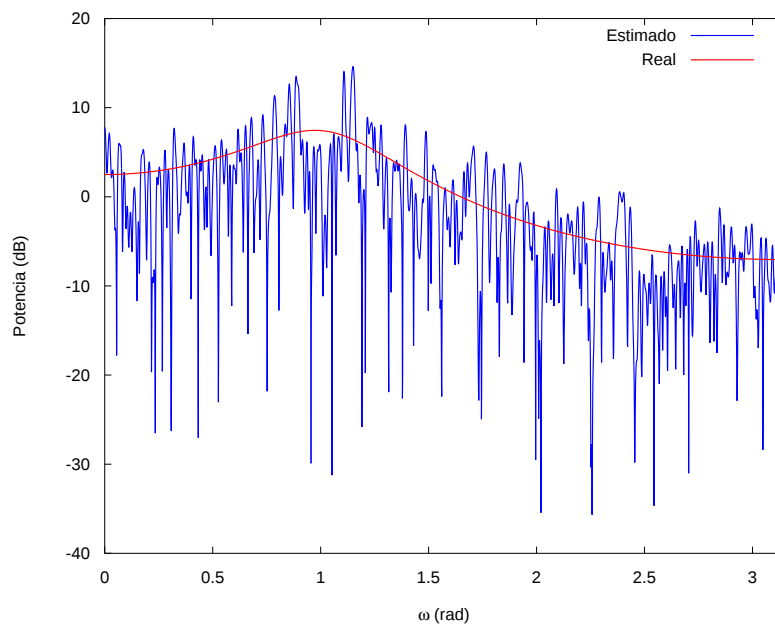


Figura 4.75: Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana gaussiana con $\alpha = 3$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

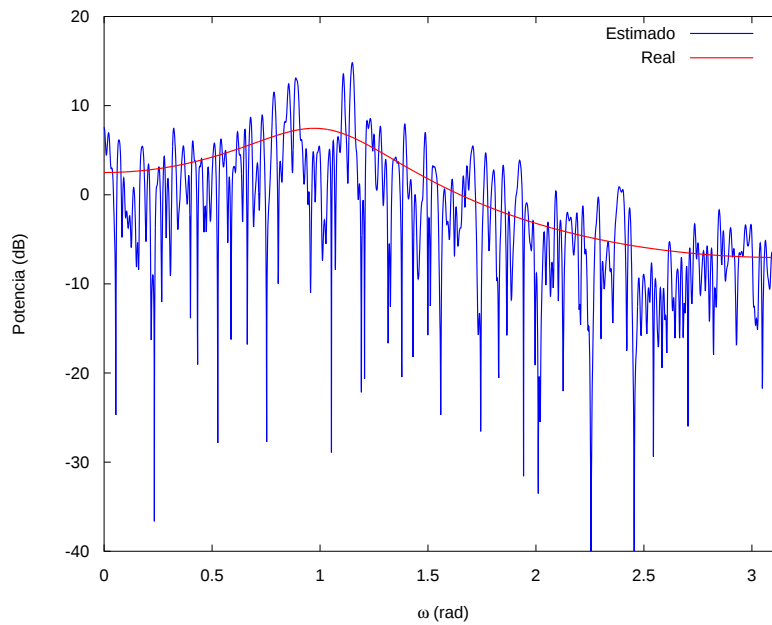


Figura 4.76: Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana gaussiana con $\alpha = 3, 5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

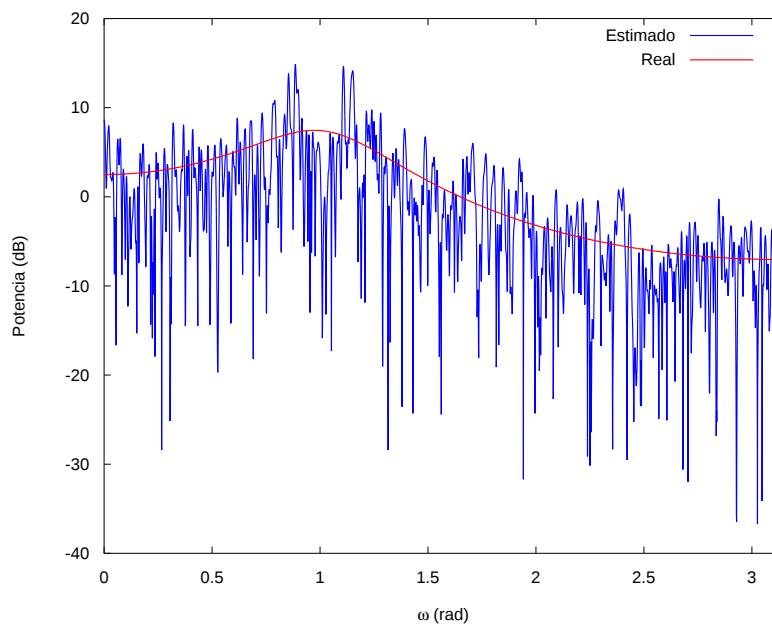


Figura 4.77: Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana exponencial con $\alpha = 2$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

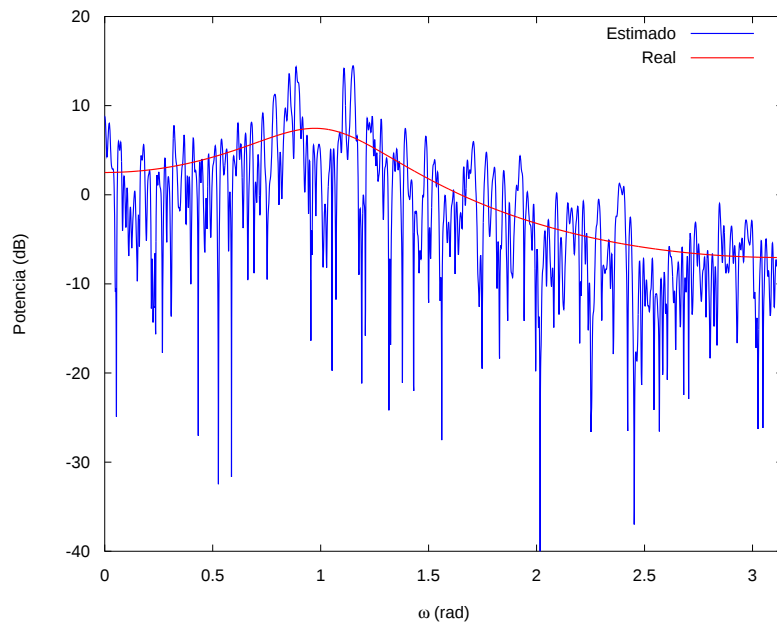


Figura 4.78: Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana exponencial con $\alpha = 3$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

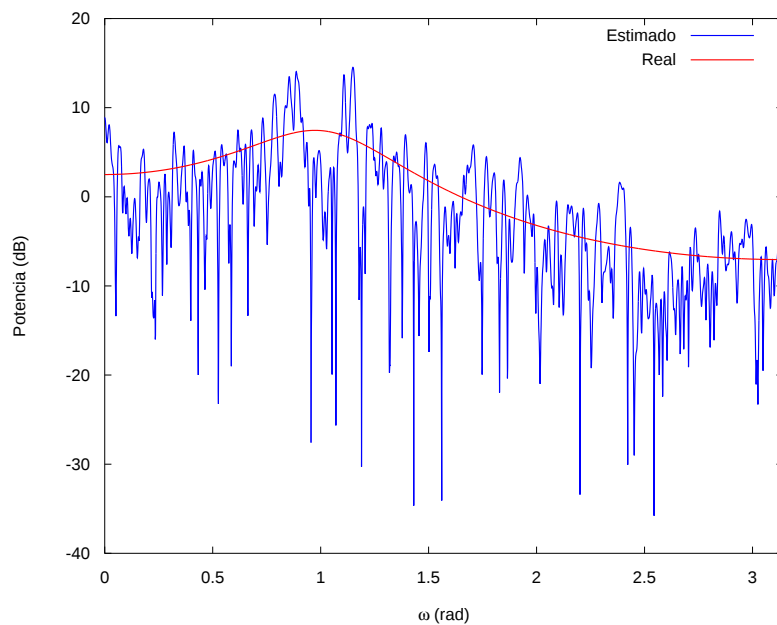


Figura 4.79: Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana exponencial con $\alpha = 4$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

