



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
CÁTEDRA: DISEÑO DE INVESTIGACIÓN



**ERRORES QUE COMETEN LOS ESTUDIANTES EN EL CONTENIDO ADICIÓN Y
PRODUCTO DE NÚMEROS NATURALES SEGÚN LA TIPOLOGÍA DE ERRORES
DE ASTOLFI (2003)**

**Caso: Asignatura Álgebra II del plan de estudio de la Licenciatura en Educación
mención Matemática que oferta la FaCE-UC**

Tutora:
Ivel Páez

Autores:
Jaimes Aimara
Natera Carlos

Bárbula, Agosto de 2015



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
CÁTEDRA: DISEÑO DE INVESTIGACIÓN



**ERRORES QUE COMETEN LOS ESTUDIANTES EN EL CONTENIDO ADICIÓN Y
PRODUCTO DE NÚMEROS NATURALES SEGÚN LA TIPOLOGÍA DE ERRORES
DE ASTOLFI (2003)**

Autores:
Jaimes , Aimara
Natera Carlos

**Trabajo de Grado presentado para optar al título
de Licenciado en Educación mención Matemática**

Campus Bárbula, Agosto de 2015

DEDICATORIA

A toda mi familia y amigos, quienes de una u otra forma han contribuido en el desarrollo y logro del cumplimiento de esta meta; de manera muy especial a mi madre a quien amo y adoro Nilba Escamilla, por su apoyo y amor; a mi hija Angie Ayos, mi razón de ser, mi luz e inspiración; a mi esposo Wuilmer Ayos, por su gran paciencia, dedicación y constancia; a mi hermana Juana Escamilla Y Ruthbeli Ocanto por su gran colaboración y apoyo en los momentos más difíciles; a mi compañero Anthony Calderón por su disposición y gran humildad; a mi compañero de tesis por su gran colaboración para el logro de esta meta.

Aimara Jaimes

DEDICATORIA

A mis padres queridos, Yiraid Pérez y Delio Natera, por siempre apoyarme y guiarme en mis decisiones, por todo su apoyo infinito, es por ustedes que me encuentro aquí; por sus consejos, regaños, impulso, por ser los dos un ejemplo a seguir para mí, por enseñarme que con trabajo y dedicación podemos llegar a ser personas de éxito. Les amo.

A mí querida novia, futura esposa Mileydi Mena, por su extraordinario amor, por siempre alentarme en momentos difíciles y enseñarme que las cosas se pueden realizar muy bien; tú también eres motivo de inspiración para mí. Espero llegar algún día a ser tan buena persona como lo eres tú. Te amo

A mi hermana Desiree Natera y mis sobrinos Nomar, Xavier y María; por ustedes siempre intento dar más, para poder ser un ejemplo digno en su futuro crecimiento y que tengan una referencia de calidad en mí.

A mi compañera de tesis y a todos mis compañeros de mención, tuve suerte de estar en un grupo de estudio tan bueno. Qué bueno que la mayoría cumpliéramos la meta juntos.

A mis dos grandes tutoras, Ivel Páez y Tibisay González, sin ustedes este trabajo no fuera realidad, gracias por sus consejos, indicaciones y correcciones, las dos son grandes tutoras, distintas por supuesto, pero grandiosas. Muchas Gracias

Carlos Natera

AGRADECIMIENTO

Los autores de esta investigación desean expresar sus más sinceras palabras de reconocimiento a las personas e instituciones que hicieron posible el desarrollo y culminación de este producto de investigación. Mención especial merecen:

La Universidad de Carabobo, Casa de Estudios que nos brindó las herramientas necesarias y la oportunidad de prepararnos como educadores de calidad. Particularmente, la Facultad de Ciencias de la Educación por facilitarnos los conocimientos necesarios a lo largo de toda la carrera.

La profesora Tibusay González; quién desde el inicio de esta investigación, nos orientó y guió en la elaboración de este trabajo, además de su dedicación y comprensión.

La profesora Ivel Páez; por proporcionarnos las herramientas necesarias para cumplir con esta meta.

A los profesores de la mención de Matemática por su gran colaboración y disposición al momento de la validación del instrumento; a los estudiantes del 4^{to} semestre de la Asignatura Álgebra II que formaron parte de la muestra; al personal directivo, docente y administrativo que nos brindó el apoyo institucional para la realización del presente estudio.

¡Muchas Gracias!

**Jaimes Aimara
Carlos Natera**

Índice General

	pp.
Dedicatoria	iii
Agradecimiento	v
Índice General	vi
Índice de Tablas	viii
Índice de Gráficos	ix
Resumen	x
Introducción	1
 1. El Problema	
1.1 Planteamiento y formulación del Problema	3
1.2 Objetivos de la Investigación	6
1.2.1 Objetivo General	6
1.2.2 Objetivos Específicos	7
1.3 Justificación de la Investigación	7
 2. Marco Teórico	
2.1 Antecedentes de la Investigación	9
2.2 Bases Teóricas	11
2.2.1 Base Filosófica y Social	12
2.2.2 Base Psicopedagógica	13
2.2.3 Base Legal	20
2.3 Definición de Términos Básicos	22
 3. Marco Metodológico	
3.1 Tipo y Diseño de la Investigación	23
3.2 Sujetos de la Investigación	24
3.3 Procedimiento	24
3.4 Técnicas e Instrumentos de Recolección de Información	25
3.4.1 Validez	25
3.4.2 Confiabilidad	26
3.5 Técnicas de Análisis de los Resultados	27
 4. Presentación y Análisis de Resultados	
4.1 Presentación y análisis de los resultados por dimensión	29
4.1.1 Presentación de los resultados de la dimensión conceptual	29
4.1.2 Presentación de los resultados de la dimensión procedimental	31
4.1.3 Total general de respuestas	33
4.2 Análisis por indicador de la dimensión conceptual	34
4.3 Análisis por Indicador de la Dimensión Procedimental	47
4.4 Respuestas por error cometido	53
 Conclusiones	59
Recomendaciones	61
REFERENCIAS	63

ANEXOS	65
A Tabla de operacionalización.....	66
B Carta a los Expertos.....	68
C Instrucciones.....	69
D Instrumento.....	70
E Validaciones.....	76
F Cálculo de la Confiabilidad.....	86

Índice de Tablas

Tabla N°

	pp.
Tabla N° 1: Presentación de los resultados de la dimensión conceptual por Tipo de respuesta dada a cada ítem.....	29
Tabla N° 2: Presentación de los resultados de la dimensión procedimental Por tipo de respuesta dada a cada ítem.....	31
Tabla N° 3: Total general por tipo de respuesta dada en todo el estudio.....	33
Tabla N° 4: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido En el ítem N° 1.....	34
Tabla N° 5: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido En el ítem N° 2.....	35
Tabla N° 6: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido En el ítem N° 3.....	36
Tabla N° 7: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido En el ítem N° 4.....	37
Tabla N° 8: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido En el ítem N° 5.....	38
Tabla N° 9: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido En el ítem N° 6.....	40
Tabla N° 10: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido En el ítem N° 7.....	41
Tabla N° 11: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido En el ítem N° 8.....	42
Tabla N° 12: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido En el ítem N° 9.....	43
Tabla N° 13: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido En el ítem N° 10.....	44
Tabla N° 14: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido En el ítem N° 12.....	46
Tabla N° 15: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido En el ítem N° 12.....	47
Tabla N° 16: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido En el ítem N° 13.....	48
Tabla N° 17: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido En el ítem N° 14.....	49
Tabla N° 18: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido En el ítem N° 15.....	50
Tabla N° 19: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido En el ítem N° 16.....	52
Tabla N° 20: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido En el ítem N° 17.....	53
Tabla N° 21: Distribución de frecuencia por tipo de error cometido.....	54

Índice de Gráficos

Gráfico N°

	pp.
Gráfico N° 1: Resultados de la dimensión conceptual.....	30
Gráfico N° 2: Resultados de la dimensión procedimental.....	32
Gráfico N° 3: Resultados total general.....	33
Gráfico N° 4: Resultados del ítem N° 1.....	34
Gráfico N° 5: Resultados del ítem N° 2.....	35
Gráfico N° 6: Resultados del ítem N° 3.....	36
Gráfico N° 7: Resultados del ítem N° 4.....	37
Gráfico N° 8: Resultados del ítem N° 5.....	39
Gráfico N° 9: Resultados del ítem N° 6.....	40
Gráfico N° 10: Resultados del ítem N° 7.....	41
Gráfico N° 11: Resultados del ítem N° 8.....	42
Gráfico N° 12: Resultados del ítem N° 9.....	43
Gráfico N° 13: Resultados del ítem N° 10.....	45
Gráfico N° 14: Resultados del ítem N° 11.....	46
Gráfico N° 15: Resultados del ítem N° 12.....	47
Gráfico N° 16: Resultados del ítem N° 13.....	49
Gráfico N° 17: Resultados del ítem N° 14.....	50
Gráfico N° 18: Resultados del ítem N° 15.....	51
Gráfico N° 19: Resultados del ítem N° 16.....	52
Gráfico N° 20: Resultados del ítem N° 17.....	53
Gráfico N° 21: Resultados por tipo de error cometido en la dimensión Conceptual.....	55
Gráfico N° 22: Resultados por tipo de error cometido en la dimensión Procedimental.....	56
Gráfico N° 23: Comparación de resultados por tipo de error cometido En las dimensiones conceptual y procedimental.....	57
Gráfico N° 24: Resultados por tipo de error cometido.....	58



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
CÁTEDRA: DISEÑO DE INVESTIGACIÓN



ERRORES QUE COMETEN LOS ESTUDIANTES EN EL CONTENIDO ADICIÓN Y PRODUCTO DE NÚMEROS NATURALES SEGÚN LA TIPOLOGÍA DE ERRORES DE ASTOLFI (2003)

Caso: Asignatura Álgebra II del plan de estudio de la Licenciatura en Educación mención Matemática que oferta la FaCE-UC

Autores: Aimara Jaimes y Carlos Natera
Tutora: Dra. Ivel Páez
Fecha: Agosto, 2015

RESUMEN

El objetivo de esta investigación es analizar los errores que cometen los estudiantes en el contenido Adición y Producto de Números Naturales de la asignatura Álgebra II de la mención Matemática que oferta la FaCE-UC, sustentado en la tipología de errores de Astolfi (2003). Esta investigación es de tipo descriptivo, de campo, no experimental, transeccional. La población estuvo conformada por 14 estudiantes a los cuales se les aplicó una prueba objetiva, validada mediante el juicio de expertos y cuya confiabilidad arrojó un 0,71%. El error más frecuente en la dimensión conceptual fue el debido a la complejidad propia del contenido con un 68%, seguido del error debido a los conocimientos previos y mala comprensión con un 23%, en la dimensión procedimental el error más frecuente fue el debido a la comprensión de las instrucciones con un 54%, seguido del error debido a la complejidad propia del contenido con un 26%.

Palabras claves: Números Naturales, Errores, Tipología de Astolfi

Línea de Investigación: Enseñanza, aprendizaje y evaluación de la evaluación de la Educación en Matemática y Física.

Temática: Procesos de enseñanza y aprendizaje en los diferentes niveles y modalidades de la educación Matemática.

Subtemática: Dificultades, obstáculos y errores en aprendizaje de la Matemática

INTRODUCCIÓN

Los errores están presentes en todos lados, momentos y circunstancias del ser humano, ninguna actividad escapa de estos. En el ámbito escolar, la posibilidad de errar en la asignatura Matemática aumenta sustancialmente en comparación con las demás asignaturas, debido a las múltiples dificultades conceptuales, procedimentales y actitudinales que esta asignatura logra suscitar en los estudiantes. Los errores son datos objetivos que se encuentran permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática y constituyen un elemento estable de dichos procesos

Por otra parte, este trabajo de investigación consta de cinco capítulos los cuales se describen a continuación:

El capítulo I, lleva por nombre el problema, en el cual se describe la problemática a estudiar, se delimita la situación actual que se presenta en cuanto a los errores cometidos por los estudiantes de Álgebra II, los distintos factores que inciden en el proceso de enseñanza y aprendizaje, específicamente en los estudiantes del cuarto semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo; seguidamente se presentan los objetivos de la investigación y la justificación del estudio.

En lo que respecta al Capítulo II, se describe el Marco Teórico, señalando los hallazgos provenientes de estudios anteriores a esta investigación relacionados entre sí, luego se describirán las bases teóricas, Para así entender la importancia del desarrollo de esta investigación, por tal motivo es necesario fundamentar el tema bajo el enfoque de autores que justifican los tópicos referentes a los errores, en lo que respecta a la base filosófica y social se fundamentará bajo el enfoque de Popper (1980), la base psicopedagógica en la tipología de errores de Astolfi (2003), la base legal respaldada en la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela (1999) y en la Ley Orgánica de Educación (2009), asimismo, se contempla la definición de términos básicos.

En el Capítulo III, se delimita la metodología en la que se fundamenta la investigación, la cual está enmarcada en una investigación descriptiva, bajo un diseño de campo de carácter no experimental y transaccional, también se describen los sujetos, es decir, la población, muestra y el grupo piloto; los procedimientos que se deberán seguir para llevar a cabo el estudio, las técnicas e instrumentos de recolección de información, validez y confiabilidad del instrumento, técnicas de análisis de los resultados que se utilizarán para la codificación, tabulación, interpretación y análisis de los datos.

En el capítulo IV, se analizan las respuestas y se elaboran tres tablas de frecuencias una para la dimensión conceptual, otra para la dimensión procedimental y una para el total general de respuestas; estos datos permitieran obtener los porcentajes de las respuestas correctas, incorrectas y sin responder. Luego se presentan la distribución de frecuencia por indicador en ambas dimensiones, clasificadas según el error cometido de la tipología de Astolfi (2003), las distribuciones de frecuencias en las respuestas por el tipo de error cometido en la dimensión conceptual y procedimental, la comparación de los errores detectados en ambas dimensiones.

Finalmente, se presentan las conclusiones y recomendaciones que se derivaron del desarrollo del estudio.

1. EL PROBLEMA

1.1 Planteamiento y Formulación del Problema

Los errores están presentes en todos lados, momentos y circunstancias del ser humano, ninguna actividad escapa de estos, así mismo Astolfi (2003) menciona que “nos encontramos continuamente con el error en la vida diaria, y el sentido común no deja de repetirnos que solo dejan de equivocarse los que no hacen nada” (p. 1).

En el ámbito escolar, la posibilidad de errar en la asignatura Matemática aumenta sustancialmente en comparación con las demás asignaturas, debido a las múltiples dificultades conceptuales, procedimentales y actitudinales que esta asignatura logra suscitar en los estudiantes. Según Rico (1995), los errores forman parte de las producciones de los estudiantes durante el aprendizaje de la Matemática. Los errores son datos objetivos que se encuentran permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática y constituyen un elemento estable de dichos procesos.

Actualmente, a escala mundial, el estudio de los errores educativos es de gran importancia y de allí que se realicen diversas investigaciones para el análisis de éstos, y se propongan diversos métodos y estrategias educativas orientadas a que los mismos no sigan afectando a la mayor parte de toda la comunidad estudiantil; de tal modo que, los estudios que se realizan abarcan todos los subsistemas, niveles y modalidades del sistema educativo.

