



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

**ANÁLISIS DE LOS FUNDAMENTOS TEÓRICOS DEL ÁLGEBRA LINEAL
PARA EL DESARROLLO DE LA TRANSFORMADA DE ONDÍCULAS
(WAVELET) Y APLICACIONES**

Autor: Ing. Franklin J. Yusti R.

Bárbula, Julio del 2013



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

**ANÁLISIS DE LOS FUNDAMENTOS TEÓRICOS DEL ÁLGEBRA LINEAL
PARA EL DESARROLLO DE LA TRANSFORMADA DE ONDÍCULAS
(WAVELET) Y APLICACIONES**

Autor: Ing. Franklin J. Yusti R.
Trabajo de ascenso presentado ante el Consejo
de Facultad para ascender a la categoría de
Profesor Agregado.

Bárbula, Julio del 2013

ÍNDICE GENERAL

1.- FUNDAMENTOS DEL ÁLGEBRA LINEAL

1.1.- ESPACIO VECTORIAL (EV).....	1
1.2.- SUBESPACIO VECTORIAL (SEV).....	4
1.3.- COMBINACIÓN LINEAL	6
1.4.- CONJUNTOS GENERADORES	8
1.5.- CONJUNTOS INDEPENDIENTES	10
1.6.- BASE Y DIMENSIÓN	12
1.7.- COORDENADAS DE UN VECTOR.....	14
1.8.- ESPACIO VECTORIAL CON PRODUCTO INTERNO.....	17
1.9.- ORTOGONALIDAD Y SUBESPACIOS.....	18
1.10.- PRODUCTO INTERNO DEFINIDO POSITIVO.....	19
1.11.- DESIGUALDAD DE CAUCHY- SCHWARZ.....	21
1.12.- PROYECCIONES ESCALARES Y VECTORIALES.....	22
1.13.- BASES ORTOGONALES Y PROYECCIONES.....	24

2.- TEORÍA DE FOURIER

2.1.- TEOREMA DE FOURIER	31
2.2.- SERIE GENERALIZADA DE FOURIER	34
2.3.- TRANSFORMADA DE FOURIER	35
2.3.1.- PROPIEDADES	37

3.- TRANSFORMADA WAVELET

3.1.- TRANSFORMADA CONTINUA WAVELET (CWT).....	39
3.2.- FUNCIÓN ESCALA	42
3.3.- FUNCIÓN WAVELET	43
3.4.- TRANSFORMADA DISCRETA WAVELET (DWT).....	44
3.5.- RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES (SÍNTESIS).....	54

4.- APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA WAVELET

4.1- CLASIFICACIÓN DE SEÑALES DE VOZ UTILIZANDO TRANSFORMADA DE WAVELET Y MÁQUINAS DE VECTORES DE SOPORTE	63
4.2.- TRANSFORMADA DE ONDÍCULAS PARA ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS	70
4.3.- APLICACIÓN DE LIBRERIAS DE FUNCIONES PARA CALCULAR LA TRANSFORMADA WAVELET EN SCILAB EN EL CÁLCULO DE LA POTENCIA ELÉCTRICA PARA SEÑALES BAJO CONDICIONES NO SINUSOIDALES.....	74
APENDICE A.....	80
APENDICE B.....	88
APENDICE C.....	94
APENDICE D.....	103
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	110

INTRODUCCIÓN

En el siguiente trabajo de investigación se muestra un enfoque básico de la teoría de la transformada wavelet fundamentada en los tópicos del álgebra lineal con la finalidad de ofrecer una visión vectorial sobre la teoría de ondículas.

En los siguientes capítulos se desarrolló la teoría necesaria del álgebra lineal que permite conocer las propiedades existentes en los espacios vectoriales con el objetivo de determinar que un conjunto de funciones continuas en un intervalo dado bajo ciertas condiciones puede formar un espacio vectorial, a partir de estas propiedades se tratarán las funciones continuas como vectores y por ende podrá establecerse la descomposición de las mismas como combinación lineal de vectores pertenecientes a una base vectorial.

Para comprender el desarrollo teórico en el que se basa la transformada de ondículas es necesario tener conocimientos de ciertos tópicos o fundamentos teóricos del álgebra lineal como lo son los espacios vectoriales y sus propiedades entre otros. El álgebra lineal permite conceptualizar esta transformada a través de un enfoque vectorial, de este hecho deriva la importancia de comprender y dominar los tópicos del álgebra lineal para poder establecer una relación con la teoría que involucra la transformada wavelet y posteriormente proceder a su análisis y sus aplicaciones.

La asignatura álgebra lineal forma parte de los estudios básicos en el área de ingeniería y para un ingeniero más allá de dominar una teoría es muy importante analizar las aplicaciones de la misma, en el último capítulo de este trabajo se presentará un resumen de algunos trabajos de investigación realizados en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Carabobo donde se haya hecho uso de la transformada wavelet. Es por ello que es de gran utilidad para un investigador disponer de un texto que ofrezca una buena información teórica y formal de los conceptos a estudiar que proporcionen facilidad y claridad para analizar las teorías y permitan conocer sus aplicaciones.

CAPITULO I

FUNDAMENTOS DEL ÁLGEBRA LINEAL

Introducción

En este capítulo se definirán algunos fundamentos del álgebra lineal necesarios para la sustentación de la definición de la transformada wavelet, dicha transformada está basada en la manipulación de funciones wavelet como base del espacio vectorial de funciones cuadrado integrable $L^2(\mathfrak{R})$.

1.1.- ESPACIO VECTORIAL (EV)

Sea \mathbf{E} un conjunto cualquiera con dos operaciones definidas, una operación binaria \oplus de adición (ley de composición interna aditiva) definida de $\mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$, \mathbf{R} un campo de escalares y sea \odot una operación externa producto por un escalar definida de $\mathbf{R} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$. Entonces la terna $(\mathbf{E}, \oplus, \odot)$ es un *espacio vectorial* sobre el conjunto de escalares \mathbf{R} si para todo $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{E}$ y $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, se satisfacen los siguientes axiomas:

Axiomas para la Adición	I) $\mathbf{a} \oplus \mathbf{b} = \mathbf{b} \oplus \mathbf{a}$
	II) $(\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) \oplus \mathbf{c} = \mathbf{a} \oplus (\mathbf{b} \oplus \mathbf{c})$
	III) Existe un vector $\mathbf{O} \in \mathbf{E}$ tal que $\mathbf{O} \oplus \mathbf{a} = \mathbf{a}$, $\forall \mathbf{a} \in \mathbf{E}$
	IV) Para cada vector $\mathbf{a} \in \mathbf{E}$, $\exists -\mathbf{a} \in \mathbf{E}$ tal que $\mathbf{a} \oplus (-\mathbf{a}) = \mathbf{O}$
Axiomas para la	V) $\alpha \odot (\mathbf{a} \oplus \mathbf{b}) = \alpha \odot \mathbf{a} \oplus \alpha \odot \mathbf{b}$
	VI) $(\alpha + \beta) \odot \mathbf{a} = \alpha \odot \mathbf{a} \oplus \beta \odot \mathbf{a}$
Multiplicación Escalar	VII) $(\alpha\beta) \odot \mathbf{a} = \alpha \odot (\beta \odot \mathbf{a}) = \beta \odot (\alpha \odot \mathbf{a})$
	VIII) $1 \odot \mathbf{a} = \mathbf{a}$

Si \mathbf{E} es un espacio vectorial, a sus elementos se les denomina *vectores*.

Esta sería la definición más genérica de vector “*un elemento de un espacio vectorial*”. Existen diferentes tipos de vectores como por ejemplo el vector geométrico definido como un segmento de recta orientado y dirigido el cual se representa mediante una saeta; otro tipo de vectores es como el que se muestra en el ejemplo 1 donde se quiere demostrar que una función $f(x)$ bajo ciertas condiciones es un vector.

Ejemplo 1

Sea I un intervalo de la recta real y sea $F(I)$ el conjunto de todas las funciones reales con dominio real en I . Para todo $f, g \in F(I)$ y para todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, se define:

$$\begin{cases} \text{I)} & (f \oplus g)_{(x)} = f(x) + g(x) & \forall x \in I \\ \text{II)} & (\alpha \odot f)_{(x)} = \alpha f(x) & \forall x \in I \end{cases}$$

¿Es $(F(I), \oplus, \odot)$ un espacio vectorial?

Para demostrar que es un espacio vectorial es necesario verificar el cumplimiento de cada uno de los ocho axiomas de la definición de espacio vectorial.

$$\text{I)} \quad \mathbf{f \oplus g = g \oplus f}$$

$$(f \oplus g)_{(x)} = f_{(x)} + g_{(x)} = g_{(x)} + f_{(x)} = (g + f)_{(x)}$$

$$\text{II)} \quad \mathbf{(f \oplus g) \oplus h = f \oplus (g \oplus h)}$$

$$\begin{aligned} [(f \oplus g) \oplus h]_{(x)} &= (f \oplus g)_{(x)} + h_{(x)} = [(f_{(x)} + g_{(x)}) + h_{(x)}] = [f_{(x)} + (g_{(x)} + h_{(x)})] \dots \\ &\dots = [f \oplus (g \oplus h)]_{(x)} \end{aligned}$$

$$\text{III) } \mathbf{f} \oplus \mathbf{O} = \mathbf{f}$$

$$(f \oplus O)_{(x)} = f_{(x)} + O_{(x)} = f_{(x)} \quad (1)$$

$$\text{pero } f_{(x)} = f_{(x)} + 0 \quad (2)$$

igualando (1) con (2) se tiene:

$f_{(x)} + O_{(x)} = f_{(x)} + 0$, de donde $O_{(x)} = 0$; por lo tanto existe elemento neutro para la suma.

$$\text{IV) } \mathbf{f} \oplus (-\mathbf{f}) = \mathbf{O}$$

$$[f \oplus (-f)]_{(x)} = f_{(x)} + (-f)_{(x)} = 0 \Rightarrow (-f)_{(x)} = -f_{(x)}; \text{ existe elemento simétrico.}$$

$$\text{V) } \alpha \odot (\mathbf{f} \oplus \mathbf{g}) = \alpha \odot \mathbf{f} \oplus \alpha \odot \mathbf{g}$$

$$\begin{aligned} [\alpha \odot (f \oplus g)]_{(x)} &= \alpha [f \oplus g]_{(x)} = \alpha (f_{(x)} + g_{(x)}) = \alpha f_{(x)} + \alpha g_{(x)} \dots \\ &\dots = (\alpha \odot f)_{(x)} \oplus (\alpha \odot g)_{(x)} = (\alpha \odot f \oplus \alpha \odot g)_{(x)} \end{aligned}$$

$$\text{VI) } (\alpha + \beta) \odot \mathbf{f} = \alpha \odot \mathbf{f} \oplus \beta \odot \mathbf{f}$$

$$[(\alpha + \beta) \odot f]_{(x)} = (\alpha + \beta) f_{(x)} = \alpha f_{(x)} + \beta f_{(x)} = (\alpha \odot f \oplus \beta \odot f)_{(x)}$$

$$\text{VII) } (\alpha\beta) \odot \mathbf{f} = \alpha \odot (\beta \odot \mathbf{f})$$

$$[\alpha \odot (\beta \odot f)]_{(x)} = \alpha (\beta \odot f)_{(x)} = \alpha (\beta f_{(x)}) = (\alpha\beta) f_{(x)} = [(\alpha\beta) \odot f]_{(x)}$$

$$\text{VIII) } 1 \odot \mathbf{f} = \mathbf{f}$$

$$(1 \odot f)_{(x)} = 1 * f_{(x)} = f_{(x)} = (f)_{(x)}$$

Se cumplieron los ocho axiomas, por lo tanto un conjunto de funciones reales continuas en un intervalo I con las operaciones de suma y producto por un escalar dadas anteriormente forman un espacio vectorial y a cada una de las funciones de ese conjunto se les puede llamar vectores. *Se verifica entonces que una función $f(x)$ puede ser un vector.*

1.2.- SUBESPACIO VECTORIAL (SEV)

Sea $(\mathbf{E}, \oplus, \odot)$ un espacio vectorial y sea \mathbf{S} un subconjunto de \mathbf{E} . Se dice que \mathbf{S} es un *subespacio vectorial* del espacio vectorial $(\mathbf{E}, \oplus, \odot)$, si $(\mathbf{S}, \oplus, \odot)$ es a su vez un espacio vectorial, es decir, \mathbf{S} es un *subespacio vectorial* de \mathbf{E} , si \mathbf{S} con las mismas operaciones de adición y producto por un escalar definidas en \mathbf{E} , forma un espacio vectorial.

De todo conjunto \mathbf{E} se pueden obtener subconjuntos, algunos de ellos heredarán las propiedades del conjunto original y otros no, es decir, algunos subconjuntos formaran un espacio vectorial y otros de los subconjuntos no cumplirán con las propiedades que preservan los espacios vectoriales, el **Teorema 1.2.1** establece cuales son las propiedades que debe satisfacer un subconjunto \mathbf{S} de un conjunto \mathbf{E} para que este subconjunto \mathbf{S} pueda ser denominado espacio vectorial. Al ser \mathbf{S} un subconjunto de \mathbf{E} puede denotarse esta relación como $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{E}$.

Teorema 1.2.1

Sea \mathbf{E} un espacio vectorial y sea \mathbf{S} un subconjunto no vacío de \mathbf{E} . Entonces \mathbf{S} es un subespacio de \mathbf{E} , si y sólo si, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{S} \wedge \forall \alpha$ escalar, se cumple que:

$$\text{I) } \mathbf{a} \oplus \mathbf{b} \in \mathbf{S}$$

$$\text{II) } \alpha \odot \mathbf{a} \in \mathbf{S}$$

Anteriormente se estableció que un conjunto de funciones continuas forman un espacio vectorial (ver ejemplo 1), en el ejemplo 2 se mostrará que un subconjunto de funciones $f(x)$ del espacio vectorial de las funciones reales continuas puede formar un espacio vectorial.

Ejemplo 2

Determine si es o no un subespacio vectorial el siguiente subconjunto:

$$S = \{f_{(x)} / f_{(1)} = 0\} \subseteq f(I) \text{ con } I = \mathfrak{R}$$

Para determinar si es o no es un subespacio vectorial se debe verificar el cumplimiento de los axiomas del **teorema 1.2.1**.

$$\forall a, b \in S \quad \wedge \quad \forall \lambda \in \mathfrak{R}$$

$$a = a_{(x)} / a_{(1)} = 0$$

$$b = b_{(x)} / b_{(1)} = 0$$

$$I) a + b \in S$$

$$(a + b)_{(x)} = a_{(x)} + b_{(x)}$$

$$(a + b)_{(1)} = a_{(1)} + b_{(1)} = 0 + 0 = 0 \Rightarrow (a + b)_{(1)} \in S$$

$$II) \lambda a \in S$$

$$(\lambda a)_{(x)} = \lambda a_{(x)}$$

$$(\lambda a)_{(1)} = \lambda * a_{(1)} = \lambda * 0 = 0 \Rightarrow (\lambda a)_{(1)} \in S$$

Se satisfacen los dos axiomas por lo tanto el subconjunto **S** es un subespacio vectorial.

Como se mencionó anteriormente no todo subconjunto de un espacio vectorial es un espacio vectorial que pueda ser llamado subespacio vectorial, el ejemplo 3 muestra un caso de este tipo, se establece un subconjunto de un espacio vectorial que no satisface las condiciones para que el mismo sea llamado subespacio vectorial.

Ejemplo 3

Determine si es o no un subespacio vectorial el siguiente subconjunto:

$$S = \{f_{(x)} / f_{(0)} = 1\} \subseteq f(I) \text{ con } I = \mathfrak{R}$$

Para determinar si es o no es un subespacio vectorial se debe verificar el cumplimiento de los axiomas del **teorema 1.2.1**.

$$\forall a, b \in S \quad \wedge \quad \forall \lambda \in \mathfrak{R}$$

$$a = a_{(x)} / a_{(0)} = 1$$

$$b = b_{(x)} / b_{(0)} = 1$$

$$I) a + b \in S$$

$$(a + b)_{(x)} = a_{(x)} + b_{(x)}$$

$$(a + b)_{(0)} = a_{(0)} + b_{(0)} = 1 + 1 = 2 \neq 1 \Rightarrow (a + b)_{(0)} \notin S$$

Se observa el fallo del primer axioma del **Teorema 1.2.1** lo que indica que el subconjunto **S** no es un subespacio vectorial a pesar de que **S** es un subconjunto del espacio vectorial formado por el conjunto de todas las funciones reales continuas $f(I)$.

1.3.- COMBINACIÓN LINEAL

Si **X** es un subconjunto de vectores de un espacio vectorial **E** entonces un vector de la forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_n v_n$, donde los α_i son escalares y los $v_i \in \mathbf{X}$, es una combinación lineal de vectores de **X** con coeficientes α_i .

Un vector $v \in \mathbf{E}$ se dice que es combinación lineal de los vectores $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{E}$, si existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ (\mathbf{R} es un campo de escalares) tales que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad (1.1)$$

El vector $(2,10)$ es combinación lineal de los vectores del conjunto $\mathbf{X} = \{(1,3); (0,1)\}$ ya que $(2,10) = 2 \odot (1,3) \oplus 4 \odot (0,1)$.

Por el contrario, el vector $(0,1,0)$ no es combinación lineal de los vectores del conjunto $\mathbf{B} = \{(4,0,0); (0,0,3)\}$ ya que no existen valores α_1 y α_2 que hagan posible el cumplimiento de la igualdad $(0,1,0) = \alpha_1 \odot (4,0,0) \oplus \alpha_2 \odot (0,0,3)$. Aunque el vector $(0,1,0)$ no pertenece a la combinación lineal de los vectores del conjunto \mathbf{B} existen infinitos vectores que si pertenecen a la combinación lineal de los vectores del conjunto \mathbf{B} los cuales se van construyendo con distintos valores reales de los escalares α_1 y α_2 ; el **Teorema 1.3.1** expresa que los infinitos vectores que pertenecen a la combinación lineal de un conjunto de vectores dados forma un subespacio vectorial.

Teorema 1.3.1

Sea \mathbf{X} un subconjunto no vacío de vectores de un espacio vectorial \mathbf{E} , entonces el conjunto $L(\mathbf{X})$ formado por todas las combinaciones lineales de los vectores de \mathbf{X} , es un subespacio vectorial de \mathbf{E} y es el más pequeño subespacio de \mathbf{E} que contiene a \mathbf{X} .

Como un vector es cualquier elemento de un espacio vectorial y la combinación lineal se plantea entre vectores, entonces en $f(R)$ un ejemplo de combinación lineal podría ser el vector $5+x \in L(\mathbf{B})$ donde $\mathbf{B} = \{1-x; 1+x\}$ ya que $5+x = 2 \odot (1-x) \oplus 3 \odot (1+x)$; para este

caso el conjunto formado por todas las combinaciones lineales de B sería $L(B) = \alpha_1(1-x) + \alpha_2(1+x)$.

1.4.- CONJUNTOS GENERADORES

Si X es un conjunto no vacío de vectores de un espacio vectorial E , entonces el subespacio $L(X)$ de E , descrito en el **Teorema 1.3.1**, es el subespacio de E generado por X ó expandido por X . El conjunto X genera a $L(X)$. A los vectores de X se les llama vectores generadores de $L(X)$. En particular un subconjunto Y de vectores del espacio E genera todo el espacio vectorial E , si $L(Y) = E$.

Para ilustrar que forma puede tomar un conjunto generado por un grupo de vectores en el ejemplo 4 se evidencia el procedimiento a seguir para representar el conjunto formado por un grupo de vectores dado.

Ejemplo 4

Determinar el conjunto generado (subespacio generado) por el siguiente subconjunto $X = \{(1,1,0); (0,1,2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

El conjunto generado es el conjunto $L(X)$; este conjunto se genera a partir de la combinación de los elementos de X , $L(X) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,1,2)$, como X está contenido en \mathbb{R}^3 entonces $L(X)$ será un subespacio de \mathbb{R}^3 y puede representarse por un vector genérico de este espacio por ejemplo (x,y,z) , así se tendrá que:

$$(x, y, z) = \alpha_1(1,1,0) + \alpha_2(0,1,2) \tag{1.2}$$

Esta ecuación (1.2) origina al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0\alpha_2 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 = y \\ 0\alpha_1 + 2\alpha_2 = z \end{cases}$$

Resolviendo aplicando el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & : & x \\ 1 & 1 & : & y \\ 0 & 2 & : & z \end{pmatrix} \sim f_2 = f_2 - f_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & : & x \\ 0 & 1 & : & y - x \\ 0 & 0 & : & z \end{pmatrix} \sim f_3 = f_3 - 2f_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & : & x \\ 0 & 1 & : & y - x \\ 0 & 0 & : & 2x - 2y + z \end{pmatrix}$$

El conjunto generado $L(X)$ es el conjunto de vectores de la forma (x,y,z) que hacen que el sistema sea compatible (tenga solución), esto es para que existan valores reales para α_1 y α_2 , el sistema presentará solución siempre que $2x - 2y + z = 0$, por lo tanto:

$$L(X) = \{(x,y,z) / 2x - 2y + z = 0\} \text{ el cual es un plano en } \mathbb{R}^3.$$

El conjunto generado no sólo está limitado al espacio \mathbb{R}^n ya que este se forma a partir de la combinación lineal de vectores, el ejemplo 5 muestra un caso donde el conjunto generado se forma a partir de vectores de un espacio vectorial distinto de \mathbb{R}^n .

Ejemplo 5

Determinar el subespacio generado por el siguiente subconjunto $X = \{1+x+2x^2; 1+2x+3x^2\} \subseteq P^2(x)$ (conjunto de todos los polinomios de grado ≤ 2).

$L(X) = \alpha_1(1+x+2x^2) + \alpha_2(1+2x+3x^2)$, como X está contenido en $P^2(x)$ entonces $L(X)$ será un subespacio de $P^2(x)$ y puede representarse por un vector genérico de este espacio por ejemplo $a+bx+cx^2$, así se tendrá que:

$$a + bx + cx^2 = \alpha_1(1 + x + 2x^2) + \alpha_2(1 + 2x + 3x^2) \quad (1.3)$$

Esta ecuación (1.3) origina al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = a \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = b \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = c \end{cases}$$

Resolviendo aplicando el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & : & a \\ 1 & 2 & : & b \\ 2 & 3 & : & c \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & : & a \\ 0 & 1 & : & b - a \\ 0 & 1 & : & c - 2a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & : & 2a - b \\ 0 & 1 & : & b - a \\ 0 & 0 & : & c - b - a \end{pmatrix}$$

El conjunto generado $L(X)$ es el conjunto de vectores de la forma $a + bx + cx^2$ que hacen que el sistema sea compatible (tenga solución), esto es para que existan valores reales de α_1 y α_2 , el sistema presentará solución siempre que $c - b - a = 0$, por lo tanto:

$$L(X) = \{ a + bx + cx^2 \in P^2(x) / c - b - a = 0 \}.$$

1.5.- CONJUNTOS INDEPENDIENTES

Primeramente hay que conocer lo que es una relación de dependencia, lo cual puede definirse:

Sea \mathbf{X} un subconjunto no vacío de vectores de un espacio vectorial \mathbf{E} , una *relación de dependencia* en \mathbf{X} es una relación de la forma:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_n v_n = \mathbf{O} \quad (1.4)$$

Para distintos $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \in \mathbf{X}$, donde al menos uno de los coeficientes α_i es distinto de cero, esto es, $L(\mathbf{X}) = \mathbf{O} \Leftrightarrow$ al menos uno de los $\alpha_i \neq 0$.

Considérese el subconjunto $\mathbf{X} = \{(2, 3), (-4, -6), (5, 9)\}$ de vectores de $\mathbf{E} = \mathbf{R}^2$. La relación $2\odot(2,3) \oplus 1\odot(-4,-6) = (0,0)$, es una relación de dependencia en \mathbf{X} .

Un subconjunto no vacío \mathbf{X} de vectores de un espacio vectorial \mathbf{E} es *linealmente dependiente* si en \mathbf{X} existe al menos una relación de dependencia, y es *linealmente independiente* si no existe ninguna relación de dependencia en \mathbf{X} .

Ahora bien, considérese \mathbf{X} como el subconjunto de \mathbf{R}^3 formado por los vectores unitarios $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Se observa que:

$$\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3 = \alpha_1(1, 0, 0) + \alpha_2(0, 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad (1.5)$$

De donde, $\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3 = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ por lo tanto no hay ninguna relación de dependencia en el subconjunto $\mathbf{X} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$; el subconjunto \mathbf{X} se dice que es linealmente independiente.

Teorema 1.5.1

Un subconjunto no vacío $\mathbf{X} = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ de distintos vectores no nulos de un espacio vectorial \mathbf{E} , es dependiente si, y sólo si, algún vector, por ejemplo v_k , para $k > 1$, puede expresarse como combinación lineal de los vectores que le preceden v_1, v_2, \dots, v_{k-1} .

Demostración: Asumiendo que \mathbf{X} es dependiente y que al menos contiene dos vectores (puesto que un conjunto con un solo vector no nulo es independiente), una relación

de dependencia en X es $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_n v_n = 0$, si k es el más grande entero tal que $\alpha_k \neq 0$, entonces el vector en la posición k puede escribirse como:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_k v_k = 0 \quad (1.6)$$

$$v_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k} v_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_k} v_3 - \dots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} v_{k-1} \quad (1.7)$$

Así v_k pudo ser escrito como combinación lineal de los vectores precedentes.

En contrapartida si se supone que para cada $v_k \in X$ se tiene que:

$$v_k = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1} \quad (1.8)$$

De donde se obtiene la relación:

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \dots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + (-1)v_k = 0 \quad (1.9)$$

La cual es una relación de dependencia en X ya que $\lambda_k \neq 0$

1.6.- BASE Y DIMENSIÓN

Sea E un espacio vectorial cualquiera. Un subconjunto B de vectores de E es una base para E si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

- 1.-) B es un subconjunto linealmente independiente.
- 2.-) El subconjunto B genera todo el espacio vectorial E ($L(B)=E$).

Si el subconjunto \mathbf{B} no alcanza a generar todo \mathbf{E} , entonces, como sabemos, $L(\mathbf{B})$ es un subespacio de \mathbf{E} y \mathbf{B} sería una base de este subespacio.

Un espacio vectorial \mathbf{E} es finito dimensional si \mathbf{E} tiene una base con un número finito de vectores.

Teorema 1.6.1

Si \mathbf{E} es un espacio vectorial, entonces cualquier conjunto finito generador para \mathbf{E} , contiene al menos tantos vectores como cualquier conjunto finito independiente de vectores de \mathbf{E} .

Teorema 1.6.2

Si \mathbf{E} es un espacio vectorial finito dimensional, entonces dos bases cualesquiera de \mathbf{E} tienen el mismo número de elementos.

Por lo tanto si \mathbf{E} es un espacio vectorial finito dimensional; la dimensión de \mathbf{E} , denotada por $\dim(\mathbf{E})$, es el número de elementos de una base cualquiera de \mathbf{E} .

Teorema 1.6.3

Si \mathbf{E} es un espacio vectorial finito dimensional y si $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$ es un conjunto independiente de vectores de \mathbf{E} , entonces $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$ puede completarse, si es necesario, para formar una base de \mathbf{E} .

Corolario

Si $\dim(\mathbf{E}) = n$, entonces un conjunto $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ de n distintos vectores del espacio \mathbf{E} es una base de \mathbf{E} , si este conjunto es independiente o generador de todo \mathbf{E} . Esto es, no es necesario verificar las dos condiciones de la definición de base si el conjunto contiene un número de vectores igual a la dimensión del espacio.

1.7.- COORDENADAS DE UN VECTOR

Sea \mathbf{E} un espacio vectorial finito dimensional y sea $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_n\}$ una base de \mathbf{E} . Cada vector $\mathbf{v} \in \mathbf{E}$ puede expresarse de una forma única en esa base:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \alpha_3 \mathbf{b}_3 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n \quad (1.10)$$

La secuencia $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ está naturalmente asociada con el vector \mathbf{v} y la secuencia $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_n$ a los vectores base. Si los vectores de la base cambian la secuencia, en ese mismo orden cambia la secuencia de los coeficientes, por eso es necesario introducir la noción de base ordenada para un espacio vectorial.

Sea \mathbf{E} un espacio vectorial finito dimensional. Una base ordenada $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_n\}$ es una n -upla ordenada $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_n)$ de vectores que forman base del espacio \mathbf{E} .