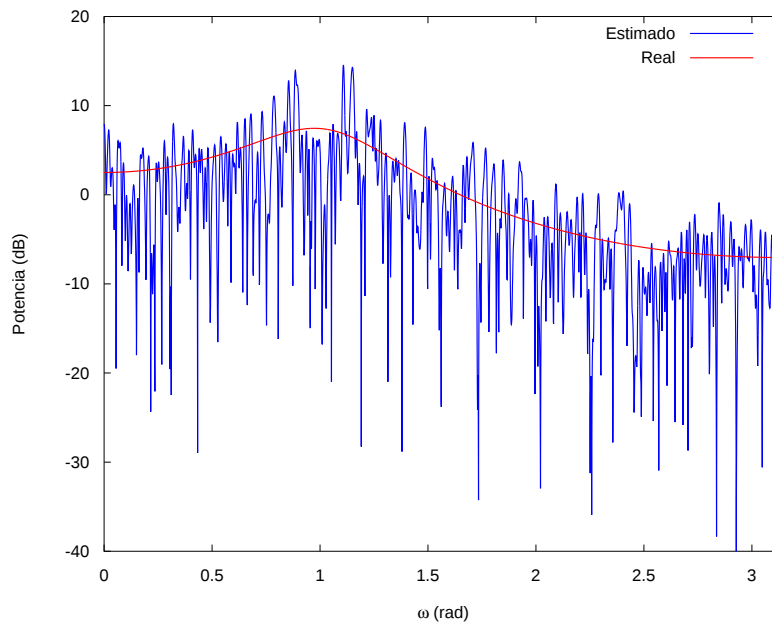


Figura 4.80: Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 2$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

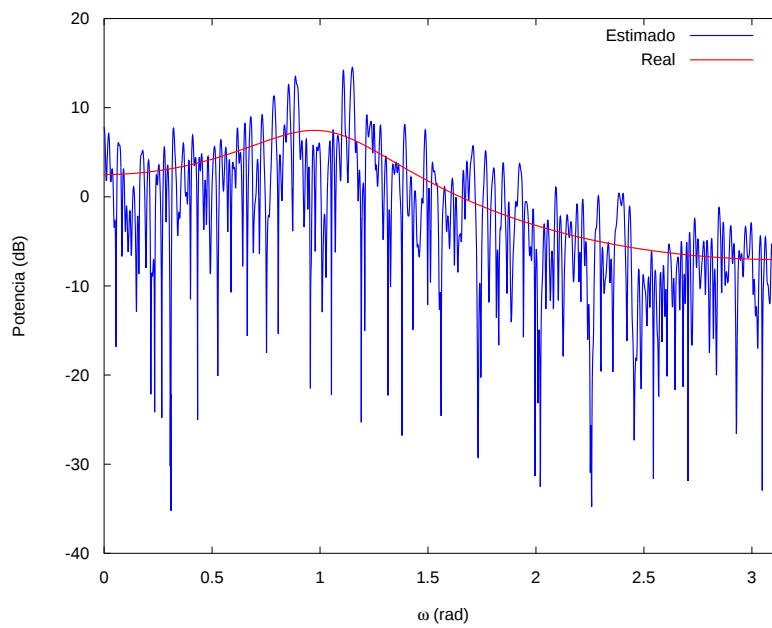


Figura 4.81: Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 2, 5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

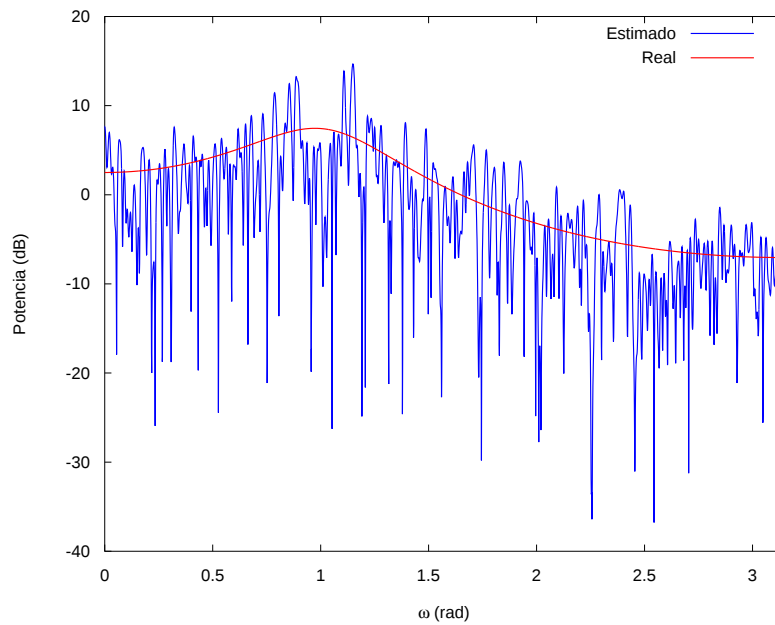


Figura 4.82: Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 3$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

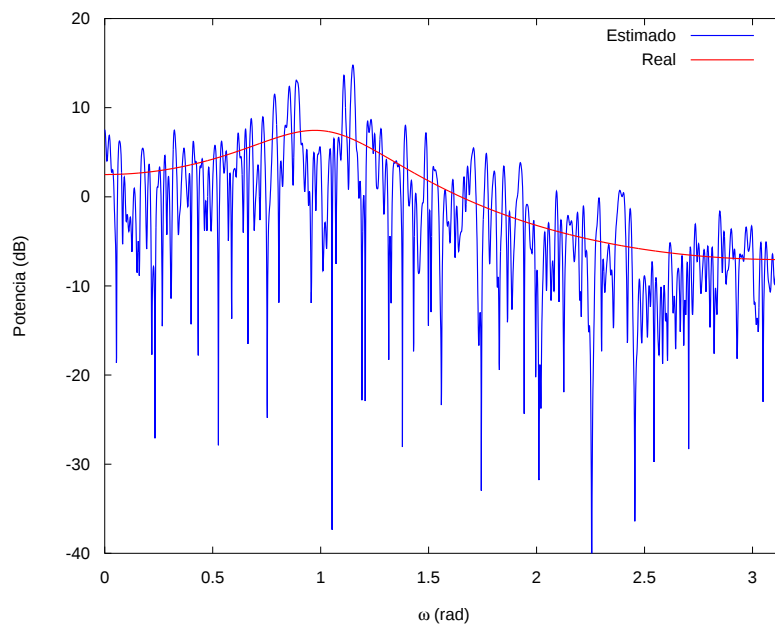


Figura 4.83: Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 3, 5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