En relación con lo anterior, en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME), desde sus inicios en 1987; se han venido presentando trabajos de gran relevancia, que han intentado hallar soluciones a las diversas problemáticas presentes en Matemática, sus estudios abarcan todas las áreas en las que se encuentra inmersa esta ciencia, presentando una gran gama de soluciones en todos los aspectos educativos, como lo son: el lenguaje matemático, obstáculos y errores referidos al

aprendizaje en matemática, los procesos educativos, errores de los estudiantes, reflexiones de los profesores en matemática.

Al profundizar en algunos de estos aspectos, se logra develar que gran parte de los errores que presentan las investigaciones expuestas en el ALME desde el 2011 hasta la actualidad son cometidos a causa de: hábitos escolares indebidos, deficientes conocimientos previos, mala comprensión de las operaciones intelectuales y de los procedimientos implicados.

Cabe mencionar que entre las investigaciones que han hecho de su objeto de estudio los errores matemáticos, destacan las realizadas por Radillo (2011, 2013), Amaya y Gulfo (2011), Cañibano, D'Andrea y Sastre (2014), Borjón, Hernández y Sánchez (2014), quienes desarrollaron sus estudios en diversos contextos universitarios Latinoamericanos, los autores resaltan que la problemática existente de los estudiantes en los conocimientos previos y el entendimiento del lenguaje matemático, son los principales factores que ocasionan la mayoría de los errores presentes en sus estudios.

En lo que respecta al ámbito venezolano, la problemática del bajo desempeño académico en matemática no es algo novedoso, desde hace décadas se han hecho estudios acerca de una carencia de conocimientos en la formación matemática del aprendiz en todos los niveles del sistema educativo nacional, ya que al momento de iniciar en la educación superior, los estudiantes enfrentan las consecuencias de una ausencia sustancial de prerrequisitos matemáticos, que les permitan avanzar de manera exitosa en el transcurrir de la nueva etapa.

De tal manera, Guevara (2010), en su estudio sobre exploración de errores en los contenidos matemáticos que presentan los estudiantes en la asignatura Matemática I en la Universidad de Oriente, plantea que es en la educación universitaria donde el bajo desempeño en la asignaturas Matemática se agudiza, dado que existe una gran

acumulación de fallas y omisiones en la preparación previa de los fundamentos matemáticos necesarios para la formación profesional.

Por esta razón, es evidente que estas deficiencias según Guevara (2010), no son derivadas meramente de la actitud y aptitud de los estudiantes, sino también de las deficiencias pedagógicas del docente, pues todo se enmarca dentro de un sistema de aprendizaje y enseñanza.

Específicamente, en el contexto local de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo (FaCE-UC), durante los dos periodos consecutivos anteriores al periodo en el cual se realiza el presente estudio, ocurrió que en la asignatura Álgebra II del plan de estudio en la Licenciatura en Educación mención Matemática, de una población de 54 estudiantes distribuidos en tres secciones; el porcentaje de aprobados fue un 40,7%, asimismo el promedio de las tres secciones en la referida asignación fue 6,01 puntos en una escala de 01 al 20.

Seguidamente, en el periodo lectivo 2S-2013, con una población de 38 estudiantes compartidos en tres secciones, el porcentaje de aprobados fue de 42,1%, siendo el promedio general de las tres secciones en este periodo de 6,6 puntos en una escala del 01 al 20, datos aportados por el Departamento de Matemática y Física. Del 57,9% de los estudiantes reprobados, el 90,9% culminó con notas comprendidas entre 01 y 04 puntos, evidenciando que no lograron comprender los primeros contenidos de la asignatura, lo que llevó a la mayoría de los casos a su abandono.

Aunado a esto los profesores de la asignatura Álgebra II, concuerdan que una de las razones para que exista esta cantidad de aplazados, es la dificultad que los estudiantes muestran en los dos primeros contenidos programáticos que son Adición y Producto de los Números Naturales, ya que estos contenidos son clave en el resto de la asignatura; porque para la solución en los ejercicios posteriores se necesita dominar completamente las definiciones y teoremas implicadas en dichos temas.

Además, a partir de la conversación sostenida con dichos profesores se pudo deducir que los errores cometidos por los estudiantes, se corresponden con los errores establecidos en la tipología de Astolfi (2003), los cuales son: errores debidos a la comprensión de las instrucciones, errores debidos a los hábitos escolares (conocimientos previos) y mala comprensión, errores debidos al testimonio de las concepciones alternativas, errores debidos a las operaciones intelectuales implicadas, errores debidos a los procedimientos empleados, errores debidos a la sobrecarga cognitiva mediante el ejercicio, errores debidos a orígenes en otras disciplinas y errores debidos a la complejidad propia del contenido.

La problemática explicada anteriormente, no solo afecta a la asignatura de Álgebra II, sino a toda la cátedra de Álgebra de la mención Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo, que además de la asignatura en estudio se encuentra Álgebra I y Álgebra Lineal, de allí que los errores presentes en los estudiantes producen un fallo académico en el resto de las asignaturas, por la importancia que posee el Álgebra en el desarrollo del pensamiento matemático, no solo a nivel universitario, sino en todos los niveles educativos.

De lo antes expuesto, surge como incógnita, ¿Cuáles son los errores que cometen los estudiantes en el contenido Adición y Producto de Números Naturales del programa de la asignatura Álgebra II del plan de estudio de la Licenciatura en Educación mención Matemática que oferta la Facultad de Ciencias de la Educación, conforme a la tipología de Astolfi (2003)?

1.2 Objetivos de la Investigación

1.2.1 Objetivo General

Analizar los errores que cometen los estudiantes en el contenido Adición y Producto de Números Naturales del programa de la asignatura Álgebra II del plan de estudio de la Licenciatura en Educación mención Matemática que oferta la Facultad de Ciencias de la Educación, conforme a la tipología de Astolfi (2003).

1.2.2 Objetivos Específicos

1. Diagnosticar los errores que cometen los estudiantes en el contenido Adición y Producto de Números Naturales del programa de la asignatura Álgebra II del plan de estudio de la Licenciatura en Educación mención Matemática que oferta la FaCE-UC, conforme a la tipología de Astolfi.
2. Clasificar los errores que cometen los estudiantes en el contenido Adición y Producto de Números Naturales del programa de la asignatura Álgebra II del plan de estudio de la Licenciatura en Educación mención Matemática que oferta la FaCE-UC, conforme a la tipología de Astolfi.

1.3 Justificación de la Investigación

Esta investigación surge con la intención de ayudar e incentivar al docente de matemática a organizar estrategias para lograr un mejor aprendizaje por parte de los estudiantes, haciendo mayor énfasis en aquellos aspectos que les generen dificultad y, así, poder disminuir el fracaso escolar.

En la asignatura Álgebra II existe un gran porcentaje de reprobados, además muchos de ellos con el mínimo de la calificación y en caso extremo se genera el abandono de la asignatura. De allí que analizar los errores que cometen los estudiantes en el contenido “Adición y Producto de los Números Naturales” del programa de esta asignatura correspondiente al cuarto semestre de la carrera de Educación mención Matemática según la tipología de Astolfi (2003), es de gran importancia ya que permite tener una mayor apreciación de la problemática que actualmente estos presentan en la unidad curricular, además de que la cátedra de Álgebra, es pilar fundamental para los futuros docentes, ya que la misma genera el desarrollo del pensamiento matemático, que es de vital importancia para el resto de los contenidos presentes en el plan de estudio de la Licenciatura en Educación mención Matemática.

A través de esta investigación se clasifican los errores cometidos por los estudiantes, lo cual beneficia sustancialmente a los mismos, dado que al conocer los resultados de este estudio, podrán concienciar sus falencias y hacer énfasis en los contenidos en los cuales presentan mayor dificultad y así tener una mejor comprensión de los mismos. De tal forma, esta producción investigativa puede contribuir con el mejoramiento del aprendizaje y así elevar los niveles de competencia y rendimiento matemático que ha sido bajo en los últimos semestres, por cuanto a medida que el estudiante conoce sus errores, va aprendiendo de ellos y construyendo aprendizajes adecuados.

Igualmente, los profesores de la referida unidad curricular son también beneficiarios de esta investigación, por el hecho de que aborda el estudio de los errores de sus estudiantes en un contenido que constituye un prerrequisito básico para los ulteriores temas del programa de la asignatura, lo cual ofrece al docente un referente para el diseño de estrategias orientadas al procesamiento oportuno de estos errores que de no ser tratados de seguro ocasionarían la progresión de otros errores en el futuro.

Por otro lado, este trabajo ofrece una referencia para el abordaje de futuros estudios relacionados con los errores y de esta manera incentivar en el profesorado en formación y en ejercicio el interés por indagar en este ámbito de estudio complejo pero a la vez interesante y pertinente para todo profesional docente vinculado al área disciplinar.

Finalmente, este estudio es prospectivo pues viene a potenciar la Cátedra de Diseño de investigación del Departamento de Matemática de la FaCE-UC, dado que está enmarcado en la línea de investigación Enseñanza, Aprendizaje y Evaluación de la Educación en Matemática; dentro de la temática proceso de enseñanza y aprendizaje en los diferentes niveles y modalidades de la educación Matemática; cuya Subtemática se encuentra centrada en las dificultades, obstáculos y errores en aprendizaje en esta disciplina curricular. Cabe destacar que es innovador debido a que no se han encontrado estudios de errores relacionados con el contenido de Adición y Producto de los Números Naturales de la asignatura de Álgebra II.

2. MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes de la Investigación

El presente capítulo contiene, los antecedentes de investigaciones que presentan similitud con dicho estudio, las bases teóricas del mismo donde se presentan las diferentes teorías que sustentan dicha investigación aunado a las definiciones conceptuales.

García, Lupiañez y Segovia (2011) en su investigación titulada, “Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas” mencionaron que al momento de realizar la investigación, la mayor producción de errores fue debido a problemas en la formación matemática en los niveles anteriores al mismo, es decir, errores debido a conocimientos previos.

Gil y Gómez (2011) en su estudio realizado sobre errores cometidos por los estudiantes del tercer semestre de Educación mención Matemática en el contenido de Teoría de Conjuntos de la asignatura Álgebra I adscrita al departamento de Matemática y Física de la FaCE-UC, según la tipología de Astolfi, la cual es una investigación descriptiva, de campo, no experimental transaccional; señalan que, en una gran proporción de estudiantes el error más común fue el debido a la complejidad propia del contenido, ya como segunda dimensión se encontraba presente los errores que tienen sus orígenes en otra disciplina. Estos concuerdan en hallar estrategias de enseñanza-aprendizaje más efectivas, con el fin de revertir esta tendencia; promoviendo el desarrollo de una actitud reflexiva-humanística en la comunidad estudiantil.

Izaguirre y Martínez (2011) en su estudio titulado “Errores que cometen los estudiantes de la mención Matemática de la FaCE-UC al manejar el contenido de Límite según la taxonomía de Astolfi”, la cual es una investigación descriptiva, de

campo, no experimental transaccional. Destacaron que referente a los contenidos conceptuales los errores mayormente cometidos fueron los que provienen debido a los hábitos escolares, seguido de los errores debidos a las operaciones intelectuales implicadas y por último los errores debidos a la sobrecarga cognitiva mediante el ejercicio y en los contenidos procedimentales el error con mayor frecuencia fue el error debido a los procedimientos empleados, seguido del error debidos a la comprensión de las instrucciones. Estos sugieren a los docentes reforzar los contenidos a través de estrategias didácticas y seleccionar la terminología del contenido a utilizar.

Murillo y Salina (2011) en su investigación titulada “Errores manifestados por los estudiantes en conocimientos previos de Matemática desde la Teoría de Astolfi”. Con una muestra de 142 estudiantes del primer semestre de la FaCE-UC de la asignatura Lógica-Matemática, determinaron que en la primera dimensión estudiada el error más frecuente fue el debido a la comprensión de las instrucciones con un 61%, en la segunda dimensión el error debido a los procesos adoptados con un 60,8% y en la última dimensión a los errores debido a la complejidad propia del contenido con un 62,5%. Destacaron que todos estos errores presentes en los estudiantes generan una preocupación en los docentes al observar la gran deficiencia que se encuentra presente en el dominio de los contenidos previos matemáticos, los cuales son de gran importancia para cursar la asignatura Lógica-Matemática.

Marvéz y Rumbos (2012), en su estudio titulado “Errores que cometen los estudiantes de la mención Matemática de la FaCE-UC, en el contenido de Teoría de Conjuntos de Álgebra I”, el cual es una investigación descriptiva, de campo, no experimental transaccional. Con una muestra de 40 estudiantes, determinaron que en la dimensión conceptual el error más frecuente fue el debido a la complejidad propia del contenido con un 40,9% seguido por el error debido al testimonio de las concepciones alternativas con un 32,8%. En la dimensión procedimental el error más destacado fue al igual que en la conceptual el debido a la complejidad propia del contenido con un 62,8% seguido del error debido a los procedimientos empleados. Los autores destacan que las mayores debilidades de la muestra son al momento de interpretar los

contenidos los enunciados de los ejercicios propuestos y proponen realizar estrategias de enseñanza-aprendizaje más efectivas, con el fin de revertir esta tendencia de errores, promoviendo el desarrollo de una actitud reflexiva y humanística en la comunidad educativa.

Mijares (2013), en su investigación titulada “Errores que cometen los estudiantes en el contenido integrales indefinidas de la Unidad Curricular Cálculo II, en el cuarto semestre de la mención Matemática de la FaCE-UC”, el cual es una investigación descriptiva, de campo, no experimental transaccional. Destacan que el error más frecuente en la dimensión conceptual es el debido a las costumbres escolares con un 36,5% seguido de los errores debidos a la comprensión de las instrucciones; en la dimensión procedimental el error más frecuente fue nuevamente el debido a las costumbres escolares con un 33,8%, seguido del error debido a la complejidad propia del contenido con un 23,85%. Por cuanto, recomendaron al docente diagnosticar los conocimientos previos de los estudiantes y a partir de allí indagar acerca de los errores en los que incurren, para luego reforzar los contenidos a través de estrategias didácticas, así mismo realizar el plan de las clases tomando en cuenta los posibles errores que se pueden cometer con mayor frecuencia.

Los autores convergen en que se deben conocer las deficiencias que presentan los estudiantes en lo que concierne a los conocimientos previos para así emplear estrategias de enseñanza-aprendizaje más efectivas, con la finalidad de permitirles alcanzar una mayor comprensión de los contenidos y de esta manera poder lograr el progreso en el proceso de aprendizaje.

2.2 Bases Teóricas

Para entender la importancia del desarrollo de esta investigación, se hizo necesario fundamentar el tema bajo el enfoque de autores que justifican los tópicos referentes a los errores; aunado a las definiciones conceptuales.