Así, si $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_n\}$ es una base ordenada del espacio vectorial \mathbf{E} , y \mathbf{v} es un vector del espacio \mathbf{E} , tal que:

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \alpha_3 \mathbf{b}_3 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n \quad (1.10)$$

La n-upla ordenada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ de escalares, es el **vector coordenado** de v en la base \mathbf{B} y α_i es la i -ésima coordenada de v con respecto a la base ordenada \mathbf{B} . El vector columna o matriz de $1 \times n$

$$[v]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

se llama **vector columna coordenado** del vector v en la base \mathbf{B} o con respecto a la base \mathbf{B} . Estas coordenadas son únicas para cada vector v .

Ejemplo 6

Determine las coordenadas del vector $v = (-1, -8)$ en la base $\mathbf{B} = \{(1, -1); (1, 2)\}$ de \mathbb{R}^2 .

Para hallar las coordenadas de v en la base \mathbf{B} , esto es $[v]_{\mathbf{B}}$, hay que expresar al vector v como combinación lineal de los vectores de la base \mathbf{B} aplicando (1.10):

$$(-1, -8) = \alpha_1(1, -1) + \alpha_2(1, 2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -8 \end{pmatrix} \sim f_2 = f_2 + f_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \sim f_2 = \frac{1}{3}f_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim f_1 = f_1 - f_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(-1, -8) = 2(1, -1) + (-3)(1, 2)$$

$$[v]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = [(-1, -8)]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

El procedimiento para hallar las coordenadas de un vector consiste siempre en determinar los escalares que hacen posible la combinación lineal del vector dado en la base dada, en el ejemplo 7, a diferencia del ejemplo 6, se muestra el cálculo para obtener las coordenadas de un vector perteneciente a un espacio distinto de \mathbb{R}^n .

Ejemplo 7

Determine las coordenadas del vector $v = -1-8x$ en la base $B=\{1-x;1+2x\}$ de $P^1(x)$.

Para hallar las coordenadas de v en la base B , esto es $[v]_B$, hay que expresar al vector v como combinación lineal de los vectores de la base B :

$$-1-8x = \alpha_1(1-x) + \alpha_2(1+2x)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -8 \end{pmatrix} \sim f_2 = f_2 + f_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \sim f_2 = \frac{1}{3}f_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim f_1 = f_1 - f_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$-1-8x = 2(1-x) + (-3)(1+2x)$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = [(-1-8x)]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

En el capítulo 3, al proceso de determinar las coordenadas de un vector es un proceso que se denominará *análisis*. En el ejemplo 8 se muestra un caso en el que se conoce la base del espacio vectorial y las coordenadas del vector, este proceso para reconstruir el vector se denominará *síntesis*.

Ejemplo 8

Determine el vector $v \in P^2(x)$, sabiendo que, sus coordenadas en la base

$$B = \{x; 1-x; 3x^2\} \text{ es } [v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2/3 \end{bmatrix} \Rightarrow v = 2(x) + (-1)(1-x) + \left(\frac{2}{3}\right)(3x^2) = 2x^2 + 3x - 1$$

En los ejemplos 6 y 7 se observa que para hallar las coordenadas de un vector es necesario la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, estos sistemas podrían ser muy robustos a la hora de incrementar la dimensión de los espacios vectoriales, más adelante se tratarán las bases ortogonales las cuales ofrecen bondades a la hora de realizar los cálculos para determinar las coordenadas de un vector.

1.8.- ESPACIO VECTORIAL CON PRODUCTO INTERNO

Sea E un espacio vectorial. Una función \cdot definida del producto cartesiano de $E \times E$ sobre \mathbf{R} ($E \times E \rightarrow \mathbf{R}$), la cual le hace corresponder a cada par de vectores $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ el escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, es un producto interno en E si $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ y para todo escalar λ se tiene que:

- i) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ (propiedad conmutativa)
- ii) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ (propiedad distributiva)
- iii) $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ (propiedad homogénea)

Un espacio vectorial E junto con un producto interno definido, constituye un *espacio vectorial con producto interno*.

Ejemplo 9

Sea $C(\mathbf{I})$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas de una variable real en el intervalo $\mathbf{I} = [a, b]$. Sea \cdot la función definida por:

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad (1.12)$$

Para todo $f, g \in C(\mathbf{I})$. Por propiedad de las integrales definidas, puede verificarse fácilmente que esta función es un producto interno en $C(\mathbf{I})$.

1.9.- ORTOGONALIDAD Y SUBESPACIOS

Un subconjunto \mathbf{X} de un espacio vectorial con producto interno \mathbf{E} , es un *conjunto de vectores ortogonales* de \mathbf{E} , si $x_i \cdot x_j = 0 \ \forall \ i \neq j$ y $x_i, x_j \in \mathbf{E}$.

Teorema 1.9.1

Sea \mathbf{E} un espacio vectorial con producto interno y sea \mathbf{B} un conjunto de vectores ortogonales de \mathbf{E} con la propiedad que $b_i \cdot b_i \neq 0$ para todo $b_i \in \mathbf{B}$. Entonces \mathbf{B} es un conjunto independiente.

Si \mathbf{X} es un subconjunto de un espacio con producto interno \mathbf{E} , entonces el conjunto $\mathbf{X}^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbf{E} / \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}$ es un subespacio vectorial de \mathbf{E} . Este subespacio es el llamado *subespacio ortogonal* a \mathbf{X} .

Esta ultima definición puede verificarse como sigue: como $\mathbf{X}^\perp \subseteq \mathbf{E}$, sólo se debe probar que las dos operaciones se preservan en \mathbf{X}^\perp .

$$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X^\perp,$$

$$\mathbf{a) } (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \in X^\perp$$

$$(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = 0 + 0 \text{ ya que } \mathbf{x} \in X^\perp$$

$$\mathbf{b) } (\alpha\mathbf{v}) \in X^\perp$$

$$(\alpha\mathbf{v}) \cdot \mathbf{x} = \alpha(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}) = \alpha 0 = 0$$

1.10.- PRODUCTO INTERNO DEFINIDO POSITIVO

Sea \mathbf{E} un espacio vectorial real (el cuerpo de escalares son los números reales). Un producto interno en \mathbf{E} es definido positivo si $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$ para todo $\mathbf{v} \neq \mathbf{O}$. Un espacio vectorial \mathbf{E} con un producto interno definido positivo es un *Espacio Vectorial Euclidiano*.

Por lo tanto para que un espacio vectorial sea Euclidiano debe cumplir:

$$\text{i) } \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$$

$$\text{ii) } \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$$

$$\text{iii) } (\lambda\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$$

$$\text{iv) } \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0 \quad \forall \mathbf{v} \neq \mathbf{O}$$

Ejemplo 10

El producto interno definido en la ecuación (1.12):

$$f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)dx \tag{1.12}$$

Está definido cómo positivo, pues, si f es una función continua, no nula, en el intervalo $[a, b]$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ y un $\delta > 0$ tal que $|f(x)| > \varepsilon > 0$ para todo x en un subintervalo de $[a, b]$ de longitud δ . Entonces:

$$f \cdot f = \int_a^b f(x)f(x)dx = \int_a^b [f(x)]^2 dx > \varepsilon^2 \delta > 0 \quad (1.13)$$

En un espacio vectorial Euclidiano se define la longitud de un vector como sigue:

Sea \mathbf{E} un espacio vectorial Euclidiano, la **norma** (o **longitud**) $\|v\|$ de $v \in \mathbf{E}$, está definida por:

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} \quad (1.14)$$

La **distancia** entre dos vectores v y w de \mathbf{E} es igual a $\|v - w\|$

Ejemplo 11

Si se tiene el conjunto $C(\mathbf{I})$ (conjunto de las funciones reales continuas en el intervalo \mathbf{I}) para $\mathbf{I} = [a, b]$, la norma en este conjunto con el producto interno definido en (1.12) como $f \cdot g = \int_a^b f(x)g(x)dx$, vendría dada por:

$$\|f\|^2 = f \cdot f = \int_a^b f(x)f(x)dx = \int_a^b [f(x)]^2 dx \quad (1.15)$$

Y la distancia vendría dada por:

$$\|f - g\|^2 = \int_a^b [f(x) - g(x)][f(x) - g(x)]dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx \quad (1.16)$$

Ejemplo 12

Sea $f(x) = 2-x \in C(I)$ hallar $\|f\|$ en $I = [1, 2]$ con el producto interno definido según la ecuación (12).

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sqrt{f \bullet f} \\ f \bullet f &= \int_1^2 (2-x)(2-x) dx = \int_1^2 (2-x)^2 dx = \left. \frac{(2-x)^3}{3} \right|_1^2 = \frac{1}{3} \\ \|f\| &= \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

1.11.- DESIGUALDAD DE CAUCHY- SCHWARZ

Sea \mathbf{E} un espacio vectorial Euclidiano, entonces $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{E}$, se tiene que:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| * \|\mathbf{v}\| \quad (1.17)$$

Teorema 1.11.1

(Desigualdad Triangular) Sea \mathbf{E} un espacio vectorial Euclidiano, entonces para todo par de vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{E}$ se tiene que:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad (1.18)$$

Teorema 1.11.2

Sea \mathbf{E} un espacio vectorial Euclidiano, la norma satisface las siguientes propiedades para todo par de vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} pertenecientes a \mathbf{E} y para todo escalar λ :

i) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$, y $\|\mathbf{v}\| = 0$ si, y solo si, $\mathbf{v} = 0$

ii) $\|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{v}\|$

iii) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$

1.12.- PROYECCIONES ESCALARES Y VECTORIALES

La desigualdad de Schwarz ecuación (1.17) se cumple en un espacio Euclidiano \mathbf{E} , entonces esta desigualdad puede escribirse como:

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1 \quad (1.19)$$

Y por consiguiente permite definir el ángulo entre dos vectores \mathbf{u} , $\mathbf{v} \in \mathbf{E}$

Sean dos vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} dos vectores no nulos de un espacio vectorial Euclidiano \mathbf{E} . El ángulo θ entre estos dos vectores está definido por:

$$\theta = \text{ArcCos} \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right) \quad (1.20)$$

De esta última expresión, resulta la fórmula del producto escalar o producto punto que se define como:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \text{Cos}(\theta) \quad (1.21)$$

En la figura 1.1 se utilizó la ley del paralelogramo para sumar dos vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} no nulos de un espacio vectorial Euclidiano \mathbf{E} . Por lo tanto, para calcular la norma del vector $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ se procede como sigue:

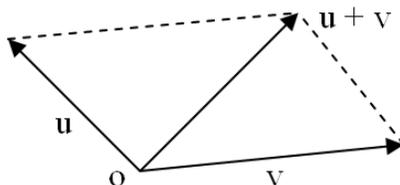


Figura 1.1: Suma de vectores aplicando el método del paralelogramo para ilustrar el teorema del coseno

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \text{Cos}(\theta)\end{aligned}$$

En particular, si \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales, el triángulo \mathbf{o} , \mathbf{v} , $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ es rectángulo y resulta que:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 \tag{1.22}$$

Lo cual es una demostración del teorema de Pitágoras

En la figura 1.2 se muestran dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} los cuales se suponen en un espacio vectorial Euclidiano \mathbf{E} .

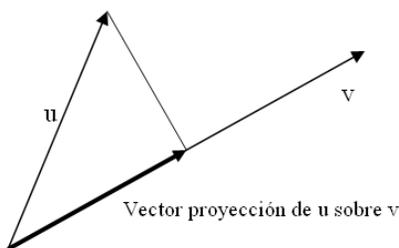


Figura 1.2: Proyección ortogonal de un vector \mathbf{u} en la dirección de otro vector \mathbf{v}

En la figura 1.2 aparece remarcado el vector proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} , la longitud de este vector proyección está dada por $\|\mathbf{u}\|\cos(\theta)$, y el vector viene dado por:

$$(\|\mathbf{u}\|\cos(\theta))\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \|\mathbf{u}\|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\cdot\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} \quad (1.23)$$

$$\text{Vector proyección u sobre v} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} \quad (1.24a)$$

$$\text{Proyección escalar de u sobre v} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}, \text{ u y v son no nulos} \quad (1.24b)$$

1.13 BASES ORTOGONALES Y PROYECCIONES

Sea \mathbf{E} un espacio vectorial Euclidiano finito dimensional, una base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_n\}$ de \mathbf{E} , es una **base ortogonal** si $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = 0$ para $i \neq j$ y es una **base ortonormal** si además $\|\mathbf{b}_i\| = 1$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Si $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_n\}$ es una base ortogonal para \mathbf{E} , entonces,

$$\left\{ \frac{\mathbf{b}_1}{\|\mathbf{b}_1\|}, \frac{\mathbf{b}_2}{\|\mathbf{b}_2\|}, \frac{\mathbf{b}_3}{\|\mathbf{b}_3\|}, \dots, \frac{\mathbf{b}_n}{\|\mathbf{b}_n\|} \right\} \text{ es una base ortonormal para } \mathbf{E}.$$

Las bases ortonormales facilitan el trabajo cuando se tiene que hallar las coordenadas de un vector respecto a dicha base ordenada, el ejemplo 13 ilustra este caso.

Teorema 1.13.1

Sea $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_n\}$ una base ortonormal ordenada de \mathbf{E} . Las n-uplas coordenadas de un vector $\mathbf{v} \in \mathbf{E}$ con respecto a esta base ordenada son:

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_1, \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_2, \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_n)$$

$$\text{Esto es, } \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_1) \cdot \mathbf{b}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_2) \cdot \mathbf{b}_2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_3) \cdot \mathbf{b}_3 + \dots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_n) \cdot \mathbf{b}_n \quad (1.25)$$

Demostración

Sea $\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \alpha_3 \mathbf{b}_3 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n$. Usando propiedades del producto interno se pueden hallar los valores de los escalares α_i como sigue:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_1 = (\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \alpha_3 \mathbf{b}_3 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n) \cdot \mathbf{b}_1 \quad (1.26a)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_1 = \alpha_1 (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1) + \alpha_2 (\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_1) + \alpha_3 (\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_1) + \dots + \alpha_n (\mathbf{b}_n \cdot \mathbf{b}_1) \quad (1.26b)$$

Por hipótesis $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_n\}$ es una base ortonormal, luego $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = 0$ para $i \neq j$, y $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1 = 1$, así la última ecuación se convierte en:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_1 = \alpha_1 (1) + \alpha_2 (0) + \alpha_3 (0) + \dots + \alpha_n (0) \quad (1.26c)$$

Si se computa para $\mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_i$ entonces $\alpha_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}_i$ con lo cual queda demostrado el teorema.

Ejemplo 13

Sea $B = \{(1,1,1); (0,1,-1); (-2,1,1)\}$ una base ortogonal de \mathbf{R}^3 , hallar las coordenadas del vector $v = (-3,5,4)$ referidas a la base B .

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 \quad [v]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$(v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3) \cdot b_1$$

$$v \cdot b_1 = (\alpha_1 b_1) \cdot b_1 + (\alpha_2 b_2) \cdot b_1 + (\alpha_3 b_3) \cdot b_1$$

$$\alpha_1 = \frac{v \cdot b_1}{b_1 \cdot b_1}$$

$$\alpha_1 = \frac{(-3,5,4) \cdot (1,1,1)}{(1,1,1) \cdot (1,1,1)} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\alpha_2 = \frac{v \cdot b_2}{b_2 \cdot b_2} = \frac{(-3,5,4) \cdot (0,1,-1)}{(0,1,-1) \cdot (0,1,-1)} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_3 = \frac{v \cdot b_3}{b_3 \cdot b_3} = \frac{(-3,5,4) \cdot (-2,1,1)}{(-2,1,1) \cdot (-2,1,1)} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

Teorema 1.13.2

Sea $\{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$ una base ortonormal ordenada para \mathbf{E} , y sean v y w dos vectores de \mathbf{E} . Si $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \alpha_3 b_3 + \dots + \alpha_n b_n$ y $w = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3 + \dots + \beta_n b_n$, entonces, $v \cdot w = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 + \dots + \alpha_n \beta_n$. Esto es, el producto interno puede calcularse usando las coordenadas relativas a una base ortonormal ordenada de igual manera que el producto interno usual en \mathbf{R}^n .

Demostración

Si se plantea $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ y se aplican las propiedades distributivas y homogéneas del producto interno, se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= (\alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \alpha_3 \mathbf{b}_3 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n) \cdot (\beta_1 \mathbf{b}_1 + \beta_2 \mathbf{b}_2 + \beta_3 \mathbf{b}_3 + \dots + \beta_n \mathbf{b}_n) \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \mathbf{b}_i \cdot \beta_j \mathbf{b}_j = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \beta_j (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} &= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 + \dots + \alpha_n \beta_n\end{aligned}\tag{1.27}$$

En la figura 1.3 se muestra como el vector proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} es un vector paralelo al vector \mathbf{v} (es una *aproximación* de el vector \mathbf{u} al vector \mathbf{v}), además en la misma figura se sugiere que si se extrae del vector \mathbf{u} su proyección sobre el vector \mathbf{v} , resulta un vector ortogonal a \mathbf{v} (esta sustracción puede medir que tan diferente es \mathbf{u} de \mathbf{v} , es un *detalle*).

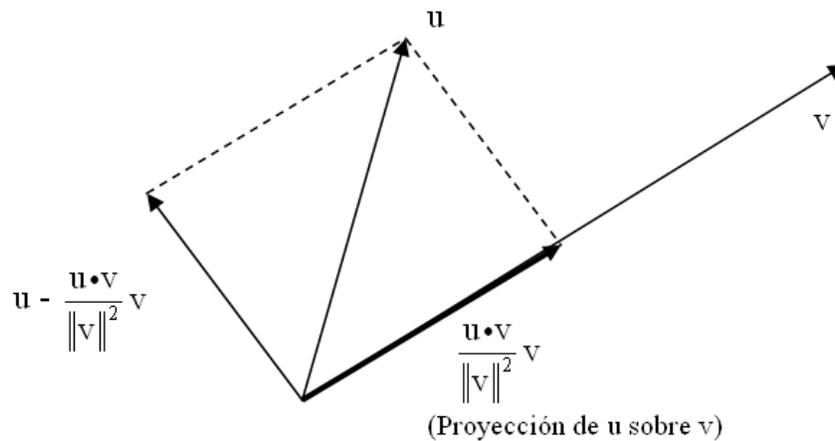


Figura 1.3: Ortogonalización del vector \mathbf{u}

Teorema 1.13.3

Sea \mathbf{E} un espacio vectorial de dimensión n y sea \mathbf{S} un subespacio de dimensión r de \mathbf{E} . Entonces \mathbf{S}^\perp es un subespacio de \mathbf{E} de dimensión $(n - r)$ y todo elemento de \mathbf{E} puede expresarse en forma única de la forma $\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}$, esto es, $\mathbf{E} = \mathbf{S} \oplus \mathbf{S}^\perp$, donde $\mathbf{v} \in \mathbf{S}$ y $\mathbf{w} \in \mathbf{S}^\perp$.

Si \mathbf{E} es un espacio vectorial y \mathbf{S} es un subespacio de \mathbf{E} , entonces \mathbf{S}^\perp es el **complemento ortogonal de \mathbf{S}** , además $(\mathbf{S}^\perp)^\perp = \mathbf{S}$.

Ejemplo 14

Demuestre que el siguiente producto interno dado es definido positivo en \mathbf{R}^3
 $u \cdot v = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3) = 3u_1v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_2 + u_3v_3$ y calcule el complemento ortogonal del subespacio $S = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 / z = 0\}$.

Para demostrar que el producto interno es definido positivo sólo hay que verificar que $x \cdot x \geq 0$ y $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = (0,0,0)$, luego:

$$x \cdot x = (x_1, x_2, x_2) \cdot (x_1, x_2, x_2) \geq 0$$

$$x \cdot x = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$$

En esta expresión, necesariamente $x \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = (0,0,0)$. Por lo tanto el producto interno dado es definido positivo.

Ahora solo falta calcular el complemento ortogonal del subespacio S .

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0\} = \{(x, y, 0)\} = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) / x, y \in \mathbb{R}$, una base para el subespacio S son los vectores generadores de S ; Base de $S = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0)\}$.

$$S^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = 0 \wedge (x, y, z) \cdot (0, 1, 0) = 0\}$$

$$S^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x + y = 0 \wedge x + 2y = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = 0\}.$$

El complemento ortogonal es el eje Z . Una base para el subespacio S^\perp sería por ejemplo, $S^\perp = \{(0, 0, z)\} = z(0, 0, 1) / z \in \mathbb{R}$ Base de $S^\perp = \{(0, 0, 1)\}$.

Se observa además que cualquier vector (x, y, z) de \mathbb{R}^3 se escribe como combinación lineal de la base de $S + S^\perp$.

Ejemplo 15

Sea W un subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 y sea $w_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $w_2 = (0, 0, 0, 1)$ y $w_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ tres vectores que forman una base ortonormal para W . Expresar el vector $v = (1, 0, 2, 3)$ como la suma $w + u$, siendo $w \in W$ y $u \in W^\perp$.

Hay que calcular en primera instancia el complemento ortogonal de W :

$W^\perp = \{x \in \mathbb{R}^4 / x \cdot w_1 = 0 \wedge x \cdot w_2 = 0 \wedge x \cdot w_3 = 0\}$, como x es un vector genérico de \mathbb{R}^4 , entonces $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ y al efectuar el producto interno usual de \mathbb{R}^4 , se produce un sistema de tres ecuaciones y cuatro incógnitas donde $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, por lo tanto:

$W^\perp = \{(0, x_2, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 / x_2 \in \mathbb{R}\} = x_2(0, 1, 0, 0)$ por lo tanto $u = (0, 1, 0, 0)$ es una base para W^\perp .

Tomando como base el **teorema 1.13.3**, todo vector de \mathbf{R}^4 se puede escribir como la suma de ambos subespacios W y W^\perp , entonces:

$$v = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 + \alpha_4 u$$

Como u forma con w_1 , w_2 y w_3 una base ortonormal de \mathbf{R}^4 , entonces:

$$\alpha_1 = v \cdot w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \alpha_2 = v \cdot w_2 = 3 \quad \alpha_3 = v \cdot w_3 = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \alpha_4 = v \cdot u = 0$$

Por lo que :

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}} w_1 + 3w_2 + \frac{3}{\sqrt{2}} w_3 + 0u$$

CAPITULO II

TEÓRIA DE FOURIER

Introducción

Los procesos físicos pueden ser descritos en el dominio del tiempo mediante valores representados por una función del tiempo f . También es posible describir dichos procesos en el dominio de la frecuencia mediante una serie de amplitudes como función de la frecuencia representadas por F . La transformada de Fourier es una herramienta con la capacidad de representar estos procesos físicos, tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia. Esto hace que la transformada de Fourier sea ampliamente utilizada en aplicaciones en el campo de la ciencia e ingeniería.

2.1.- TEOREMA DE FOURIER

Una función $f(t)$ que satisfaga las siguientes condiciones:

- i) $f(t)$ está definida en el intervalo $I = [-\frac{\Gamma}{2}, \frac{\Gamma}{2}]$
- ii) $f(t)$ y $f'(t)$ son seccionalmente continuas en $I = [-\frac{\Gamma}{2}, \frac{\Gamma}{2}]$
- iii) $f(t + \Gamma) = f(t)$, es decir $f(t)$ es periódica de periodo Γ

Puede expresarse como la suma de un número de funciones seno de diferentes amplitudes, fases y periodos.

$$f(t) = A_0 + A_1 \text{sen}(wt + \phi_1) + A_2 \text{sen}(2wt + \phi_2) + \dots + A_n \text{sen}(nwt + \phi_n) \quad (2.1)$$

Donde las A y las ϕ son constantes y $w = \frac{2\pi}{T}$ es la frecuencia de $f(t)$. El término $A_1 \text{sen}(wt + \phi_1)$ se llama **primera armónica** o **modo fundamental** y tiene la misma frecuencia w que la función padre $f(t)$. El término $A_n \text{sen}(nwt + \phi_n)$ se llama la **n-ésima armónica** y tiene frecuencia nw que es n veces la del modo fundamental. A_n denota la **amplitud** de la n-ésima armónica y ϕ_n es su **ángulo de fase** que mide el retraso o adelanto de la n-ésima armónica con referencia a una onda de seno pura de la misma frecuencia.

Como:

$$A_n \text{sen}(nwt + \phi_n) \equiv [A_n \cos(\phi_n)] \text{sen}(nwt) + [A_n \text{sen}(\phi_n)] \cos(nwt) \quad (2.2a)$$

$$\equiv b_n \text{sen}(nwt) + a_n \cos(nwt) \quad (2.2b)$$

Donde:

$$b_n = A_n \cos(\phi_n) \quad \text{y} \quad a_n = A_n \text{sen}(\phi_n)$$

Así la expansión (2.1) puede escribirse como:

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nwt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}(nwt) \quad (2.3)$$

La ecuación (2.3) se llama **expansión en serie de Fourier** de la función $f(t)$, los términos a_n y b_n se llaman **coeficientes de Fourier**. En ingeniería eléctrica es una práctica común referirse a a_n y b_n como las **componentes en fase** y **cuadratura en fase** respectivamente. Sin embargo a_n y b_n no son más que las coordenadas de la función $f(t)$ (vector) referidas a la base formada por funciones sinusoidales, coordenadas, las cuales fueron establecidas en el **tema 1.7** ecuación (1.11).

Los coeficientes de Fourier se determinan mediante las siguientes integrales:

$$a_n = \frac{2}{\Gamma} \int_{t_o}^{t_o+\Gamma} f(t) \text{Cos}(nwt) dt \quad (2.4a)$$

$$b_n = \frac{2}{\Gamma} \int_{t_o}^{t_o+\Gamma} f(t) \text{Sen}(nwt) dt \quad (2.4b)$$

Si se coloca $n = 0$ en la ecuación (2.4a) se obtiene:

$$a_0 = \frac{2}{\Gamma} \int_{t_o}^{t_o+\Gamma} f(t) dt \quad (2.4c)$$

Se ha demostrado en el ejemplo 1 que el conjunto de funciones reales continuas $C(\mathbf{I})$ en un intervalo dado $\mathbf{I} = [t_o, t_o + \Gamma]$ forman un espacio vectorial en $C(\mathbf{I})$. Por lo tanto puede observarse que según las condiciones que satisface la función $f(t)$, las ecuaciones (2.4a), (2.4b) y (2.4c), no son más que el **producto interno** entre la función $f(t)$ con cada uno de los vectores de la base:

$$\{1, \text{Cos } wt, \text{Cos } 2wt, \dots, \text{Cos } nwt, \text{Sen}(wt), \text{Sen}(2wt), \dots, \text{Sen}(nwt)\}$$

Por ser una base ortogonal, a_n y b_n pueden utilizarse para determinar las coordenadas de $f(t)$ en dicha base.

$$f(t) = a_0 + a_1 \text{Cos } wt + a_2 \text{Cos } 2wt + \dots + a_n \text{Cos } nwt + b_1 \text{Sen}(wt) + b_2 \text{Sen}(2wt) + \dots + b_n \text{Sen}(nwt) \quad (2.5)$$

2.2.- SERIE GENERALIZADA DE FOURIER

Sea $\{\phi_n(t)\}$ un conjunto ortogonal de funciones continuas en el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$; para representar la función continua a pedazos $f(t)$ en términos del conjunto dentro del intervalo siguiendo el desarrollo en serie de Fourier, $f(t)$ se representa por:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(t) \quad (2.6)$$

Donde, los términos c_n vienen dados por:

$$c_n = \frac{1}{\gamma_n} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \phi_n(t) dt \quad (2.7)$$

Hay que recordar que el conjunto $\{\phi_n(t)\}$ es un conjunto ortogonal de funciones y por lo tanto se cumple la siguiente relación de producto interno:

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t) \phi_m(t) dt = 0 \quad (n \neq m) \quad (2.8a)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n^2(t) dt = \gamma_n \quad (2.8b)$$

Se puede hacer un paralelismo entre una expansión en serie generalizada de Fourier de una función $f(t)$ con respecto a un conjunto base ortogonal de funciones $\{\phi_n(t)\}$ y la representación de un vector \mathbf{v} en términos de un conjunto base ortogonal de vectores $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_n\}$ aplicando la ecuación (1.10):

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n \quad (1.10)$$

Donde, según, aplicando la ecuación (1.24b):

$$\alpha_i = \frac{v \cdot b_i}{b_i \cdot b_i} \quad (2.9)$$

Se observa una clara similitud con la ecuación (2.10):

$$c_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t)\phi_n(t)dt} \quad (2.10)$$

2.3.- TRANSFORMADA DE FOURIER

La transformada de Fourier, consiste básicamente en descomponer o expandir una señal o función en senos y cosenos de diferentes frecuencias cuya suma corresponde a la señal original, es decir, es capaz de distinguir las diferentes componentes de frecuencia de la señal y sus respectivas amplitudes.