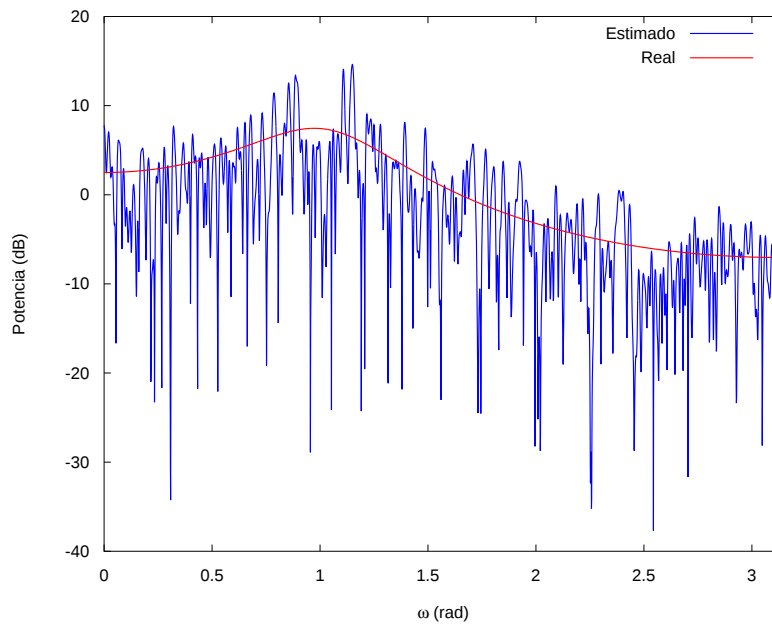


Figura 4.84: Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana de Blackman.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

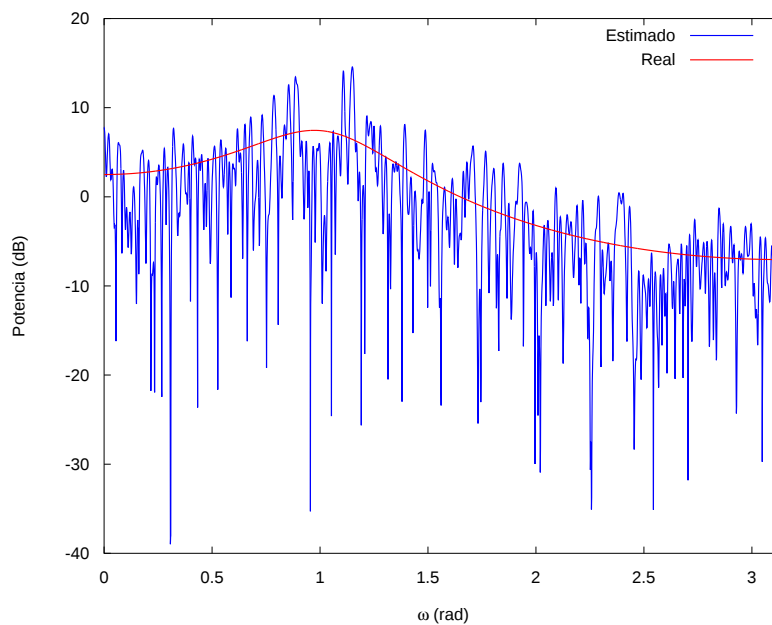


Figura 4.85: Espectro de potencia real y estimado de proceso AR(2) utilizando la ventana de Blackman exacta.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

Cuadro 4.17: Valor medio (μ_{ECM}) y la varianza (σ_{ECM}^2) del error cuadrático medio de un proceso AR(2) con desviación estándar $\sigma_x = 1$.

	128		256		512		
	μ_{ECM}	σ_{ECM}^2	μ_{ECM}	σ_{ECM}^2	μ_{ECM}	σ_{ECM}^2	
Rectangular	1491,869	703370,7	3020,81	1469650,2	6075,29	3019185,8	
Hann	1528,116	1487073,0	3062,17	3033450,2	6116,20	6158871,3	
Hamming	1528,150	1411929,9	3061,49	2848740,9	6115,45	5766726,5	
Parzen	1525,680	1986102,3	3063,31	4138546,2	6117,19	8312547,9	
Gaussiana	$\alpha = 2,5$	1528,014	1537811,2	3062,24	3124455,6	6116,14	6312636,4
	$\alpha = 3,0$	1526,800	1819131,0	3063,06	3753916,1	6116,94	7555348,5
	$\alpha = 3,5$	1525,164	2092072,5	3063,50	4388483,3	6117,39	8801650,0
Exponencial	$\alpha = 2$	1523,911	1507469,1	3059,01	3122501,9	6113,25	6296602,0
	$\alpha = 3$	1522,119	2093052,4	3061,89	4505246,8	6116,73	9046082,6
	$\alpha = 4$	1517,476	2659512,9	3061,90	5959352,6	6118,01	11959565,7
Kaiser	$\alpha = 2,0$	1527,966	1561519,9	3062,40	3160922,8	6116,33	6374531,4
	$\alpha = 2,5$	1527,161	1730239,0	3062,82	3536010,5	6116,68	7114289,3
	$\alpha = 3,0$	1526,349	1879492,7	3063,12	3875266,8	6116,97	7780893,3
	$\alpha = 3,5$	1525,548	2014333,8	3063,34	4187633,6	6117,20	8393435,6
Blackman	1526,819	1791557,4	3062,96	3689447,8	6116,95	7429846,9	
Blackman Exacta	1526,969	1770028,8	3062,93	3640575,1	6116,83	7333513,8	

Fuente: Mejías, 2013

Para el segundo caso, se utilizó un proceso AR(4) con coeficientes $a = \begin{bmatrix} 1 & -2,7607 & 3,8106 & -2,6535 & 0,9238 \end{bmatrix}^T$, el cual tiene un espectro de potencia con un rango dinámico aproximadamente de 65 dB. La longitud de cada ventana fue de $N = 128$, considerando 2^{17} realizaciones para asegurar la convergencia del comportamiento promedio del error cuadrático medio (μ_{ECM}) y varianza promedio (σ_{ECM}^2). De la tabla 4.18 se observa que para N igual a 128 muestras, las ventanas con menor error tienen una diferencia entre el $ABER$ y el $ABPL_{3dB}$ mayor a 6 %. De este grupo de ventanas se obtuvo el menor error en aquellas con menor relación $\frac{ABER}{GC}$, en consecuencia, la ventana rectangular permitió estimar el espectro del proceso con el menor error. Para el resto de las ventanas se evidencia que el error generado depende del $ABER$, es decir, mientras mayor es el $ABER$, el error generado en la estimación será mayor, por consiguiente, la ventana gaussiana de $\alpha = 3,5$ genera el mayor error en la estimación del espectro de potencia debido a que la diferencia entre el $ABER$ y el $ABPL_{3dB}$ es menor a 6 % y tiene el mayor valor de $ABER$ en dicho grupo de ventanas.

Cabe señalar que el comportamiento de las ventanas para este proceso depende del valor de N puesto que al variar dicha longitud, otras ventanas obtuvieron menor μ_{ECM} ; sin embargo, para $N > 512$ muestras el comportamiento de las ventanas se vuelve invariante. En este sentido, las ventanas con menor error en la estimación espectral tienen un valor de GC alejado de 0,54, por lo cual, la ventana rectangular genera el menor μ_{ECM} , mientras que la ventana de Hamming incrementa dicho error en 13 %, siendo esta última la ventana del grupo con mayor $ABER$.

Cuadro 4.18: Valor medio (μ_{ECM}) y la varianza (σ_{ECM}^2) del error cuadrático medio de un proceso AR(4) con desviación estándar $\sigma_x = 1$.