2.2.1 Base Filosófica y Social

La evolución del conocimiento ha estado acompañada de errores donde la identificación y análisis de estos ha permitido sustituir un conocimiento viejo e institucionalizado en la sociedad por uno nuevo; de allí que el problema del error está, entonces, vinculado al problema de la verdad y de la fuente última del conocimiento interpretado por Popper (1980), quien sostiene que todas ellas se basan en la teoría de la verdad manifiesta, donde la verdad es siempre reconocible como verdad; se descubre o se desvela. En consecuencia, al reflexionar sobre cómo puede aparecer el error si la verdad es manifiesta, el autor llega a la conclusión que la verdad puede encontrarse y perderse fácilmente y atribuye a los errores un gran poder de supervivencia.

Popper (1980) plantea que teniendo en cuenta que no sería muy fácil indicar en detalle cómo sirve un sistema teórico complicado para la deducción de enunciados singulares o básicos, propone la definición siguiente: Se llama «empírica» o «falsable» a una teoría cuando divide de modo inequívoco la clase de todos los posibles enunciados básicos en las dos subclases no vacías siguientes: primero, la clase de todos los enunciados básicos con los que es incompatible (o, a los que excluye o prohíbe), llamada la clase de los posibles falsadores de la teoría; y, en segundo lugar, la clase de los enunciados básicos con los que no está en contradicción.

En referencia a lo antes expuesto, el autor expresa de una forma más breve dicha definición indicando que una teoría es falsable si la clase de sus posibles falsadores no es una clase vacía. Pudiendo añadir, tal vez, que una teoría hace afirmaciones únicamente acerca de sus posibles falsadores (afirma su falsedad); acerca de los enunciados básicos permitidos no dice nada: en particular, no dice que sean verdaderos. Únicamente se considera que una teoría está falsada si se ha aceptado enunciados básicos que la contradigan. Esta condición es necesaria, pero no suficiente, pues se ha visto que los acontecimientos carecen de significación para la ciencia: así, difícilmente se inducirán a desechar una teoría por falsada, unos pocos enunciados básicos esporádicos; pero se le dará por tal si se descubre un efecto

reproducible que la refute; dicho de otro modo: se acepta la falsación solamente si se propone y corrobora una hipótesis empírica de bajo nivel que describa semejante efecto, y denominar a este tipo de hipótesis, una hipótesis falsadora (Popper, 1980).

De tal manera que, para el autor, la verdad puede encontrarse y perderse fácilmente, esta problemática se reduce a identificar y eliminar el error por medio de constantes críticas de las teorías propias, es decir, no hay fuente última de conocimiento, ya que éste debe ser aceptado como posible y sometido al examen crítico. Por ende, los errores existen en toda circunstancia en que se realice algún proceso, ya que donde existan diversos métodos de solución se puede cometer algún error, es allí donde entra en juego a lo que Popper hace referencia, cuando la clase de los posibles falsadores no es una clase vacía.

En el área educativa esta teoría se encuentra ligada al desempeño de los estudiantes, ya que tanto en el nivel de educación media como en el universitario, los mismos cometen una gran cantidad de errores, que afectan directamente los aprendizajes, el desempeño académico y consecuentemente el rendimiento en las asignaturas.

2.2.2 Base Psicopedagógica

Los obstáculos y las dificultades se han utilizado como clave para el estudio, categorización, análisis y explicación de los errores que se presentan en el pensamiento científico, los cuales tienen una connotación tanto epistemológica relacionada con el proceso interno del concepto como psicológica ya que están relacionadas con las características cognitivas del sujeto.

De acuerdo a lo antes expuesto Astolfi (2003), plantea que, al aspecto de obstáculos epistemológico señalado por Bachelard, le corresponde un aspecto psicológico desarrollado por Piaget, cuando manifiesta lo que permite la permanencia de las representaciones es su carácter funcional de sistema explicativo, el cual ha resistido a todos los cuestionarios de la experiencia personal.

Para (Piaget 1927 citado por Astolfi 2003) la evolución de los esquemas en el transcurso del desarrollo está relacionada con los desequilibrios que producen las interacciones del niño con la experiencia, con el medio y sobre todo con los “reequilibrios” que se obtienen como consecuencia.

Por consiguiente, Astolfi (2003) expresa que el funcionamiento del equilibrio descrito por Piaget (1927), de las posibles alternativas que aparecen al surgir un hecho nuevo en la experiencia personal del niño. Este hecho puede que no produzca modificación alguna en el sistema, pero también puede producir una “perturbación” cognitiva en relación con el funcionamiento mental ya instalado. Si el elemento perturbador se integra en el sistema, se producirá un “desplazamiento del equilibrio”, que hace asimilable el hecho inesperado. Este desplazamiento permite combinar un coste mínimo, conservando todo lo posible del esquema anterior, con una ganancia máxima, beneficiándose de los nuevos cambios que se interioriza en el esquema (p. 15).

En este marco, los errores de los estudiantes de distintas edades pueden interpretarse como la forma particular con la que, se organizan sus esquemas; estos se transforman y evolucionan al interactuar con la experiencia y con el medio, bien sea por diferenciación, o bien por coordinaciones.

Se puede comprender que, frente a una situación poco reconfortante, como es evitar cruzarse con el error, puede llevarlos a reaccionar siguiendo dos actitudes simétricas descritas por Astolfi (2003): como lo son el castigo, que puede ser interpretado como un reflejo de ratificación y a través del esfuerzo de la reformulación de la programación, y así ocultar cualquier tipo de responsabilidad.

De tal manera que, Astolfi (2003) explica que el estatus del error en el primero de los casos es el de “falta, pecado”, con todas las connotaciones moralizantes asociadas al término. En el segundo; es el de un fallo de programa, la primera actitud carga el error en la cuenta del estudiante y en la de sus esfuerzos de adaptación a la situación

didáctica, la segunda se lo carga al que concibió la programación y a su falta de capacidad para adaptarse al nivel real de los estudiantes. En el segundo modelo, al que podemos denominar comportamentalista, el error adquiere un aspecto distinto.

Por consiguiente, el obstáculo es una facilidad que se concede la mente. Se refiere a la comodidad intelectual, a un juego de analogías y metáforas, a una “certeza de lo íntimo”. Se puede decir que el obstáculo es una forma de pensar con la mente sentada en su sofá. Es por lo que, explica (Fabre citado por Astolfi 1999), debemos desconfiar más de nuestras “filias” que de nuestras “fobias”.

Aunado a esto Astolfi (2003), establece una tipología de los errores para utilizarlos como una lista ante la aparición del error estos son:

1. Errores debidos a la comprensión de las instrucciones:

La dificultad de los alumnos en la comprensión de las instrucciones de trabajo que se les dan, oralmente o por escrito. Se relacionan con dificultades de lectura de los enunciados de problemas y de otros textos escolares. La primera razón de estas dificultades está evidentemente en que las preguntas son más claras para el que las plantea, conociendo la respuesta que espera, que para el que las lee, preguntándose lo que tiene que contestar.

Para complicar las cosas, es importante destacar que las incógnitas que hay que contestar no siempre están en forma de pregunta y, por contra, una pregunta en el enunciado puede ser únicamente fruto de la preocupación por entrar en materia de una forma más motivadora. La verdadera pregunta, la que hay que contestar, se encuentra entonces algo más lejos, bajo una apariencia neutra; además pueden encontrarse dos preguntas una tras otra, sin que se sepa si se trata de una mera reformulación, o si hay que darle a cada una de ellas un tratamiento por separado.

Se pueden también invertir los hábitos escolares y proponer una respuesta pidiendo que se encuentre cuál podría ser la pregunta. Todo ello se puede hacer en las actividades disciplinares, pero también en el marco de un apoyo metodológico o en talleres individuales. Ambas alternativas pueden complementarse de forma útil.

2. Errores debidos a los hábitos escolares (conocimientos previos) y mala comprensión:

El estudiante no debe funcionar en clase como un niño o un adolescente, sino como un “pequeño especialista” en cada una de las disciplinas. Se sabe bien que sin ser esquizofrénico, un mismo individuo es susceptible de comportamientos divergentes. Incluso en los adultos, el automovilista no reacciona como el contribuyente, que no tiene por qué ser coherente con el elector o el consumidor. Así, son numerosas las situaciones en que las respuestas que dan hacen dudar de “la lógica de razonamiento de los alumnos”, mientras que esos mismos alumnos, perplejos y dubitativos, lo único que hacen es intentar adaptarse a las expectativas. Es decir, los errores cometidos por los estudiantes debido a los hábitos escolares provienen de la puesta en práctica de algunas reglas cotidianas y primordiales para resolver problemas, que han sido interiorizadas por este a través de los años en su labor de ser estudiante y que nunca le fueron enseñadas. En cuanto a los errores por mala comprensión ocurren cuando el estudiante decodifica las expectativas implícitas en los docentes y con dudas intentan adaptarse a ellas.

3. Errores debidos al testimonio de las concepciones alternativas

Estos errores están relacionados con los obstáculos. Didácticamente no se toma en cuenta estas representaciones que están estructuradas en forma subyacente por obstáculos epistemológicos, ellas vienen de cohabitar con conocimientos escolares que quedan como adquisiciones superficiales.

Comprender el significado profundo de estas representaciones es indispensable para el estatus que se le da a ciertos errores de los alumnos.

Se encuentran casi inalteradas, tanto en los alumnos que entran en las escuelas de magisterio como en los estudiantes especializados y, por supuesto, en la gran mayoría de los adultos que han terminado sus estudios. Casi todas las nociones escolares, desde la Física a la Matemáticas, de la Historia a la Geografía, se ven afectadas. En Historia son frecuentes las confusiones entre monarquía y república por un lado, y entre dictadura y democracia por otro. Sobre todo en Francia, donde, como se ha visto, Luis XIV es el paradigma de la monarquía absolutista.

Son movilizadas cada vez que el oficio de alumno tiende a relacionarlas con el problema o la actividad; pero las representaciones vuelven a menudo a aparecer inalteradas, en contextos más sencillos no relacionados, aparentemente, con el uso de los conceptos disciplinares. Comprender el significado profundo de las representaciones es un desvío indispensable para modificar el estatus que se le da a ciertos errores de los alumnos, pero esto no basta para tenerlos en cuenta didácticamente. En primer lugar, se debe decidir acerca del tratamiento que se les va a dar: ¿Dejarlas a un lado, pero sin ignorarlas? ¿Evitarlas o rodearlas? ¿“Purificarlas” al principio de la sesión, para después sustituirlas por el nuevo conocimiento? ¿Refutarlas punto por punto?, etc.

4. Errores debidos a las operaciones intelectuales implicadas

La dificultad reside en la construcción progresiva de los conceptos de suma y sustracción. A la misma operación aritmética pueden corresponder operaciones lógicas extremadamente diferentes desde el punto de vista del esfuerzo de abstracción que implican. El problema es que debido a su falta de formación, los enseñantes consideran que todos estos problemas son más o menos equivalentes, y no son sensibles a las “variables didácticas” que los distinguen.

Con relación a lo antes expuesto, estos errores se deben a las dificultades que presentan los estudiantes para comprender los aspectos implícitos en la resolución de ejercicios y están relacionados con la diversidad de las operaciones intelectuales que deben utilizarse para resolver problemas que, aparentemente se encuentran al alcance de los alumnos y normalmente el docente considera que estos problemas son iguales. La dificultad que reside en la construcción de la suma y la diferencia es un ejemplo muy preciso ya que si a un alumno se le pide el resultado de sumar $7+5$, encontrará la respuesta rápidamente. Pero si le pide determinar la cantidad que se tenía después de restar 4 obtener como resultado 6, a menudo el alumno no sabe construir la respuesta $6+4=10$.

5. Errores debidos a los procedimientos empleados

Son los que se evidencian en todo los procedimientos posibles que emplea el alumno para darle solución a una pregunta esperando una respuesta muy precisa. A menudo es la disconformidad con la solución lo que se sanciona, ya que los alumnos han podido realizar recorridos, no necesariamente absurdos, pero con los que no se había contado. Y precisamente, siempre nos sorprendemos de la tremenda variedad de estrategias de resolución que ponen en marcha “espontáneamente”, en el momento en que se les deja la posibilidad y se observa su trabajo.

6. Errores debidos a la sobrecarga cognitiva mediante el ejercicio

Están relacionados con el hecho de que la capacidad de retener en la memoria la información es limitada. El exceso de palabras en la escuela sigue afectando a los errores, a las confusiones y a los olvidos de los alumnos. Sería sensato efectuar una selección de los contenidos que se van a enseñar hasta llegar a lo esencial, lo cual no quiere decir hacer una sustracción resignada. A

pesar de que la memoria tenga sus límites, se dispone de recursos de apoyo para construir una “trama semántica”.

7. Errores debidos a orígenes en otras disciplinas

Estos se derivan de la transferencia de otras disciplinas que se exige para dar respuesta a una pregunta. El problema de la transferencia al igual que el de la motivación, es la falta de un marco teórico sólido al que refiriere la práctica, es decir, muchas veces la solución de los problemas se deja en “realidad” al uso del sentido común. De tal manera que se castiga a los alumnos, o al menos se les llama la atención, por no haber reutilizado en Física o en Geografía lo que habían aprendido en Matemáticas. El profesor asegura incluso haber verificado con su colega el aprendizaje previo con el que creía poder contar.

8. Errores debidos a la complejidad propia del contenido

Estos errores tienen su origen en la complejidad propia de la enseñanza del contenido, el cual no siempre es percibido como tal en el análisis habitual de las disciplinas ni en sus programaciones; es un error propiamente didáctico, que consiste en poner en cuestionamiento el contenido teórico y prácticos de la enseñanza, así como a los métodos y procedimientos que habitualmente se ponen de manifiesto.

Por consiguiente; esta categorización es una herramienta fundamental para llevar a cabo la realización del presente estudio, en el cual se analizaran los errores que cometen los estudiantes en el contenido Adición y Producto de Números Naturales del programa de la asignatura Álgebra II del plan de estudio de la Licenciatura en Educación mención Matemática que oferta la Facultad de Ciencias de la Educación, ya que los docentes de dicha asignatura han manifestado que los errores cometidos por los estudiantes se corresponden a los establecidos en la tipología de error de Astolfi (2003).

2.2.3 Base Legal

Esta investigación tiene su fundamento legal, en la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela (1999), en la Ley Orgánica de Educación (2009). Este instrumento legal establece el sentido de la Educación a través de los siguientes artículos:

Artículo 102: La educación es un derecho humano y un deber social fundamental, es democrática, gratuita y obligatoria. El Estado la asumirá como función indeclinable y de máximo interés en todos sus niveles y modalidades, y como instrumento del conocimiento científico, humanístico y tecnológico al servicio de la sociedad. La educación es un servicio público y está fundamentada en el respeto a todas las corrientes del pensamiento, con la finalidad de desarrollar el potencial creativo de cada ser humano y el pleno ejercicio de su personalidad en una sociedad democrática basada en la valoración ética del trabajo y en la participación activa, consciente y solidaria en los procesos de transformación social consustanciados con los valores de la identidad nacional, y con una visión latinoamericana y universal. El Estado, con la participación de las familias y la sociedad, promoverá el proceso de educación ciudadana de acuerdo con los principios contenidos de Constitución y en la ley.