La transformada de Fourier de una función del tiempo $f(t)$ se define como:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.11)$$

Y la transformada inversa de Fourier como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{j\omega t} d\omega \quad (2.12)$$

De acuerdo con lo dicho anteriormente la transformada de Fourier puede obtener una representación en el dominio de la frecuencia de una señal que se encuentra originalmente en el dominio del tiempo. La relación existente entre la representación de la señal original a través de señales sinusoidales y la exponencial que se observa en (2.11) y (2.12) proviene de la definición de la identidad de Euler:

$$e^{j\omega t} = \text{Cos}(\omega t) + j\text{Sen}(\omega t) \quad (2.13a)$$

$$e^{-j\omega t} = \text{Cos}(\omega t) - j\text{Sen}(\omega t) \quad (2.13b)$$

Mediante esta función exponencial es posible formar un conjunto de funciones ortogonales sobre un intervalo $(t_0, t_0 + \Gamma)$:

$$\{e^{jn\omega t} : n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

Y por lo tanto se puede descomponer o expandir la señal original (en el dominio del tiempo) de la siguiente manera:

$$f(t) = F_0 + F_1 e^{-j\omega t} + F_2 e^{-j2\omega t} + F_3 e^{-j3\omega t} + \dots + F_{-1} e^{j\omega t} + F_{-2} e^{j2\omega t} + \dots$$

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F_n e^{-jn\omega t} \quad (2.14)$$

Estas funciones pueden ser referidas como las funciones bases de la transformada de Fourier y debido a su propiedad de ortogonalidad es posible obtener los valores o coeficientes F_n como términos de semejanza entre la señal original y la función exponencial. Esta semejanza no es más que realizar la proyección ortogonal de la función $f(t)$ sobre la base ortogonal formada por el conjunto de funciones $\{e^{jn\omega t} : n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$, así que los coeficientes F_n no son más que las coordenadas de $f(t)$ referidas a la base dada. Estas coordenadas se calculan según la ecuación (2.15).

$$F_n = \frac{\int_{t_0}^{t_0+\Gamma} f(t)e^{-jnwt} dt}{\int_{t_0}^{t_0+\Gamma} e^{jnwt} e^{-jnwt} dt} \quad (2.15)$$

$$F_n = \frac{1}{\Gamma} \int_{t_0}^{t_0+\Gamma} f(t)e^{-jnwt} dt \quad (2.16)$$

2.3.1.- PROPIEDADES

Algunas propiedades fundamentales de la transformada de Fourier son:

- Propiedad de escalamiento en el tiempo

$$f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{w}{a}\right)$$

- Propiedad de escalamiento en frecuencia

$$\frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right) \Leftrightarrow F(bw)$$

- Propiedad de Traslación en el tiempo

$$f(t - t_0) \Leftrightarrow F(w)e^{jw t_0}$$

- Propiedad de traslación en frecuencia

$$f(t)e^{-jw_0 t} \Leftrightarrow F(w - w_0)$$

- Propiedad de convolución

Convolución en el tiempo

$$f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau \Leftrightarrow F(w)H(w)$$

Convolución en la frecuencia

$$f(t)h(t) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u)H(w - u)du = \frac{1}{2\pi} F(w) * H(w)$$

- Teorema de Parseval

La energía de la señal es siempre la misma sin depender de si se encuentra en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia

$$Energía Total = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw$$

CAPITULO III

TRANSFORMADA WAVELET

Introducción

En este capítulo se describirá la teoría de la transformada wavelet y se procurará enfocar la misma a través de los fundamentos del álgebra lineal ofrecidos en el capítulo I ya que a criterio personal para comprender el desarrollo teórico en el que se basa la transformada de ondículas es necesario tener conocimientos de ciertos tópicos o fundamentos teóricos del álgebra lineal como lo son los espacios vectoriales y sus propiedades entre otros. El álgebra lineal permite conceptualizar esta transformada a través de un enfoque vectorial, de este hecho deriva la importancia de comprender y dominar los tópicos del álgebra lineal para poder establecer una relación con la teoría que involucra la transformada wavelet y posteriormente proceder a su análisis y sus aplicaciones

La transformada de ondículas o transformada wavelet es una técnica para el análisis de señales que ha sido utilizada en diferentes áreas de la ingeniería y aún siguen publicándose nuevas aplicaciones de dicha transformada lo que significa que su estudio sea un área de investigación de interés en la actualidad.

3.1.- TRANSFORMADA CONTINUA WAVELET (CWT)

Si se tiene una función continua $f(t)$ en el tiempo la cual cumple ciertas condiciones, entonces, la transformada wavelet de $f(t)$ no es más que expresar a $f(t)$ mediante una expansión de términos o coeficientes proporcionales al producto interno entre la función y diferentes versiones escaladas y trasladadas de una función prototipo $\psi(t)$ (wavelet madre).

Por lo tanto se puede representar matemáticamente la transformada continua wavelet ($CWT(a,b)$) de una función $f(t)$ mediante:

$$CWT(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (3.1)$$

La variable a controla el ancho o soporte efectivo de la función $\psi(t)$ y la variable b provee la ubicación en el dominio del tiempo de la función $\psi(t)$. Algunos autores denominan a las variables a y b como variables de escala y traslación respectivamente.

Una de las propiedades de la función $\psi(t)$ es que cumple con la condición de admisibilidad, la cual indica que:

$$\Psi(0) = 0 \quad (3.2)$$

En esta última ecuación $\Psi = \Psi(\omega)$ es la transformada de Fourier de $\psi(t)$. El cumplimiento de esta condición implica que el valor promedio de $\psi(t) = 0$, esto se obtiene de sustituir $\omega=0$ en la ecuación (2.11) tal como se observa en la ecuación (3.3).

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j0t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \text{Valor Promedio de } f(t) \quad (3.3)$$

Por lo tanto la condición de admisibilidad definida en (3.2) no es más que el valor promedio de la función wavelet madre $\psi(t)$ el cual se expresa formalmente en la ecuación (3.4) la cual es la transformada de Fourier de $\psi(t)$ evaluada en $\omega=0$.

$$\Psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-j0t} dt = 0 \quad (3.4)$$

Considerando la ecuación (3.4), significa que $\psi(t)$ debe tener valores tanto positivos como negativos, es decir, $\psi(t)$ es una onda y está definida en un intervalo de tiempo finito dado por a alrededor de un tiempo $t = b$, estas características son las que le dan a $\psi(t)$ la identidad de wavelet u ondícula.

El cumplimiento de la ecuación (3.4) indica que $\Psi(w)$ debe tener un rápido decaimiento cuando w tiende a 0. Esto último le provee a $\psi(t)$ una característica de filtro pasabanda, según lo afirma Faundez, P., et all (2002).

Una función wavelet madre $\psi(t)$ trae asociada consigo una función escala $\phi(t)$, con este par de funciones se puede aproximar cualquier función $f(t) \in L^2(R)$ mediante una de las funciones o mediante ambas. Así:

$$f(t) = \sum_k \sum_j c_{j,k} \phi(t) + \sum_k \sum_j d_{j,k} \psi(t) \quad (3.5)$$

Además, $L^2(R)$ denota el espacio vectorial formado por el conjunto de *funciones cuadrado integrable*, es decir, aquellas funciones que cumplen $\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt < \infty$ también llamadas *señales de energía*.

En esta ultima ecuación (3.5) los términos $c_{j,k}$ y $d_{j,k}$ (*coeficientes escala o de aproximación y coeficientes wavelet o de detalle*) se obtienen mediante el producto interno definido en las ecuaciones (3.6a) y (3.6b):

$$c_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{j}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi\left(\frac{t-k}{j}\right) dt \quad (3.6a)$$

$$d_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{j}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-k}{j}\right) dt \quad (3.6b)$$

3.2.- FUNCIÓN ESCALA

Es una función $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ que trasladada y escalada genera un conjunto de funciones $\{\phi_{j,k}(t) \mid j, k \in \mathbb{Z}\}$ definida como:

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^{\frac{j}{2}} t - k) \quad ; \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (3.7)$$

Tomando como base lo expuesto en el **Teorema 1.3.1** se puede definir el siguiente subespacio vectorial dentro del conjunto $L^2(\mathbb{R})$:

$V_j = L\{\phi_{j,k \in \mathbb{Z}}(t)\} \subseteq L^2(\mathbb{R})$; es decir, el conjunto $\{\phi_{j,k \in \mathbb{Z}}(t)\}$ es una base para el espacio vectorial V_j .

Entonces se dirá que una función $f(t)$ estará en V_j (esto es $f(t) \in V_j$) si puede expresarse como combinación lineal de los términos de la base del subespacio V_j .

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \phi_{j,k}(t) \quad (3.8)$$

Para hallar los términos $c_{j,k}$ se realiza el producto interno de la ecuación (3.8) con la función con la función escala, obteniéndose la ecuación (3.9).

$$c_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \phi(t) dt \quad (3.9)$$

Una función $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ se considera una buena función escala si cumple con las siguientes características:

- ✓ Para cada $j \in \mathbb{Z}$ el conjunto $\{\phi_{j,k \in \mathbb{Z}}(t)\}$ forma una base ortonormal para el subespacio $V_j \subseteq L^2(\mathbb{R})$.
- ✓ Los subespacios V_j están anidados, es decir, $\forall j \in \mathbb{Z}, \{V_j \subset V_{j+1}\}$
- ✓ La función $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ tiene soporte compacto, $\exists \{x \in \mathbb{Z} \mid \phi(x) \neq 0\}$

3.3.- FUNCIÓN WAVELET

De la misma forma como se definió el subespacio V_j se puede definir otro subespacio llamado W_j con otro conjunto de funciones base:

$$W_j = L\{\psi_{j,k \in \mathbb{Z}}(t)\} \quad (3.10)$$

Donde, $\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^{\frac{j}{2}} t - k) ; j, k \in \mathbb{Z}$ (3.11)

Y cualquier función que esté en W_j se puede escribir:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (3.12)$$

Al conjunto W_j se le denomina el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} , es decir, según el **teorema 1.13.3**, todos los miembros de V_j son ortogonales a todos los miembros de W_j .

Matemáticamente se puede expresar mediante el producto interno definido en la ecuación (1.12) que:

$$\langle \phi_{j,k}(t) | \psi_{j,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j,k}(t) \psi_{j,k}(t) dt = 0 \text{ para toda } j, k \in Z \quad (3.13)$$

Se puede generalizar tomando en cuenta el **Teorema 1.13.3** que:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (3.14)$$

3.4.- TRANSFORMADA DISCRETA WAVELET (DWT)

Para este nuevo caso de estudio ahora se tendrá una discretización de la función $f(t)$ y de las funciones $\phi(t)$ y $\psi(t)$.

Ahora, si se tienen los siguientes espacios V_j representados en la figura 3.1.

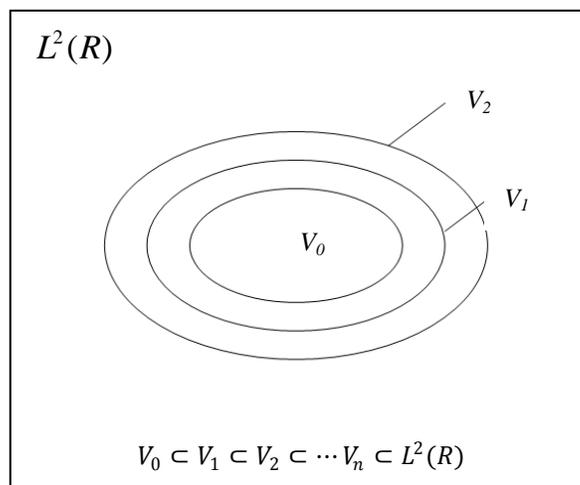


Figura 3.1: Representación de los subespacios V_j donde se muestra que están anidados.

En la figura 3.1 se puede observar que el subespacio V_1 cuya base es $\{\phi_{1,k \in \mathbb{Z}}(t)\}$ puede expandirse si se le completa la base hasta obtener una base para el subespacio V_2 . Este conjunto base sería de la forma $\{\phi_{2,k \in \mathbb{Z}}(t)\}$

Otra propiedad que presenta la función escala $\phi(t)$ es:

$$f(t) \in V_j \therefore f(2t) \in V_{j+1}$$

$$f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \phi_{j,k}(t)$$

$$f(2t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \phi_{j,k}(2t)$$

$$f(2t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} 2^{\frac{j}{2}} \phi_{j,k}(2^{j+1}t - k)$$

$$f(2t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{c_{j,k}}{\sqrt{2}} 2^{\frac{j+1}{2}} \phi_{j,k}(2^{j+1}t - k)$$

$$f(2t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{c_{j,k}}{\sqrt{2}} 2^{\frac{j+1}{2}} \phi_{j+1,k}(t)$$

$$\therefore f(2t) \in V_{j+1}$$

Ahora se deduce que si una función $f(t)$ está en V_2 , entonces puede representarse como combinación lineal de los vectores de la base del subespacio V_2 .

$$f(t) \in V_2 \therefore f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} 2^{\frac{j}{2}} \phi_{j,k}(2^{j+1}t - k) \mid j = 2 \quad (3.15)$$

Pero como la base del subespacio V_1 se puede completar mediante su complemento ortogonal W_1 se obtiene entonces una base para el subespacio V_2 .

Por lo tanto de la figura 3.2 se puede intuir que una función que esté en V_{j_0} se puede representar también por la ecuación (3.16) la cual no es más que la ecuación (3.5) con una correcta notación para las sumatorias que dependen de los términos j y k :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^{N-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad j, k \in \mathbb{Z}^+ \quad (3.16)$$

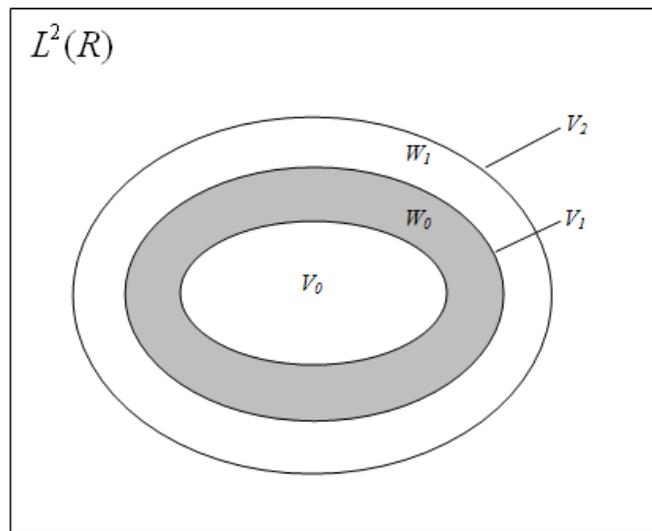


Figura 3.2: Representa los subespacios W_j y se observa que la intersección entre ellos es vacía y que $V_2 = V_1 \oplus W_1$

Quedando $f(t)$ aproximada por medio de la combinación lineal de funciones escala (*aproximaciones*) más funciones wavelet (*detalles*).

A cada uno de los niveles j en V_j y W_j se les denomina niveles de descomposición, así en la ecuación (3.16) se dice que $f(t)$ está en el subespacio V_{j_0} y por lo tanto se tienen j_0 niveles descomposición para $f(t)$.

Entonces para cada subespacio V_j se puede establecer:

$$V_2 = V_1 \oplus W_1$$

$$V_3 = V_2 \oplus W_2 = V_1 \oplus W_1 \oplus W_2$$

En general una función $f(t)$ (la cual es un vector) se puede aproximar mediante los vectores de la base de un subespacio generado por funciones escala más la sumatoria de los vectores de la base de subespacios ortogonales generados por funciones wavelet.

En términos prácticos, como se estableció en la definición de transformada continua wavelet, una función wavelet ventaniza a una función $f(t)$ (ver figura 3.3) y como la función wavelet tiene soporte compacto al hacer las múltiples traslaciones de la función wavelet y realizar el producto interno se obtienen los diferentes coeficientes wavelet:

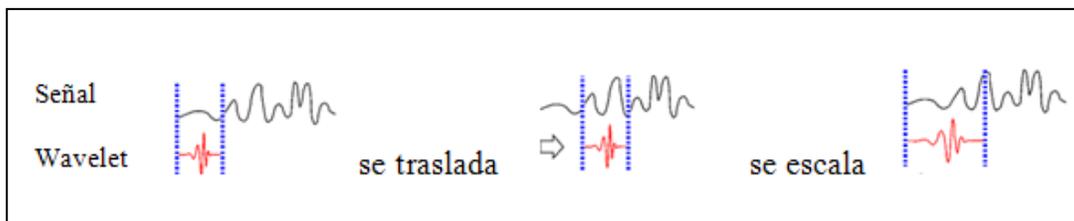


Figura 3.3: Se muestra como una función wavelet ventaniza a una señal.

La figura 3.3 indica como una wavelet ventaniza a una señal $f(t)$. El resultado del solapamiento entre estas dos señales da origen a los coeficientes wavelet de $f(t)$.

La figura 3.4 muestra un ejemplo de función wavelet y función escala (Daubechies8) y su representación como filtros pasaalto y pasabajo respectivamente.

En tiempo discreto una función $f(t)$ se representa por medio de una secuencia o por medio de un vector cuyas entradas son las imágenes para distintos instantes de tiempo puntuales.

Por lo tanto el producto interno definido en (3.6a) y (3.6b) se puede definir en tiempo discreto como:

$$c_{[k]} = \sum_{j=1}^{j=k} f_{[j]} \phi_{[k+1-j]} \quad (3.17a)$$

$$d_{[k]} = \sum_{j=1}^{j=k} f_{[j]} \psi_{[k+1-j]} \quad (3.17b)$$

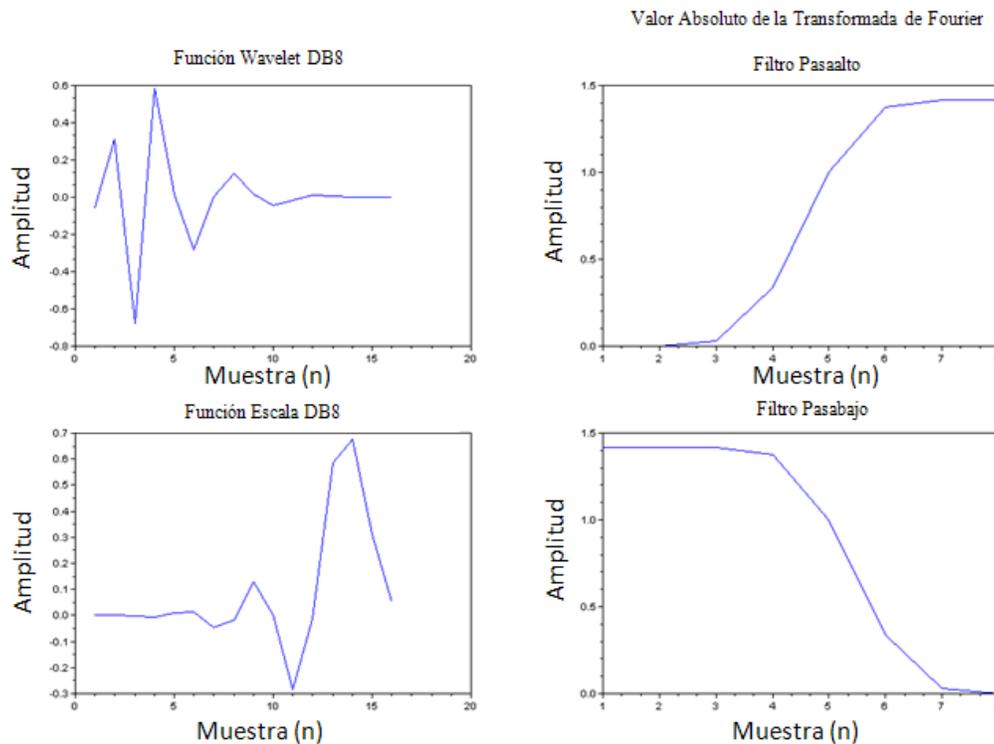


Figura 3.4: Representa la grafica del sistema Dubechie8. Función wavelet y su representación como filtro pasaalto, gráficos superiores. Función escala y su representación como filtro pasabajo, gráficos inferiores.

Las ecuaciones (3.17a) y (3.17b) definen el producto interno de dos funciones discretizadas, también son conocidas como la **convolución** entre dos secuencias. De forma más general:

Sean U y V vectores de longitud m y n respectivamente. Entonces W es un vector de longitud $m + n - 1$, cuyos k -ésimos elementos vienen dados por:

$$W_{[k]} = \sum_{j=1}^{j=k} U_{[j]} V_{[k+1-j]} \quad (3.18)$$

$$W_{[1]} = U_{[1]} V_{[1]}$$

$$W_{[2]} = U_{[1]} V_{[2]} + U_{[2]} V_{[1]}$$

$$W_{[3]} = U_{[1]} V_{[3]} + U_{[2]} V_{[2]} + U_{[3]} V_{[1]}$$

⋮

$$W_{[n]} = U_{[1]} V_{[n]} + U_{[2]} V_{[n-1]} + \dots + U_{[n]} V_{[1]}$$

Ejemplo 7

Supóngase que se tiene una señal $f(t)$ discretizada, cuyas muestras son:

$$f_{[n]} = [2, 4, 1, 6, 4, 5, 1, 3]$$

Determinar los coeficientes escala y los coeficientes wavelet en el primer nivel de descomposición usando el sistema Haar o Daubechies1.

Como los coeficientes escala (de *aproximación*) y los coeficientes wavelet (de *detalle*) se determinan mediante las ecuaciones (3.17a) y (3.17b) respectivamente, se

necesita conocer los coeficientes del filtro del sistema Haar los cuales ya están tabulados, así que los filtros son:

$$\phi_{[n]} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \text{ Filtro escala o filtro pasabajo de descomposición}$$

$$\psi_{[n]} = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \text{ Filtro wavelet o filtro pasaalto de descomposición}$$

En la figura 3.5 se muestra el proceso que se lleva a cabo en el cálculo de los coeficientes de aproximación y detalle.

Primero se realiza la convolución entre la señal $f_{[n]}$ y los filtros pasaalto y pasabajo, luego se realiza un submuestreo para eliminar muestras redundantes. Posteriormente se construye el vector wavelet.

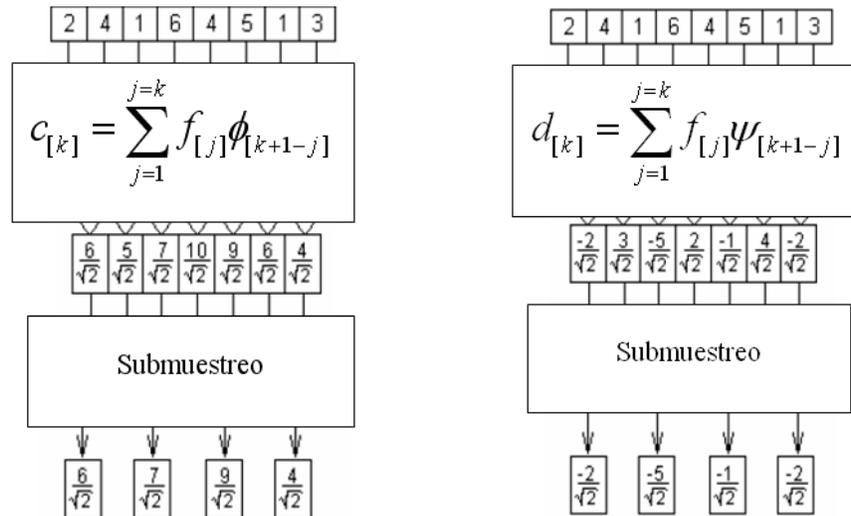


Figura 3.5: Diagrama algorítmico para calcular los coeficientes de aproximación y detalle de una señal cualquiera f que ha sido muestreada.

En este primer nivel de descomposición el vector wavelet $V_w[n]$ estará formado por los 4 coeficientes de aproximación seguido de los 4 coeficientes de detalle.

$$V_w[n] = \left[\frac{6}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{2}}, \frac{-5}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{2}} \right]$$

Ejemplo 8

Para la secuencia del ejemplo anterior, realizar mediante el sistema Haar todos los niveles de descomposición y determinar el vector wavelet en el último nivel de descomposición.

La secuencia del ejemplo anterior tiene 8 ($2^3 = 2^N$) muestras, por lo tanto N , que representa el número máximo de niveles de descomposición en este caso es $N = 3$.

En la figura 3.6 se muestra un esquema que describe como la descomposición multinivel sólo toma en cuenta la salida del filtro pasabajo para futuras descomposiciones, así finalmente el vector wavelet en el último nivel de descomposición estará formado por un solo coeficiente de aproximación y el resto de las componentes son coeficientes de detalles.

Por lo tanto de la figura 3.6, se puede intuir que una función que esté en V_{j_0} se puede representar también por la ecuación (3.16) la cual no es más que la ecuación (3.5) con una correcta notación para las sumatorias que dependen de los términos j y k :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2^{j_0}-1} c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^{N-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad j, k \in Z^+ \quad (3.16)$$

La figura 3.6 representa una completa descomposición multinivel de una señal muestreada, proceso denominado *análisis*.

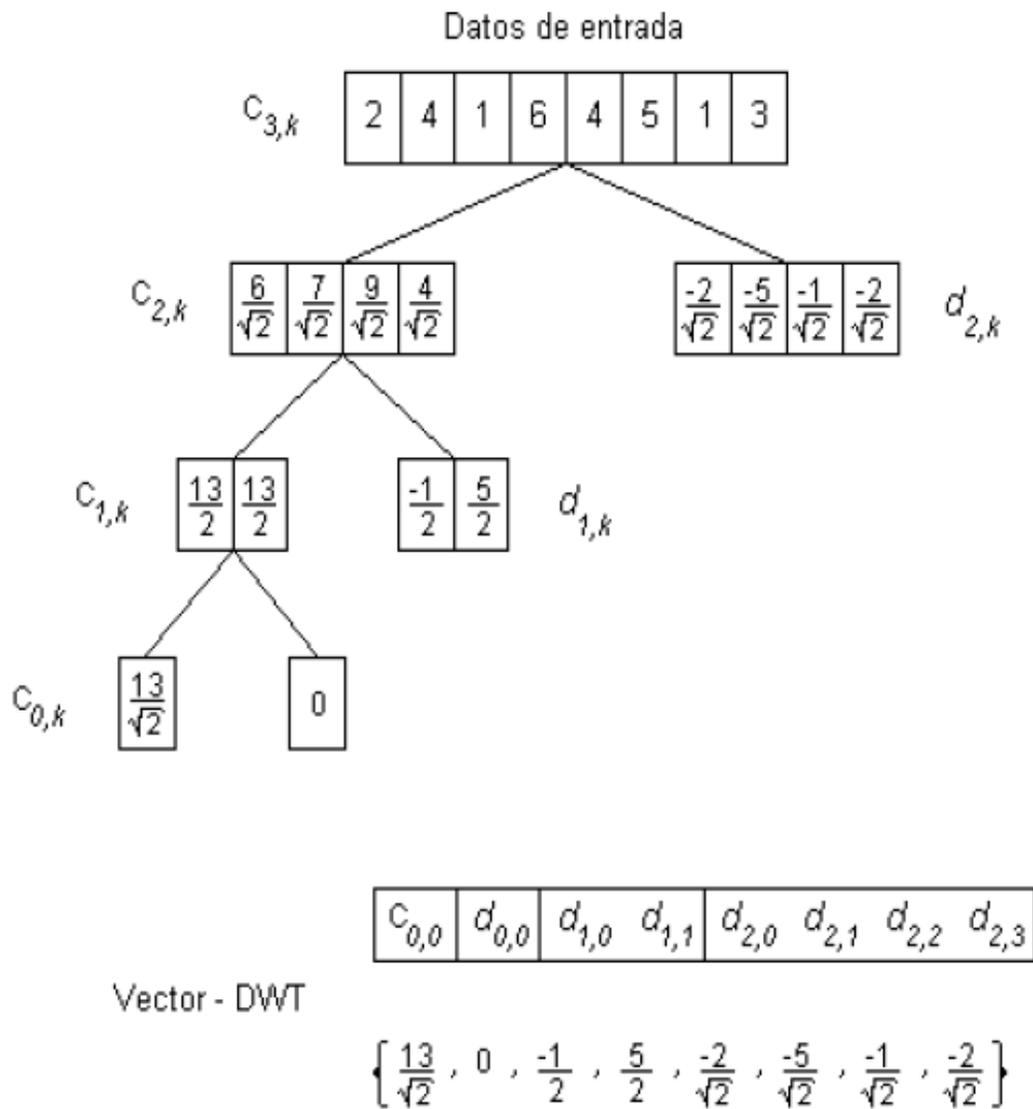


Figura 3.6: Descomposición multinivel de una señal muestreada con 8 muestras. Se observa la formación del vector wavelet para cada nivel de descomposición, proceso denominado análisis.