	128		256		512	
	μ_{ECM}	$\sigma_{ECM}^2 (10^{18})$	μ_{ECM}	$\sigma_{ECM}^2 (10^{18})$	μ_{ECM}	$\sigma_{ECM}^2 (10^{18})$
Rectangular	1449233255,7	1,510	3370069124,9	10,496	7603787071,7	38,3073
Ham	1658166015,4	3,524	3944676305,9	27,847	8588625489,2	100,774
Hamming	1654800418,9	3,550	3958265427,9	27,509	8611359018,3	96,7892
Parzen	1676275727,1	3,452	3844522618,0	28,135	8403055564,9	116,368
Gaussiana	$\alpha = 2,5$	1657808202,9	3,581	3943580423,2	28,226	8584619584,6
	$\alpha = 3,0$	1665518721,6	3,527	3886466967,8	28,596	8484524186,8
	$\alpha = 3,5$	1679513992,0	3,459	3823050545,7	27,964	8361953929,3
Exponencial	$\alpha = 2$	1632498847,2	3,434	3870136760,6	26,014	8454156188,3
	$\alpha = 3$	1636811756,7	3,442	3773632826,4	26,639	8283874623,7
	$\alpha = 4$	1646184543,4	3,335	3661776259,6	25,115	8034813984,6
Kaiser	$\alpha = 2,0$	1655691274,4	3,508	3937320178,8	28,174	8580155449,0
	$\alpha = 2,5$	1660693177,1	3,476	3903017722,1	28,344	8518446779,3
	$\alpha = 3,0$	1666997623,1	3,439	3869070768,1	28,453	8455523122,7
	$\alpha = 3,5$	1674659629,7	3,411	3838260073,9	28,045	8395207289,5
Blackman	1666791065,3	3,501	3889531365,0	28,475	8489066041,3	111,363
Blackman Exacta	1665496314,3	3,514	3895319009,8	28,524	8499814173,0	110,774

Fuente: Mejías, 2013

Ahora bien, si se analiza la varianza σ_{ECM}^2 de las estimaciones realizadas, se puede observar que para N igual a 128 muestras, el parámetros más influyentes es la Pérdida por Procesamiento (PC) ya que a medida que este valor aumenta, mayor es σ_{ECM}^2 . Se debe señalar que las ventanas con valores de GC alejados de 0,54 generan menor varianza. En consecuencia, la menor varianza se registra en la ventana rectangular, mientras que la ventana gaussiana con $\alpha = 2,5$ genera la mayor de la varianza, incrementándose aproximadamente 137 % respecto de la ventana rectangular. Se debe agregar que el comportamiento de σ_{ECM}^2 es variable con la longitud de la ventana; no obstante, dicho comportamiento se vuelve invariable para $N > 512$, donde el indicador de $ABER$ es el parámetro que influye sobre el comportamiento de las ventanas, es decir, las ventanas con

menor varianza tienen valores de $ABER$ cercanos a 1. Por tanto, la ventana rectangular genera la menor σ_{ECM}^2 , mientras que la ventana gaussiana con $\alpha = 3,5$ y las ventanas exponenciales con $\alpha = 3,5$ y $\alpha = 3,5$ forman el grupo de ventanas con mayor varianza, incrementando dicho valor más de 200 % respecto de la ventana rectangular.

En el conjunto formado por las figuras desde la 4.86 hasta la 4.101 no se observaron diferencias apreciables entre los espectros obtenidos. Sin embargo, al comparar los espectros promedios con el espectro real, se observó que la estimación tiene un sesgo que es independiente de la cantidad de realizaciones utilizadas, por lo que el espectro de potencia promedio no converge al valor del espectro real de la señal. En este sentido, el mayor sesgo lo presenta la ventana rectangular. La ventana de Hamming, la ventana gaussiana con $\alpha = 2,5$ y la familia de ventanas exponenciales también presentan sesgo pero en un grado menor.

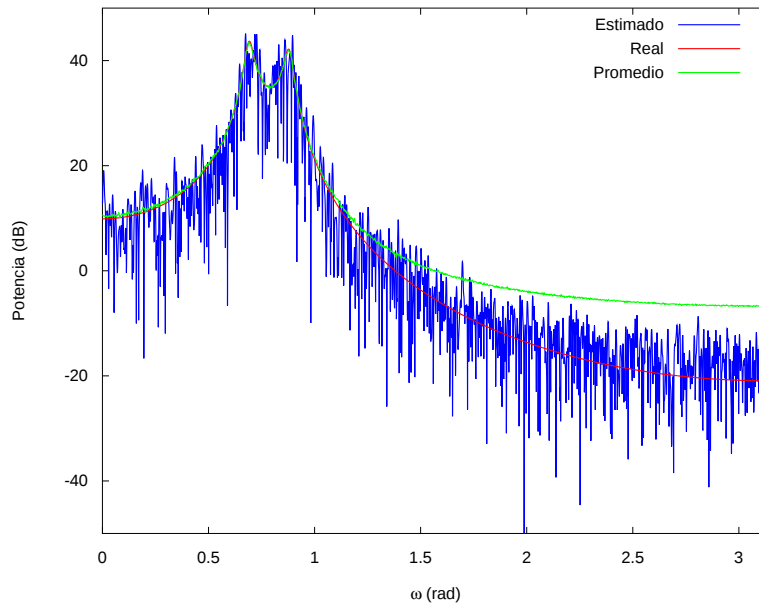


Figura 4.86: Espectro de potencia real, estimado y promedio de un proceso AR(4) utilizando la ventana rectangular.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

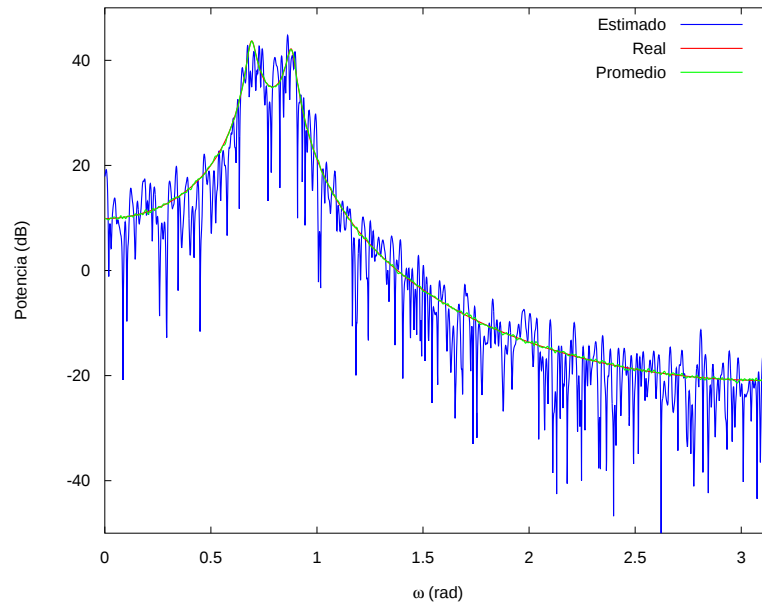


Figura 4.87: Espectro de potencia real, estimado y promedio de un proceso AR(4) utilizando la ventana de Hann.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