De acuerdo con esto, la educación es un derecho que tiene toda persona, la misma debe ser gratuita y obligatoria y tiene como fundamento el respeto hacia cada una de las formas de pensar, con el propósito desarrollar el potencial creativo de cada ser humano y el pleno ejercicio de su personalidad en una sociedad democrática basada en principios, valores y en la participación activa, consciente y solidaria en los procesos de transformación social donde el Estado es el garante de su cumplimiento.

Artículo 103: Toda persona tiene derecho a una educación integral, de calidad, permanente, en igualdad de condiciones y oportunidades, sin más limitaciones que las derivadas de sus aptitudes, vocación y aspiraciones. La educación es obligatoria en todos sus niveles, desde el maternal hasta el nivel medio diversificado. La impartida en las instituciones del Estado es gratuita hasta el pregrado universitario. A tal fin, el Estado realizará una inversión prioritaria, de conformidad con las recomendaciones de la

Organización de las Naciones Unidas. El Estado creará y sostendrá instituciones y servicios suficientemente dotados para asegurar el acceso, permanencia y culminación en el sistema educativo. La ley garantizará igual atención a las personas con necesidades especiales o con discapacidad y a quienes se encuentren privados de su libertad o carezcan de condiciones básicas para su incorporación y permanencia en el sistema educativo. Las contribuciones de los particulares a proyectos y programas educativos públicos a nivel medio y universitario serán reconocidas como desgravámenes al impuesto sobre la renta según la ley respectiva.

El Estado está encargado de velar por la educación gratuita en todos sus niveles desde el maternal hasta pregrado, por intermedio de instituciones dará acceso a aquellas personas que por impedimento físico no puedan recibir educación con plena libertad, al igual que los aportes económicos serán reconocidos. Asimismo, se establece el derecho de toda persona a una educación integral de calidad, permanente, en igualdad de condiciones y oportunidades, sin más limitaciones que las derivadas de sus aptitudes, vocación y aspiraciones.

Por su parte, la Ley Orgánica de Educación (2009) en Capítulo I referido a sus Disposiciones Fundamentales establece lo siguiente:

Artículo 112. Cuando el treinta por ciento (30%) o más de los alumnos no alcancare la calificación mínima aprobatoria en las evaluaciones parciales, finales de lapso o revisión, se aplicará a los interesados dentro de los tres (3) días hábiles siguientes a la publicación de dicha calificación, una segunda forma de evaluación similar, sobre los mismos objetivos, contenidos y competencias, bajo la supervisión y control del Director del plantel o de cualquier otra autoridad designada por el Ministerio de Educación, Cultura y Deportes, todo ello sin perjuicio de los análisis que resulten aconsejables y procedentes según el caso. La calificación obtenida en esta segunda oportunidad será la definitiva.

2.3 Definición de Términos Básicos

Adición y Producto de los Números Naturales: Contenido programático de la asignatura Álgebra II donde se imparten las definiciones, propiedades y teoremas de los mismos.

Álgebra II: Asignatura del plan de estudio de la Licenciatura en Educación mención Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo que se cursa en cuarto semestre, en cuyo contenido programático se encuentra Adición y Producto de los Número Naturales.

Error: El error parece una buena forma de analizar modelos pedagógicos; es la piedra de toque de una mayor profesionalización del trabajo del enseñante. (Astolfi, 2003)

3. MARCO METODOLÓGICO

En el presente capítulo se muestran los referentes metodológicos que enmarcan a la investigación, el cual tiene como objeto determinar los errores que cometen los estudiantes de matemática, bajo la tipología de errores de Astolfi (2003).

3.1 Tipo y Diseño de la Investigación

El trabajo de investigación se enmarcó en el tipo descriptivo, en atención a lo referido por Hernández, Fernández y Baptista (1997, citando a Dankhe, 1986) en cuanto a que “los estudios descriptivos buscan especificar las propiedades importantes de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que sea sometido a análisis” (p. 61).

El diseño de investigación es de campo, no experimental y transeccional, en cuanto a los diseños de campo Tamayo y Tamayo (1999) menciona que:

Cuando los datos se recogen directamente de la realidad, por lo cual los denominamos primarios; su valor radica en que permiten cerciorarse de las verdaderas condiciones en que se han obtenido los datos, lo cual facilita su revisión o modificación en caso de surgir dudas. Conviene anotar que no toda información puede alcanzarse por esta vía, ya sea por limitaciones especiales o de tiempo, problemas de escasez o de orden ético (p. 72).

Hernández et al. (1997) en referencia a la investigación no experimental, la definen como “observar fenómenos tal y como se dan en su contexto natural, para después analizarlos.”(p. 154). De la misma manera, los autores exponen en cuanto a la investigación no experimental transeccional como una “recolección de datos en un solo momento, en un tiempo único. Su propósito es describir variables, y analizar su incidencia e interrelación en un momento dado”. (p. 156)

3.2 Sujetos de la Investigación

Tamayo y Tamayo (2004, citando a Salinas, Villarreal, Garza y Núñez, 2001) la población de estudio es el “conjunto de sujetos o unidades de observación que reúnen las características que se deben estudiar, que cumplen con los criterios de selección y a los cuales se desea extrapolar los resultados medidos y observados en la muestra”. (p. 64).

Para Hernández et al. (1997) la muestra es, en esencia, un subgrupo de la población. Digamos que es un subconjunto de elementos que pertenecen a ese conjunto definido en sus características al que llamamos población. Cabe destacar que el presente estudio constó con una población de 14 estudiantes cursantes de la asignatura de Álgebra II del Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Carabobo, periodo lectivo 1-2014, de los cuales 11 formaron parte de la muestra y los tres restantes conformaron el grupo piloto, lo que significa que se realizó un tipo de muestreo exhaustivo.

3.3 Procedimiento

Para Sierra (2004), el procedimiento se refiere a las “actividades y pasos secuenciales necesarios para llevar a cabo la investigación. Corresponde a las macro actividades de ejecución del estudio propiamente dicho” (p. 84). En la investigación descriptiva llevada a cabo, se cumplieron las siguientes etapas:

- ✓ Elaboración del instrumento, el cual es una prueba cerrada que consta de 17 ítems.
- ✓ Validez del instrumento, en esta etapa se acudió a cinco expertos para la validación del mismo.
- ✓ Confiabilidad, se empleó al método de Kuder – Richardson para determinar si la prueba es confiable o no.
- ✓ Aplicación del cuestionario a la muestra seleccionada de 11 estudiantes.
- ✓ Análisis de la información.

- ✓ Interpretación de los resultados.
- ✓ Elaboración de conclusiones y recomendaciones

3.4 Técnicas e Instrumentos de Recolección de Información

Sierra (2004, citando a Flames, 2001), menciona que “las técnicas de recolección de datos son directrices metodológicas que orientan científicamente la recopilación de información, datos u opiniones” (p. 71). De la misma forma, Sierra (2004, citando Best, 1975), define los instrumentos de recolección de datos como “aquellos objetos materiales que nos permiten adquirir y analizar datos mediante los cuales pueden ser comprobadas las hipótesis de la investigación” (p. 72).

El instrumento de recolección de datos, administrado fue una prueba objetiva; la cual contó con dos partes, una conceptual conformada por 11 preguntas, cada una con 3 opciones de respuestas, con una sola correcta. La segunda parte, de tipo procedimental estuvo conformada por 6 preguntas, cada una también con 3 opciones de respuestas con una sola correcta, pero, además con un espacio en blanco para que el estudiante realizara los procedimientos adecuados y así poder justificar su respuesta; de lo contrario la misma era anulada.

3.4.1 Validez

Según Hernández et al. (1997), en términos generales, la validez se refiere “al grado en que un instrumento realmente mide la variable que pretende medir” (p. 194). En tal sentido, esta investigación contó con la colaboración de cinco expertos, todos ellos profesores de la mención de Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación, quienes a través de su reflexión independiente emitieron juicios en torno a la validez del instrumento construido; los cuales en primera instancia, 3 de los mismos realizaron correcciones en los ítems N° 2, 6, 8, 13 y 16. Ya realizado el ajuste en los ítems antes mencionadas, se procedió a presentar nuevamente el instrumento, en los cuales cuatro de los expertos concordaron que el instrumento era aplicable.

3.4.2 Confiabilidad

Sierra (2004) establece que para determinar la confiabilidad de un instrumento de investigación, “se debe aplicar una prueba piloto a un grupo de sujetos con características similares a la muestra y con base a estos datos se efectúa la operación matemática” (p. 82).

Para calcular la confiabilidad del instrumento se utilizó el método de Kuder – Richardson que se aplica en pruebas de ítems dicotómicas, en las cuales existen respuestas correctas e incorrectas. Cabe destacar que los ítems del instrumento aplicado constaba con tres opciones de respuestas, de las cuales solo una era la correcta, por ende, se afirma que el instrumento consta de dos opciones de respuestas: correctas e incorrectas.

El instrumento fue aplicado a una prueba piloto de tres (3) estudiantes, se procedió en primer lugar para cada ítem a calcular p, que es la proporción de sujetos que respondieron de forma correcta un ítem sobre el total de sujetos. Luego se halló el valor de q, que es igual a $1 - p$, acto seguido se multiplicó $p \cdot q$ y se sumaron todos los valores, es decir $\sum p \cdot q$, en segundo lugar se calculó la varianza total y, por último, se aplicó la fórmula correspondiente:

$$Kr20 = \left(\frac{N}{N-1} \right) \left[1 - \left(\frac{\sum p \cdot q}{V_t} \right) \right] = 0,71$$

En donde:

Kr_{20} = Coeficiente de confiabilidad.

N= Número de ítems.

V_t = Varianza total de la prueba.

$\sum(p \cdot q)$ = Sumatoria de la varianza individual de los ítems.

$$Kr20 = \left(\frac{17}{17-1} \right) \left[1 - \left(\frac{1,78}{5,33} \right) \right]$$

$$Kr_{20} = \left(\frac{17}{16}\right) \left[1 - \left(\frac{1,78}{5,33}\right)\right]$$

$$Kr_{20} = 0,71$$

La confiabilidad resulto 0,71 en una escala del 0 al 1, la cual es altamente positiva y considera el instrumento confiable.

3.5 Técnicas de Análisis

Una vez aplicado el instrumento a la muestra, la cual está conformada por 11 estudiantes del cuarto semestre de la asignatura de Álgebra II, se procedió a recolectar los datos, se analizaron las respuestas y se elaboraron tres tablas de frecuencias una para la dimensión conceptual, otra para la dimensión procedimental y una para el total general de respuestas; estos datos permitieron obtener los porcentajes de las respuestas correctas, incorrectas y sin responder. Luego se procedió a realizar la distribución de frecuencia por indicador en ambas dimensiones, en donde se clasificaron según el error cometido de la tipología de Astolfi (2003). Además se efectuó la distribución de frecuencia en las respuestas por el tipo de error cometido en la dimensión conceptual y procedimental, también se comparó los errores presentes en las dimensiones y por último se analizaron los errores cometidos general.

4. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Luego de recopilada y organizada la información obtenida por medio del instrumento aplicado a los estudiantes de Álgebra II de la mención Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo, conforme al objetivo primordial de la investigación, se prosiguió a organizar, procesar y hacer los cálculos pertinentes, para el análisis e interpretación de la misma. Cabe mencionar que para el análisis de cada ítem se ha utilizado la tipología de errores de Astolfi (2003). Dicha tipología codifica y clasifica los errores de la siguiente forma:

Tipología de Errores de Astolfi (2003)
E₁: Errores debidos a la comprensión de las instrucciones
E₂: Errores debidos a los hábitos escolares (conocimientos previos) y mala comprensión.
E₃: Errores debidos al testimonio de las concepciones alternativas.
E₄: Errores debidos a las operaciones intelectuales implicadas.
E₅: Errores debidos a los procedimientos empleados.
E₆: Errores debidos a la sobrecarga cognitiva mediante el ejercicio.
E₇: Errores debidos a orígenes en otras disciplinas.
E₈: Errores debidos a la complejidad propia del contenido.

4.1 Presentación y análisis de los resultados por dimensión

4.1.1 Presentación de los resultados de la dimensión conceptual

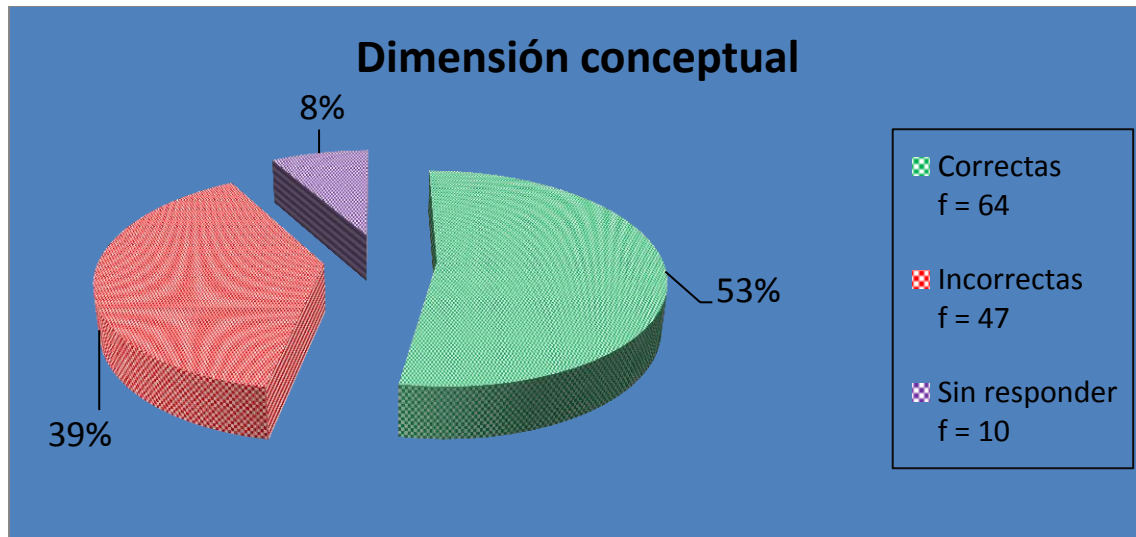
A continuación se presentaran los resultados de los 11 ítems que conforman la dimensión conceptual, se analizaran e interpretaran por medio de la tipología de errores de Astolfi (2003)

Tabla 1: Presentación de los resultados de la dimensión conceptual por tipo de respuesta dada a cada ítem.