Fuente: Faundez P., et all (2002).

Ejemplo 9

Supóngase que se tiene la función $f(t) = \text{Sen}(t)$, se quiere obtener $8(2^3)$ muestras en un periodo de ella (en el intervalo $[0, 2\pi]$); es decir, se quiere muestrear $f(t)$ a una frecuencia de $\frac{8}{2\pi}$, esto significa que se va a calcular $f(t)$ para:

$$t = \{0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4\}$$

De donde se obtiene la secuencia:

$$x[n] = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

Determinar la descomposición multinivel según el sistema Haar.

En este ejemplo se trabajará con el sistema Haar (o Daubechies 1) para calcular el vector wavelet de $f(t)$.

Los coeficientes para el filtro escala (f_e) y filtro wavelet (f_w) son respectivamente:

$$f_e = \left[\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2} \right] \quad \text{Filtro pasabajo de descomposición}$$
$$f_w = \left[-\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2} \right] \quad \text{Filtro pasaalto de descomposición}$$

En este caso se realizará el esquema de descomposición mostrado en la figura 3.6 por medio de la modalidad de pseudocódigo con el objetivo de mostrar una forma equivalente de realizar el análisis al representado en la figura 3.6.

Primera Descomposición	
CA3:= convolución([x], [fe]); ca3:= submuestrear([CA3]);	CD3:= convolución([x], [fw]); cd3:= submuestrear([CD3]);
ca3 = [0.5, 1.2071, -0.5, -1.2071]	cd3 = [-0.5, 0.2071, 0.5, -0.2071]
Segunda Descomposición	
CA2:= convolución([ca3], [fe]); ca2:= submuestrear([CA2]);	CD2:= convolución([ca3], [fw]); cd2:= submuestrear([CD2]);
ca2 = [1.2071, -1.2071]	cd2 = [-0.4999, 0.4999]
Tercera descomposición	
CA1:= convolución([ca2], [fe]); ca1:= submuestrear([CA1]);	CD1:=convolución([ca2], [fw]); cd1:= submuestrear([CD1]);
ca1 = [0]	cd1 = [1.7071]

Análisis:

VectorWavelet:= [ca1, cd1, cd2, cd3];

VectorWavelet = [0, 1.7071, -0.4999, 0.4999, -0.5, 0.2071, 0.5, -0.2071]

3.5.- RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES (SÍNTESIS)

Al proceso de reconstrucción de señales se le denomina síntesis y corresponde a la inversa de la transformada discreta wavelet (IDWT). Este proceso consiste en recuperar la señal original sin que se produzca pérdida de información a partir de las componentes obtenidas durante el proceso de análisis.

Por lo tanto, lo que se desea es lograr representar los coeficientes escala en un nivel de resolución más alto mediante una combinación de los coeficientes escala y wavelets en un nivel de resolución más bajo.

Los procesos de análisis y síntesis son procesos iterativos de tal manera que en teoría pueden repetirse en forma infinita con la salvedad que el proceso de síntesis depende del proceso de análisis. Sin embargo, en la práctica estos procesos no pueden repetirse de manera infinita, siendo el nivel de resolución de la señal original el que pone el límite.

Una explicación más detallada puede expresarse de la siguiente manera:

Supongamos una señal con una longitud $N=2^n$, en el análisis dividimos la señal original en una aproximación y un detalle correspondientes al primer nivel de descomposición, luego la aproximación que queda de longitud igual a 2^{n-1} es nuevamente dividida obteniendo una nueva aproximación y detalle correspondientes a un segundo nivel de descomposición. Este procedimiento se vuelve a repetir hasta que la aproximación y el detalle estén representados por un solo coeficiente, es decir, tienen una longitud de $1=2^0$, lo que significa que el número de iteraciones posibles de realizar es de $n=\log_2 N$. De esta forma se obtiene un vector de longitud N que contiene un sólo término encargado de representar la forma general de la señal (coeficiente escala) y todos los otros términos con información sobre el detalle obtenido en los diferentes niveles de descomposición (coeficientes wavelet), tal como se ilustró en la figura 3.6 donde aparece el vector al cual se le denomina vector-DWT.

La síntesis por su lado toma la aproximación y el detalle, aumenta su longitud al doble mediante el súper muestreo y realiza la convolución discreta con los respectivos filtros, obteniéndose como resultado una mejor aproximación a la señal correspondiente al primer nivel de reconstrucción.

Lógicamente, el número de veces que se realiza el proceso de reconstrucción hasta llegar a la señal original depende del grado de descomposición al que se llegó en el proceso de análisis.

Para explicar cómo se realiza una descomposición y una reconstrucción, se ilustrará el proceso utilizando la wavelet Haar y suponiendo una señal $F_{[n]}=[2,4,1,6,4,5,1,3]$, la descomposición se observa en la figura 3.7.

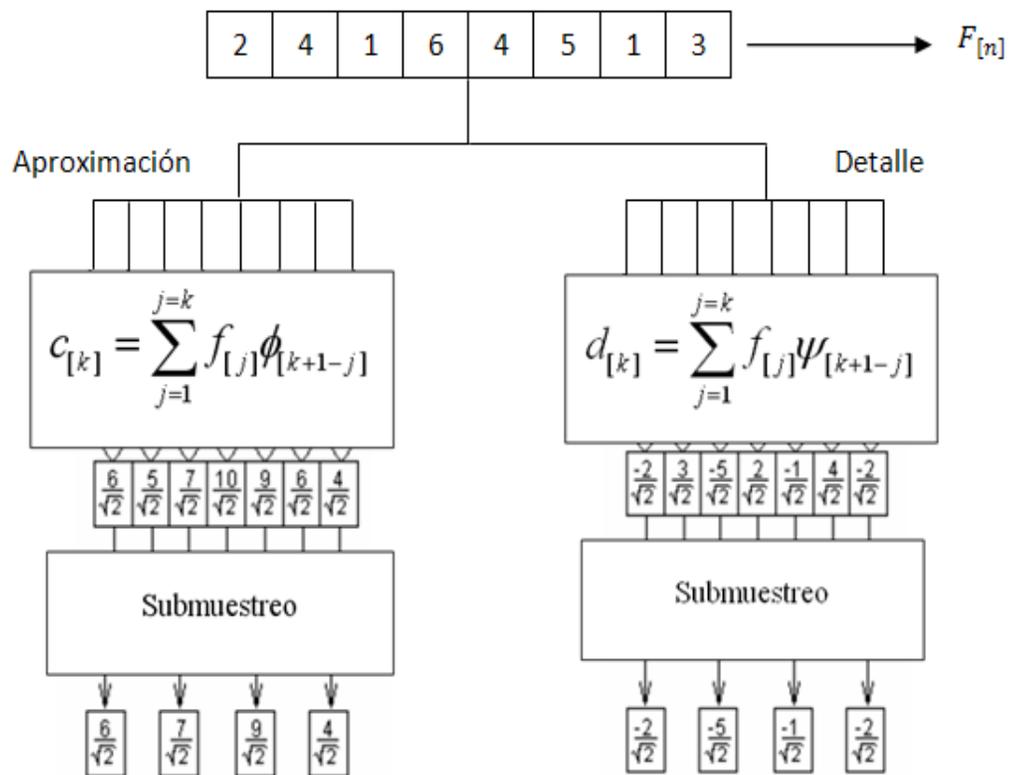


Figura 3.7: Se muestra el primer nivel de descomposición de una señal mediante el sistema Haar.

Como la aproximación está relacionada con un promedio y el detalle con diferencias, entonces, se puede obtener la primera descomposición de acuerdo a las ecuaciones (3.17a) y (3.17b) donde los c_j son los coeficientes correspondientes a la señal original, es decir los datos de entrada representados por $F_{[n]}$ y J es el nivel de resolución

más alto con el que se puede trabajar, $N=2^J$ es la longitud de la señal original, para este caso $F_{[n]}$ es una señal de longitud $N = 8 = 2^3$.

$$c_{J-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{J,2k} + c_{J,2k+1}) \quad (3.17a)$$

$$d_{J-1,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{J,2k} - c_{J,2k+1}) \quad (3.17b)$$

Aplicando el algoritmo de descomposición, se puede observar en la figura 3.7 como se realiza la convolución discreta entre los filtros escalas y los filtros wavelet con la señal original, además se observa el posterior submuestreo de tal forma que se obtienen dos conjuntos de coeficientes, uno encargado de la aproximación a la señal original y el otro encargado del detalle, ambos de longitud $2^{3-1}=4$.

El paso siguiente es mantener el detalle y volver a aplicar el algoritmo a los coeficientes de aproximación dando como resultado una nueva aproximación mas general y un nuevo detalle, ambos de longitud $2^{3-2}=2$. Este proceso se podrá repetir una vez mas ya que tanto la longitud de la nueva aproximación como del nuevo detalle será igual a $2^{3-3}=1$.

Para reconstruir la señal a partir de los coeficientes escala y los coeficientes wavelet pertenecientes al primer nivel de descomposición, se observa que sumando y restando las ecuaciones (3.17a) y (3.17b) se obtienen:

$$c_{J,2k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{J-1,k} + d_{J-1,k}) \quad (3.18a)$$

$$c_{J,2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_{J-1,k} - d_{J-1,k}) \quad (3.18b)$$

Estas últimas ecuaciones (3.18a) y (3.18b) permiten realizar una reconstrucción perfecta de la señal. En la figura 3.8 se puede ver como se realiza el proceso de súper muestreo y posteriormente la convolución para reconstruir la señal en forma perfecta mediante la suma de los coeficientes de reconstrucción escala y wavelet

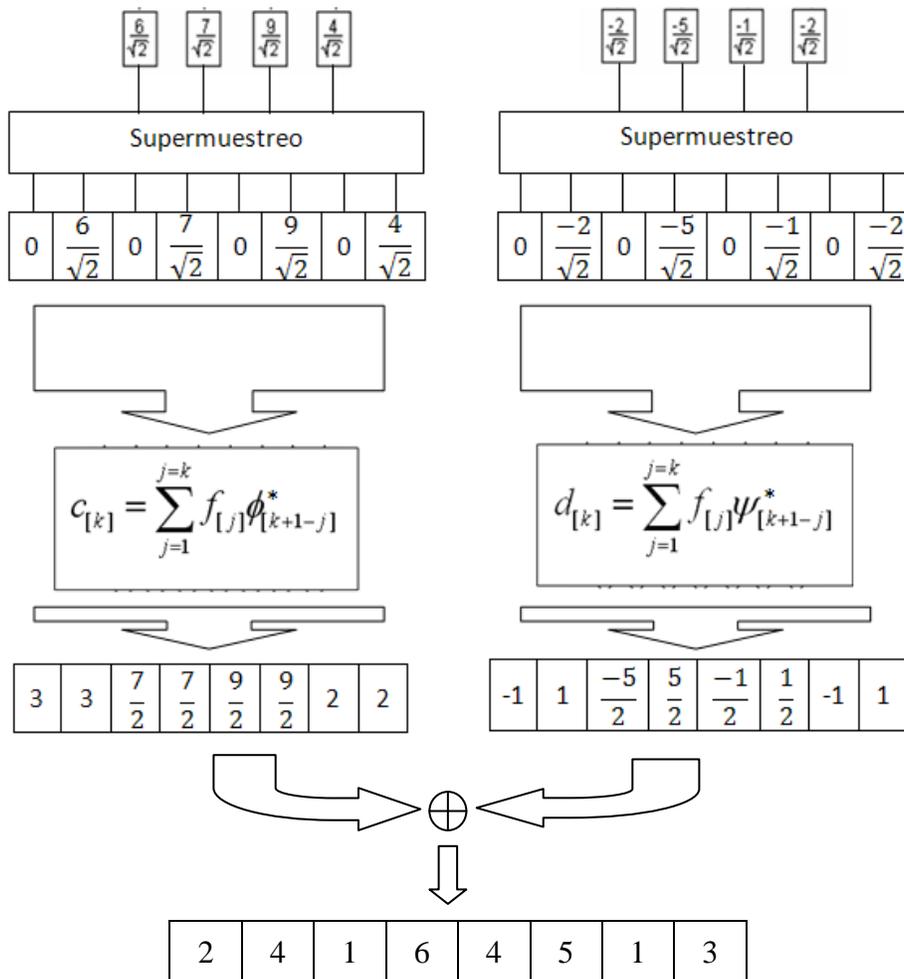


Figura 3.8: Reconstrucción de una señal utilizando el sistema Haar, la señal ha sido descompuesta sólo hasta el primer nivel de descomposición.

Se observa en esta última figura (figura 3.8) cómo se obtiene la reconstrucción de la señal representada por $f_{[n]}$ en la figura 3.7, además se puede ver que el filtro escala de reconstrucción y el filtro wavelet de reconstrucción se representan con un asterisco de supra

índice ya que no son los mismos que fueron utilizados en la descomposición pero están altamente relacionados.

Considerando esta última parte en la que se ha advertido sobre la existencia de filtros de reconstrucción se procederá a mostrar en el sistema Haar los filtros de descomposición y los filtros de reconstrucción utilizados en los procesos descritos en las figuras 3.7 y 3.8.

Función escala (filtro pasabajo) y función wavelet (filtro pasa alto) discretizadas, sistema Haar

Filtro Pasabajo de Descomposición

$$f_e = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

Filtro Pasa bajo de Reconstrucción

$$f_e^* = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

Filtro Pasa alto de Descomposición

$$f_w = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

Filtro Pasa alto de Reconstrucción

$$f_w^* = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

Se puede notar la ortogonalidad entre las secuencias que describen a la función escala y las secuencias que describen a la función wavelet, esto quiere decir, tanto para los filtros de descomposición como para los filtros de reconstrucción se cumple que el producto interno (en este caso se trata de un producto interno usual en \mathbb{R}^n) $f_e \cdot f_w = 0$ o también $f_e^* \cdot f_w^* = 0$

Existen diferentes sistemas para realizar la transformada wavelet de una señal, entre ellos se pueden contabilizar, el sistema Haar (también conocido como Daubechies1), la familia Daubechies, la familia Biortogonal, la familia Symlets y la familia Coiflets entre otros.

Para observar la relación que existe entre los filtros escala y los filtros wavelet se utilizará el sistema Daubechies2 conocido como Db2, de allí se comprenderá como a partir del filtro escala se puede conocer el filtro wavelet.

$$f_e = \left[\frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right]$$

$$f_w = \left[-\frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, -\frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right]$$

Primero que nada se observa la ortogonalidad entre los filtros, esto es $f_e \cdot f_w = 0$, segundo, se puede ver como el filtro wavelet no es más que recorrer el filtro escala al revés y cambiarle el signo a los que queden en posición impar en el filtro wavelet.

Para obtener los filtros de reconstrucción simplemente se recorren en orden inverso los filtros de descomposición.

$$f_e^* = \left[\frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right]$$

$$f_w^* = \left[\frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, -\frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, -\frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right]$$

Hasta el momento se ha realizado una reconstrucción para una señal que sólo ha sido descompuesta en su primer nivel de descomposición. Sin embargo el objetivo principal de un análisis wavelet es obtener el vector-Dwt ya que este es el que contiene información útil para la aplicación de esta herramienta en diferentes campos del procesamiento de

señales, entiéndase por estos, la reducción de ruido, la aproximación no lineal, la compresión de datos, la detección de singularidades, parámetros característicos, etc. En la figura 3.9 se muestra la descomposición completa (en todos sus niveles de descomposición de la señal $f_{[n]}$).

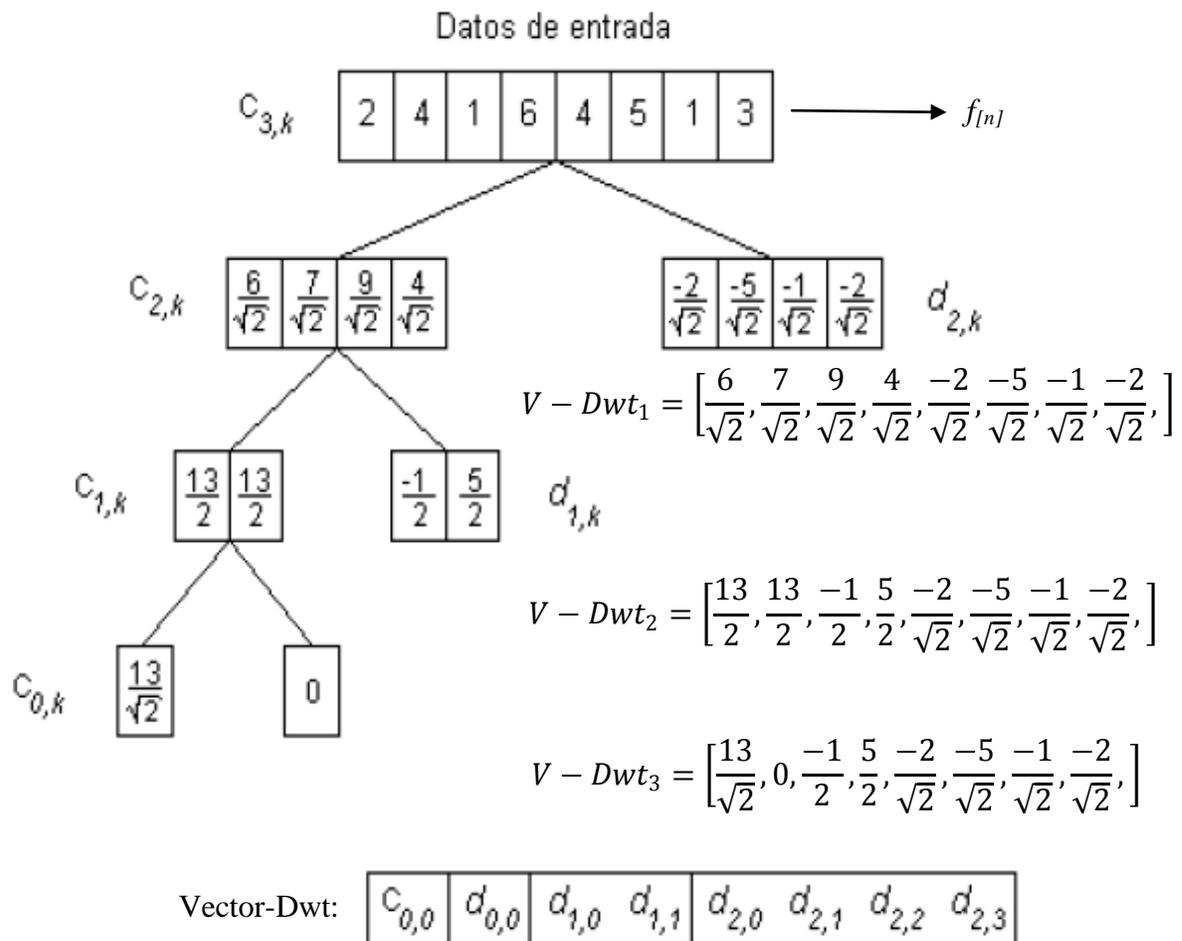


Figura 3.9: Descomposición multinivel (análisis) de una señal de $8=2^3$ muestras con sus respectivos vectores wavelet en cada nivel de descomposición, además se observa que $0 < k < 2^j$.

Ahora se procederá a ilustrar el proceso de reconstrucción total de la señal. Este proceso se observa resumidamente a continuación, es de hacer notar que se está realizando la reconstrucción de la señal descompuesta en la figura 3.9.

Reconstrucción de los coeficientes en el nivel $J=0$

$$c_{0,k} \quad \left[\frac{13}{\sqrt{2}} \right] \quad \text{supermuestrear} \quad * f_e^* = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \quad \left[\frac{13}{2}, \frac{13}{2} \right]$$

$$d_{0,k} \quad [0] \quad \text{supermuestrear} \quad * f_w^* = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \quad [0,0]$$

Los coeficientes de aproximación del nivel $J=1$ serán

$$\left[\frac{13}{2}, \frac{13}{2} \right] - [0,0] = \left[\frac{13}{2}, \frac{13}{2} \right]$$

Reconstrucción de los coeficientes en el nivel $J=1$

$$c_{1,k} \quad \left[\frac{13}{2}, \frac{13}{2} \right] \quad \text{supermuestrear} \quad * f_e^* = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \quad \left[\frac{13}{2\sqrt{2}}, \frac{13}{2\sqrt{2}}, \frac{13}{2\sqrt{2}}, \frac{13}{2\sqrt{2}} \right]$$

$$d_{1,k} \quad [0,0] \quad \text{supermuestrear} \quad * f_w^* = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \quad \left[\frac{-1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{5}{2\sqrt{2}}, \frac{-5}{2\sqrt{2}} \right]$$

Los coeficientes de aproximación del nivel $J=2$ serán

$$\left[\frac{13}{2\sqrt{2}}, \frac{13}{2\sqrt{2}}, \frac{13}{2\sqrt{2}}, \frac{13}{2\sqrt{2}} \right] + \left[\frac{-1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{5}{2\sqrt{2}}, \frac{-5}{2\sqrt{2}} \right] = \left[\frac{6}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}} \right]$$

Reconstrucción de los coeficientes en el nivel $J=2$

$$c_{2,k} \quad \left[\frac{6}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}} \right] \quad \text{supermuestrear} \quad * f_e^* = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \quad \left[3, 3, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}, 2, 2 \right]$$

$$d_{2,k} \quad \left[\frac{-2}{\sqrt{2}}, \frac{-5}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{2}} \right] \quad \text{supermuestrear} \quad * f_w^* = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right] \quad \left[-1, 1, \frac{-5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1 \right]$$

$$f_{[n]} = \left[3, 3, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}, 2, 2 \right] + \left[-1, 1, \frac{-5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1 \right] = [2, 4, 1, 6, 4, 5, 1, 3]$$

CAPITULO IV

APLICACIONES DE LA TRANSFORMADA WAVELET

Introducción

La transformada de ondículas o transformada wavelet es una técnica para el análisis de señales que ha sido utilizada en diferentes áreas de la ingeniería y aún siguen publicándose nuevas aplicaciones de dicha transformada lo que significa que su estudio sea un área de investigación de interés para la comunidad científica.

En este capítulo se presentará un resumen de algunas aplicaciones de la transformada wavelet, las cuales no son más que aplicaciones de las matemáticas. Las aplicaciones tomadas en cuenta para este capítulo serán parte de los trabajos realizados dentro de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Carabobo que han hecho uso de la transformada wavelet. Las wavelets han sido aplicadas a una gran cantidad de problemas relacionados con el procesamiento de señales: Detección, compresión, clasificación, limpieza de ruido, análisis tiempo-frecuencia, también ha sido aplicada en diferentes disciplinas tales como ingeniería, medicina, estadística, acústica, sismología, robótica, economía, criminología, etc.

4.1.- CLASIFICACIÓN DE SEÑALES DE VOZ UTILIZANDO TRANSFORMADA DE WAVELET Y MÁQUINAS DE VECTORES DE SOPORTE.

Trabajo de ascenso realizado por los profesores Carlos Jiménez y Jesús Jiménez en el año (2010). En este proyecto de investigación se diseñó un procedimiento destinado a la clasificación de señales de voz entre sanas y patológicas, dicho diseño consistió en procesar la señal de voz aplicándole la transformada wavelet para extraerle los parámetros

característicos a la señal obtenida, luego, para realizar la clasificación de las señales de voz se aplicaron estos parámetros a una máquina de vectores de soporte.

Resumen

En este proyecto se diseñó un procedimiento para la clasificación de señales de voz sanas y patológicas, utilizando la transformada de wavelet y máquinas de vectores de soporte. Para el procesamiento de las señales se empleó la transformada de wavelet y a la señal obtenida se le extrajeron características que permitieron ser utilizadas para la clasificación. Los parámetros obtenidos fueron los momentos de los coeficientes (aproximación y detalles originados en los distintos niveles de descomposición cuando se aplica la transformada de wavelet. La relación señal a ruido y los coeficientes cepstrales mel fueron los otros parámetros obtenidos. Para realizar la clasificación de las señales se utilizaron los parámetros obtenidos y se aplicaron a una máquina de vectores de soporte. En este clasificador se modificaron los diversos parámetros para sintonizar su entrenamiento y realizar los diversos ensayos. Los resultados son presentados para los diversos parámetros y ajustes aplicados con su error respectivo.

Técnica de procesamiento y análisis de datos.

Para realizar el procesamiento de los datos, estos se agruparon y clasificaron como señales de voz normales y patológicas. Para la extracción de rasgos se aplicó la transformada de wavelet y se analizaron los valores de: relación señal a ruido, los coeficientes de los niveles de descomposición, y los coeficientes centrales mel. Para la clasificación de la señal entre sana y patológica se utilizó la máquina de vectores de soporte (SVM), con kernel rbf.

Procedimiento metodológico utilizado.

El procedimiento metodológico utilizado para el desarrollo de la investigación se muestra en el diagrama de bloques de la figura 4.1, donde se observan las tres fases de la investigación.

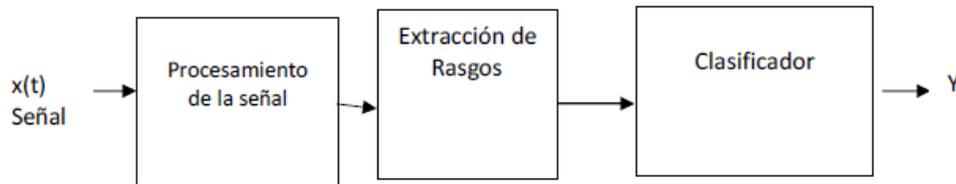


Figura 4.1: Diagrama de Bloques del procedimiento metodológico

Procesamiento de la señal

Para el procesamiento de la señal se aplicó la transformada de wavelet. a las señales de voz sanas y patológicas, luego se extrajeron los rasgos a utilizar para la clasificación. Una de la wavelet utilizada en este proyecto es la Daubechies 15 (db15), la cual no es simétrica y es mostrada en la figura 4.2. Otra de la wavelet aplicada es la de Daubechies 4(db4).

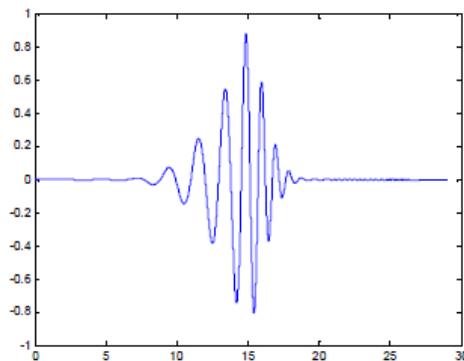


Figura 4.2: Función Wavelet Db15

Relación señal a ruido

Uno de los parámetros obtenidos fue la relación señal a ruido (snr) de las señales, para la cual se utilizó la ecuación (4.1).

$$snr = 10 * \log_{10} \left[\frac{\sum_{n=0}^{L-1} (x(n))^2}{\sum_{n=0}^{L-1} (\hat{x}(n) - x(n))^2} \right] \quad (4.1)$$

Donde:

$\hat{x}(n)$ = señal filtrada.

$x(n)$ = señal con ruido.

snr = relación señal a ruido en decibeles.

L = número de muestras del segmento de la señal a procesar.

Se realizó la segmentación de la señal, definiendo el tamaño del segmento que se va a procesar (L). Y se estableció la ubicación (P) del valor correspondiente a la relación señal a ruido calculado en el segmento, como la mitad del tamaño del segmento procesado. Un ejemplo del cálculo del segmento que se utiliza para determinar la relación señal a ruido sin solapamiento es el siguiente:

- Longitud de la señal N = 1024 muestras
- El tamaño del segmento L = 256 muestras, 4 ventanas en total.

En la figura 4.2 se muestra el resultado del procedimiento para obtener el segmento de la señal que se va a procesar, los puntos P1, P2, P3 y P4 representan las posiciones donde se va colocar el valor de la relación señal a ruido calculado .