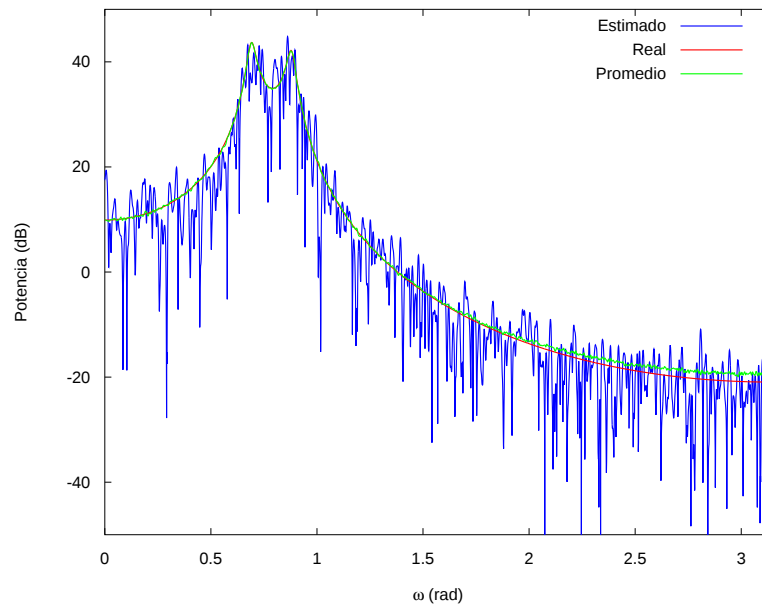


Figura 4.88: Espectro de potencia real, estimado y promedio de un proceso AR(4) utilizando la ventana de Hamming.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

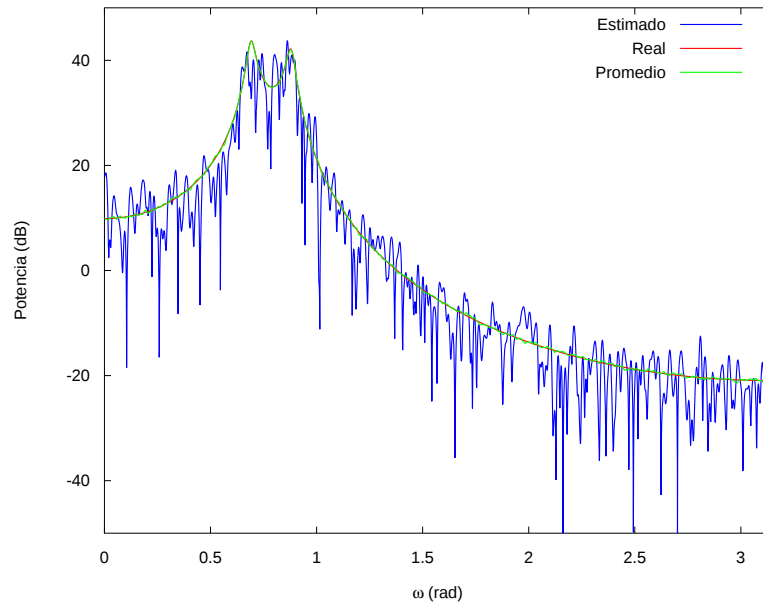


Figura 4.89: Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana de Parzen.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

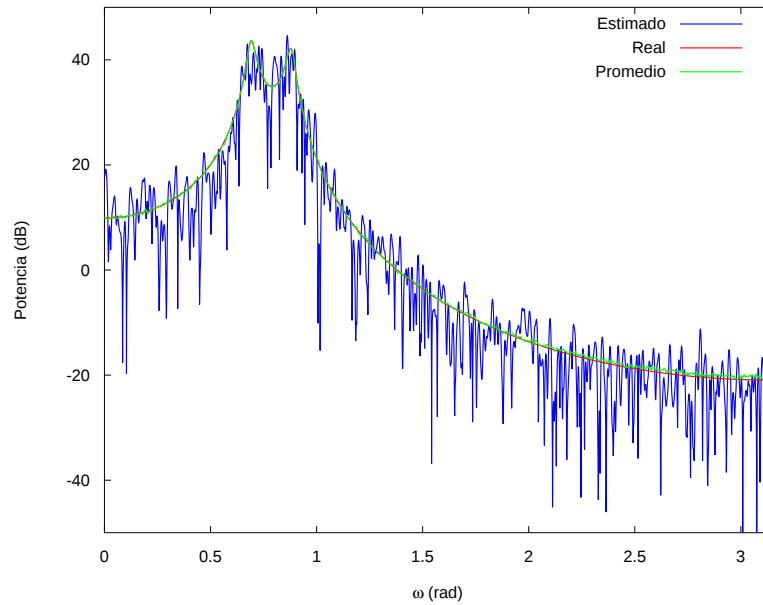


Figura 4.90: Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana gaussiana con $\alpha = 2, 5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

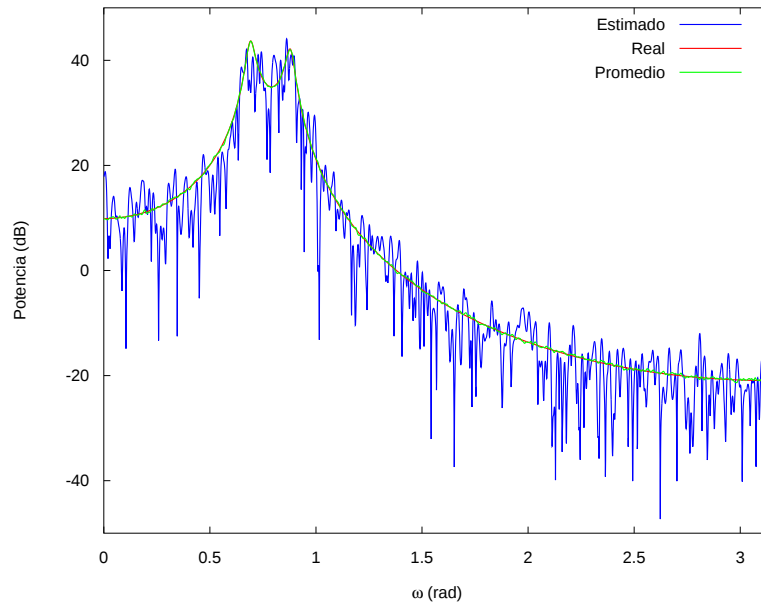


Figura 4.91: Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana gaussiana con $\alpha = 3$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

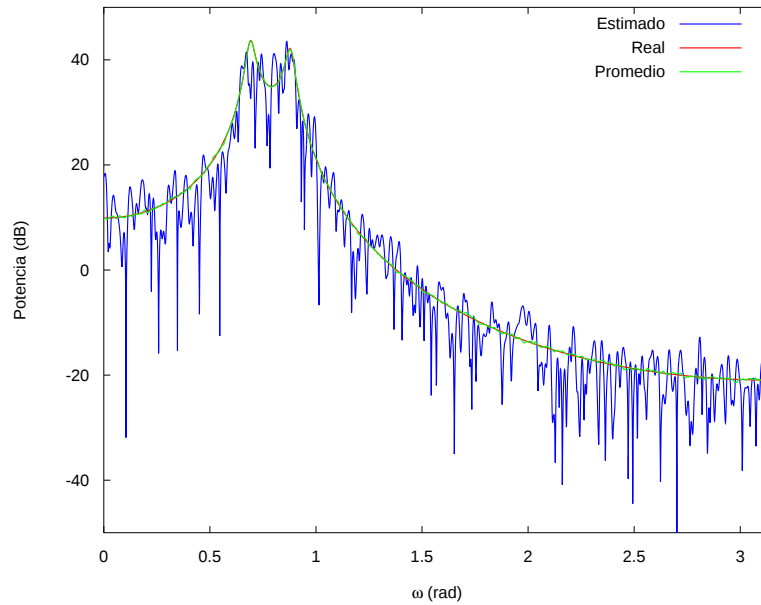


Figura 4.92: Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana gaussiana con $\alpha = 3, 5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