Dimensión	Conceptual	Ítem	Indicador	C		I		S.R.		Total
				f	%	f	%	f	%	
		1	Reconoce la Definición de Adición de los Naturales	7	63,64	4	36,36	0	0	11
		2	Indica la Inyectividad de la Función Sucesor de los Naturales.	3	27,27	6	54,54	2	18,18	11
		3	Distingue los axiomas de la Adición de los Naturales.	9	81,82	2	18,18	0	0	11
		4	Identifica la Propiedad Conmutativa de la Adición de los Naturales.	6	54,54	5	45,45	0	0	11
		5	Reconoce la Unicidad y Existencia de Imagen del Producto de los Naturales.	6	54,54	4	36,36	1	9,09	11
		6	Distingue la Definición de Producto de los Naturales.	3	27,27	6	54,54	2	18,18	11
		7	Identifica la Propiedad Conmutativa del Producto de los Naturales.	7	63,64	4	36,36	0	0	11
		8	Distingue la Unicidad y Existencia de Imagen de la Adición de los Naturales.	2	18,18	5	45,45	4	36,36	11
		9	Identifica la Propiedad Asociativa del Producto de los Naturales.	9	81,82	2	18,18	0	0	11
		10	Indica la Unicidad de Imagen de la Función Sucesor de los Naturales.	7	63,64	3	27,27	1	9,09	11
		11	Identifica la Propiedad Distributiva del Producto a la Derecha respecto a la Adición de los Naturales.	5	45,45	6	54,54	0	0	11
		Total		64	52,89	47	38,84	10	8,25	121

Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 1: Resultados de la dimensión conceptual



Interpretación: Por medio de la información presentada tanto en la tabla 1 como en el gráfico N° 01, se puede visualizar que un 38,84% de los estudiantes encuestados respondieron de forma incorrecta; siendo los ítems N° 2, 6 y 11 de mayor frecuencia de respuestas erróneas con un 54,54%; en segundo lugar, los ítems 4 y 8 con un 45,45% y tercer lugar los ítems 1, 5 y 7 con un 36,36% lo que implica que los mayores errores cometidos por los estudiantes fueron en identificar la inyectividad de la función sucesor, distinguir la definición del producto e identificar la propiedad distributiva del producto a la derecha respecto a la adición, todo esto en los números naturales; de tal forma que un 8,26% no contestó, siendo el ítem N° 8 el de mayor frecuencia con un 36,36%; además se puede observar que un 52,89% de los encuestados respondieron de forma correcta siendo los ítems N° 3 y 9 los más frecuentes con 81,82%, lo cual refiere que los estudiantes distinguen los axiomas de la adición y además identifican la propiedad asociativa del producto de los números naturales, además la menor frecuencia de respuestas correctas la obtuvo el ítem 8 con un 18,18%. Finalmente, puede afirmarse que el significativo porcentaje de respuestas incorrectas sugiere que los sujetos en estudio, cometen errores en la resolución de los ejercicios de adición y producto en los números naturales destacándose deficiencias en los conocimientos previos y en los contenidos de la unidad.

4.1.2 Presentación de los resultados de la dimensión procedimental

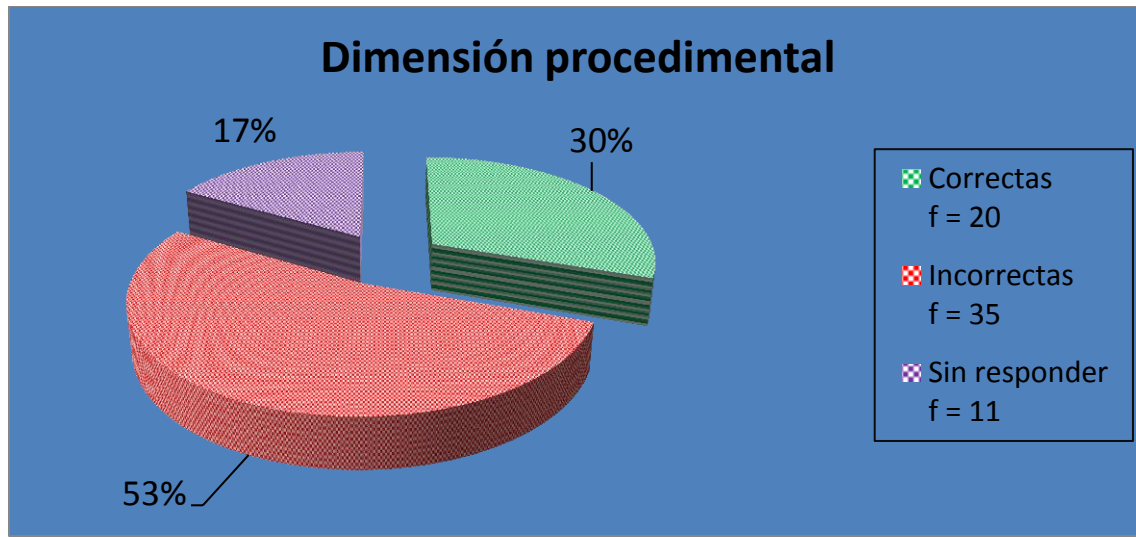
A continuación se presentaran los resultados de los seis ítems que conforman la dimensión procedimental, se analizaran e interpretaran por medio de la tipología de errores de Astolfi (2003).

Tabla 2: Presentación de los resultados de la dimensión procedimental por tipo de respuesta dada a cada ítem.

Dimensión	Procedimental	Ítem	Indicador	C		I		S.R.		Total
				f	%	f	%	f	%	
		12	Demuestra el Teorema del Sucesor de $P S(p)$ para la Adición de los Naturales.	4	36,36	6	54,54	1	9,09	11
		13	Comprueba el Método de Reducción al Absurdo de la Adición de los Naturales.	3	27,27	5	45,45	3	27,27	11
		14	Demuestra el Elemento Neutro del Producto en los Naturales.	3	27,27	7	63,63	1	9,09	11
		15	Demuestra la Propiedad Asociativa de la Adición de los Naturales.	3	27,27	7	63,63	1	9,09	11
		16	Demuestra el Elemento Neutro de la Adición en los Naturales.	5	45,45	5	45,45	1	9,09	11
		17	Comprueba el Método Contra Reciproco del Producto de los Naturales.	2	18,18	5	45,45	4	36,36	11
		Total		20	30,30	35	53,03	11	16,67	66

Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 2: Resultados de la dimensión procedimental



Interpretación: A través de la información presentada en la tabla 2 y gráfico N° 2, se pudo observar que un 53,03% contestó de forma incorrecta, siendo los ítems N° 14 y 15 los que mayor porcentaje obtuvieron con un 63,63%, en segundo lugar está el ítem N° 12 con un 54,54%, estos datos hacen referencia a que un porcentaje mayor a la mitad de los encuestados no saben demostrar el elemento neutro del producto y la propiedad asociativa de la adición de los Naturales.

Por otro lado, un 16,67% no contestó, siendo el ítem N° 17 con un 36,36% resaltando que en los estudiantes hay problemas de conocimientos previos. Por último un 30,3% contestó de manera correcta, siendo el ítem N° 16 con 45,45% el de mayor frecuencia, lo que indica que casi la mitad de los encuestados demuestra el elemento neutro de la adición en los naturales.

En resumen, se afirma que la problemática evidenciada en los ejercicios procedimentales, sobre los contenidos de adición y producto de los números naturales, responde a las deficiencias en los conocimientos previos y a la complejidad del contenido.

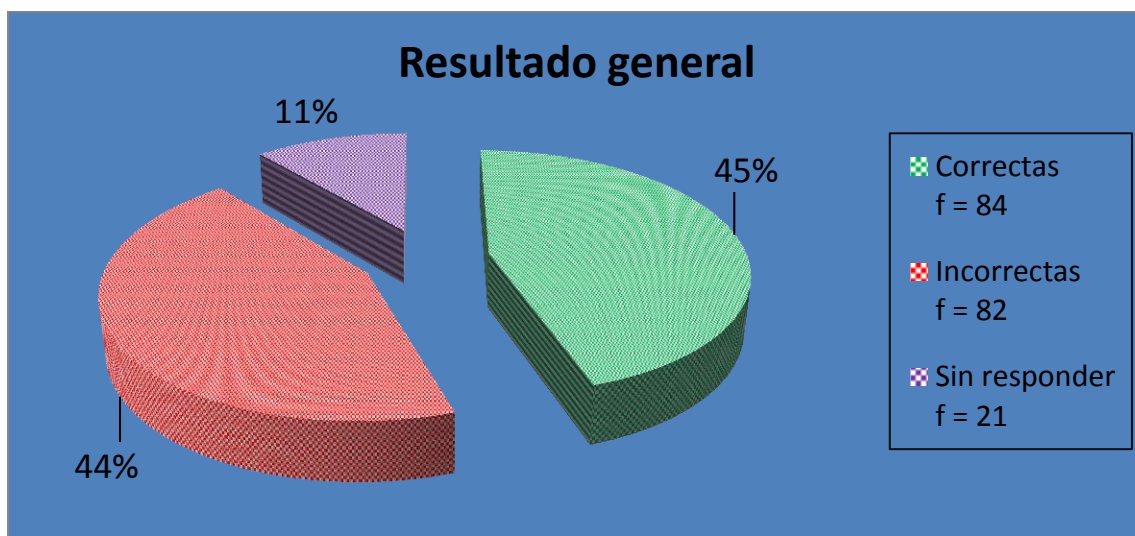
4.1.3 Total general de respuestas

Tabla 3: Total general por tipo de respuesta dada en todo el estudio.

Tipo de respuesta	Correctas		Incorrectas		Sin responder		Total de respuestas
	f	%	f	%	f	%	
Total	84	44,92	82	43,85	21	11,23	187

Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 3: Resultados total general



Interpretación: En la tabla N° 3, se detallan los resultados obtenidos en el instrumento aplicado, donde las respuestas incorrectas obtuvieron un 43,85% y las preguntas sin responder un 11,23%, por cuanto la suma de estas dos fue superior a la de las respuestas correctas que fue de un 44,92%; esto permite apreciar las debilidades que presentan los estudiantes en el contenido de adición y producto de los números naturales, de allí que los encuestados cometieron múltiples errores ya sean de conocimientos previos, por instrucciones o por la complejidad del contenido.

4.2 Análisis por indicador de la dimensión conceptual

Indicador: Reconoce la definición de adición de los Números Naturales.

Ítem N° 1: La definición de Adición de los Números Naturales $\forall k, l \in N$ es:

a. $k + S(l) = S(k + l)$	R.C
b. $k + S(l) = S(l + k)$	
c. $S(l) + k = S(k + l)$	

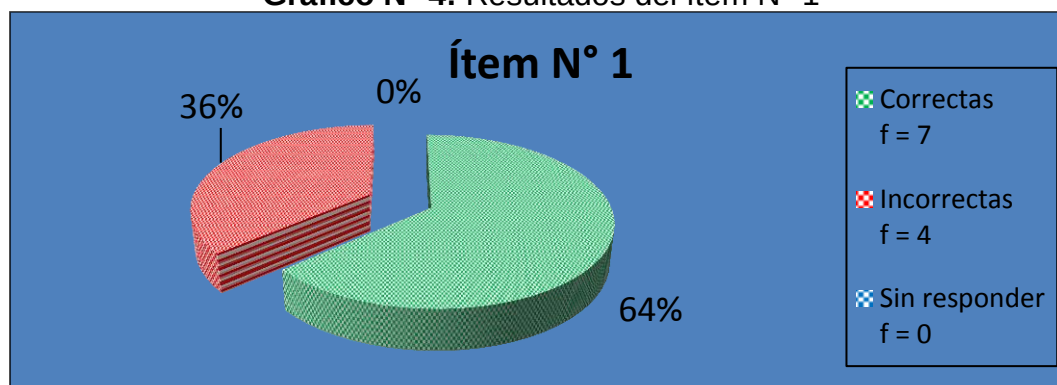
R.C: Respuesta Correcta

Tabla 4: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido en el ítem N° 1

Error cometido	f	%	Tipología de error
$k + S(l) = S(l + k)$	1	25	E ₈ : debido a la complejidad propia del contenido.
$S(l) + k = S(k + l)$	3	75	E ₄ : debido a las operaciones intelectuales implicadas.
Total	4	100	

Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 4: Resultados del ítem N° 1



Interpretación: En la tabla 4 y gráfico N° 4, se aprecia que un 36% de los encuestados respondió de forma incorrecta, siendo el error E₄; debido a las operaciones intelectuales implicadas el de mayor frecuencia, seguido del error E₈; debido a la complejidad propia del contenido; basado en la tipología de errores de Astolfi (2003), lo que indica que un porcentaje cercano a la mitad de los estudiantes presenta errores al momento de reconocer la definición de adición de los números naturales, y un número considerable de los mismos debido a las operaciones implicadas; destacándose el problema al

momento de relacionar la definición con las propiedades asociadas a la Adición de los Números Naturales. Por otro lado pudo apreciarse que un 64% de los encuestados respondió de manera correcta y no hubo preguntas sin responder.

Indicador: Indica la inyectividad de la función sucesor de los números naturales.

Ítem N° 2: Indique cuál de las siguientes expresiones representa la Inyectividad de la Función Sucesor:

a. $\forall n_1, n_2 \in N \ni S(n_1) = S(n_2) \rightarrow n_1 = n_2$	R.C
b. $\forall n_1, n_2 \in N \ni S(n_1) \neq S(n_2) \rightarrow n_1 \neq n_2$	
c. $\forall n_1, n_2 \in N \ni n_1 = n_2 \rightarrow S(n_1) = S(n_2)$	

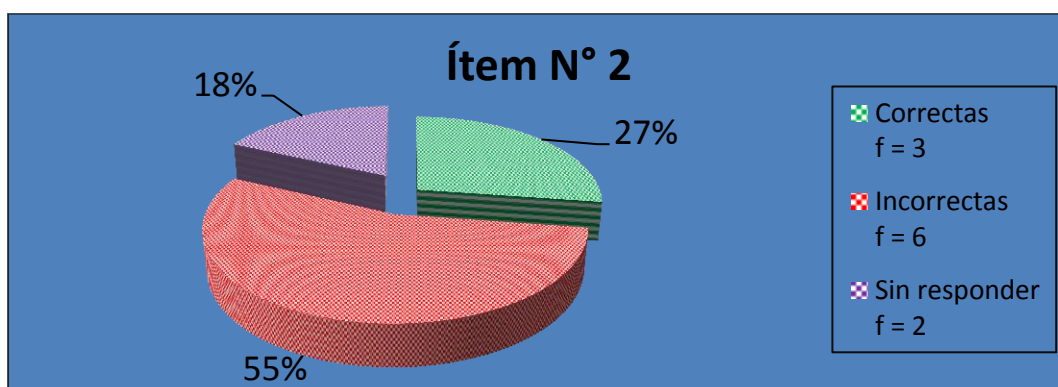
R.C: Respuesta Correcta

Tabla 5: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido en el ítem N° 2

Error cometido	f	%	Tipología de error
$S(n_1) \neq S(n_2) \rightarrow n_1 \neq n_2$	4	67	E ₈ : debido a la complejidad propia del contenido.
$n_1 = n_2 \rightarrow S(n_1) = S(n_2)$	2	33	E ₂ : debido a los conocimientos previos y mala comprensión
Total	6	100	

Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 5: Resultados del ítem N° 2



Interpretación: En la tabla 5 y gráfico N° 5 se evidencia que un 55% de los encuestados respondió de manera incorrecta; siendo el error E₂; debido a los conocimientos previos y mala comprensión el más frecuente seguido del error E₈;

debido a la complejidad propia del contenido, todo esto basado en la tipología de errores de Astolfi (2003). Lo que indica que más de la mitad de los estudiantes presentan problemas al momento de indicar la inyectividad de la función sucesor de los números naturales; todo esto debido a la mala interpretación del método contrarreciproco y a la confusión con la unicidad de imagen de la función sucesor. Se aprecia también que un minoritario 27% de los encuestados respondió de manera correcta y un 18% no respondió la pregunta.