De este modo se obtienen los diferentes valores de la relación señal a ruido, al calcularlos en cada L segmentos de la señal de longitud N. A estos valores se le obtuvo los valores medio, desviación estándar, la asimetría, la Kurtosis, el valor máximo y el valor mínimo.

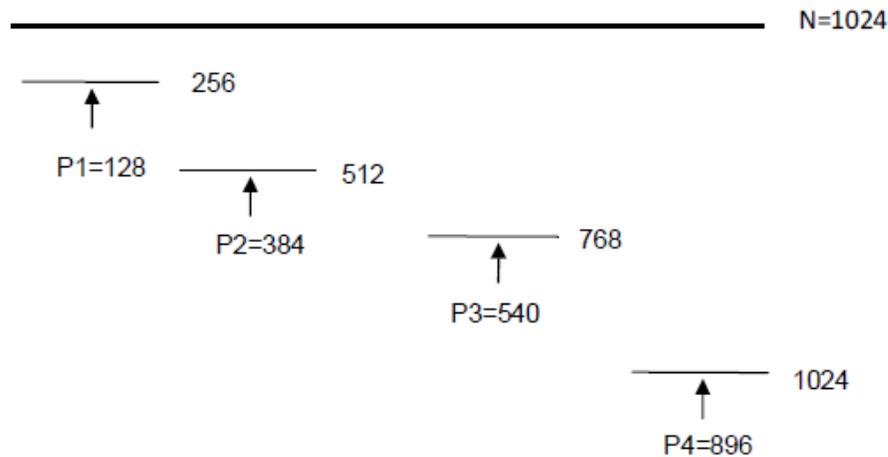


Figura 4.2: Segmentación de la señal.

$$Sk = \frac{m_{o3}}{s^3}$$

$$K = \frac{m_{o4}}{s^4}$$

$$m_{o3} = E[(x - \mu)^3]$$

$$m_{o4} = E[(x - \mu)^4]$$

Donde

Sk= Coeficiente de asimetría (“skewness”)

mo3 = tercer momento Central

S=Desviación estándar

K= Kurtosis

mo4 = Cuarto momento central

El vector de rasgos(V_r) es el siguiente:

$V_r = [\text{media, varianza, coeficiente de asimetría, kurtosis, valor máximo, valor mínimo}]$

La wavelet utilizada es la Db15 y el umbral para realizar el proceso de filtrado se obtuvo como el valor medio del valor obtenido en cada señal a través la formula de Donoho.

$$thr = (\sqrt{2 \ln(n)}) * \sigma$$

Momentos de los Coeficientes de Wavelet.

Para obtener otros parámetros se descompusieron las señales en diferentes niveles y a los coeficientes de detalles y análisis se le calculó los cuatro primeros momentos estadísticos. En la figura 4.3 se muestra la descomposición de la señal con tres niveles.

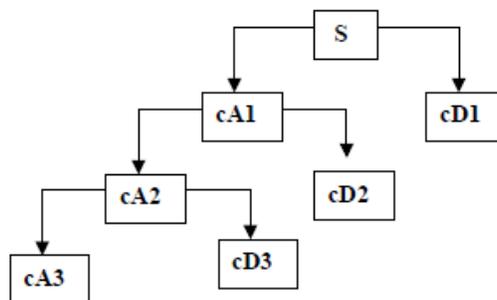


Figura 4.3: El árbol de descomposición de wavelet con 3 niveles de descomposición.

La Wavelet utilizada para hacer la descomposición fue la Db4, y los coeficientes de cada nivel se extrajeron con la función Wavedec:

A todos estos coeficientes se le calcularon los cuatro primeros momentos estadísticos, de tal manera que se obtiene un vector de rasgos (Vrm) que posee los momentos de los coeficientes del nivel de aproximación (ca) y los momentos de los coeficientes de los tres niveles de los detalles(cdn) , dando como resultado un total de 16 (4x4) rasgos (Ver tabla 4.1)

Tabla 4.1 Momentos calculados a los coeficientes de la descomposición.

	Coeficientes de Aproximación	Coeficientes de Detalles nivel 1	Coeficientes de Detalles nivel 2	Coeficientes de Detalles nivel 3
Valor Medio	vmca	vmcd1	vmcd2	vmcd3
Varianza	varca	varcd1	varcd2	varcd3
Momento de orden tres	mo3ca	mo3cd1	mo3cd2	mo3cd3
Momento de orden cuatro	mo4ca	mo4cd1	mo4cd2	mo4cd3

Donde:

vm: valor medio

var: variancia

mo3:momento central de orden 3

mo4:momento central de orden 4

ca= coeficientes de aproximación

cdn= coeficientes de los detalles del nivel n

Coeficientes Cepstrales de frecuencia mel.

De igual modo se aplicó la transformada de wavelet como filtro para reducir el ruido de las señales de voz, utilizando diferentes niveles de descomposición. La Wavelet aplicada fue la Daubechies 15 (Db15), y para el filtrado se seleccionó un umbral fijo. Se obtuvo los coeficientes cepstrales de frecuencia mel para cada uno de los niveles de descomposición. Los coeficientes cepstrales de frecuencia mel (20 rasgos) fueron calculados

de acuerdo a metodología propuesta por David y Mermelstein en 1980, en su trabajo “Comparison of Parametric Representations for Monosyllabic Word Recognition in Continuously Spoken Sentences”.

Como complemento de la experimentación, se realizaron las mismas operaciones descritas en el párrafo anterior, variando la longitud de las ventanas de acuerdo a valores de tiempo de duración de las muestras entre 10 milisegundos y 50 milisegundos.

Clasificación de las señales

La fase de clasificación de las señales consistió en utilizar la máquina de vectores de soporte para clasificar los señales entre sanas y patológicas.

El kernel utilizado fue el rbf y se le suministró los rasgos obtenidos en la fase 2. Esto quiere decir que se obtuvieron tres máquinas de vectores de soporte para cada conjunto de rasgos.

4.2.- TRANSFORMADA DE ONDÍCULAS PARA ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

Artículo realizado por los profesores José Luis Nazar y Cristobal Vega en el año (2011). En este trabajo se plantea un método de estimación de daños en estructuras mediante la separación no lineal de señales, basado en la transformada de ondículas.

Resumen

Este trabajo plantea un método de estimación de daños en estructuras mediante la separación no lineal de señales, basado en la transformada de ondículas. Los resultados obtenidos son superiores en capacidad de estimación de daños a los reportados en la

literatura. El método propuesto, mediante un registro de la aceleración del sistema y la transformada de ondículas permite estimar el instante y la amplitud de cualquier falla estructural.

Describiendo el trabajo a grandes rasgos, este consistió en el modelado de un sistema base excitado con un solo grado de libertad, 1 – dg, con rigidez variable como el mostrado en la figura 4.4.

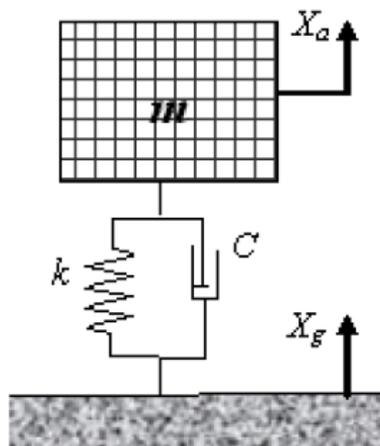


Figura 4.4: Sistema base excitado de un solo grado de libertad 1-dg con rigidez cambiante

Este sistema es completamente descrito por la siguiente ecuación de movimiento tal como se muestra en la ecuación (4.2)

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + c \frac{d}{dt} x(t) + k(t)x(t) = -m \frac{d^2}{dt^2} x_g(t), \quad (4.2)$$

donde $x = x_a - x_g$, m es la masa y $k(t)$ es la rigidez que puede cambiar por daños estructurales

La aceleración absoluta se obtiene de la ecuación de movimiento (4.2) y se representa mediante la ecuación (4.3). En esta ecuación podrá observarse la ocurrencia de un cambio abrupto de k lo cual estará representando la existencia de un daño en la estructura. Este cambio de k se reflejará como una discontinuidad aislada.

$$\frac{d^2}{dt^2}x_a(t) = -\frac{c\frac{d}{dt}x(t) + k(t)x(t)}{m}. \quad (4.3)$$

Luego, esta discontinuidad será fácilmente detectada por la transformada de ondículas aun cuando sea muy pequeña en comparación con la amplitud media de la respuesta.

Otra dificultad surge cuando el sistema es excitado por un proceso aleatorio, lo cual sería una situación más realista. En este caso, la excitación no será suave, así que las derivadas de x en la ecuación (4.3) podría tener discontinuidades en casi todo punto, por que las singularidades en la excitación son propagadas a través de el sistema y afecta la respuesta.

Detección del daño mediante la transformada de ondícula

El método propuesto fue desarrollado mediante simulaciones. La ecuación (4.2) fue simulada por el método de Monte–Carlo en SciLab. Durante un intervalo de 5 *seg* con 100 nodos por segundo, para el caso en el cual no fue realizada ninguna perturbación, es decir, la rigidez se mantiene constante. La aceleración obtenida está representada en la figura 4.5. Se observa que esta contiene 4 sub figuras, las cuáles se explicaran a continuación.

La aceleración obtenida está representada en la Figura 2. La transformada de ondícula obtenida de la señal de la Figura 2 está dada en la Figura 4. La respuesta de

aceleración bajo una excitación local aleatoria activada a los 1,5 s está graficada en la Figura 3.

Fueron realizadas 500 réplicas de la simulación para cada valor de k con incrementos diferenciales de (0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,9 y 1% de la amplitud sin perturbación) y el resto de los parámetros de la ecuación (4.2) fueron seleccionados aleatoriamente.

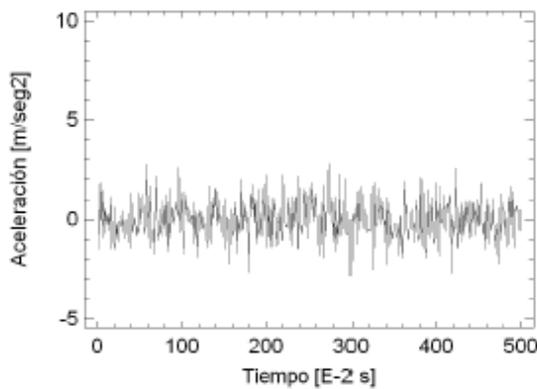


Figura 2: Aceleración absoluta sin perturbación

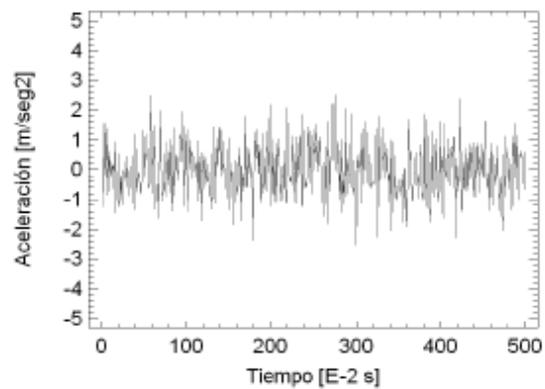


Figura 4: Aceleración absoluta con una perturbación aleatoria a los 1,5s

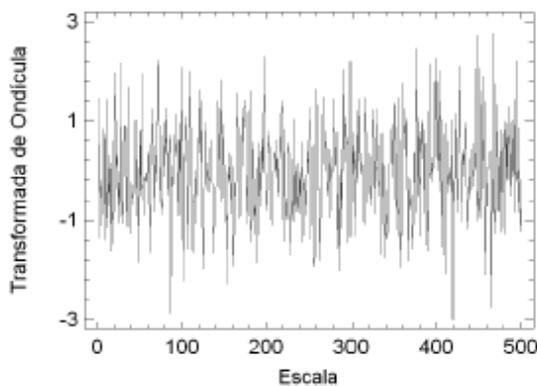


Figura 3: Transformada de ondículas de la señal dada en la Figura 2

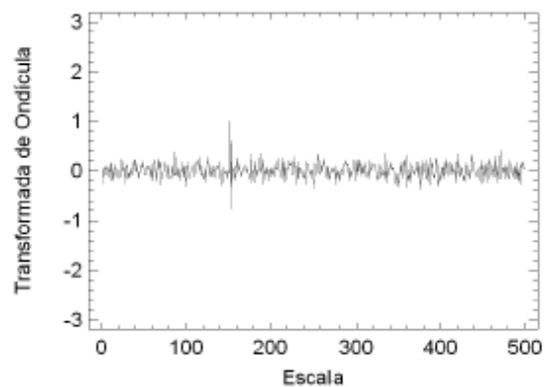


Figura 5: Coeficiente T_k obtenidos por la separación

Figura 4.5: Se muestra la aceleración del sistema sin perturbación, su respectiva transformada de ondícula y en los gráficos del lado derecho se muestra la aceleración absoluta con una perturbación aleatoria y sus respectivos coeficientes wavelet.

Para más información de este artículo, ver el apéndice B.

4.3.- APLICACIÓN DE LIBRERIAS DE FUNCIONES PARA CALCULAR LA TRANSFORMADA WAVELET EN SCILAB EN EL CÁLCULO DE LA POTENCIA ELÉCTRICA PARA SEÑALES BAJO CONDICIONES NO SINUSOIDALES

Trabajo de ascenso realizado por el profesor Franklin Yusti en el año (2010). En este trabajo de investigación se muestra una aplicación de las librerías de funciones que calculan la transformada wavelet programadas en SCILAB en el cálculo de la potencia eléctrica para señales bajo condiciones no sinusoidales. La medición de la potencia se realizó en el caso sinusoidal para establecer comparaciones con el cálculo de la potencia mediante las formulas existentes en el dominio del tiempo, luego se extendió al caso no sinusoidal y se compararon la potencia utilizando la transformada wavelet con la potencia utilizando las fórmulas existentes en tiempo discreto.

Procedimiento para determinar la potencia

El procesamiento digital de las señales se realizó utilizando la plataforma SCILAB, en el cual se implementó un conjunto de rutinas que permiten realizar la descomposición wavelet multinivel de una señal muestreada. Al descomponer una señal en distintos niveles de descomposición (procedimiento denominado ANÁLISIS WAVELET), para cada nivel se obtiene un conjunto de coeficientes denominados aproximación y detalle, estos coeficientes representan parte de la señal original para un cierto intervalo de tiempo y para un ancho determinado de frecuencia. Los coeficientes de aproximación y los coeficientes de detalle mencionados anteriormente son los que se utilizaron para el cálculo de la potencia eléctrica.

Para calcular la potencia eléctrica en el dominio del tiempo, el método sugiere calcular los valores eficaces de la tensión y la corriente, V_{rms} e I_{rms} , como sigue:

CASO: Dominio en el tiempo continuo

Para un periodo T

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v_t^2 dt} \quad I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i_t^2 dt} \quad P = \frac{1}{T} \int_0^T v_t i_t dt \quad S = V_{rms} * I_{rms}$$

Donde v_t e i_t representan la tensión y la corriente respectivamente.

CASO: Dominio en el tiempo discreto

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^{2^N-1} v_n^2} \quad I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^{2^N-1} i_n^2} \quad P = \frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^{2^N-1} v_n i_n \quad S = V_{rms} * I_{rms}$$

Donde v_n e i_n representan la tensión y la corriente discretizada (muestreada).

$n = 0, 1, 2, \dots, 2^N-1$; N representará el numero de niveles en los cuales se puede descomponer la señal.

Como alternativa para el cálculo de las variables involucradas para la obtención de la potencia eléctrica realizó el cálculo de los valores eficaces de tensión y corriente no directamente de las muestras originales sino a partir de la descomposición wavelet de las muestras de tensión y corriente, ya que la descomposición wavelet actúa como filtro para una señal y por ende con este filtrado se está disminuyendo los efectos que aporta el ruido.

En el procedimiento propuesto se programaron las rutinas que realizan el cálculo de las siguientes formulas matemáticas:

Aplicar Transformada Wavelet a las muestras de Tensión y Corriente

$$v_n = \sum_k c_{j_0,k}^* \phi_{j_0,k}(n) + \sum_{j \geq j_0} \sum_k d_{j,k}^* \psi_{j,k}(n) \quad c_{j_0,k}^* = \langle v_n, \phi_{j_0,k} \rangle \quad d_{j,k}^* = \langle v_n, \psi_{j,k} \rangle$$

$$i_n = \sum_k c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(n) + \sum_{j \geq j_0} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(n) \quad c_{j_0,k} = \langle i_n, \phi_{j_0,k} \rangle \quad d_{j,k} = \langle v_n, \psi_{j,k} \rangle$$

El nivel de descomposición más bajo de la señal original está representado por j_0 e incluye la componente fundamental de frecuencia de la señal a analizar, como se muestra en la figura 4.6.

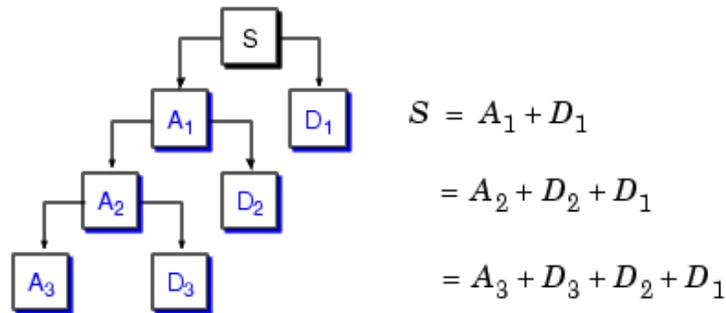


Figura4.6: S es la señal a analizar, A_i y D_i representan los coeficientes de aproximación y detalle para cada nivel de descomposición. Cada una de las igualdades representa el vector wavelet de cada nivel.

Realizada la transformada wavelet de la tensión y la corriente se obtienen los vectores wavelet que representan cada una de las señales los cuales se representan por $V_w[n]$ e $I_w[n]$ respectivamente para luego calcular los valores eficaces de cada uno de ellos como sigue:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^{2^N-1} (V_w[n])^2} \quad I_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^{2^N-1} (I_w[n])^2}$$

$$P = \frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^{2^N-1} V_w[n] * I_w[n] \quad S = V_{rms} * I_{rms}$$

Aplicación a un caso sinusoidal puro

Supóngase que se tiene la función $f(t) = \text{Sen}(t)$, en el intervalo $[0, 2\pi]$; muestreada a una frecuencia de $\frac{8}{2\pi}$, se tienen las imágenes de $f(t)$ para:

$$t = \{0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4\}$$

De donde se obtiene la secuencia

$$x[n] = \left[0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 1 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 0 \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -1 \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

Ahora se quiere calcular el valor RMS de $f(t)$ a partir de los coeficientes que conforman su vector wavelet.

“Teóricamente para $f(t) = V_p \text{Sen}(t)$ su valor RMS viene dado por $\frac{V_p}{\sqrt{2}}$ ”

En este ejemplo se trabajó con el sistema Haar (o Daubechies1) para calcular el vector wavelet de $f(t)$ o lo que es lo mismo, de la secuencia $x[n]$.

Los coeficientes para el filtro escala y filtro wavelet son respectivamente:

$f_e := \frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}$	Filtro pasabajo de descomposicion
$f_w := -\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}$	Filtro pasa alto de descomposicion

CA3:= convolucion([x], [fe]); ca3:= submuestrear([CA3]);	CD3:= convolucion([x], [fw]); cd3:= submuestrear([CD3]);
ca3 = [0.5, 1.2071, -0.5, -1.2071]	cd3 = [-0.5, 0.2071, 0.5, -0.2071]

CA2:= convolucion([ca3], [fe]); ca2:= submuestrear([CA2]);	CD2:= convolucion([ca3], [fw]); cd2:= submuestrear([CD2]);
ca2 = [1.2071, -1.2071]	cd2 = [-0.4999, 0.4999]

CA1:= convolucion([ca2], [fe]); ca1:= submuestrear([CA1]);	CD1:=convolucion([ca2], [fw]); cd1:= submuestrear([CD1]);
ca1 = [0]	cd1 = [1.7071]

VectorWavelet:= [ca1, cd1, cd2, cd3];

VectorWavelet = [0, 1.7071, -0.4999, 0.4999, -0.5, 0.2071, 0.5, -0.2071]

$V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^{2^N-1} (V_w[n])^2}$	<p>V_{rms} : Valor RMS de $f(t)$.</p> <p>$V_w[n]$: Coeficientes wavelet de la función $f(t)$ muestreada up supra.</p> <p>N: Es el numero de niveles en los cuales se puede descomponer la señal. El número de elementos de la señal muestreada debe ser potencias de 2 (escala diádica o diezmado)</p>
--	--

$$V_{rms} = \text{sqrt}(\text{sum}(V_w.*V_w)/(2^3))$$

Vrms =

0.7071068

Recuérdese que $f(t)=\text{Sen}(t)$, en este caso el valor pico es $V_p = 1$ y calculando el valor RMS teórico se obtiene:

$$V_{rms} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.7071068$$

Se observa la similitud en el resultado numérico, 0.0% de error al comparar el valor *rms* para $f(t)$ tanto teóricamente como a partir del vector wavelet de $f(t)$.

La rutina implementada en SCILAB para calcular la potencia eléctrica mediante la transformada wavelet se puede observar en el apéndice D.

APÉNDICE A

Aplicación de la transformada de wavelet para el análisis de señales de voz normales y patológicas

Aplicación de la transformada de wavelet para el análisis de señales de voz normales y patológicas

Carlos Jiménez⁽¹⁾, José A. Díaz⁽¹⁾, Paulino Del Pino⁽¹⁾, Howard Rothman⁽²⁾

⁽¹⁾ Escuela de Ingeniería Eléctrica, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela

⁽²⁾ Department of Electrical and Computer Engineering, University of Florida.

Email: cjimenez@uc.edu.ve

Resumen

En este trabajo se utilizó la transformada de wavelet db15, con un nivel de descomposición de 10, para realizar el proceso de filtrado de señales de voz y extraer parámetros que permitan determinar si la señal de voz pertenece a un paciente sano o con alguna patología. Se graficó y tabuló la relación señal a ruido de señales de voces correspondientes a muestras de la pronunciación de una "A" sostenida, clasificadas como normales y patológicas por un experto en el área de procesamiento de voz, observándose en las señales normales un mayor valor de la relación señal a ruido promedio, mayor valor máximo y una menor varianza.

Palabras clave: Wavelet, señales de voz, relación señal a ruido, multiresolución, señal estacionaria.

Applying the wavelet transform for the analysis of normal and pathological voices

Abstract

The wavelet transform db15, with a decomposition level of 10, was used in this research in order to filter voice signals and extract some parameters that would allow us to determine whether the voice signal is a healthy one or if it has some pathology. The signal-to-noise ratio of voice signals corresponding to a sustained "a", which were classified as normal or pathological by an expert in the area of speech processing, was plotted and tabulated. It was observed that for normal voices the average signal-to-noise-ratio was higher than that for pathological voices, the maximum value of the signal-to-noise-ratio was higher, and the variance of the signal-to-noise-ratio curve was lower.

Keywords: Wavelet, speech, signal-to-noise-ratio, multi-resolution, stationary signal.

1. INTRODUCCIÓN

En el análisis de las señales de voz se utilizan técnicas de procesamiento digital de señales con el objetivo de identificar y caracterizar la calidad de las mismas mediante parámetros. Si se seleccionan estos parámetros convenientemente, se podrían utilizar para comparar voces provenientes de pacientes sanos y de pacientes con patologías de voz, para ayudar al especialista a diagnosticar en forma objetiva y rápida el estado de la señal de voz [1].

La señal de voz presenta un comportamiento no estacionario [2, 3], por lo que se deben aplicar técnicas

de procesamiento de señales que permitan determinar las características de la señal de voz y su comportamiento en el tiempo. Esto se puede lograr analizando la señal en varios intervalos de tiempo, y definiendo en estos intervalos un gráfico tiempo-frecuencia. Algunas técnicas utilizadas para esto son la STFT (Short-Time Fourier Transform) y la Distribución de Wigner.

Las técnicas anteriores suponen que las señales son estacionarias en un intervalo de tiempo determinado, y el análisis se realiza con una resolución de tiempo-frecuencia fija, por lo que cualquier mejora de resolución de cualquiera de ellos está limitada por el

mejor resolución en dominio del tiempo, reduce la información en el dominio de la frecuencia, y viceversa.

Debido a que la transformada Wavelet [4-7] permite analizar la señal en el tiempo y en la frecuencia simultáneamente, y como el segmento de la señal de voz que se analizará es corto, entonces se aplicará esta transformada para analizar la voz y extraer parámetros que permitan determinar si corresponde a una voz sana o pertenece a un paciente con alguna patología.

Se utilizó la transformada de wavelet db15, con el nivel de descomposición de 10, y se graficó y tabuló la relación señal a ruido de señales de voces correspondientes a muestras de una "A" sostenida, clasificadas como normales y patológicas por un experto en el área de procesamiento de voz, observándose en las señales normales un mayor valor de la relación señal a ruido promedio, mayor valor máximo y una menor varianza.

2. METODOLOGÍA

2.1 Transformada de wavelet

La transformada de Wavelet permite realizar un análisis de múltiple resolución (MRA), lo cual analiza la señal con resolución diferente a diferentes frecuencias. Se diseña para producir alta resolución en el tiempo y baja resolución en frecuencia para señales de alta frecuencia, y baja resolución en el tiempo y alta resolución en frecuencia para señales de baja frecuencia. En las ecuaciones 1 y 2 se indica la forma como se obtiene la transformada de wavelet continua (CWT) de una función $f(t)$.

$$C(escala, posición) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \psi(escala, posición, t) dt \quad (1)$$

$$CWT(s, \tau) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt \quad (2)$$

Donde ψ es la función wavelet (llamada wavelet madre), la cual se debe escalar (s) y desplazar (τ) sobre el eje del tiempo. El factor en el denominador (la raíz cuadrada de s) es utilizado como un factor de normalización de la energía.

El parámetro de escalamiento (s) permite comprimir o expandir la función wavelet y en la transformada es utilizada en el denominador ($\psi(t/s)$). Este parámetro indica el grado de resolución con que se analiza la señal. Un valor alto de este factor ($|s| > 1$) corresponde a una vista global de la señal (expansión de la wavelet) mientras que un factor de escala bajo ($|s| < 1$) corresponde a ver detalles de la señal (se comprime la wavelet). El factor de posición (τ) permite desplazar la función wavelet en el eje del tiempo ($\psi(t-\tau)$), hasta el intervalo de tiempo que se encuentre definida la función $f(t)$. El resultado que se obtiene cuando se aplica la transformada de wavelet son los coeficientes $C(s, t)$, que son función de la escala y la posición [4-7].

La wavelet utilizada en este proyecto es la Daubechies 15 (db15), la cual no es simétrica y es mostrada en la figura 1 [7,8].

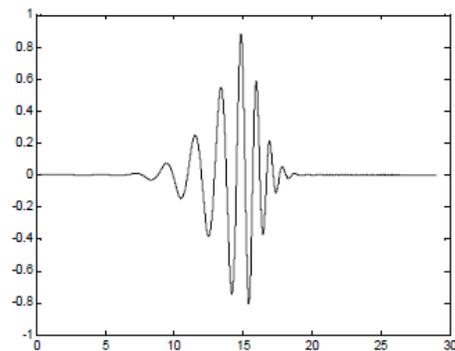


Figura 1. Función Wavelet db15.

2.2 Filtrado de la señal de voz

El análisis de las señales con la transformada de wavelet es equivalente a un proceso de filtrado, donde se realiza una división de los coeficientes, obteniéndose los coeficientes de aproximación (A) y detalle (D). La aproximación son los valores altos de la escala, correspondiente a las componentes de baja frecuencia de la señal, por lo tanto, está asociada a la función de escalamiento que se determina con un filtro pasa bajo. Los detalles son los valores bajos de la escala correspondientes a las componentes de alta frecuencia, y está asociada a la función wavelet que se determina como un filtro pasa alto. En la Figura 2

se muestra un esquema del proceso de filtrado, donde la señal a procesar es pasada por los filtros paso bajo y pasa alto, los cuales son filtros complementarios y se producen dos señales [5, 7, 9, 10].

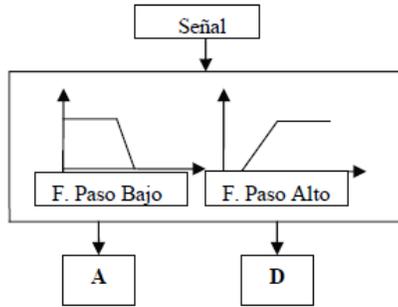


Figura 2. Esquema del proceso de filtrado.