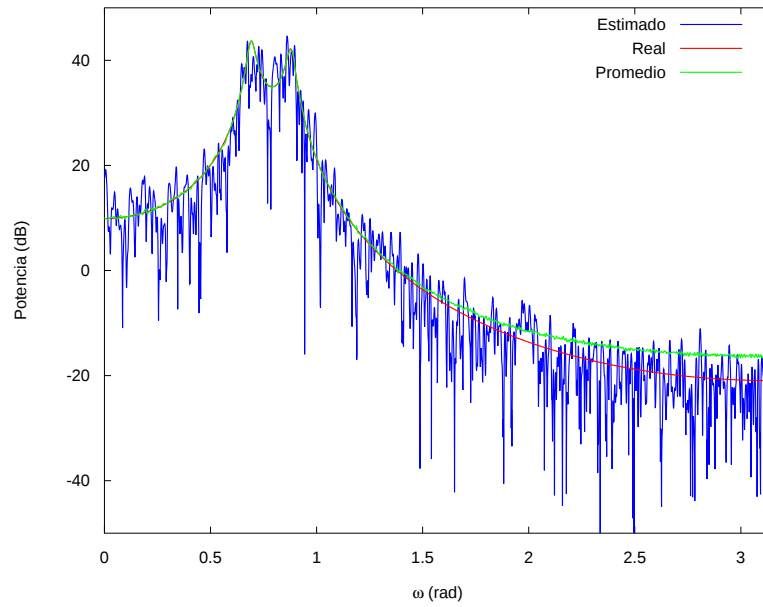


Figura 4.93: Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana exponencial con $\alpha = 2$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

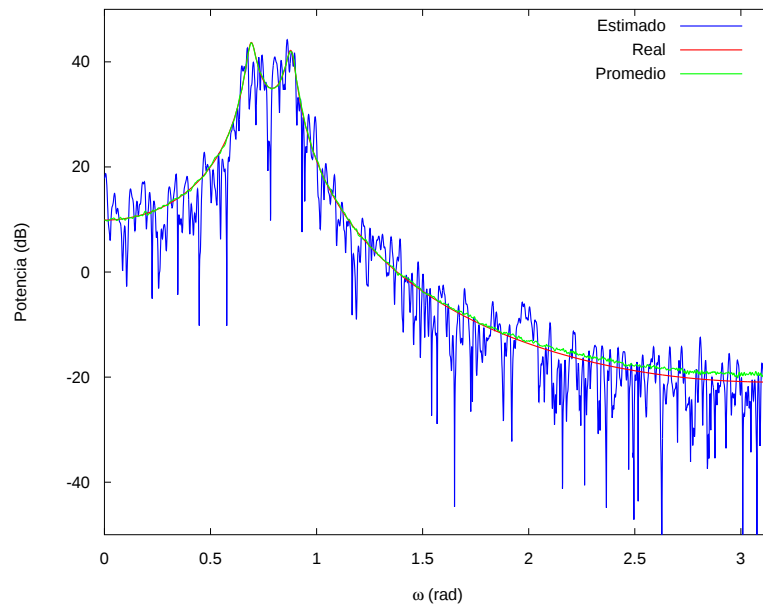


Figura 4.94: Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana exponencial con $\alpha = 3$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

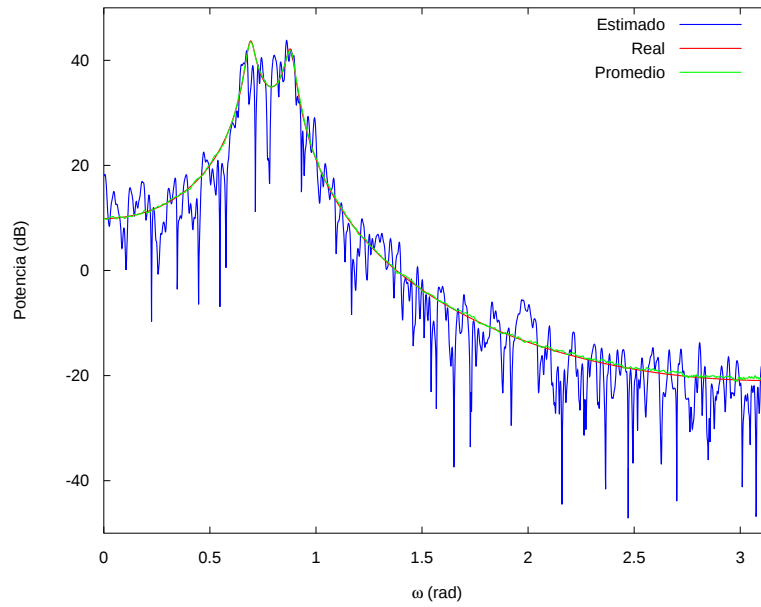


Figura 4.95: Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana exponencial con $\alpha = 4$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

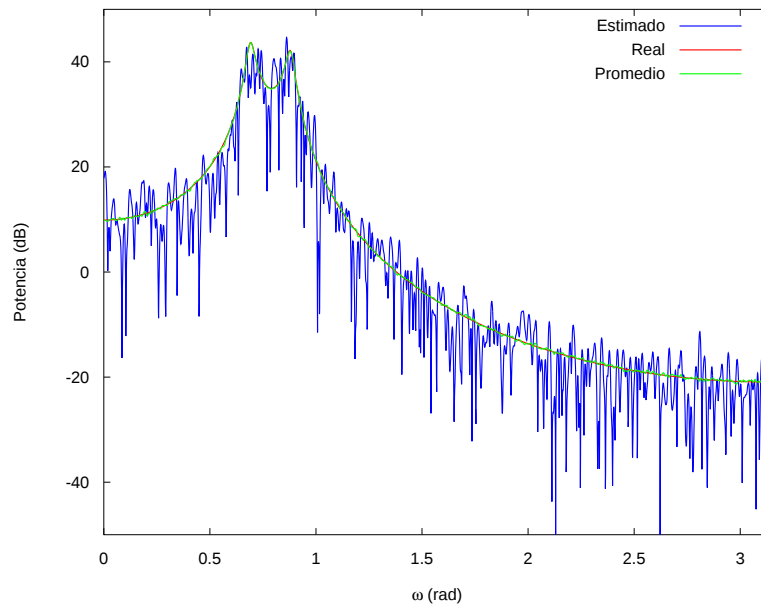


Figura 4.96: Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 2$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

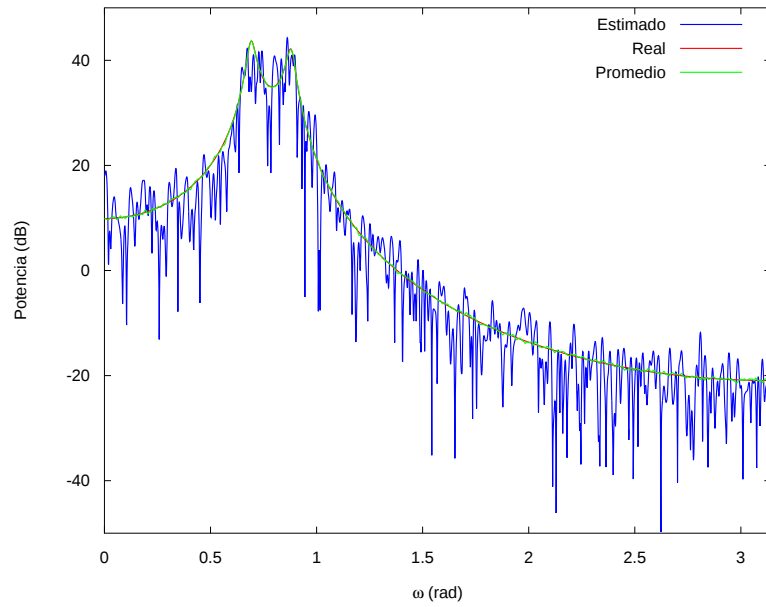


Figura 4.97: Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 2,5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