Indicador: Distingue los axiomas de la adición de los números naturales.

Ítem N° 3: De los siguientes Axiomas, cual no pertenece a la Adición de los Números Naturales:

a. $\forall k, l \in N, k + S(l) = S(k + l)$	
b. $\forall n \in N, n + 0 = n$	
c. $\forall n, m \in N, n \cdot S(m) = n \cdot m + n$	R.C

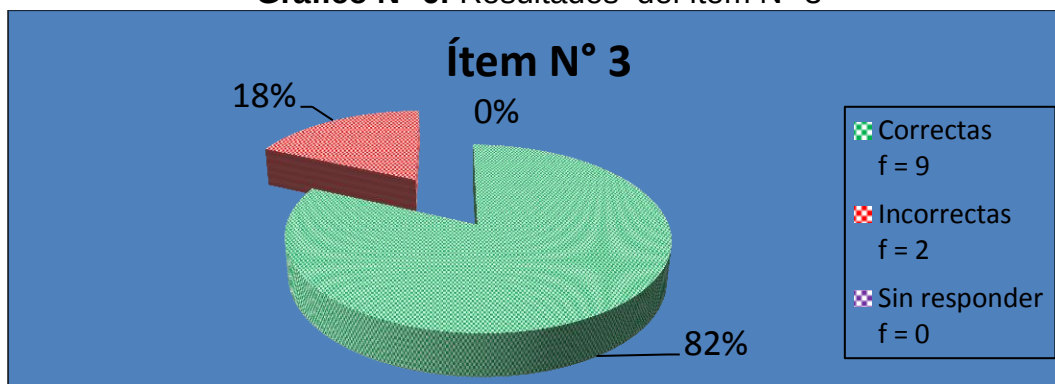
R.C: Respuesta Correcta

Tabla 6: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido en el ítem N° 3

Error cometido	f	%	Tipología de error
$k + S(l) = S(k + l)$	2	100	E ₂ : debido a los conocimientos previos y mala comprensión
Total	2	100	

Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 6: Resultados del ítem N° 3



Interpretación: En la tabla 6 y gráfico N° 6, se detalla que un 18% de los encuestados respondieron de manera incorrecta, infringiendo en el error E₂, debido a los

conocimientos previos y mala comprensión, basados en la tipología de errores de Astolfi (2003), indicando que los estudiantes no lograron distinguir los axiomas de la adición de los números naturales; mientras que un 82% de los encuestados contestó correctamente y no hubo preguntas sin responder.

Indicador: Identifica la propiedad conmutativa de la adición de los números naturales.

Ítem N° 4: La Propiedad Conmutativa de la Adición de los Números Naturales se denota:

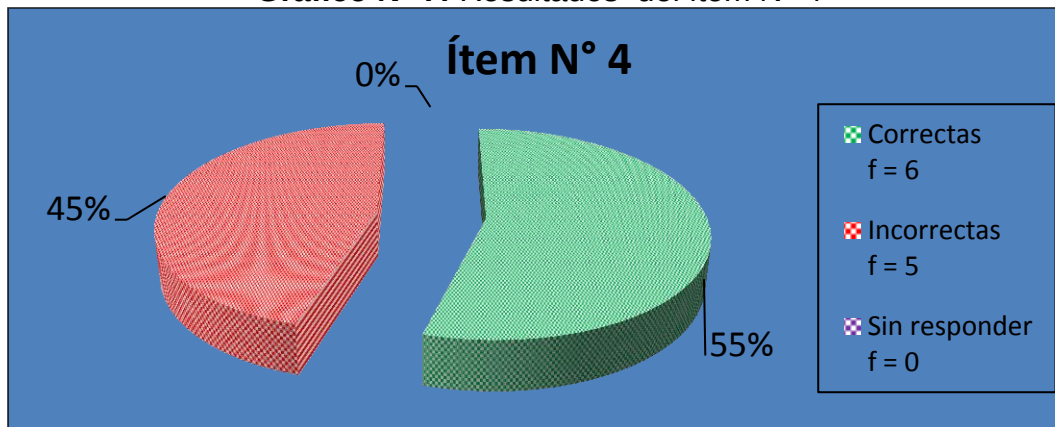
a. $\forall p, q, r \in N, (p + q) + r = q + (p + r)$		R.C: Respuesta Correcta
b. $\forall p, q \in N, p \cdot q = q \cdot p$		
c. $\forall p, q \in N, p + q = q + p$	R.C	

Tabla 7: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido en el ítem N° 4

Error cometido	f	%	Tipología de error
$(p + q) + r = q + (p + r)$	5	100	Eg: debido a la complejidad propia del contenido
Total	5	100	

Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 7: Resultados del ítem N° 4



Interpretación: En las tabla 7 y gráfico N° 7 se puede apreciar que un 45% de los estudiantes respondieron de forma incorrecta, siendo el único error presente el Eg: debido a la complejidad propia del contenido, basado en la tipología de errores de

Astolfi (2003). Ello refiere que un porcentaje cercano a la mitad de los encuestados presentan problemas al momento de identificar la propiedad conmutativa de la adición de los números naturales; el error que pudo haber sido ocasionado por la presencia en las demás alternativas de las propiedades de la adición y el producto de los números naturales, puesto que todas están poseen similitud en la estructura. Sin embargo, un 55% de los estudiantes respondió de forma correcta y no hubo preguntas sin responder.

Indicador: Reconoce la unicidad y existencia de imagen del producto de los números naturales.

Ítem N° 5: Indique la condición de Unicidad y Existencia de Imagen para que el Producto de los Números Naturales sea una Ley de Composición Interna:

a. $\forall m, n, p \in N, m = p \rightarrow m + n = p + n$ y $\forall m, n \in N, m + n \in N$	R.C
b. $\forall m, n, p \in N, m = p \rightarrow m \cdot n = p \cdot n$ y $\forall m, n \in N, m \cdot n \in N$	
c. $\forall m, n, p \in N, m \neq p \rightarrow m \cdot n \neq p \cdot n$ y $\forall m, n \in N, m \cdot n \in N$	

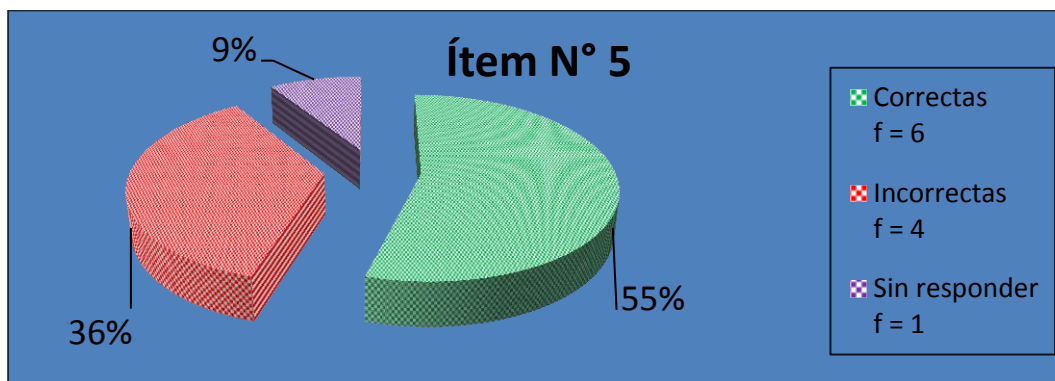
R.C: Respuesta
Correcta

Tabla 8: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido en el ítem N°5

Error cometido	f	%	Tipología de error
$m = p \rightarrow m \cdot n = p \cdot n$ y $m \cdot n \in N$	2	50	E ₈ : debido a la complejidad propia del contenido.
$m \neq p \rightarrow m \cdot n \neq p \cdot n$ y $m \cdot n \in N$	2	50	E ₂ : debido a los conocimientos previos y mala comprensión
Total	4	100	

Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 8: Resultados del ítem N° 5



Interpretación: En la tabla 8 y gráfico N° 8 se evidencia que un 36% de los estudiantes respondieron de forma incorrecta, siendo el error E_2 ; debido a conocimientos previos y mala comprensión y el error E_8 : debido a la complejidad propia del contenido los presentes en este Ítem, ambos con una misma frecuencia, basado en la tipología de errores de Astolfi (2003); destacando que este grupo de encuestados no logra indicar la condición de unicidad y existencia de imagen para que el producto de los números naturales sea una ley de composición interna. Este error fue ocasionado por la complejidad del contenido ya que también aparece la ley de composición interna de la adición. Por otro lado, se aprecia que un 55% de los encuestados respondió correctamente y un 9% dejó en blanco la respuesta.

Indicador: Distingue la definición de producto de los números naturales.

Ítem N° 6: La definición del producto de los números naturales $\forall m, n \in N$, es:

a. $n \cdot S(m) = m \cdot n + m$	
b. $n \cdot S(m) = n \cdot m + n$	R.C
c. $n \cdot S(m) = m + m \cdot n$	

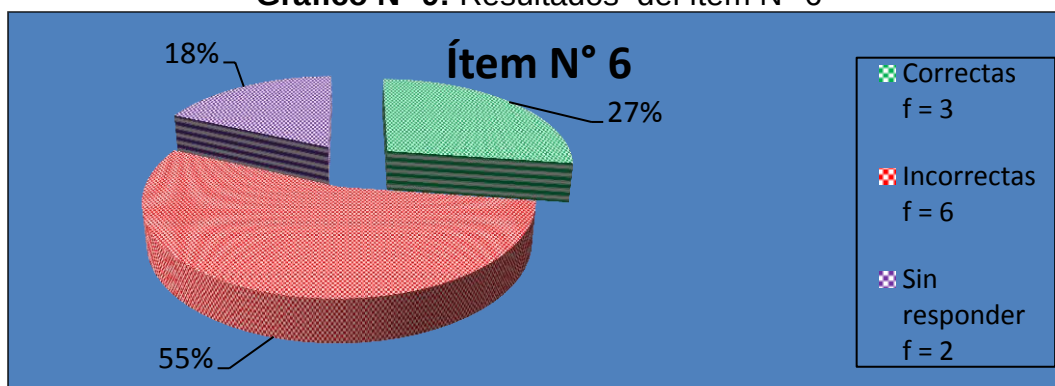
R.C: Respuesta Correcta

Tabla 9: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido en el ítem N° 6

Error cometido	f	%	Tipología de error
$n \cdot S(m) = m \cdot n + m$ $n \cdot S(m) = m + m \cdot n$	6	100	E _g : debido a la complejidad propia del contenido
Total	6	100	

Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 9: Resultados del ítem N° 6



Interpretación: En la tabla 9 y gráfico N° 9 se aprecia que un 55% de los encuestados respondieron de forma incorrecta, siendo el error E_g: debido a la complejidad propia del contenido, el único error presente, basado en la tipología de errores de Astolfi (2003). Ello indica que más de la mitad de los estudiantes encuestados presentan problemas al momento distinguir la definición de producto de los números naturales. Este error fue ocasionado ya que los estudiantes no logran precisar el orden de los términos presentes en dicha definición. También se aprecia que una minoría de la población 27% respondieron de forma correcta y solo un 18% no respondió la pregunta.

Indicador: Identifica la propiedad conmutativa del producto de los números naturales.

Ítem N° 7: La Propiedad Conmutativa del Producto de los Números Naturales se denota:

a. $\forall p, q, r \in N, (p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$	
b. $\forall p, q \in N, p \cdot q = q \cdot p$	R.C

c. $\forall p, q \in N, p + q = q + p$	
--	--

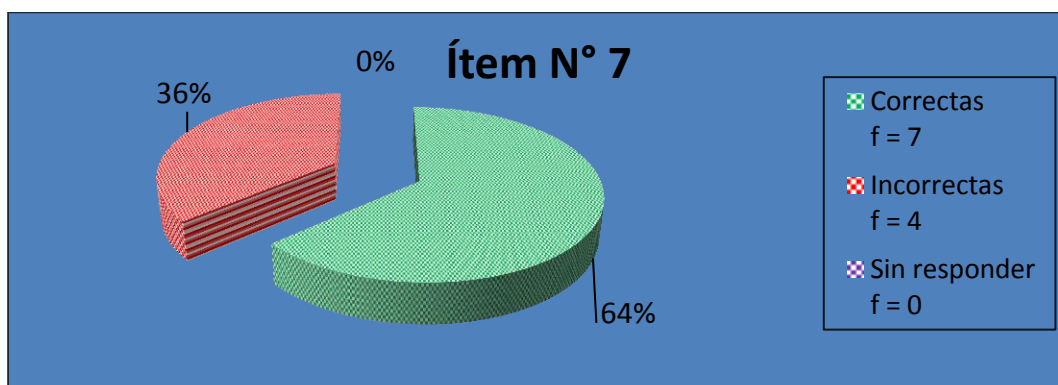
R.C: Respuesta Correcta

Tabla 10: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido en el ítem N° 7

Error cometido	f	%	Tipología de error
$(p.q).r = p.(q.r)$	3	75	E ₈ : debido a la complejidad propia del contenido.
$p + q = q + p$	1	25	E ₂ : debido a los conocimientos previos y mala comprensión
Total	4	100	

Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 10: Resultados del ítem N° 7



Interpretación: En la tabla 10 y gráfico N° 10 se evidencia que un 36% de los encuestados respondieron de forma incorrecta, siendo el error E₈: debido a la complejidad propia del contenido, y el E₂: debido a conocimientos previos y mala comprensión los presentes en este ítem, basado en la tipología de errores de Astolfi (2003). Esto indica que un grupo cercano a la mitad de la población no identifican la propiedad conmutativa del producto de los números naturales, este error fue ocasionado por la complejidad del contenido, ya que también se encuentran en el ítem las propiedades de la adición y el producto de los números naturales; y todas estas presentan una similitud en la estructura. También se pudo observar que un 64% de los encuestados respondieron correctamente y no hubo preguntas sin responder.

Indicador: Distingue la unicidad y existencia de imagen de la adición de los números naturales.