El proceso de filtrado o descomposición se repite, para descomponer la señal en N niveles, cada nivel con una resolución más baja. El número de veces que es filtrada la señal viene determinada por el nivel de descomposición. En la Figura 3 se muestra el árbol de filtrado de wavelet con tres niveles.

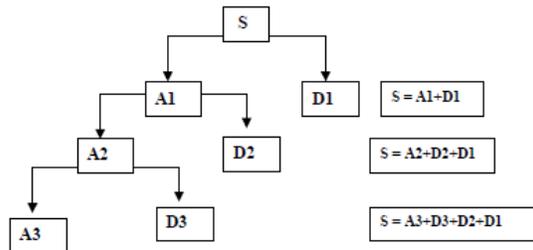


Figura 3. Proceso de descomposición con tres niveles.

Para reducir el ruido de la señal de voz se implementó un programa donde se eliminan las componentes de la señal que están por debajo de un determinado umbral (THR), el cual es calculado según la teoría de Donoho [11-13] mediante la expresión indicada en la ecuación 3.

$$THR = (\sqrt{2 \ln(n)}) \times s \quad (3)$$

Donde:

- n = longitud de la señal a analizar
- s = estimado del nivel de ruido de la señal, obtenido con la ecuación 4

$$s = \frac{\text{mediana}(\text{modulo}(c))}{0.6745} \quad (4)$$

c = coeficientes de los detalles en el nivel uno.

El tipo de umbral a aplicar a la señal para reducir el nivel de ruido puede ser: duro (Hard) o suave (Soft). Cuando se aplica el umbral duro, si el valor absoluto del coeficiente es mayor que el umbral calculado, se mantiene el coeficiente, y en el caso contrario se iguala a cero. En la ecuación 5 se muestra la expresión utilizada para aplicar este tipo de umbral, donde $C_m(i,j)$ representan los coeficientes modificados. Cuando se aplica el umbral suave, si el valor absoluto del coeficiente es mayor que el umbral seleccionado se modifica el coeficiente, restando el umbral a su valor absoluto, en caso contrario se iguala el coeficiente a cero. En la ecuación 6 se muestra la expresión utilizada cuando se aplica este tipo de umbral. En la Figura 4 se muestra el resultado cuando no se modifican los coeficientes, por lo tanto $C_m(i,j)$ es igual a $C(i,j)$. En las Figuras 5a y 5b se muestran los resultados de las modificaciones de los coeficientes cuando se aplica el umbral duro y el suave [10,12,14].

$$C_m(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } |C(i,j)| < thr \\ C(i,j) & \text{si } |C(i,j)| \geq thr \end{cases} \quad (5)$$

$$C_m(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } |C(i,j)| < thr \\ \text{sgn}(C(i,j))|C(i,j) - thr| & \text{si } |C(i,j)| \geq thr \end{cases} \quad (6)$$

Para determinar la relación señal a ruido (snr) de la señal se utilizó la ecuación 7 [8].

$$snr = 10 * \log_{10} \left[\frac{\sum_{n=0}^{L-1} (x(n))^2}{\sum_{n=0}^{L-1} (\hat{x}(n) - x(n))^2} \right] \quad (7)$$

Donde:

- $\hat{x}(n)$ = señal filtrada
- $x(n)$ = señal con ruido
- snr = relación señal a ruido en decibeles
- L = número de muestras de la señal

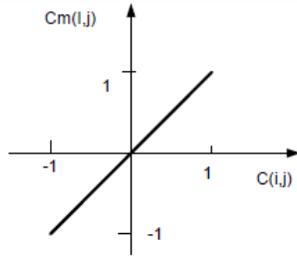


Figura 4. Señal original.

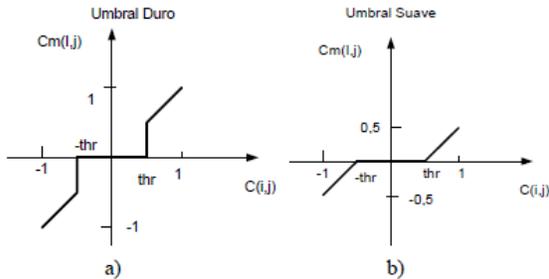


Figura 5. a) Umbral duro. b) Umbral suave.

3. RESULTADOS

3.1 Análisis de señales de voz sanas

En este experimento se analizaron doce señales de voz correspondientes a una “A” sostenida, las cua-

les fueron clasificadas como normales por un experto en el área de procesamiento de voz. Se utilizó para su procesamiento la transformada de Wavelets db15 con el nivel de descomposición de 10. Los resultados de la relación señal a ruido son mostrados en la Tabla 1, en donde se especifican el valor promedio (rango entre 13,767 y 21.7 dB), la varianza, el valor mínimo y el valor máximo (entre 16.047 y 22.7 dB) para cada una de las señales de voz. En la Figura 6 se muestra la relación señal-ruido de las cuatro primeras señales especificadas en la Tabla 1. En la Figura 7 se muestra desde la quinta a la octava señal y en la Figura 8 las últimas cuatro señales de voz sanas de la tabla 1.

3.2 Análisis de señales de voz patológicas

En este experimento se analizaron doce señales de voz correspondientes a una “A” sostenida clasificadas como patológicas por un experto en el área de procesamiento de voz. Se utilizó para su procesamiento la transformada de Wavelet db15 con el nivel de descomposición de 10, con el valor de umbral de 0.1, para todas las señales.

Los resultados de la relación señal a ruido son mostrados en la Tabla 2, en donde se especifican el valor promedio (entre 7,7065 y 16,167 dB), la varianza, el valor mínimo y el valor máximo (entre 13,449 y 20,307 dB) para cada una de la señal de voz. En la Figura 9 se muestra la relación señal-ruido de las cua-

Tabla 1. Relación señal a ruido de señales de voz normales con db15 nivel 10.

Señal	Valor Promedio (dB)	Varianza	Valor Mínimo (dB)	Valor Máximo (dB)
1101-ah	13,767	0,68098	11,653	16,047
1102-6ah	17,289	0,70303	14,948	20,103
1104-5ah	16,368	0,35040	14,781	17,6,73
1106-6ah	17,375	1,45420	14,644	20,317
1108-8ah	16,073	1,47190	13,081	17,,950
1109-9ah	15,669	1,31650	13,220	18,218
2101-6ah	18,063	1,17600	16,166	20,474
2104-7ah	15,609	5,45250	10,293	19,610
2106-5ah	15,105	0,30896	13,778	16,484
2107ah	16,368	0,35040	14,781	17,670
2201-6ah	15,550	0,60234	13,731	17,030
2205-5ah	21,752	0,173720	20,691	22,718

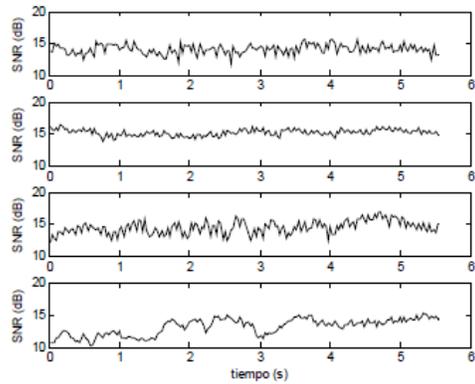


Figura 6. Relación señal a ruido de las cuatro primeras señales de voz normales con db15 nivel 10

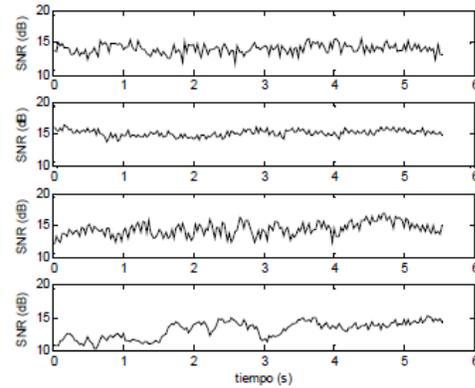


Figura 9. Relación señal a ruido de las cuatro primeras señales de voz patológicas con db15 nivel 10

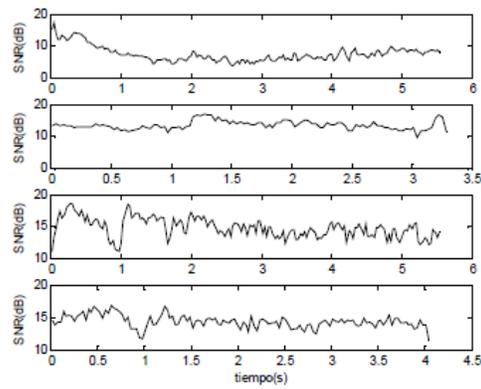


Figura 7. Relación señal a ruido de las señales de voz normales 5,6,7 y 8 con db15 nivel 10.

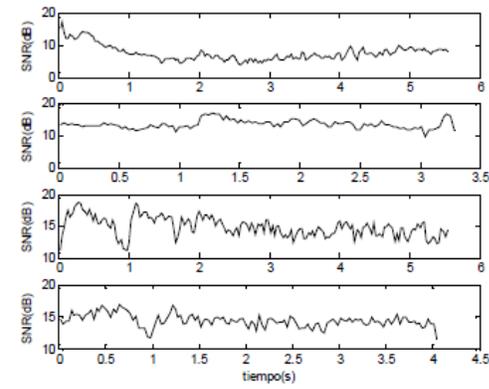


Figura 10. Relación señal a ruido de las señales de voz patológicas 5,6,7 y 8 con db15 nivel 10.

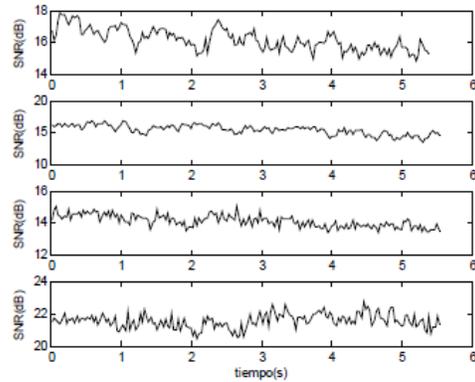


Figura 8. Relación señal a ruido de las señales de voz normales 9,10,11 y 12 con db15 nivel 10.

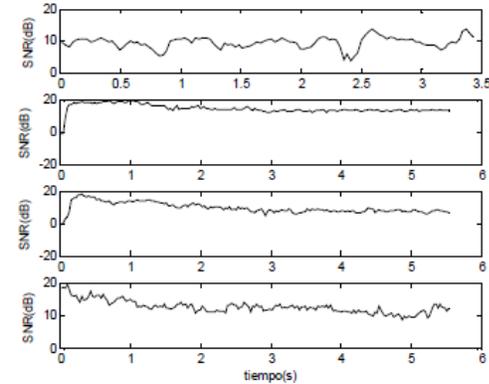


Figura 11. Relación señal a ruido de las señales de voz patológicas 9,10,11 y 12 con db15 nivel 10.

tro primeras señales especificadas en la Tabla 2. En la Figura 10 se muestra la relación señal-ruido desde la quinta a la octava señal y en la Figura 11 las últimas cuatros señales de voz patológicas de la Tabla 2.

Comparando los valores de la relación señal a ruido de las muestras de pacientes sanos con los que presentan alguna patología se observa que las voces correspondientes a los pacientes sanos presentan mayor magnitud de la relación señal-ruido tanto en el promedio como en el máximo, menor valor de la varianza y las formas de ondas presentan un comportamiento menos oscilatorio.

4. CONCLUSIONES

Se utilizaron señales de voz correspondientes a una "A" sostenida, clasificadas como normales y patológicas por un experto en el área de procesamiento de voz. Se aplicó la transformada de Wavelet db15 al conjunto de muestras, se calculó y graficó la relación señal a ruido, se tabularon los valores promedios, la magnitud mínima, la magnitud máxima y su varianza, y se compararon los resultados obtenidos del procesamiento de estas muestras.

Comparando los resultados obtenidos para las señales de voces clasificadas como normales y patológicas, se observó que el valor promedio y el valor máximo de la relación señal a ruido es mayor en las

señales normales que en las patológicas. Así mismo en las muestras patológicas se presentan formas de ondas con más variaciones que en las muestras normales, reflejando una varianza mayor.

4. REFERENCIAS

- [1] Del Pino Paulino, Díaz J. A. y Jiménez C. (2004) "Identificación de los parámetros espectrales que determinan la calidad de la voz". Ingeniería UC. Venezuela.
- [2] Faundez Marcos. (2000) "Tratamiento Digital de Voz e Imagen y Aplicaciones a la Multimedia" Marcombo Boixareu Editores. Barcelona España.
- [3] Obediente Soso Enrique. (2001) "Fonética y Fonología". Universidad de los Andes Mérida. Venezuela.
- [4] Daubechies Ingrid. (1992) "Ten Lectures on Wavelets". Capital City Press Filadelfia USA.
- [5] Kaiser Gerald (1999) "A Friendly Guide to Wavelets" Birkhauser U.S.A.
- [6] Mallat Stephane (1998) "A Wavelet Tour of Signal Processing" Academic. Press USA
- [7] Chui K Charles. (1992) "An Introduction in Wavelet". Academia. Press Inc. Reino Unido.
- [8] Jiménez Carlos, Díaz J. A. y Del Pino P. (2004) "Determinación de la relación señal a ruido de la voz utilizando la transformada de wavelet". Ingeniería UC. Venezuela.

Tabla 2. Relación señal a ruido de señales de voz patológicas con db15 nivel 10.

Señal	Valor promedio (dB)	Varianza	Valor Mínimo (dB)	Valor Máximo (dB)
2202-9ahBAD	14.0358	0.7434	11.7985	15.6239
2204-4ahBAD	15.1460	0.5010	13.7826	16.4072
2207-7ahBAD	14.4219	1.0368	12.1259	16.7991
2208-7ahBAD	13.1120	1.2635	10.1986	15.2145
3101-2ahBAD	7.6192	2.4094	3.9915	17.2424
3102-5ahBAD	13.5506	1.3549	9.7716	17.1036
3103-5ahBAD	14.8406	1.5596	11.1937	18.7190
3105-5ahBAD	14.4081	0.9822	11.5442	16.8624
3106-5ahBAD	9.5183	1.7436	3.9972	13.5593
3201-9ahBAD	14.7580	2.6394	1.0215	19.7743
3203-4ahBAD	9.8652	3.2357	0.5581	18.5604
3207-3ahBAD	12.6375	1.9363	8.6000	19.4750

- [9] García Janer Leonard (1998) “Transformada de Wavelet aplicada a la extracción de información en señales de voz”. Barcelona España. <http://www.eupmt.es/imesd/telematica/veu/thesis.pdf>.
- [10] Cuesta Frau, Kovak D. (2000) “Reducción del ruido en señales electrocardiográficas mediante la transformada de wavelet”. <http://hpk.felk.cvut.cz/~xnovakd1/doc/wavelet.pdf>
- [11] Novak Daniel, Cuesta D. (2000) “Denoising electrocardiogram signal using adaptive Wavelets”. Universidad de Valencia España. http://plutarco.disca.upv.es/~jcperez/Documentos/Comg_sBmodavid.pdf.
- [12] Donoho D. (1995) “Denoising by soft-thresholding”. IEEE. Trabs. Information theory. Vol 41, Nº 3.
- [13] Childers Donald (1997) “Probability and Random Processes”. McGraw Hill U.S.A.
- [14] Papoulis Athanasios. (1984) “Probability Random variables and Stochastic”. Processes. McGraw Hill U.S.A.

APÉNDICE B

Transformada de ondículas para análisis de estructuras

Transformada de ondículas para análisis de estructuras

José L. Nazar^a, Cristóbal E. Vega González^{a,b}

^aEscuela de Ingeniería Civil, Facultad Ingeniería, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela.

^bInstituto de Matemáticas y Cálculo Aplicado (IMYCA, Facultad Ingeniería, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela.

Resumen.-

Este trabajo plantea un método de estimación de daños en estructuras mediante la separación no lineal de señales, basado en la transformada de ondículas. Los resultados obtenidos son superiores en capacidad de estimación de daños a los reportados en la literatura. El método propuesto, mediante un registro de la aceleración del sistema y la transformada de ondículas permite estimar el instante y la amplitud de cualquier falla estructural.

Palabras clave: Transformada de ondícula, Análisis de estructuras, Mínima longitud de descripción

Wavelet transform for structures analysis

Abstract.-

This work plants a method of estimate of harmful in structure by no lineal signals separation, based in wavelet transform. The obtained results are superior in capacity of harmful estimate for reported in the literature. By system acceleration register and wavelet transform, the proposed method permits to estimate the instant and the amplitude of any structural failing.

Keywords: Wavelet transform, Structure analysis, Minimum description length

Recibido: noviembre 2010

Aceptado: enero 2011

1. Introducción

Las medidas de vibración en estructuras bajo de ambiente o excitación controlada abrió un modo para evaluar daños al correlacionar cambios en los parámetros de sistema dinámicos, frecuencias naturales, formas modales o fallas con daño. Muchos métodos propuesto en la literatura están basados en la medida de frecuencias naturales o formas modales (transformada de Fourier), está asociado al daño de reducción local de la rigidez estructural mientras que no sirven completamente para el caso de fallas, en el procedimiento de identificación

así como en la correlación de cambios en las propiedades espectrales de la estructura con daño. Existen numerosas aplicaciones de los métodos de Fourier, sin embargo, presente algunas limitaciones prácticas en cuenta de la sensibilidad baja de frecuencias naturales o formas modales para fallas estructurales.

La transformada de ondícula ha demostrado ser una herramienta útil para el estudio, la comprensión y separación de señales, por lo cual proponemos en este trabajo un método automático de separación de la señal en sus componentes: aceleración natural del sistema y aceleración por una perturbación o falla local; mediante la transformada de ondículas y el principio de mínima descripción dado por Rissanem [1].

1.1. Antecedentes

Para el diseño de estructuras resistentes a terremotos es necesario el espectro de respuesta o la serie de tiempo de las deformaciones

*Autor para correspondencia

Correos-e: jlna55@hotmail.com (José L. Nazar),
cvega@uc.edu.ve (Cristóbal E. Vega González)

producidas. Debido a la falta de datos grabados y lo aleatorio que los movimientos del suelo durante un terremoto sean experimentados por las estructura en el futuro, usualmente que es difícil para obtener datos grabados que ajusten a los requerimientos (tipo de sitio, distancia al epicentro, etc.). Por lo tanto las ondas artificiales sísmicas son extensamente usadas en diseños sísmicos, verificación de capacidad sísmica y evaluación sísmica de estructuras. La transformada de ondículas como una herramienta poderosa en el análisis tiempo-frecuencia-escala en los últimos años, ha hecho posible estudiar el comportamiento de no-estacionario de frecuencia más convenientemente. Ghodrati y Asadi presentan en su trabajo [2] un método basado en paquetes wavelet para estimar las variaciones de la aceleración en algunos terremotos Iraníes.

En los últimos años ha existido un creciente interés en desarrollar nuevas metodologías que permitan la detección de daño en estructuras. La mayoría de estos métodos están basados en la caracterización de la respuesta dinámica de las estructuras, pero también existen metodologías basadas en su respuesta estática. Una de las ventajas de los métodos estáticos está en su facilidad de realización y la posibilidad de reducir fácilmente el número de sensores necesarios gracias a la repetitividad de los ensayos. Esto hace que puedan resultar de interés en determinadas aplicaciones, y complementar las ventajas que ofrecen a su vez los métodos dinámicos.

Dentro de la detección de daño en estructuras, la transformada de ondícula aparece como una herramienta útil para detectar variaciones en la misma. En los ensayos estáticos, esta transformada puede ser utilizada para analizar la deformada estática de la estructura y detectar posibles cambios producidos por la presencia de un daño. Algaba *et al* en su trabajo [3] aplican la transformada de ondícula a la respuesta estática de una viga biapoyada obtenida a partir de un modelo numérico de elementos finitos. La metodología que implementan supone la obtención de la respuesta para una carga puntual ubicada en distintas posiciones, donde analizan la superposición de los resultados obtenidos a partir de cada estado de carga. A partir de sus

resultados caracterizan el efecto de la presencia de una grieta y analizan la capacidad del método para la detección del daño.

El trabajo de Masuda *et al* [4] concierne a la aproximación por ondículas para monitorear la salud estructural, en cual transformada de ondícula fue usada como un detector para las singularidades en las estructurales respuestas.

Hou y Hera [5] muestran la sencillez en algoritmos y eficiencia en esfuerzo de la transformada de ondícula para la estimación de daños en estructuras. Obtiene un valor mínimo crítico de la relación amplitud de la perturbación a amplitud de la aceleración natural del sistema del 4% que puede ser detectado por el estudio en el dominio de las escalas.

Curadelli *et al* [6] presentan una esquema para detectar daños estructurales por medio de uso de identificación de coeficientes de una transformada de ondícula; muestran que la transformada de ondícula puede ser convenientemente empleada en un procedimiento para identificar vibraciones libres de la respuesta estructural.

2. Aislamiento de singularidades causadas por cambios en el sistema

La Ecuación de movimiento de un sistema base excitado de un sólo grado de libertad, 1-dg, con rigidez variable como el mostrado en la Figura 1 está dada por la Ecuación (1)

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + c \frac{d}{dt} x(t) + k(t)x(t) = -m \frac{d^2}{dt^2} x_g(t), \quad (1)$$

donde $x = x_a - x_g$, m es la masa y $k(t)$ es la rigidez que puede cambiar por daños estructurales

$$k(t) = k_0 + \Delta_k \chi_{[t_c, \infty)}, \quad \Delta_k = k_1 - k_0. \quad (2)$$

Todos los parámetros del sistema son desconocidos.

De la Ecuación (1), la aceleración absoluta está dada por

$$\frac{d^2}{dt^2} x_a(t) = -\frac{c \frac{d}{dt} x(t) + k(t)x(t)}{m}. \quad (3)$$

Cuando la excitación es suficientemente suave, $x \in C^2(\mathbb{R})$. Luego, de la Ecuación (1), el cambio

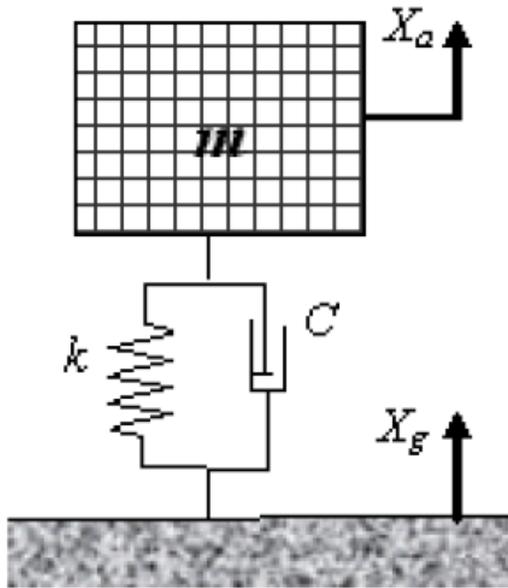


Figura 1: Sistema base excitado de un sólo grado de libertad 1-dg con rigidez cambiante

abrupto de k , dado por (2), aparecerá directamente en $\frac{d^2}{dt^2}x_a(t)$ como una discontinuidad aislada. Luego, esta discontinuidad será fácilmente detectada por la transformada de ondículas aún cuando sea muy pequeña en comparación con el amplitud media de la respuesta.

Otra dificultad surge cuando el sistema es excitado por un proceso aleatorio, lo cual sería una situación más realista. En este caso, la excitación no será suave, así que las derivadas de x en la Ecuación (3) podría tener discontinuidades en casi todo punto, por que las singularidades en la excitación son propagadas a través de el sistema y afecta la respuesta. Por lo tanto, la discontinuidad en la aceleración en $t = t_c$ no es aislada, i. e., podrían ser otras singularidades a. e. Por consiguiente, transformada de ondícula de la aceleración sería un conjunto de puntos agudos a. e., así que las picos originados por los cambios de sistema podrían no ser diferenciados.

3. Transformada de Ondículas

La transformada de ondícula esta bastante desarrollada en la literatura, pero en el caso particular de la descomposición de señales podemos citar el libro de Chui [7] y los trabajos de Vega [8] y [9].

3.1. Elección de la descomposición óptima

Consideremos la aceleración del sistema a_T como una señal con dos componentes a_s y a_k , la aceleración natural del sistema y la aceleración motivada a la perturbación k . Con a_s, a_k y $a_T \in L2[0, 1]$, de la cual han sido observados N valores regidos por la ecuación

$$a_{Ti} = a_k(t_i) + a_s(t_i), i = 1, \dots, N, \quad (4)$$

donde los nodos $\{t = (i-1)/N\}_i \subset [0, 1]$, en los cuales fueron obtenidas las observaciones de la señal, son equidistantes. El método de descomposición no-lineal de la señal estará basado en los desarrollos de ondículas.

Un problema asociado a los métodos de descomposición no lineal de señales basados en desarrollos de ondículas, consiste en la elección tanto de la ondícula que genere la base como de un cierto valor de umbral. En la mayoría de las metodologías propuestas, lo usual es fijar a priori ambos elementos, teniendo en cuenta propiedades matemáticas conocidas de estos bajo determinadas condiciones teóricas. En el método utilizado en este trabajo está basado en trabajo de Vega [9], el cual está fundamentado en el principio de contracción Garrote de Gao [10] y el principio de mínima descripción de Rissanen [1].

4. Detección del daño mediante la transformada de ondícula

El metodo propuesto fue desarrollado mediante simulaciones.

4.1. Análisis en simulaciones

La Ecuación (1) fue simulada por el método de Monte-Carlo en SciLab. Durante un intervalo de 5 seg con 100 nodos por segundo, para el caso en el cual no fue realizada ninguna perturbación, es decir, la rigidez se mantiene constante, $k_0 =$

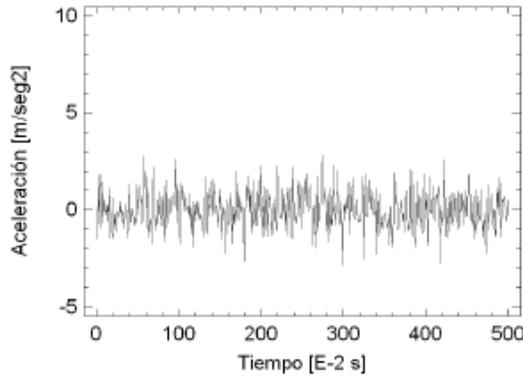


Figura 2: Aceleración absoluta sin perturbación

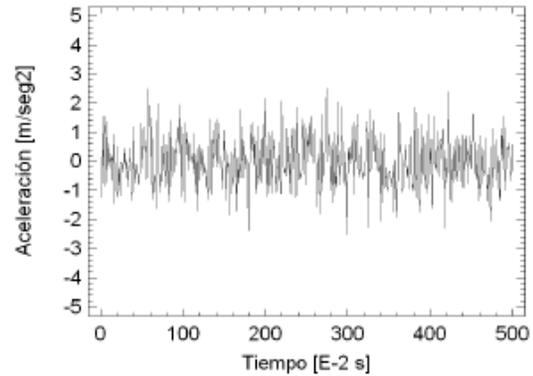


Figura 4: Aceleración absoluta con una perturbación aleatoria a los 1,5s

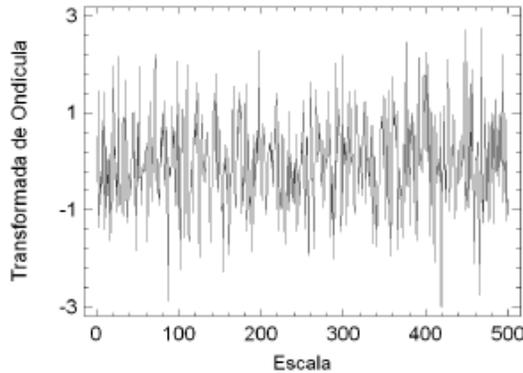
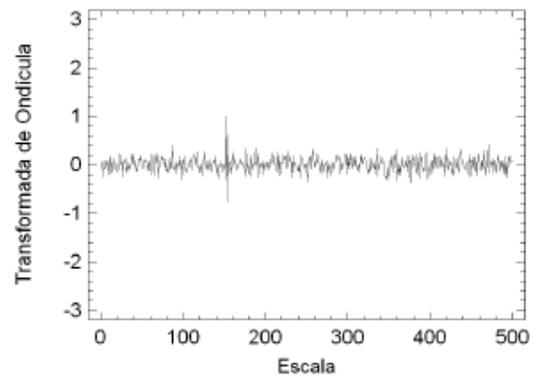


Figura 3: Transformada de ondicula de la señal dada en la Figura 2

Figura 5: Coeficiente T_k obtenidos por la separación

k_1 la aceleración obtenida esta representada en la Figura 2.