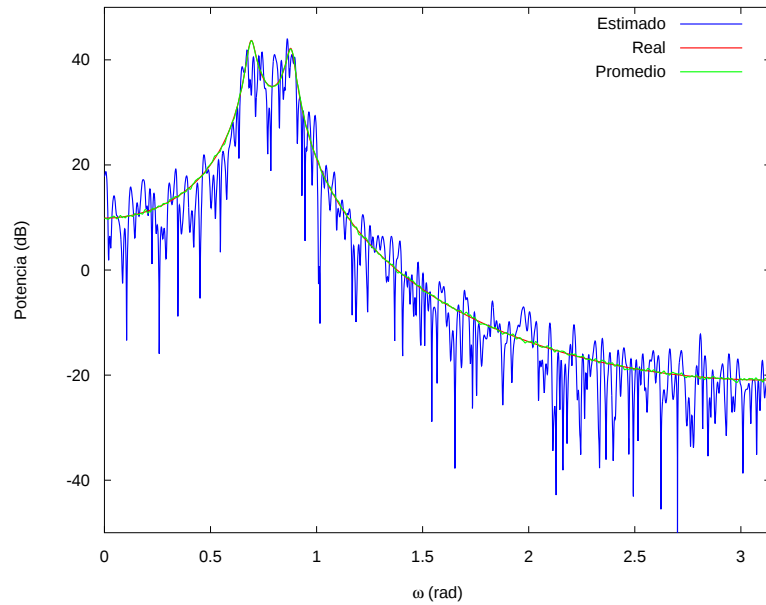


Figura 4.98: Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 3$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

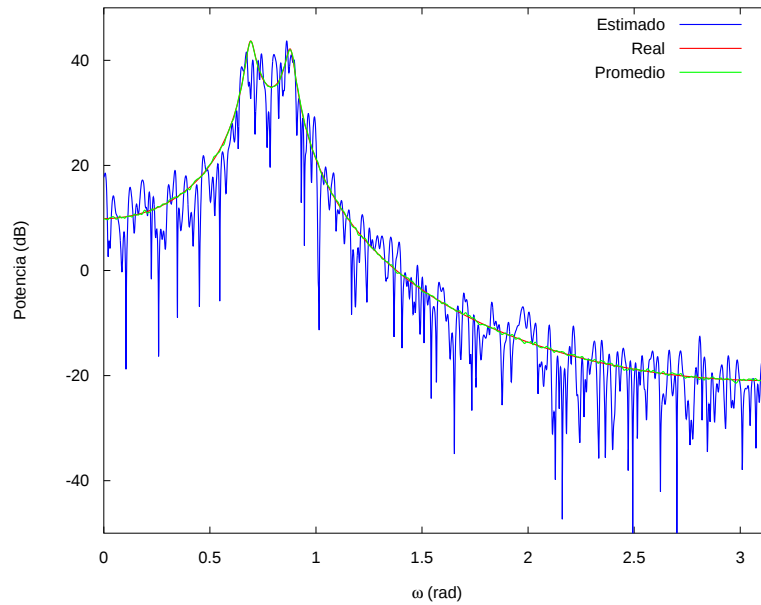


Figura 4.99: Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana de Kaiser con $\alpha = 3, 5$.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

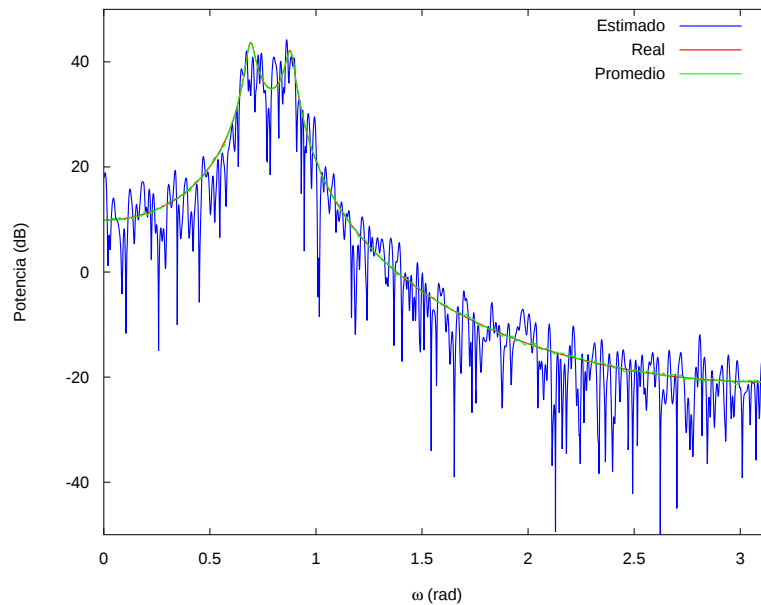


Figura 4.100: Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana de Blackman.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

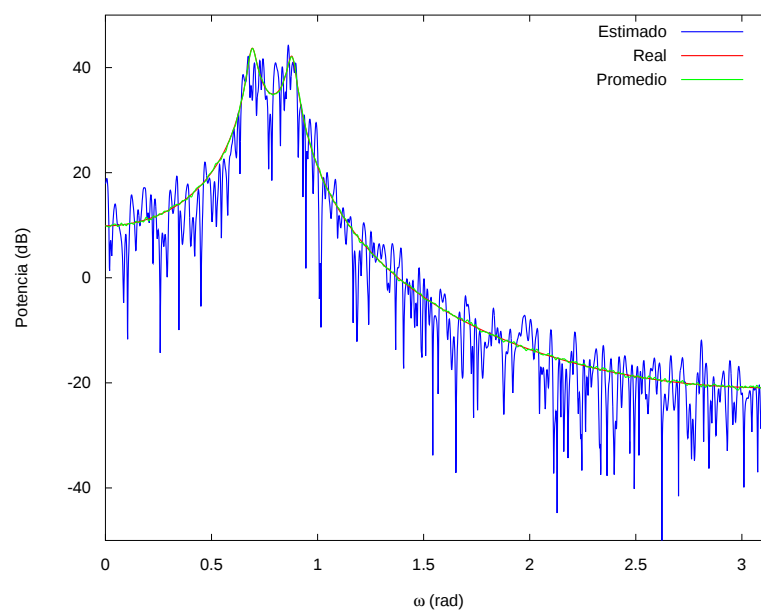


Figura 4.101: Espectro de potencia real, estimado y promedio de un AR(4) utilizando la ventana de Blackman exacta.

Fuente: Carlos Mejías, 2013

Capítulo V

Conclusiones y Recomendaciones

Conclusiones

El conjunto formado por las ventanas comúnmente utilizadas en el área del procesamiento digital de señales son: la ventana Rectangular, ventana de Hamming, ventana de Hann, ventana de Parzen, ventana gaussiana, ventana exponencial, ventana de Kaiser y ventana de Blackman. Cabe señalar que los investigadores que publican en Science Direct usan más la ventana rectangular, mientras que las publicaciones en IEEE suelen trabajar más con la ventana de Hamming.

Al segmentar las señales discretas para el procesamiento digital por bloque, se distorsiona el espectro de potencia de dicha señal; dependiendo de las características espectrales de la ventana utilizada para segmentar. Por consiguiente, la elección incorrecta de la ventana puede ocultar componentes espectrales cercanas en frecuencia, generar falsas componentes espectrales y/o modificar nivel de potencia de las mismas.