Ítem N° 8: Indique la condición de Unicidad y Existencia de Imagen para que la Adición de los Números Naturales sea una Ley de Composición Interna:

a. $\forall m, n, p \in N, m + n \neq p + n \rightarrow m \neq p$ y $\forall m, n \in N, m + n \in N$	R.C
b. $\forall m, n, p \in N, m + n = p + n \rightarrow m = p$ y $\forall m, n \in N, m + n \in N$	
c. $\forall m, n, p \in N, m \neq p \rightarrow m + n \neq p + n$ y $\forall m, n \in N, m + n \in N$	

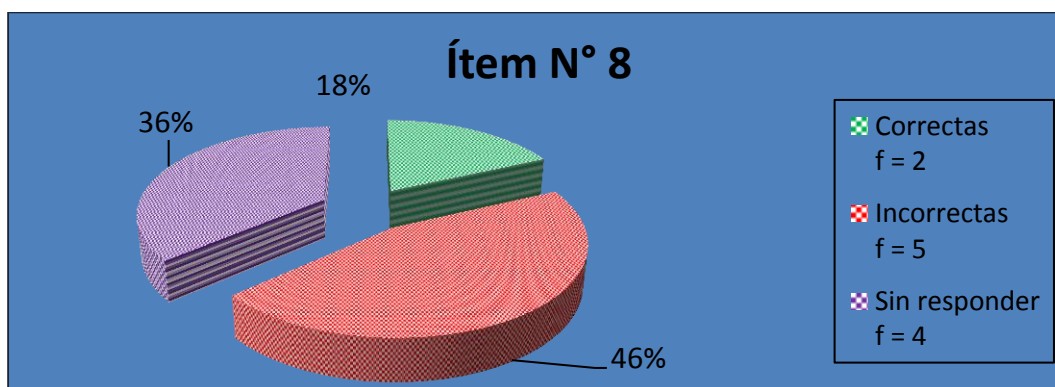
R.C: Respuesta Correcta

Tabla11: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido en el ítem N° 8

Error cometido	f	%	Tipología de error
$m + n = p + n \rightarrow m = p$ y $m + n \in N$	5	100	E ₈ : debido a la complejidad propia del contenido
Total	5	100	

Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 11: Resultados del ítem N° 8



Interpretación: En la tabla 11y gráfico N° 11 se aprecia que el 46% de los encuestados respondieron de manera incorrecta, siendo el único error presente el error E₈; debido a la complejidad propia del contenido, basado en la tipología de errores de Astolfi (2003). Esto permite apreciar que un porcentaje muy cercano a la mitad de la población, no distinguen la unicidad y existencia de imagen de la adición de los números naturales. Este error fue ocasionado por la confusión de la pregunta, en

donde también aparece la ley de composición interna de la adición. Se detalla también que una minoría de la población, 18% respondieron correctamente y un 36% no respondió la pregunta.

Indicador: Identifica la propiedad asociativa del producto de los números naturales.

Ítem N° 9: La Propiedad Asociativa del Producto de los Números Naturales $\forall a, b, c \in N$ es:

a. $(a \cdot b) = (b \cdot a)$	
b. $(a \cdot b) \cdot c + d = d + b \cdot (a \cdot c)$	
c. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	R.C

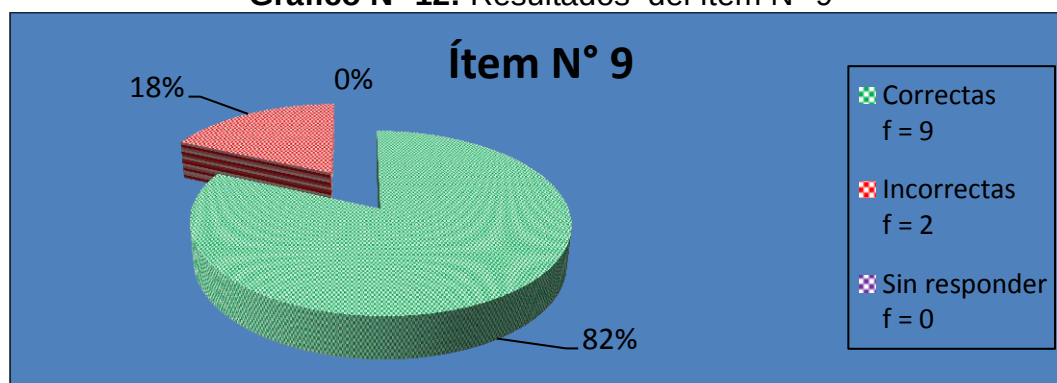
R.C: Respuesta Correcta

Tabla 12: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido en el ítem N° 9

Error cometido	f	%	Tipología de error
$(a \cdot b) = (b \cdot a)$	1	50	E ₈ : debido a la complejidad propia del contenido.
$(a \cdot b) \cdot c + d = d + b \cdot (a \cdot c)$	1	50	E ₂ : debido a los conocimientos previos y mala comprensión
Total	2	100	

Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 12: Resultados del ítem N° 9



Interpretación: En la tabla 12 y gráfico N° 12 se detalla que hubo una baja frecuencia de respuestas incorrectas, y los errores presentes fueron el E₂; debido a conocimientos previos y mala comprensión y el E₈: debido a la complejidad propia del contenido

ambos con el mismo porcentaje, basado en tipología de errores de Astolfi (2003). Se hace referencia a que un pequeño grupo de los encuestados no identifican la propiedad asociativa del producto de los números naturales. Este error fue ocasionado por la dificultad del contenido ya que, se encuentran también las propiedades de la adición y el producto de los números naturales, y estas presentan similitud en su estructura. Sin embargo es evidente que un 82% de los estudiantes respondieron acertadamente y no hubo preguntas sin responder.

Indicador: Indica la unicidad de imagen de la función sucesor de los números naturales.

Ítem N° 10: Indique cuál de las siguientes expresiones representa la Unicidad de Imagen de la Función Sucesor:

a. $\forall n_1, n_2 \in N \ni n_1 = n_2 \rightarrow S(n_1) = S(n_2)$	R.C.
b. $\forall n_1, n_2 \in N \ni S(n_1) \neq S(n_2) \rightarrow n_1 = n_2$	
c. $\forall n_1, n_2 \in N \ni S(n_1) = S(n_2) \rightarrow n_1 = n_2$	

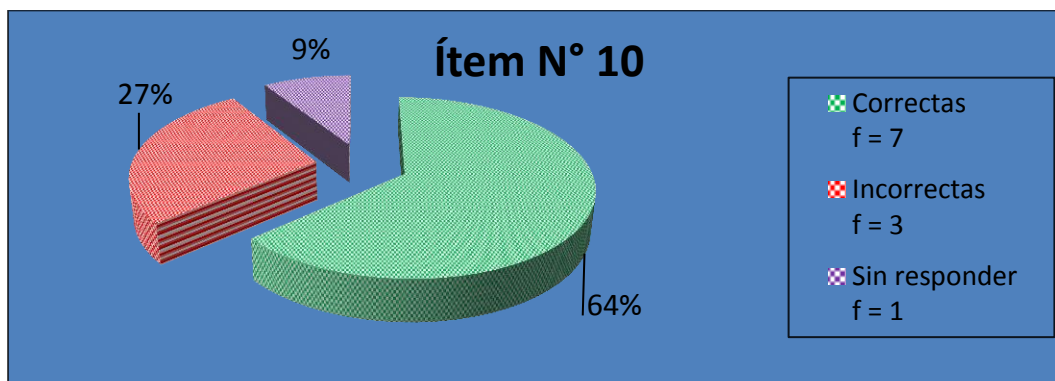
R.C: Respuesta Correcta

Tabla 13: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido en el ítem N° 10

Error cometido	f	%	Tipología de error
$S(n_1) \neq S(n_2) \rightarrow n_1 = n_2$	1	33	E ₂ : debido a los conocimientos previos y mala comprensión
$S(n_1) = S(n_2) \rightarrow n_1 = n_2$	2	67	E ₈ : debido a la complejidad propia del contenido.
Total	3	100	

Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 13: Resultados del ítem N° 10



Interpretación: En la tabla 13 y gráfico N° 13 se detalla que un 27% de los encuestados respondieron de forma incorrecta, y los errores presentes fueron el error E_2 ; debido a conocimientos previos y mala comprensión y el error E_8 ; debido a la complejidad propia del contenido, basados en la tipología de errores de Astolfi (2003). De tal manera que una baja proporción de los estudiantes no indican la unicidad de imagen de la función sucesor de los números naturales. Todo esto debido a la incorrecta interpretación del método contra recíproco y a la confusión con la inyectividad de imagen de la función sucesor. Se aprecia también que un 64% de los encuestados respondieron de manera correcta y un 9% no respondió la pregunta.

Indicador: Identifica la propiedad distributiva del producto a la derecha respecto a la adición en los números naturales.

Ítem N° 11: El Producto Distribuye a la Derecha respecto a la Adición definida en N y se denota:

a. $\forall a, b, c \in N, a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	
b. $\forall a, b, c \in N, (b + c) \cdot a = (a \cdot b) + (c \cdot b)$	
c. $\forall a, b, c \in N, (b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$	R.C.

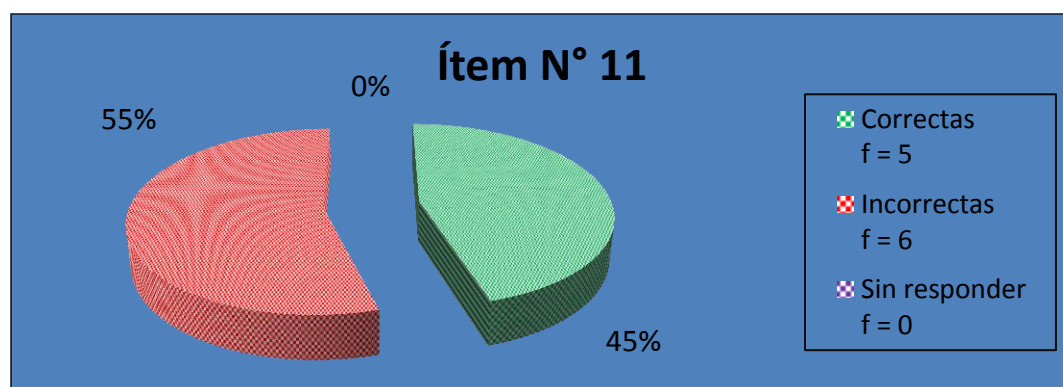
R.C: Respuesta Correcta

Tabla 14: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido en el ítem N° 12

Error cometido	f	%	Tipología de error
$(b + c) = (a.b) + (a.c)$	5	83	E ₈ :debido a la complejidad propia del contenido.
$(b + c).a = (a.b) + (c.b)$	1	17	E ₄ : debido a las operaciones intelectuales implicadas.
Total	6	100	

Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 14: Resultados del Ítem N° 11



Interpretación: En la tabla 14 y gráfico N° 14 se aprecia que un 55% de los encuestados seleccionaron la respuesta incorrecta, siendo los errores presentes el error E₄; debido a las operaciones intelectuales implicadas y el error E₈; debido a la complejidad propia del contenido; basados en la tipología de errores de Astolfi (2003). De allí que se puede apreciar que más de la mitad de los estudiantes presentan problemas al momento de identificar la propiedad distributiva del producto a la derecha respecto a la adición de los números naturales, este error fue ocasionado por la presencia en las demás alternativas, de las propiedades de la adición y el producto de los números naturales, y estas presentan similitud en sus estructuras. Se aprecia también que un 45% de los encuestados respondieron de manera correcta y no hubo preguntas sin responder.

4.3 Análisis por Indicador de la Dimensión Procedimental

En esta dimensión se le facilitó a los estudiantes un recuadro en blanco, en donde debían justificar las respuestas seleccionadas, de lo contrario la respuesta será invalidada.

Indicador: Demuestra el teorema del sucesor de P ($S(p)$) para la adición de los números naturales.

Ítem N° 12: $\forall p \in N$, el sucesor $S(p)$ es:

a. $p + 0$	
b. $p + 1$	R.C.
c. $p + s(1)$	

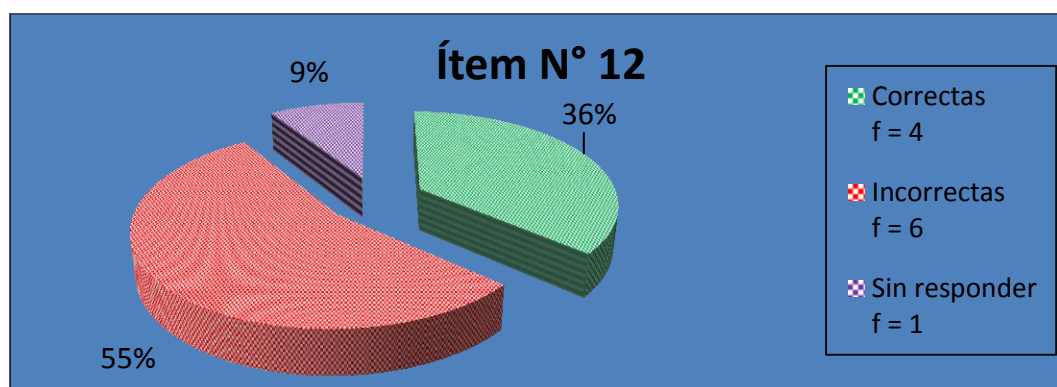
R.C: Respuesta Correcta

Tabla 15: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido en el ítem N° 12

Error cometido	f	%	Tipología de error
$p + 1$	1	17	E_1 : debido a la comprensión de las instrucciones
$p + s(1)$	1	17	E_4 : debido a las operaciones intelectuales implicadas.
$p + s(1)$	4	66	E_8 : debido a la complejidad propia del contenido.
Total	6	100	

Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 15: Resultados del ítem N° 12



Interpretación: En la tabla 15 y gráfico N° 15 se aprecia que las respuestas incorrectas obtuvieron un 55% y los errores presentes fueron el error E₁: debido a la comprensión de las instrucciones, el error E₄: debido a las operaciones intelectuales implicadas y el error E₈: debido a la complejidad propia del contenido, basado en la tipología de errores de Astolfi (2003), estos errores fueron debidos a la mala aplicación de la definición de la adición de los números naturales, también se resalta la frecuencia obtenida por las respuestas correctas que fue de un 36% y solo un 9% de los encuestados dejó en blanco la pregunta.

Indicador: Comprueba el método de reducción al absurdo de la adición de los números naturales.

Ítem N° 13: Al aplicar el método de reducción al absurdo, a la siguiente expresión:
 $\forall m, n \in N, m + n = 0 \rightarrow m = 0 \wedge n = 0$ se obtiene:

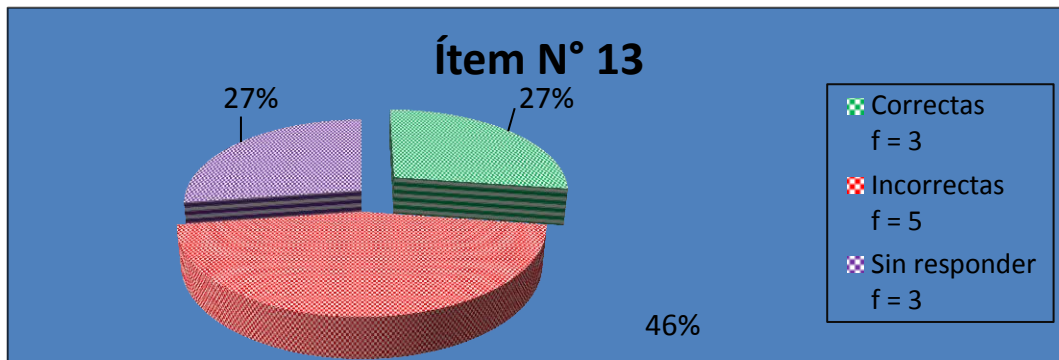
a. $\forall m, n \in N, m + n = 0 \wedge (m = 0 \vee n = 0)$		R.C: Respuesta Correcta
b. $\forall m, n \in N, m + n = 0 \wedge (m \neq 0 \vee n \neq 0)$		
c. $\forall m, n \in N, m + n = 0 \vee (m \neq 0 \wedge n \neq 0)$	R.C.	