La transformada de ondicula obtenida de la señal de la Figura 2 está dada en la Figura 4.

La respuesta de aceleración bajo una excitación local aleatoria activada a los 1,5 s está graficada en la Figura 3.

Después de aplicar la transformada de ondicula a la señal dada en la Figura 3, fue aplicado el método propuesto para la separación de los coeficientes de ondiculas en $T_z + T_k$. Los coeficientes T_k obtenidos están en la Figura 5.

Fueron realizadas 500 réplicas de la simulación para cada valor de Δ_k (0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5, 0,6, 0,7, 0,9 y 1% de la amplitud sin perturbación) y el resto de

los parámetros de la Ecuación(1) fueron seleccionados aleatoriamente.

5. Resultados

En todos los casos en los cuales $\Delta_k \geq 0,5$ los resultados obtenidos fueron similares a los representados en las Figuras 2, 4, 3 y 5, en los cuales fue posible identificar la perturbación y estimar el instante de tiempo en el cual fue producida.

Para los valores pequeños de la perturbación los resultados están dados en la Tabla 1. En esta tabla observamos que el método propuesta disminuye radicalmente los falsos negativos reportados Hou y Hera [5].

Tabla 1: Porcentaje de perturbaciones identificadas, para amplitudes de la perturbación menores al valor crítico.

Δ_k	0,1	0,2	0,3	0,4
%	44	68	82	89

- [10] H. Y. Gao. (1998) Wavelet shrinkage denoising using the non – negative garrote. *Journal on Computation Graphics Statistics*, 7(4), 469 – 488.

6. Conclusiones

Con este trabajo se logró el desarrollo de un método automático, basado en la transformada de ondículas, para la separación de la señal de la aceleración natural del sistema dinámico que define una estructura de la señal de la aceleración ocasionada por una falla en la estructura. Esta separación permite identificar fallas estructurales en amplitud y tiempo de origen.

Referencias

- [1] J. Rissanen. (1978) Modelling by shortest data description. *Automatica*, 14:465 – 471.
- [2] G. Ghodrati Amiri y A. Asadi (2005) New method for simulation earthquake records by using adapted wavelet En *The 14th World Conference on Earthquake Engineering*, Beijing, China, octubre, WCEE.
- [3] M. Algaba, M. Solís, y P. Galvín (2010) Detección de daño en estructuras mediante la aplicación de la transformada Wavelet a su deflexión estática En *XVIII Congreso nacional de Ingeniería Mecánica*, España, Asociación Española de Ingeniería Mecánica.
- [4] A. Masuda, M. Noori, A. Sone, y Y. Hashimoto (2002) Wavelet-based health monitoring of randomly excited structures En *15th ASCE Engineering Mechanics Conference*, New York, USA, junio, ASCE.
- [5] Z. Hou y A. Hera (2002) Progress of phase II study of the ASCE health monitoring benchmark data using wavelet approach En *15th ASCE Engineering Mechanics Conference*, New York, USA, junio, ASCE.
- [6] R.O. Curadelli, J.D. Riera, D. Ambrosini y M.G. Amania (2008) Damage detection by means of structural damping identification *Engineering Structures*, 30, 3497–3504.
- [7] K. C. Chui. (1992) *An introduction to wavelets*. Academic Press, San Diego, CA.
- [8] C. E. Vega. (2003) *Aplicación de Técnicas Wavelet al Análisis de Series Temporales*. Tesis doctoral, Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, Granada, España, Octubre.
- [9] C. E. Vega (2009) Un método automático para la elección de la base de ondícula y la selección del umbral para la estimación de señales. *Revista Ingeniería UC*, 16 (1), abril, 32–39.

APÉNDICE C

Un método automático para la elección de la base de ondícula y la selección del umbral para la estimación de señales

Un método automático para la elección de la base de ondícula y la selección del umbral para la estimación de señales

Cristóbal E. Vega González*

MYCA, Instituto de Matemática y Cálculo Aplicado, Facultad de Ingeniería, Universidad de Carabobo, Valencia, Venezuela

Resumen.-

La contribución de este trabajo es la creación y el desarrollo de un procedimiento novedoso para la estimación de señales, procedimiento LDM-G. El procedimiento será desarrollado con detalles y consistirá en la implementación de algoritmos para la estimación de señales mediante la transformada de ondícula, con el uso del principio de longitud de descripción mínima para la selección simultánea y automática de la base de ondícula y del valor del umbral. Por medio de simulaciones, el procedimiento implementado fue comparado con las técnicas de umbral universal y SURE de Stein, donde la eficacia del procedimiento elaborado fue verificada mediante la estimación del error cuadrático medio.

Palabras clave: Ondículas, estimación de señales, principio de longitud de descripción mínima, técnica de contracción Garrote

An automatic method for wavelet basis election and threshold selection for signals estimation

Abstract.-

The contribution of this work is the creation and development of a novel procedure for signals estimation, procedure LDM-G. The procedure will be developed with details and will consist of algorithms implementation for signals estimation via wavelet transform, applying the minimum description length principle for simultaneous and automatic selection of wavelet base and threshold value. By means of simulations, the implemented procedure was compared with techniques of universal threshold and Stein's SURE, where the effectiveness of the elaborated procedure was verified by means of the estimation of mean square error.

Keywords: Wavelets, signals estimation, minimum description length principle, Garrote shrinkage technique

1. Introducción

Las funciones ondículas, también llamadas wavelet u onditas, son funciones que satisfacen ciertos requerimientos matemáticos deseables y que se usan para descomponer y, por tanto, representar a otras funciones. Diversos investigadores han contribuido en el desarrollo de las ondículas tanto en los aspectos teóricos como en los prácticos, entre otros investigadores se encuentran Daubechies, Donoho, Meller, Johnstone, Chui y Silverman ([1] [2], [3], [4], [5], [6] y [7]). El análisis de ondícula fue iniciado independientemente en diferentes áreas del conocimiento científico en los años ochenta, aunque los intercambios que se produjeron entre estas áreas, durante la última década del siglo XX, fueron conduciendo a la formalización de lo que hoy en día se entiende por análisis de ondícula.

La idea de expresar una señal, o una función, como superposición de funciones de una cierta base no es nueva, ha existido desde principios del siglo XIX, cuando Joseph Fourier descubrió que, superponiendo en una suma funciones senos y cosenos, podía representar funciones de una amplia clase.

Esta suma de funciones trigonométricas suele ser denominada desarrollo de Fourier de la función en cuestión y, como es sabido, proporciona una descomposición en componentes de frecuencia de dicha función. Estas componentes de frecuencia recogen el aporte de cada frecuencia a la variabilidad de la función sobre todo su intervalo de definición. Aunque la teoría desarrollada por Fourier ha sido y sigue siendo aplicada con éxito a diversos problemas, el paso del tiempo hizo aparecer situaciones prácticas en las que dicha teoría no proporcionaba una solución satisfactoria. La limitación que presenta el desarrollo de Fourier de una función viene dado por el carácter global de dicha descomposición, es decir, los comportamientos locales de la función en estudio, como discontinuidades, variaciones repentinas en un pequeño subintervalo, etc..., no quedan reflejadas en las componentes extraídas a través de dicho desarrollo, reflejándose esto en la práctica, al obtener desarrollos muy poco parsimoniosos de dichas funciones, es decir, con pocos elementos.

Si el objetivo es estimar una señal, bien sea por medio de su transformada o cualquier otra técnica estadística. Es de esperar que la estimación tenga la menor cantidad posible de coeficientes. Los desarrollos con pocos coeficientes, llamados en este contexto, desarrollos parsimoniosos son ideales para la disminución del orden de cómputo y de un menor

*Autor para correspondencia
correo-e: cvega@uc.edu.ve

gasto de memoria operativa. Como es sabido, si la señal tiene como característica local a una discontinuidad, esta discontinuidad no está reflejada en las principales frecuencias del desarrollo de Fourier. Luego un desarrollo de Fourier que refleje una característica local será largo, en algunos casos abarcará todas las frecuencias posibles; por lo cual es llamado poco parsimonioso.

Para superar esta limitación, en las últimas décadas se dedicó especial interés en buscar desarrollos de tipo Fourier pero que permitiesen recoger el comportamiento local de la función. Algunos de estos intentos consistieron en introducir modificaciones en el desarrollo de Fourier clásico (p.e transformada de Gabor) otros, como el análisis de ondícula, consistieron en sustituir las funciones trigonométricas por otro tipo de funciones (las funciones ondículas). En el análisis de ondícula para una función dada se obtiene una descomposición en componentes de frecuencias asociadas a subintervalos (contenidos en el intervalo de definición), con lo que cada componente estará asociada a una frecuencia o escala y a un índice de traslación relativo a dicho subintervalo.

Lo anteriormente expuesto justificaría ya la idoneidad del análisis de ondícula en el tratamiento con datos empíricos. No obstante es necesario añadir a lo anterior el hecho de que la eficiencia computacional de la transformada de ondícula (TW) en el tratamiento de datos es superior al de la transformada de Fourier. Por estas razones, la utilización en estadística del análisis de ondícula ha sido muy extendida en estos últimos años, dando lugar a nuevas metodologías que han abierto el ámbito de aplicación que tenía el análisis de Fourier clásico. En este sentido, la metodología para abordar un problema surgido en el ámbito del análisis de datos temporales será presentada, y un breve esbozo de esta metodología será dada a continuación.

En la mayoría de las ocasiones, las observaciones en la práctica de un cierto proceso que evoluciona en el tiempo pueden considerarse obtenidas como la superposición de dos componentes. Una, la señal que contiene la información objetivo y la otra componente, el ruido, que tiene un efecto perturbador y, por tanto, interfiere en la interpretación directa de las observaciones. Matemáticamente, se asume que la primera componente es de naturaleza determinística y la segunda, de naturaleza aleatoria. El problema estadístico que se plantea aquí es la estimación de la primera componente mencionada anteriormente o, equivalentemente, la eliminación (o separación) del ruido de las observaciones. Entre los antecedentes de este tipo de problemas está el trabajo de Bos y Hoogendam que minimizan los efectos de ruido y derivan la línea base en análisis de inyección de flujo mediante la TW [8], y Mao y colaboradores que exploran el uso de la TW para análisis cuantitativo por espectroscopía fotoacústica en estructuras de cloruro de polivinilo (PVC). Asimismo, en estudios comparativos de técnicas de procesamiento de señales para datos de sensores [9], Rattón et al muestran que las técnicas basadas en la TW generalmente tiene la mejor ejecución [10]. El trabajo de Jiménez et al. muestra una aplicación de la TW para la determinación de la

relación señal ruido de la voz [11], donde sólo usan el umbral Universal y la elección de la base wavelet se hace de forma empírica.

La herramienta novedosa en la metodología propuesta en este trabajo, es la utilización del Principio de Longitud de Descripción Mínima (LDM), conjuntamente con la contracción Garrote. A grandes rasgos, este principio es un criterio de selección de modelos propuesto y desarrollado por Rissanen [12] consistente en seleccionar, para unos datos dados, aquel modelo que proporcione una codificación (binaria) de la información contenida en los datos con menor longitud (número de bits). Dicho criterio fue inicialmente utilizado por Saito [13] en problemas de estimación de señales mediante desarrollos de ondículas, con objeto de resolver el problema de la selección simultánea de dos de los elementos que definen el estimador de una señal: el umbral y el tipo de ondícula. Saito, en trabajo uso la técnica de contracción Dura, que como ha sido probado por Donoho y Johnstone [5] y [14] no refleja bien los extremos agudos en las señales. La propuesta innovadora es utilizar el principio LDM conjuntamente con la técnica de contracción Garrote de Gao [15].

2. Estimación no-lineal de señales mediante análisis de ondícula

Una situación común en multitud de disciplinas científicas es el estudio de una magnitud a lo largo del tiempo. Matemáticamente, dicha magnitud viene representada por el concepto de función o señal; término éste que es más usual en ambientes de ingeniería. En algunos casos, el estudio de una señal se ha de llevar a cabo de manera empírica a través de la experimentación. Desafortunadamente, el estudio empírico de una señal hace que ésta sea imposible de conocer en todo el intervalo de definición y, por tanto, que tan sólo se disponga de una cantidad finita de observaciones, en ocasiones, igualmente espaciadas. Asimismo, las observaciones de la señal estarán alteradas por algún tipo de perturbación aleatoria, la cual será inherente al propio procedimiento de observación de la señal. El problema estadístico que abordaremos consistirá en la estimación de la señal a partir de un conjunto finito de observaciones.

Dada una señal $s : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, con $s \in L^2[0, 1]$, de la cual se han observado N valores regidos por la ecuación

$$y_i = s(t_i) + \varepsilon_i, i = 1, \dots, N, \quad (1)$$

donde los nodos $\{t = (i - 1)/N\}_i \subset [0, 1]$, en los cuales se han obtenido las observaciones de la señal, son equidistantes y $\{\varepsilon_i\}_i$ son variables aleatorias (vv.aa.) independientes e idénticamente distribuidas (iid), con $E[\varepsilon_i] = 0$ y $Var[\varepsilon_i] = \sigma^2$. En la Ecuación (1), cada v.a. y_i representa el valor observado de la señal en t_i y cada v.a. ε_i modeliza la componente perturbadora inherente al procedimiento de observación de la señal. El objetivo será estimar $s(t)$ en cualquier $t \in [0, 1]$ y, sobre todo, estimar los valores de s en los nodos de observación t_i , en ambos casos, a partir de la señal empírica y_i . El método de estimación no-lineal de la señal estará basado en los desarrollos de ondículas.

Un problema asociado a los métodos de estimación no lineal de señales basados en desarrollos de ondículas, consiste en la elección tanto de la ondícula que genere la base como de un cierto valor de umbral. En la mayoría de las metodologías propuestas, lo usual es fijar a priori ambos elementos, teniendo en cuenta propiedades matemáticas conocidas de estos bajo determinadas condiciones teóricas. En el método desarrollado en este trabajo, el uso del principio de Longitud de Descripción Mínima (LDM, MDL en inglés) permitirá incorporar dicha selección en el propio procedimiento de estimación. El Principio LDM define un criterio que, bajo condiciones débiles, permite una selección simultánea tanto del umbral como de la ondícula. La meta de este trabajo es presentar la elaboración de un procedimiento de estimación no-lineal basado en el principio de LDM y en la técnica de contracción Garrote diseñada por Gao [15]. Este procedimiento, será denotado LDM-G y tiene la finalidad de eliminar ruido en forma eficiente y automática. Además, el procedimiento propuesto será comparado con el procedimiento de Stein [16], en el caso de datos simulados.

3. Metodología de estimación de señales mediante ondícula

Dentro de la familia de métodos no-lineales de estimación de una señal, en los trabajos de Donoho y Johnstone [5] y [14] se introdujeron los métodos basados en análisis de ondícula. En concreto, estos métodos de estimación están basados en los posibles desarrollos de ondículas de la señal teórica en estudio. Entre los hechos que han motivado el uso de ondículas para estimar señales pueden señalarse, por ejemplo, el que un amplio espacio de señales admiten desarrollos de ondículas parsimoniosos y la alta eficiencia computacional en el tratamiento de datos proporcionada por la transformada ondícula discreta (TWD).

El procedimiento de estimación está descrito de forma resumida en el siguiente algoritmo.

Algoritmo 1 (Esquema del procedimiento general de estimación ondícula de una señal)

Entrada: Señal empírica $y = (y_1, \dots, y_N)$.

Salida: Estimación de la señal \tilde{s}^τ .

Paso 1 Aplicar TWD al vector y , para determinar \tilde{d} .

La TWD W , para una base seleccionada es aplicada a la señal y , $W(y)$ de esta forma obtenemos los coeficientes ondícula \tilde{d} . La base ondícula es escogida de acuerdo a varios factores que incluyen el costo computacional y la capacidad de comprimir la energía L_2 de la señal en pocos coeficientes muy grandes. Si una base ondícula apropiada es escogida, una contracción remueve el ruido sin eliminar la señal. Así la elección de la base es importante en el procedimiento general de estimación de señales. $W(y) = \tilde{d}$.

Paso 2 Aplicar la transformación de contracción \tilde{d} a para obtener \tilde{d}^τ .

La transformación de contracción τ extrae los coeficientes que realmente contienen la información acerca

de la señal desconocida s y desecha los otros. La idea es que la señal verdadera tiene una expansión ondícula parsimoniosa. Al decidir cuales coeficientes son los que pertenecen a la expansión, estos pueden ser estimados y desechados los otros. Como un resultado, la transformación de contracción usada y la selección del umbral son cruciales para el procedimiento. $\tau(\tilde{d}) = \tilde{d}^\tau$.

Paso 3 Reconstruir \tilde{s}^τ usando la inversa de la TWD aplicada a \tilde{d}^τ . $InvTW(\tilde{d}^\tau) = \tilde{s}^\tau$.

En resumen, el procedimiento general de estimación no lineal de la señal s , en la Ec. (1) depende de la selección de tres factores:

1. La ondícula que genera la base.
2. El tipo de contracción τ .
3. El umbral que determine a τ .

4. Selección de la base

La selección de la base de ondícula que se acople a los datos desempeña un papel dominante en el procedimiento. Además, hay una librería muy grande de bases de ondícula (viz, ondícula de Harr, ondícula de Shannon presentada por Lemarié y Meyer [17], las ondículas de Daubechies [18], coiflet y symmlets de Beylkin, Coifman y Rokhlin [19]). El problema de la selección de la base de ondícula más apropiada para la descripción de la señal está motivado por la variedad de bases de ondículas disponible. Un método clásico de elección de la base es ejecutar una búsqueda exhaustiva en un sistema de secuencias de los filtros y seleccionar la ondícula con coste mínimo. La ondícula que represente a la señal en el modo más parsimonioso es la llamada ondícula de coste mínimo. Pero este método es costoso a tiempo y memoria de cómputo. De todos los métodos de compresión de señales, solamente el principio LDM puede elegir automáticamente la base apropiada de ondícula, con un costo mínimo. Una explicación detallada de las diversas bases ondículas está en el trabajo de Vega [20].

5. Transformaciones de contracción

A continuación serán presentados los tipos de transformaciones de contracción más utilizadas en la estimación wavelet no-lineal de una señal. El denominador común a todas ellas es que, al margen de su forma matemática que aquí expondremos, todas vienen determinadas por un valor de umbral.

Donoho y otros autores proponen dos tipos diferentes de transformaciones de contracción, a saber, dura y suave (ver por ejemplo [3] y [14]). Por otro lado, Gao desarrolla el tipo denominado contracción Garrote [15].

5.1. Contracción Dura

Una contracción Dura es una transformación que persigue anular todos los coeficientes ondícula que están bajo un cierto umbral $\lambda > 0$ dado. La contracción Dura que depende de λ será denotada por τ_λ^D . Así es la transformación dada por

$$\tau_\lambda^D = d \cdot \mathfrak{N}_{(0,\infty)}(|d| - \lambda), \quad \forall d \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

donde \mathfrak{N}_A es la función característica de un conjunto A .

5.2. Contracción Suave

Una contracción Suave reduce linealmente el valor de los coeficientes ondícula superiores a un cierto umbral $\lambda > 0$ y anula los restantes. La contracción Suave que depende de λ será denotada por τ_λ^S . Luego $\tau_\lambda^S(d) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es la transformación definida por

$$\tau_\lambda^S = \text{sign}(d) (|d| - \lambda)_+, \quad \forall d \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

donde

$$\text{sign}(d) = \begin{cases} 1 & \text{si } d \geq 0 \\ -1 & \text{si } d < 0 \end{cases}, \quad (h)_+ = \max(0, h).$$

5.3. Contracción Garrote

La contracción Garrote, para el umbral $\lambda > 0$ fijado, $\tau_\lambda^G(d) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vendría dada por

$$\tau_\lambda^G = d \left(1 - \left(\frac{\lambda}{|d|} \right)^2 \right) \cdot \mathfrak{N}_{(0,\infty)}(|d| - \lambda), \quad \forall d \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

El costo operacional de las contracciones dadas en las Ecs. (2), (3) y (4) es $O(N)$.

Mediante estudios de simulación, Donoho y Johnstone [3] y [5] concluyen que una contracción Dura introduce discontinuidades y muchas oscilaciones en la señal estimada, pero presenta menor error cuadrático medio (EMC) que una contracción Suave. Mientras que una contracción Suave tiende a generar señales estimadas más regulares, a costa de un mayor ECM. En las aplicaciones, la contracción dura generalmente reproduce mejor las alturas de los picos y las discontinuidades, pero a expensas de la suavidad visual.

Por su parte, la contracción garrote elimina los coeficientes pequeños y reduce los coeficientes grandes mediante una función no-lineal. El objetivo esta contracción es reproducir lo mejor posible los picos y las discontinuidades sin sacrificar la regularidad de la señal estimada. Gao [15] prueba que la estimación proporcionada con la contracción Garrote presenta la misma tasa de convergencia asintótica que las estimaciones con contracciones Suave y Dura, respectivamente. Gao realizó pruebas con simulaciones de muestras finitas, en las que la contracción garrote generalmente proporcionó un ECM menor que la contracción suave y una menor sensibilidad a perturbaciones pequeñas en los datos que la contracción dura.

Motivados por los resultados de Gao [15], este trabajo propone utilizar la contracción Garrote conjuntamente con el principio LDM como procedimiento para la estimación de señales y la comparación con los otros procedimientos de estimación de señales mediante simulaciones.

6. Selección del umbral

Como ya se ha comentado antes, la selección del valor de umbral $\lambda > 0$, que determine la contracción, es una fase decisiva en la estimación ondícula no-lineal de una señal. Por ejemplo, si el umbral es demasiado pequeño, entonces la señal estimada incluiría el ruido como parte de ella, en este caso se dice que la señal estimada tenderá a estar sobre-ajustada a los datos experimentales. Si el umbral es demasiado grande, la señal estimada no incluiría características propias de la señal original, lo cual se define como señal estimada estará sub-ajustada a los datos experimentales. Por todo ello, en la presente sección abordaremos el problema de la selección de un valor óptimo de umbral.

6.1. Umbral Universal

Cuando se aplica una contracción a los coeficientes ondícula, el valor del umbral elegido, para el Paso 2 del procedimiento general de estimación, debería depender de la varianza del ruido. Por esta razón, Donoho propone como valor de umbral lo que dicho autor denomina como umbral universal [3]. Para un vector N -dimensional el umbral universal λ^U viene dado por

$$\lambda^U = \widehat{\sigma}_e \sqrt{2 \log N} \quad (5)$$

donde $\widehat{\sigma}_e$ es una estimación de la desviación típica del ruido, Donoho y otros proponen una estimación robusta de desviación típica del ruido, σ_e , [4] y [5], basada en los coeficientes ondícula estimados de mayor resolución y definida por

$$\widehat{\sigma}_e = \frac{\text{median} \left\{ \left| \bar{d}_{j-1,k} \right| \right\}_{k=0,\dots,2^j-1}}{0,6745}$$

6.2. Umbral SURE

Donoho y Johnstone proponen utilizar el método SURE (Stein Unbiased Risk Estimation) para el problema de la selección de umbral [5]. El método propuesto está basado en la estimación insesgada del riesgo l_2 formulada por Stein [16]. Este es un algoritmo $O(N \log N)$. Una explicación detallada del método SURE puede encontrarse en Antoniadis [21].

En el caso de interés, dado por el procedimiento general de estimación ondícula de una señal, $\bar{\mathbf{d}} = \left((\bar{d}_{j,k})_{k=0,\dots,2^j-1} \right)_{j=1,\dots,J}$, las estimaciones insesgadas de riesgo l_2 están dadas por

$$SURE(\bar{\mathbf{d}}, \lambda) = S \sigma^2$$

con S dado por

$$S = \left(2^j + \sum_{|\bar{d}_{j,k}| < \lambda} (\bar{d}_{j,k})^2 - 2 \cdot \# \{ (j,k) : |\bar{d}_{j,k}| < \lambda \} \right) \quad (6)$$

para la contracción Duro,

$$S = \left(2^j + \sum_{|\tilde{d}_{j,k}| < \lambda} \left(\min \left\{ |\tilde{d}_{j,k}|, \lambda \right\} \right)^2 - 2 \cdot \# \left\{ (j, k) : |\tilde{d}_{j,k}| < \lambda \right\} \right) \quad (7)$$

para la contracción Suave,

$$S = \left(2^j + \sum_{|\tilde{d}_{j,k}| < \lambda} (\tilde{d}_{j,k})^2 - 2 \cdot \# \left\{ (j, k) : |\tilde{d}_{j,k}| < \lambda \right\} + (\lambda^4 - \lambda^2) \sum_{|\tilde{d}_{j,k}| \geq \lambda} \frac{1}{(\tilde{d}_{j,k})^2} \right) \quad (8)$$

para la contracción Garrote. Con la notación usual, $\#A$ es el cardinal de un conjunto A . El umbral SURE queda definido por

$$\lambda^{\text{SURE}} = \arg \left\{ \min_{0 \leq \pi \leq \lambda^*} \text{SURE}(\tilde{\mathbf{d}}, \lambda) \right\}. \quad (9)$$

Los detalles de la deducción de las Ecs. (6), (7), (8) y (9) están en el trabajo de Vega [20].

6.3. Umbral LDM

Rissanen definió el principio de Longitud de Descripción Mínima (LDM) como un criterio de selección óptima de modelos para un conjunto de datos dados [12]. La idea del principio LDM consiste en seleccionar aquel modelo, dentro de un conjunto de modelos (entre los que se supone que se encuentra el verdadero modelo de los datos), que proporcione una descripción lo más corta posible de los datos. Matemáticamente, la longitud de la descripción de los datos proporcionada por un modelo viene cuantificada a través de lo que se conoce con el nombre de función de longitud de descripción, LD , la cual estará definida más adelante. De esta forma, la aplicación del principio LDM consiste en minimizar LD dentro del conjunto de modelos considerado, siendo el modelo elegido aquel en el que el valor de LD es mínimo.

Para la aplicación del principio LDM, inicialmente se fijarán un tipo de contracción τ (Dura, Suave o Garrote) y un conjunto de ondículas indexadas a través del conjunto de índices M , de forma que cada ondícula de dicho conjunto será designada a través de su correspondiente índice $m \in M$.

Dada la señal 'y' de valores observados de la Ec. (1) de Sección 2 para una señal s que se desea estimar. Fijada una ondícula $m \in M$, sea

$$\tilde{\mathbf{d}}^{(m)} = W_{(m)}y$$

el vector de coeficientes estimados mediante la TWD para la ondícula m , donde estamos denotando con $W_{(m)}$ a la matriz asociada a la TWD para la ondícula m .

Dados una ondícula $m \in M$ y un umbral $\lambda \geq 0$, se define

$$l_{(\lambda, m, y)} = \# \left\{ \tilde{d}_{j,k}^{(m)} : |\tilde{d}_{j,k}^{(m)}| > \lambda \right\}$$

donde $\{\tilde{d}_{j,k}^{(m)}\}$ son los coeficientes ondícula del vector $\tilde{\mathbf{d}}^{(m)}$. Nótese que $l \in \{0, 1, \dots, N_d\}$, siendo N_d el número de coeficientes ondícula no nulos de $\tilde{\mathbf{d}}^{(m)}$, ya que, como puede comprobarse, $N_d = l_{(0, m, y)}$ es el valor máximo que puede alcanzar l . A su vez, esto significa además que $N_d = N_d(m, y)$ depende de la ondícula m y de la señal empírica y , con $0 \leq N_d < N$.

Para una ondícula m y un umbral λ , el vector de coeficientes estimados después de la contracción τ, λ , $\tilde{\mathbf{d}}_{l_{(\lambda, m, y)}}^{(m)\tau}$, estará definido por

$$\tilde{\mathbf{d}}_{l_{(\lambda, m, y)}}^{(m)\tau} = \tau_\lambda(\tilde{\mathbf{d}}^{(m)}).$$

Teniendo en cuenta la definición de $l_{(\lambda, m, y)}$, el vector tendrá sólo l coordenadas ondículas no nulas.

Puesto que λ determina el valor de $l_{(\lambda, m, y)}$, para una ondícula m fijada, también es fácil probar que el umbral λ podría ser obtenido a partir de l . Al denotar por $\delta^{(m)}$ al vector los valores absolutos de los coeficientes ondícula no-nulos ordenados en forma decreciente, resulta que $\lambda_{(l, m, y)} = \delta_{l+1}^{(m)}$.