El lóbulo principal de la ventana produce ensanchamiento del espectro de potencia de la señal segmentada, lo que ocasiona derrame en dicho espectro y el

ocultamiento de componentes espectrales cercanas en frecuencia. Por lo tanto, para que este derrame de potencia sea menor y se realice correctamente la detección de tonos, se debe utilizar ventanas con el menor ancho de banda posible para el lóbulo principal.

Los lóbulos secundarios de la ventana generan falsas componentes que alteran el contenido espectral de la señal segmentada, por lo que se debe utilizar ventanas con el menor nivel de lóbulos laterales y el mayor decrecimiento de dichos lóbulos con la finalidad de disminuir la distorsión de las componentes en todo el espectro de la señal. Sin embargo, estas características espectrales son proporcionadas por ventanas con los mayores anchos de banda en el lóbulo lateral, lo que dificulta la detección de tonos.

Existe una relación de compromiso entre el ancho de banda del lóbulo principal y el nivel del primer lóbulo lateral, es decir, mientras menor es el ancho de banda del lóbulo principal, mayor es el nivel del lóbulo lateral y viceversa.

Existe una correlación lineal del ancho de banda equivalente de ruido ($ABER$) con las pérdidas por procesamiento (PP) y el ancho de banda del lóbulo principal ($ABLP$), es decir, al aumentar el ancho de banda del lóbulo principal, aumenta el ancho de banda equivalente de ruido y se incrementan las pérdidas por procesamiento. Así mismo, la ganancia coherente (GC) está correlacionada con las pérdidas por rizado (PR). En este sentido, los parámetros correlacionados presentarán comportamientos similares entre sí y tendrán la misma influencia sobre la estimación espectral.

Para estimar (con el menor error posible) señales sinusoidales en ausencia de ruido, primero se debe definir la longitud del segmento a procesar para luego elegir correctamente la ventana a utilizar. Por lo tanto, para secuencias menores a 64 muestras, se debe utilizar la ventana de Kaiser con $\alpha = 3, 5$, mientras que para secuencias de mayores longitudes, se debe usar la ventana gaussiana con $\alpha = 3, 5$ o la ventana de Parzen. No obstante, si existen componentes espectrales separadas a una distancia menor a 2.6 Bins, dichas componentes quedarán ocultas, por lo que se debe usar la ventana rectangular, la cual proporciona mayor resolución frecuencial con el menor error de estimación.

Para estimar señales sinusoidales contaminadas con ruido, se debe utilizar la ventana de Blackman exacta, las cuales permiten bajos errores en la estimación de la potencia y la frecuencia. Si la densidad de potencia de ruido es menor a 10. Si la densidad de potencia es mayor, existe una relación de compromiso entre la exactitud en la estimación de potencia y frecuencia. Ahora bien, si existen componentes espectrales cercanas en frecuencia con una separación entre las componentes menor a 1,45 Bins, se debe usar la ventana rectangular ya que es la ventana con mayor resolución frecuencial para la detección de los tonos. Cabe señalar que la ventana rectangular permite estimar con menor varianza la potencia y la frecuencia de las señales sinusoidales.

El uso de ventanas diferentes a la rectangular no mejora la estimación espectral de una secuencia de ruido blanco gaussiano, ya que al utilizar la ventana rectangular se obtiene el menor error y varianza en dicha estimación.

Al estimar procesos aleatorios ergódicos auto-regresivos, el rango dinámico del espectro de la señal. En este sentido, para los procesos con rango dinámico mayores a 40 dB en el espectro de magnitud, se debe utilizar la familia de ventanas de Kaiser para estimar con menor error y varianza, sin generar sesgo al promediar los espectros de potencia de cada realización; sin embargo, si se compara la estimación entre realizaciones, la ventana rectangular proporciona el menor error y varianza promedio en dicha estimación. Por otro lado, si los procesos tienen un rango dinámico menor a 40 dB no se genera sesgo al promediar los espectros de potencia de las realizaciones.

Recomendaciones

Se recomienda extender esta investigación y aplicar la metodología planteada en este trabajo para analizar el derrame de potencia en las ventanas que han sido desarrolladas en los últimos años y verificar la mejoría de implementar dichas ventanas en el procesamiento digital de señales.

Se sugiere realizar nuevas investigaciones que analicen el efecto de solapamiento de la información enventanada, con la finalidad de determinar el porcentaje solapamiento óptimo entre realizaciones para que la pérdida de información sea mínima considerando el tipo de la señal que se desea enventanar.

Para elegir una ventana que no modifique considerablemente el espectro de potencia, se debe considerar el tipo de señal que se segmentará con la ventana, la cantidad de realizaciones que se pueden procesar y definir las características espectrales que se quiere obtener con mayor exactitud del análisis espectral de la señal.

Se recomienda extender las investigaciones realizadas en este trabajo al área del procesamiento de imágenes y evaluar los efectos frecuenciales generados por las diferentes ventanas.

Referencias Bibliográficas

- Harris, F. J. (1978, enero). On the use of windows for harmonic analysis with the discrete fourier transform. *Proc. IEEE*, 66(1), 51–83.
- Hayes, M. H. (1996). *Statistical digital signal processing and modeling*. John Wiley & Sons, Inc: Wiley.
- Lyons, R. G. (2010). *Understanding digital signal processing* (3ra ed.). Prentice Hall.
- Manolakis, D. G., Ingle, V. K., y Kogon, S. M. (2005). *Statistical and adaptive signal processing: Spectral estimation, signal modeling, adaptive filtering and array processing (artech house signal processing library)*. Artech House Print on Demand.
- Nuttall, A. H. (1981). Some windows with very good sidelobe behavior. *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing, ASSP-29*(1), 84.
- Oppenheim, A. V., y Schafer, R. W. (1999). *Tratamiento de señales en tiempo discreto* (2da ed.). Prentice-Hall.
- Papoulis, A. (1977). *Signal analysis*. Mcgraw-Hill College.
- Proakis, J. G., y Manolakis, D. K. (1995). *Digital signal processing: Principles, algorithms and applications* (3.^a ed.). Prentice Hall.
- Sampieri, R. H., Collado, C. F., y Lucio, P. B. (2006). *Metodología de la investigación* (4ta ed.). McGraw-Hill.
- To, U. A., Tokuda, K., Kobayashi, T., Masuko, T., y Imai, S. (1994). Mel-generalized cepstral analysis. En *Proc. icslp-94* (pp. 1043–1046).
- Trethewey, M. W. (2000, marzo). Window and Overlap Processing Effects on Power Estimates from Spectra. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 14, 267–278. doi: 10.1006/mssp.1999.1274

- T. S. Durrani, P., M.Sc., y Prof. J. M. Nightingale, P. W. F. C. E. M., B. Sc. Tech. (1972, marzo). Data Windows for Digital Spectral Analysis. *Proceeding of the Institute of Electrical and Electronics Engineers*, 119(3).
- U.P.E.L. (2006). *Manual de trabajos de grado de maestría y tesis doctorales* (3ra ed.). Fondo Editorial de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.
- Villarreal-Reyes S., V. J., Edwards R.M. (2005, junio). On the use of simulation-DFT based analysis for spectral estimation of PPM TH-IR UWB signals. *Vehicular Technology Conference*, 2, 1340-1374.
- Wikipedia. (2011a). *Digital signal — wikipedia, the free encyclopedia*. Descargado de http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Digital_signal&oldid=464437509 (Documento en línea; Consulta: 2011, Diciembre 06)
- Wikipedia. (2011b). *Stationary process — wikipedia, the free encyclopedia*. Descargado de http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Stationary_process&oldid=462401851 (Documento en línea; Consulta: 2011, Diciembre 06)