Con el objeto de no complicar la exposición, a partir de ahora no aparecerá de manera explícita la dependencia de la señal empírica 'y' en la notación de los valores N_d , $l_{(\lambda, m)}$ y $\lambda_{(l, m)}$.

A continuación, fijados una ondícula m y un nivel de umbral $l \in \{0, \dots, N_d\}$, será analizada la distancia cuadrática $\|\tilde{\mathbf{d}}^{(m)} - \tilde{\mathbf{d}}_l^{(m)\tau}\|^2$ para cada uno de los tipos de contracción estudiados, siendo en todos los casos el estimador no-lineal de los coeficientes de la forma siguiente:

$$\tilde{\mathbf{d}}_l^{(m)\tau} = \tau_{\delta_{l+1}^{(m)}}(\tilde{\mathbf{d}}^{(m)}).$$

De donde se deduce que

$$\|\tilde{\mathbf{d}}^{(m)} - \tilde{\mathbf{d}}_l^{(m)\tau}\|^2 = \begin{cases} \sum_{i=l+1}^{N_d} (\delta_i^{(m)})^2 \\ \sum_{i=l+1}^{N_d} (\delta_i^{(m)})^2 + l(\delta_{l+1}^{(m)})^2 \\ \sum_{i=l+1}^{N_d} (\delta_i^{(m)})^2 + \sum_{i=1}^l \frac{(\delta_{i+1}^{(m)})^2}{(\delta_i^{(m)})^2} \end{cases},$$

para las contracciones Dura, Suave y Garrote respectivamente.

Seguidamente, una función que cuantifique la energía residual existente entre la estimación lineal y la estimación no-lineal de la señal será definida, para un tipo de contracción fijado a priori. Esta función será denominada función de energía residual y vendrá dada por

$$\text{fer}(l, m, y) = N \log \left(\left\| \tilde{\mathbf{s}}^{(m)} - \tilde{\mathbf{s}}^{(m)\tau} \right\| \right), \\ \forall m \in M, \forall l \in \{0, 1, \dots, N_d\},$$

donde $\tilde{s}^{(m)} = W_{(m)}^T \tilde{d}^{(m)}$ y $\tilde{s}_l^{(m)\tau} = W_{(m)}^T \tilde{d}_l^{(m)\tau}$ definen las estimaciones lineal y no-lineal de la señal, respectivamente, obtenidas a partir de la señal empírica y.

Como puede comprobarse, la función que caracteriza la energía residual adopta las siguientes formas de la Ec. (10) para las contracciones Dura, Suave y Garrote respectivamente

$$\text{fer}^\tau(l, m, y) = \begin{cases} \frac{N}{2} \log \left(\sum_{i=l+1}^{N_l} (\delta_i^{(m)})^2 \right) \\ \frac{N}{2} \log \left(\sum_{i=l+1}^{N_l} (\delta_i^{(m)})^2 + l (\delta_{l+1}^{(m)})^2 \right) \\ \frac{N}{2} \log \left(\sum_{i=l+1}^{N_l} (\delta_i^{(m)})^2 + \sum_{i=1}^l \frac{(\delta_{i+1}^{(m)})^2}{(\delta_i^{(m)})^2} \right) \end{cases} \quad (10)$$

En general, para una ondícula dada m , podemos afirmar que $\text{fer}(\lambda, m, y)$ es una función no creciente en λ .

Seguidamente, será definida una función de penalización del número de coeficientes ondículas no-nulos del estimador $\tilde{d}_l^{(m)\tau}$, dado por l . Consideraremos la función de penalización propuesta por Saito [13] y dada por

$$\text{fp}(l) = l \frac{3 \log N}{2}$$

Finalmente, la función de longitud de descripción podrá ser definida mediante

$$LD(l, m, y) = \text{fp}(l) + \text{fer}(l, m, y).$$

La aplicación del principio LDM consiste en la selección óptima de la ondícula $m^* \in M$ y del nivel de umbral l^* , a los que nos referiremos con $(l^*, m^*) = LDM(y, M)$, de manera que

$$LDM(y, M) = \min_{m,l} LD(l, m, y) \quad (11)$$

El valor de umbral óptimo para el criterio LDM será el asociado a l^* con la ondícula m^* .

Obsérvese que el método LDM, dado por la Ec (11) es el único que no solamente selecciona un valor de umbral, sino también una ondícula. Además, este método no requiere una estimación previa del nivel de ruido, como ocurre en el resto de los métodos de selección de umbral expuestos. Téngase en cuenta que los conjuntos de índices en los que varía LD son finitos, para la señal empírica y fijada. Esto significa que, desde un punto de vista computacional, la eficiencia del criterio LDM es como máximo $O(N \times \#M)$.

7. Procedimiento LDM-G

El método propuesto en este trabajo es un procedimiento basado en la combinación del principio LDM, dado en la Ec. (11), de la Sección 6 para la selección automática de la ondícula m y del valor de umbral λ con la transformación de contracción Garrote, dado en la Ec. (4) de la Sección 5 de este trabajo. El procedimiento será denotado por LDM-G y

es el aporte novedoso a la solución del problema, con especial interés en la estimación de señales. Por lo establecido en las Secciones 5 y 6 de este trabajo, el coste computacional del procedimiento plantado es a lo sumo de $O(N \times \log \#M)$.

El objetivo del resto del trabajo es analizar el procedimiento LDM-G, con la finalidad de validarlo estadísticamente. Este procedimiento LDM-G será comparado con otros procedimientos de estimación mediante su aplicación a datos simulados. En el estudio comparativo del procedimiento de estimación LDM-G fueron considerados los tres tipos de contracciones (Dura, Suave y Garrote) combinadas con el método de selección de umbral y el principio LDM. Así, en este trabajo fueron examinados los siguientes procedimientos de estimación no-lineal de señales: LDM-D, LDM-S, LDM-G

Los procedimientos LDM-D y LDM-S han sido ya analizados en Saito [13], quien en su trabajo no consideró a la transformación de contracción Garrote. Este trabajo está centrado en la propuesta y en el análisis del procedimiento LDM-G, para la estimación de señales via ondículas. El procedimiento propuesto es consistente con la teoría de Rissanen [12], porque es un método de estimación donde la longitud de descripción del modelo estimado depende de la cantidad de parámetros a estimar y del error de la estimación.

Adicionalmente, los procedimientos desarrollados han sido comparados con el procedimiento SUREShrink para la selección del umbral y la técnica exhaustiva que presentan Donoho y Johnstone [5] al aplicar SURE para la selección de la base, que ya está implementado en los programas estadísticos especializados.

8. Estudio en simulaciones

Se consideró un conjunto $C = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ de señales simuladas que presentan discontinuidades, picos y comportamiento variable en el dominio de frecuencias. Se evaluaron cada una de estas señales sobre 256 nodos (o muestras) igualmente espaciados del intervalo $[0, 1]$, dando así lugar a las señales discretas.

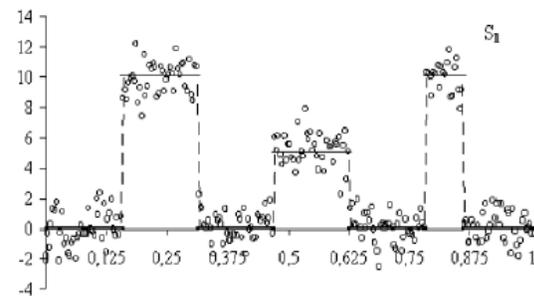
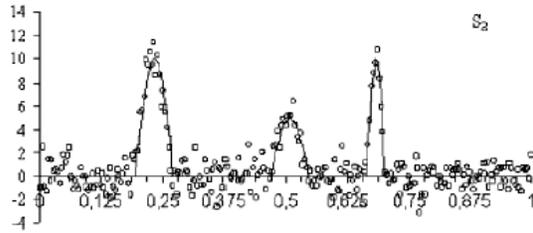
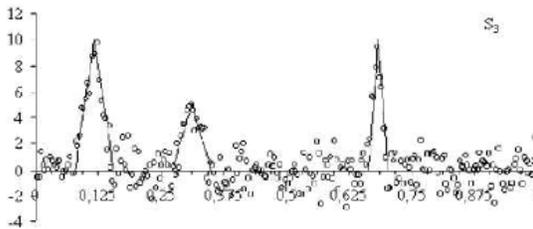
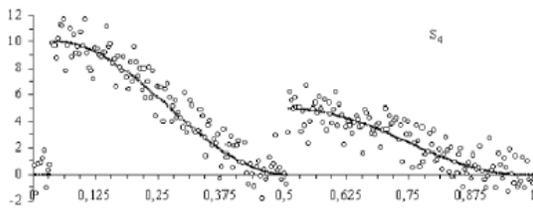
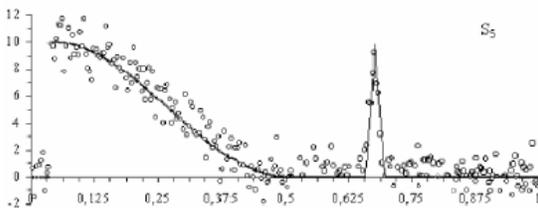


Figura 1: Una realización de una réplica con ruido de la señal s_1

Figura 2: Una realización de una réplica con ruido de la señal s_2 Figura 3: Una realización de una réplica con ruido de la señal s_3 Figura 4: Una realización de una réplica con ruido de la señal s_4 Figura 5: Una realización de una réplica con ruido de la señal s_5

La relación señal-ruido (S/R) viene dada por el cociente de la estimación de la desviación de la señal $\hat{\sigma}_s$ entre la estimación de la desviación del ruido $\hat{\sigma}_e$ de estos valores, así

$$S/R = \frac{\hat{\sigma}_s}{\hat{\sigma}_e}$$

A cada una de las señales del conjunto C se le generaron 300 réplicas por la adición de ruido blanco, en forma tal que la relación señal ruido fuese 5, a las cuales se les aplicó el procedimiento arriba descrito para tratar de estimar la señal. Un ejemplo de una de las réplicas de cada señal están representadas en la Figuras 1, 2, 3, 4 y 5.

Tabla 1: Promedio de los ECM entre las señales simuladas y de sus estimaciones para cada uno de los procedimientos de estimación considerados.

procedimiento	Señal				
	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
Ninguno	0.0332	0.0334	0.0342	0.0341	0.0339
SURE	0.0361	0.0277	0.0347	0.0461	0.0335
Universal Exhaustiva	0.0362	0.0334	0.0339	0.0339	0.0337
LDM-G	0.0124	0.0268	0.0312	0.0168	0.0205
LDM-D	0.0131	0.0272	0.0311	0.0208	0.0303
LDM-S	0.0295	0.0419	0.0456	0.0261	0.0307

Los resultados obtenidos de la estimación del error cuadrático medio (ECM) de las señales simuladas y sus estimaciones están resumidos en la Tabla 1. Donde puede observarse que los procedimientos que usan el principio LDM dan menor ECM que los procedimientos estándar SURE y Universal Exhaustiva. El procedimiento LDM-G da menor ECM que los procedimientos LDM-D y LDM-S, con la salvedad de la señal s_1 , que por ser una onda cuadrada, ver Figura 1, el procedimiento LDM-D genera mejores resultados. En el caso de las señales s_2 y s_3 con picos agudos, Figuras 2 y 3, el procedimiento LDM-S tiende a sobre regular la señal, lo que se produce la desaparición en las estimaciones de los valores extremos de la señal original, y genera así un incremento significativo del valor de ECM.

9. Conclusiones

De los resultados obtenidos pueden extraerse las siguientes conclusiones:

1. Los procedimientos que permiten elegir tanto el umbral como la base ondícula por el principio de LDM (LDM-G, LDM-D y LDM-S) proporcionan, en general, una señal estimada de mayor precisión en todos los casos, que los procedimientos SURE y Universal Exhaustiva.
2. En la mayoría de los casos, la contracción garrote presenta un menor ECM que las contracciones dura y suave.
3. El método LDM-G propuesto permite una estimación eficaz de las señales usuales de los procesos estocásticos obtenidos en los laboratorios de Ingeniería. Es un método teóricamente de bajo costo computacional y que para la selección tanto del valor del umbral como de la base ondícula no necesita la estimación de la desviación típica del ruido de la señal.
4. En esta trabajo ha sido propuesto y desarrollado un procedimiento automático para la elección de la base ondícula y la elección del umbral en la estimación de señales mediante la contracción Garrote, procedimiento LDM-G. Mediante la revisión teórica fue verificada

la importancia de los aspectos a considerar en la estimación de señales mediante ondículas, fueron implementados los diversos procedimientos de estimaciones de señales por el principio LDM, donde se determinó el orden de cómputo teórico de los procedimientos. Mediante simulaciones se comprobó que el procedimiento propuesto e implementado, LDM-G, mejoró los resultados obtenidos con los otros procedimientos preexistentes.

Operativa, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada, Granada, España, Octubre 2003.

- [21] A. Antoniadis. Wavelets in statistics: a review (with discussion). *Journal of the Italian Statistical Society*, 6(2):97 – 138, 1999.

Referencias

- [1] I. Daubechies. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41(1):906 – 966, 1988.
- [2] I. Daubechies, A. Grossmann, and J. Reigner. An integral transform related to quantization II: Some mathematical properties. *Journal of Mathematical Physics*, 24:239 – 243, 1983.
- [3] D. Donoho. Different perspectives on wavelets. In I. Daubechies, editor, *Symposia in Applied Mathematics*, volume 47, pages 173 – 205, Providence, R.I., 1993. American Mathematical Society.
- [4] D. Donoho, S. Mallat, and R. Von Sachs. Estimating covariances of locally stationary processes: consistency of best basis methods. In *Time – Frequency and Time – Scale Symposium*, Paris, France, 1996.
- [5] D. Donoho and I. M. Johnstone. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81:425 – 455, 1994.
- [6] K. C. Chui. *An introduction to wavelets*. Academic Press, San Diego, CA., 1992.
- [7] B. W. Silverman. Wavelets in statistics: beyond the standard assumptions. *Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A*, 357:2459 – 2473, 1999.
- [8] M. Bos and E. Hoogendam. Wavelet transform for the evaluation of peak intensities in flow-injection analysis. *Analytical Chemical Acta*, 267(1):73 – 80, 1992.
- [9] J. Mao, P. Sun, Z. Pan, Q. Su, and Z. Maosen. Wavelet analysis on photoacoustic spectra of degraded PVC. *Fresenius Journal Analytical Chemical*, 361(2):140 – 142, 1998.
- [10] L. Rattón, T. Kunt, T. McAvoy, T. Fuja, R. Cavicchi, and S. Semancik. A comparative study of signal processing techniques for clustering microsensor data (a first step towards an artificial nose). *Sensors and Actuators, B*, 41:105 – 120, 1997.
- [11] C. Jimenez, J. A. Díaz, R. Shrivastav, H. Rothman, and P. Del pino. Determinación de la relación señal ruido de la voz utilizando la transformada wavelet. *Ingeniería UC*, 12(1):7 – 16, 2005.
- [12] J. Rissanen. Modelling by shortest data description. *Automatica*, 14:465 – 471, 1978.
- [13] N. Saito. Simultaneous noise suppression and signal compression using a library of orthonormal bases and the minimum description length criterion. In E. Fofoula Georgiou and P. Kumar, editors, *Wavelets in geophysics*, New York, 1994. Academic Press.
- [14] D. Donoho and I. M. Johnstone. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *Journal of the American Statistical Association*, 90:1200 – 1234, 1995.
- [15] H. Y. Gao. Wavelet shrinkage denoising using the non – negative garrote. *Journal on Computation Graphics Statistics*, 7(4):469 – 488, 1998.
- [16] C. M. Stein. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. *Annals of Statistics*, 9(1):1135 – 1151, 1981.
- [17] P. Lemarié and Y. Meyer. Ondelettes et bases hilbertiennes. *Revista Matemática Iberoamericana*, 2:1–18, 1986.
- [18] I. Daubechies. Ten lectures on wavelets. In *CBMS - NSF regional conference series in applied mathematics*, volume 61, Philadelphia, 1992. SIAM.
- [19] G. Beylkin, R. R. Coifman, and V. Rokhlin. Fast wavelet transforms and numerical algorithms. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 44:141 – 183, 1991.
- [20] C. E. Vega. *Aplicación de Técnicas Wavelet al Análisis de Series Temporales*. Tesis doctoral, Departamento de Estadística e Investigación

APÉNDICE D

Rutinas implementadas en SCILAB para el cálculo de la potencia eléctrica utilizando transformada wavelet.

Programa Principal “potenciawavelet.sce”

```
clear
clc
clf()

//Cargando la libreria de Funciones Wavelet
getf('FuncionesWavelet.sci')

//Obteniendo la dirección de los archivos de datos de tensión y corriente
//los archivos de datos *.txt deben tener los datos en columnas
direccion=xgetfile();
[datos p]=fscanfMat(direccion);
t=datos(:,1);
vt=datos(:,2);
it=datos(:,3);
t=t';vt=vt';it=it';

N=floor( log( length(t) )/log(2) );

//Interfaz que solicita el sistema Daubechie a utilizar y el nivel de
//descomposición deseado.
labels=["Sistema Daubechie";"Nivel"];
[ok,daub,nivel]=getvalue("Indique Sistema Daubechie y Nivel de Descomposición",...
    labels,list("vec",1,"vec",1),["1";"1"]);

if nivel>N then
    nivel=N;
    disp('Ud exedió el maximo nivel de descomposición')
    disp('por lo tanto se utilizó nivel=')
    disp(N)
    disp('que es el maximo nivel de descomposición para esta data')
end

if daub>8 then
    daub=8;
    disp('Ud exedió el maximo sistema Daubechie programado')
    disp('por lo tanto se utilizó Daubechie8')
end

//Vector wavelet de la señal de tensión
[Vw,L]=descomposicion(vt,daub,nivel);
Vrms=sqrt( sum( Vw.*Vw )/(2^N) )

//Vector wavelet de la señal de corriente
[Iw,L]=descomposicion(it,daub,nivel);
Irms=sqrt( sum( Iw.*Iw )/(2^N) )
```

```

//Potencia activa
P=(1/(2^N))*sum(Vw.*Iw)
//Transformada de Hilbert. Utilizada para obtener un voltaje en cuadratura
x=fft(vt);
n=length(vt);
h=zeros(1,n);
h(1)=1;h(n/2+1)=1;
for k=2:n/2
    h(k)=2;
end;
H=x.*h;
X=ifft(H);
xh=X(1:n);

vt90=imag(xh);
[Vw90,L]=descomposicion(vt90,daub,nivel);
Q=(1/(2^N))*sum(Vw90.*Iw), S=Vrms*Irms, Fp=P/S

plot(t,vt,'k',t,it,'b',t,vt90,'g')
legends(['v(t)';'i(t)';'vt90(t)'],[1,2 3],opt="ur")
xlabel('Tiempo','Amplitudes')

```

Librería de Funciones Wavelet en SCILAB, “ FuncionesWavelet.sci ”
--

Para este fin, se utilizó una librería de funciones wavelet en MATLAB publicada por Faundez P. y Fuentes A. en su tesis “*Procesamiento Digital de señales acústicas utilizando wavelets*”. Dicha Librería fue la base para completar la construcción de la librería de FUNCIONES WAVELET EN SCILAB.

```

//-----
//-----SUBMUESTREAR-----
//-----
//Función que elimina todos los elementos de índice impar
//pertencientes al vector X. La longitud de X disminuye
//a la mitad o a la mitad menos 1/2, dependiendo si la
//longitud original es par o impar.
function a=submuestrear(x)
[lhs,rhs]=argn(0)
if (rhs == 0)
    error('No has ingresado la señal de entrada');
end

[filas,columnas]=size(x);

```

```

    if fila > columna
        x=x'
    end
L=length(x);
a=x(:,2:2:L);
endfunction
//-----
//-----SUPERMUESTREAR-----
//-----
//Función que inserta ceros entre los elementos del
//vector X, aumentando la longitud del vector al
//doble más uno.
function y=supermuestrear(x)
[lhs,rhs]=argn(0)
    if (rhs == 0)
        error('No has ingresado la señal de entrada');
    end

[filas columnas]=size(x);
    if filas > columnas
        x=x'
    end

L=2*length(x)+1;
y=zeros(1,L);
y(2:2:L)=x;
endfunction

//-----
//-----ANALISIS-----
//-----
//Función que realiza el primer nivel de descomposición
//de una señal utilizando el sistema Wavelet Daubechies.
//SINTAXIS: [ca cd]= analisis(X,M), donde X es la señal
//de entrada y M es un entero positivo que especifica el
//sistema Daubechies utilizado.
//M puede tomar los siguientes valores: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
function [c,d]= analisis(x,m)
[lhs,rhs]=argn(0)
    if (rhs == 0)
        error('No has ingresado completamente los datos para el analisis');
    end

[filas columnas]=size(x);
    if filas > 1
        x=x';

```

```

end

select m
case 1 then
  //Sistema Daubechies 1
  filtro_escalas = [1./sqrt(2) 1./sqrt(2)]; //Filtro Pasabajo de Descomposición
  filtro_wavelet= [-1./sqrt(2) 1./sqrt(2)]; //Filtro Pasaalto de Descomposición

case 2 then
  //Sistema Daubechies 2
  filtro_escalas = [(1-sqrt(3))/(4*sqrt(2)) (3-sqrt(3))/(4*sqrt(2))...
    ... ( 3+sqrt(3))/(4*sqrt(2)) (1+sqrt(3))/(4*sqrt(2))];
  filtro_wavelet =[-(1+sqrt(3))/(4*sqrt(2)) (3+sqrt(3))/(4*sqrt(2)) -...
    ... (3-sqrt(3))/(4*sqrt(2)) (1-sqrt(3))/(4*sqrt(2))];

case 3 then
  //Sistema Daubechies 3
  filtro_escalas = [ 0.0352 -0.0854 -0.1350 0.4599 0.8069 0.3327];
  filtro_wavelet= [-0.3327 0.8069 -0.4599 -0.1350 0.0854 0.0352];

case 4 then
  //Sistema Daubechies 4
  filtro_escalas = [-0.0106 0.0329 0.0308 -0.1870 -0.0280 0.6309...
    ... 0.7148 0.2304];
  filtro_wavelet= [-0.2304 0.7148 -0.6309 -0.0280 0.1870 0.0308...
    ...-0.0329 -0.0106];

case 5 then
  //Sistema Daubechies 5
  filtro_escalas = [ 0.0033 -0.0126 -0.0062 0.0776 -0.0322 -0.2423...
    ...0.1384 0.7243 0.6038 0.1601];
  filtro_wavelet= [-0.1601 0.6038 -0.7243 0.1384 0.2423 -0.0322...
    ...-0.0776 -0.0062 0.0126 0.0033];

case 6 then
  //Sistema Daubechies 6
  filtro_escalas = [-0.0011 0.0048 0.0006 -0.0316 0.0275 0.0975...
    ...-0.1298 -0.2263 0.3153 0.7511 0.4946 0.1115];
  filtro_wavelet= [-0.1115 0.4946 -0.7511 0.3153 0.2263 -0.1298...
    ...-0.0975 0.0275 0.0316 0.0006 -0.0048 -0.0011];

case 7 then
  //Sistema Daubechies 7

```

```

filtro_escala = [ 0.0004 -0.0018  0.0004  0.0126 -0.0166 -0.0380...
...0.0806  0.0713 -0.2240 -0.1439  0.4698  0.7291  0.3965  0.0779];
filtro_wavelet= [-0.0779  0.3965 -0.7291  0.4698  0.1439 -0.2240...
...-0.0713  0.0806  0.0380 -0.0166 -0.0126  0.0004  0.0018  0.0004];

case 8 then
//Sistema Daubechies 8
filtro_escala = [-0.0001  0.0007 -0.0004 -0.0049  0.0087  0.0140 -0.0441...
...-0.0174  0.1287  0.0005 -0.2840 -0.0158  0.5854  0.6756  0.3129  0.0544];
filtro_wavelet= [-0.0544  0.3129 -0.6756  0.5854  0.0158 -0.2840 -0.0005...
...0.1287  0.0174 -0.0441 -0.0140  0.0087  0.0049 -0.0004 -0.0007 -0.0001];
end
//Cálculo de los Coeficientes de Aproximación
c=submuestrear( convol(x,filtro_escala) );

//Cálculo de los Coeficientes de Detalle
d=submuestrear( convol(x,filtro_wavelet) );
endfunction

//-----
//-----DESCOMPOSICION-----
//-----
//Función que realiza una descomposición multinivel
//sobre una señal unidimensional utilizando el sistema
//Wavelet Daubechies.

//SINTAXIS: [C L]=descomposicion(X,M,N), donde x es la
// señal de entrada, M es un entero que especifica
// el sistema Daubechies utilizado.
// M puede ser 1, 2, 3, 4,...,8
// N especifica el nivel de descomposición.

function [C,L]=descomposicion(x,m,n)
[lhs,rhs]=argn(0)

if (rhs == 0)
error('No has ingresado completamente los datos para la descomposicion');
end

[fila columna]=size(x);
if fila > 1
x=x';
end

c=[];

```

```
L=length(x);  
  
for i=1:n  
    [x d]=analysis(x,m);  
    c=[d c];  
    L=[length(d) L];  
end  
  
C=[x c];  
Endfunction
```

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

- Aimar, H., Bernardis, A., Hernandez, I., (1998). **Bases de Onditas, Cuadernos de Matemática y Mecánica**, PEMA (Conicet) - CIMEC (INTEC - CONICET - UNL), Santa Fe.
- Andrade, S., Navarrete, M., (2006). **Análisis y tratamiento de la señal electrocardiográfica para la detección de parámetros de normalidad bajo la plataforma LABVIEW**. Trabajo de Grado no publicado. Universidad Pontificia Bolivariana. Facultad de Ingeniería Electrónica. Escuela de Ingeniería y Administración.
- Cuerva, Y., (2010). **Medición de la Potencia Activa mediante la transformada wavelet tradicional y la transformada wavelet empaquetada. Estudio Comparativo**. Tesis de Grado, Universidad de Carabobo, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Física.
- Chui, K., (1992). **An Introduction in Wavelet** .Academia. Press Inc. Reino Unido.
- Del Pino, P., Jiménez, C., Díaz, J., y Rothman, H. (2008). **Aplicación de la transformada de wavelet para el análisis de señales de voz normales y patológicas**. Artículo, Revista Ingeniería UC. Vol. 15. No. 1, Abril, Venezuela.
- Faundez, P., Fuentes, A. (2002). **Procesamiento Digital de Señales Acústicas Utilizando Wavelets**. Tesis de Maestría Instituto de Matemática UACH.
- Glyn, J. (2002). **Matemáticas Avanzadas Para Ingeniería**. Prentice Hall. Segunda Edición.
- Jiménez, C., (2004). **Análisis de la Relación Señal a Ruido de la Voz Utilizando La Transformada Wavelet**. Tesis de Maestría, Área de Postgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Carabobo.
- Jiménez C., Jiménez J. (2010). **Clasificación de señales de voz utilizando Transformada de Wavelet y Máquinas de Vectores de Soporte**. Trabajo de ascenso. Facultad de Ingeniería. Universidad de Carabobo.

- Lathi, B. (1999). **Introducción a la Teoría y Sistemas de Comunicación**. Limusa Noriega Editores.
- Nazar J., Vega C. (2011). **Transformada de ondículas para análisis de estructuras**. Artículo, Revista Ingeniería UC, Volumen 18, N°1, Abril, Venezuela.
- Pizzella, G., (2006). **Álgebra Lineal Para Estudiantes de Ingeniería**. Departamento de Publicaciones. Facultad de Ingeniería. Universidad de Carabobo. Cuarta Edición.
- Proakis, J., Manolakis, D. (1998). **Tratamiento Digital de Señales**. Prentice Hall Tercera edición.
- Vega, C., (2003). **Aplicación de técnicas wavelet al análisis de series temporales**. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Facultad de Ciencias, Departamento de Estadística e Investigación Operativa.
- Vega, C. (2009). **Un método automático para la elección de la base de ondícula y la selección del umbral para la estimación de señales**. Artículo, Revista Ingeniería UC, Volumen 16, N°1, Abril, Venezuela.
- Yusti, F., (2010). **Aplicación De Librerías De Funciones Para Calcular La Transformada Wavelet En Scilab En El Cálculo De La Potencia Eléctrica Para Señales Bajo Condiciones No Sinusoidales**. Trabajo de Ascenso, Universidad de Carabobo, Facultad de Ingeniería, Departamento de Matemáticas.