Tabla 16: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido en el ítem N° 13

Error cometido	f	%	Tipología de error
$m + n = 0 \wedge (m = 0 \vee n = 0)$	3	60	E ₂ , debido a conocimientos previos y mala comprensión.
$m + n = 0 \wedge (m \neq 0 \vee n \neq 0)$	2	40	E ₁ : debido a la comprensión de las instrucciones.
Total	5	100	

Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 16: Resultados del ítem N° 13



Interpretación: En la tabla 16 y gráfico N° 16 se detalla que las respuestas incorrectas obtuvieron un 46% y los errores presentes fueron el error E_1 : debido a la comprensión de las instrucciones y el error E_2 : debido a conocimientos previos y mala comprensión, basado en la tipología de errores de Astolfi (2003), lo que se refiere a que un porcentaje cercano de la mitad de los estudiantes, presentan dificultades al momento de indicar el conectivo adecuado en la situación y las negaciones correspondientes. También se aprecia que tanto las respuestas correctas y las preguntas sin responder obtuvieron un minoritario 27%.

Indicador: Demuestra el elemento neutro del producto en los números naturales.

Ítem N° 14: $\forall n \in N$, $n \times 1$ es:

a. $n \times 0$	
b. 1	
c. n	R.C

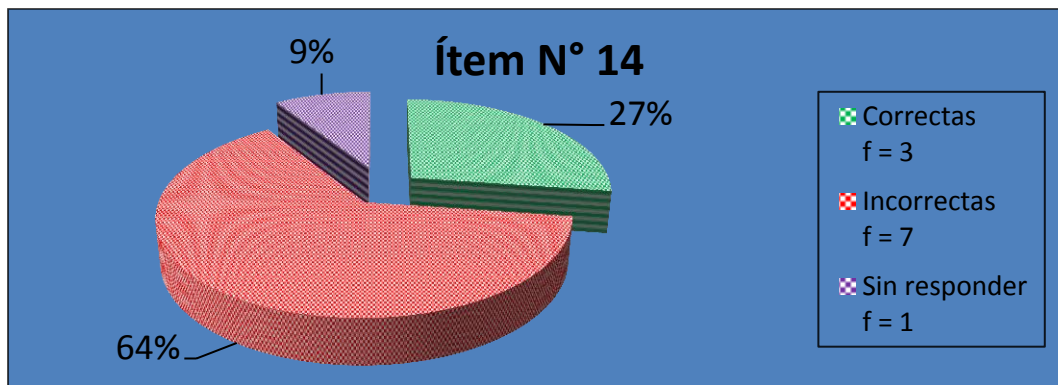
R.C: Respuesta Correcta

Tabla 17: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido en el ítem N° 14

Error cometido	f	%	Tipología de error
1	4	57	E_8 : debido a la complejidad propia del contenido.
n	3	43	E_1 : debido a la comprensión de las instrucciones.
Total	7	100	

Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 17: Resultados del ítem N° 14



Interpretación: En la tabla 17 y gráfico N° 17 se observa que las respuestas incorrectas obtuvieron un 64% siendo los errores presentes, el error E₁: debido a la comprensión de las instrucciones y el error E₈: debido a la complejidad propia del contenido, basado en la tipología de errores de Astolfi (2003), esto indica que más de la mitad de los encuestados presentan problemas al momento de aplicar la definición del producto en los números naturales ya que no logran precisar el orden de los términos presentes en dicha definición. Por otra parte, se indica que un grupo minoritario de la población respondió de forma correcta y el 9% dejó la respuesta en blanco.

Indicador: Demuestra la propiedad asociativa de la adición de los números naturales.

Ítem N° 15: La Propiedad Asociativa de la Adición de los Números Naturales es:

a. $\forall a, b, c \in N, (a + b) + c = a + (b + c)$	R.C.
b. $\forall a, b, c \in N, (a + b) + c \neq a + (b + c)$	
c. $\forall a, b, c \in N, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	

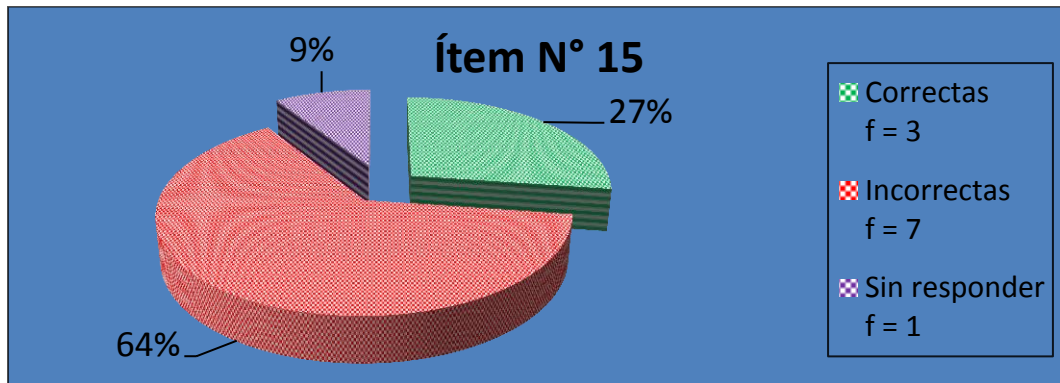
R.C: Respuesta Correcta

Tabla 18: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido en el ítem N° 15

Error cometido	f	%	Tipología de error
$(a + b) + c = a + (b + c)$	6	86	E ₁ : debido a la comprensión de las instrucciones.
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	1	14	E ₈ : debido a la complejidad propia del contenido.
Total	7	100	

Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 18: Resultados del Ítem N° 15



Interpretación: En la tabla 18 y gráfico N° 18 se observa que las respuestas incorrectas obtuvieron un 64%, siendo los errores presentes el error E_1 : debido a la comprensión de las instrucciones y el error E_8 : debido a la complejidad propia del contenido, basado en la tipología de errores de Astolfi (2003), ello permite apreciar que un alto porcentaje de los encuestados presentan problemas al momento de demostrar la propiedad asociativa de la adición de los números naturales, por cuanto no atendieron las indicaciones dadas al momento de realizar el instrumento, ya que se acotó que las demostraciones debían realizarse con letras genéricas y no con números, también se indica que un 27% de los encuestados respondieron de forma correcta y un 9% no respondieron la pregunta.

Indicador: Demuestra el elemento neutro de la adición en los números naturales.

Ítem N° 16: Indique cuál de las siguientes expresiones representa el Elemento Neutro en la Adición de los Números Naturales:

a. $\forall n, \in N, n + 0 = 0$	
b. $\forall n, \in N, n + 0 = n$	R.C
c. $\forall n \in N, n \times 1 = n$	

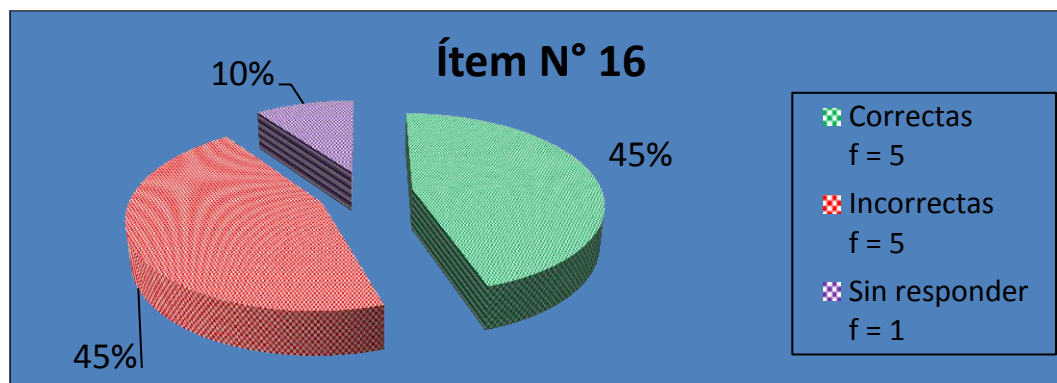
R.C: Respuesta Correcta

Tabla 19: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido en el ítem N° 16

Error cometido	f	%	Tipología de error
$n + 0 = n$	5	100	E ₁ : debido a la comprensión de las instrucciones.
Total	2	100	

Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 19: Resultados del Ítem N° 16



Interpretación: En la tabla 19 y gráfico N° 19 se observa que un 45% de los encuestados respondieron de forma incorrecta, siendo el error E₁: debido a la comprensión de las instrucciones el único presente en este ítem, basado en la tipología de errores de Astolfi (2003), esto destaca que un porcentaje cercano la mitad de los encuestados no logró demostrar el elemento neutro de la adición en los números naturales. Además se indica que un 45% de los estudiantes respondieron de forma correcta y un 10% no respondió la pregunta.

Indicador: Comprueba el método contra recíproco del producto de los números naturales.

Ítem N° 17: Al aplicarle el Método Contrarrecíproco a la siguiente expresión $\forall m, n \in N$, $m \cdot n = 0 \rightarrow m = 0 \vee n = 0$, resulta:

a. $m \neq 0 \vee n \neq 0 \rightarrow m \cdot n \neq 0$	
b. $m = 0 \wedge n = 0 \rightarrow m \cdot n \neq 0$	
c. $m \neq 0 \wedge n \neq 0 \rightarrow m \cdot n \neq 0$	R.C.

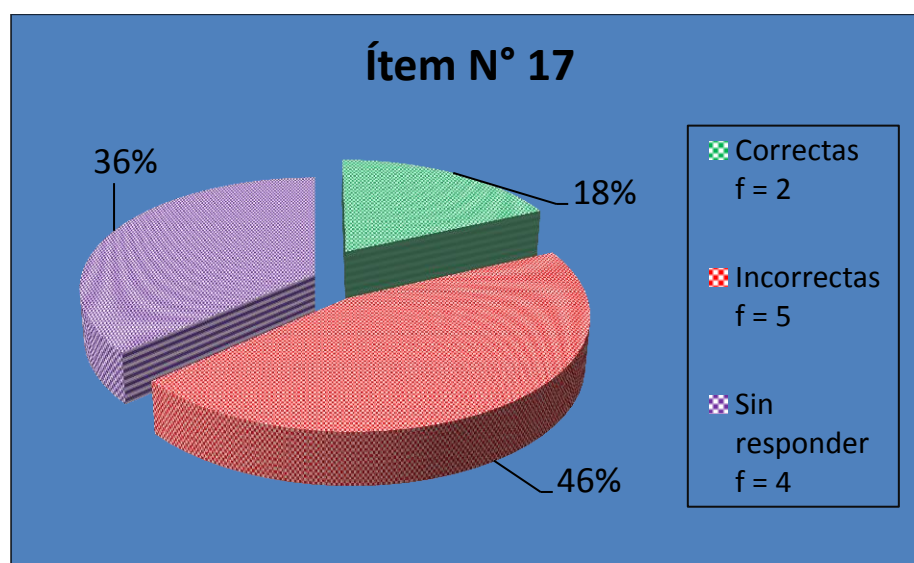
R.C: Respuesta Correcta

Tabla 20: Distribución de frecuencia por tipo y categoría de error cometido en el ítem N° 17

Error cometido	f	%	Tipología de error
$m \neq 0 \vee n \neq 0 \rightarrow m.n \neq 0$	3	60	E ₂ ; debido a conocimientos previos y mala comprensión.
$m \neq 0 \wedge n \neq 0 \rightarrow m.n \neq 0$	2	40	E ₁ ; debido a la comprensión de las instrucciones.
Total	5	100	

Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 20: Resultados del ítem N° 17



Interpretación: En la tabla 20 y gráfico N° 20 se detalla que las respuestas incorrectas obtuvieron un 46% y los errores presentes fueron el error E₁: debido a la comprensión de las instrucciones y el error E₂; debido a conocimientos previos y mala comprensión, basado en la tipología de errores de Astolfi (2003), lo que refiere a que un porcentaje cercano a la mitad de los estudiantes no comprueban el método contrarreciproco del producto de los números naturales, por cuanto presentan dificultades al momento de indicar el conectivo adecuado en la situación y las negaciones correspondientes. También se aprecia que las respuestas correctas obtuvieron un minoritario 18% y las preguntas sin responder un 36%.

4.4 Respuestas por error cometido

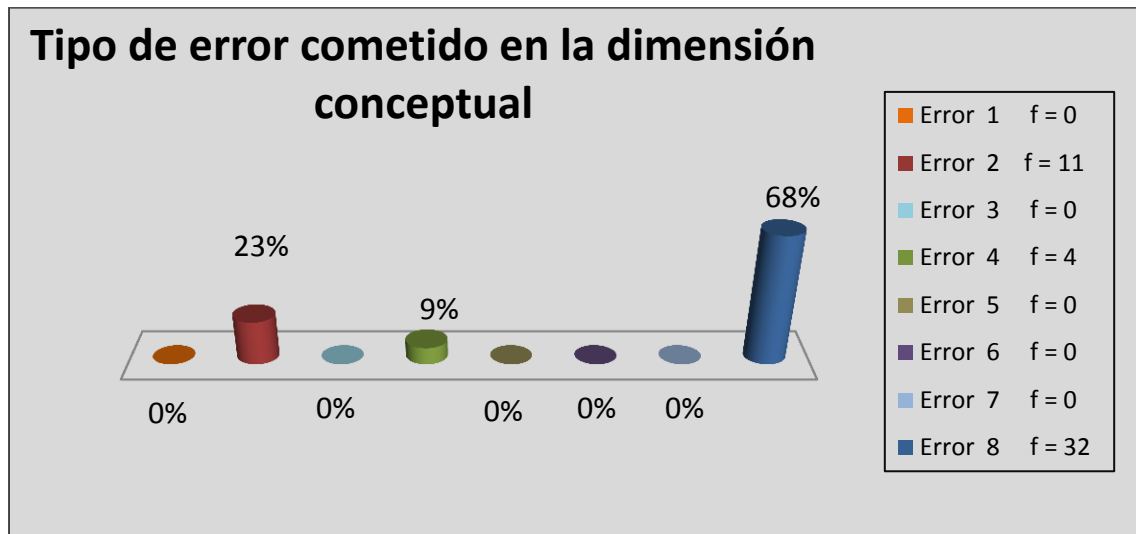
En esta sección se presentan los resultados de las respuestas por tipo de error cometido por los estudiantes en la dimensión conceptual y procedimental que fundamentan esta investigación.

Tabla N° 21: Distribución de frecuencia por tipo de error cometido.

Tipología de Errores		Conceptuales		Procedimentales		Total	%
		f	%	f	%		
E ₁	Errores debidos a la comprensión de las instrucciones	-	-	19	54	19	23
E ₂	Errores debidos a conocimientos previos y mala comprensión	11	23	6	17	17	21
E ₃	Errores debidos al testimonio de las concepciones alternativas	-	-	-	-	-	-
E ₄	Errores debidos a las operaciones intelectuales implicadas.	4	9	1	3	5	6
E ₅	Errores debidos a los procedimientos empleados.	-	-	-	-	-	-
E ₆	Errores debidos a la sobrecarga cognitiva mediante el ejercicio.	-	-	-	-	-	-
E ₇	Errores debidos a orígenes en otras disciplinas.	-	-	-	-	-	-
E ₈	Errores debidos a la complejidad propia del contenido.	32	68	9	26	41	50
Total		47	100	35	100	82	100

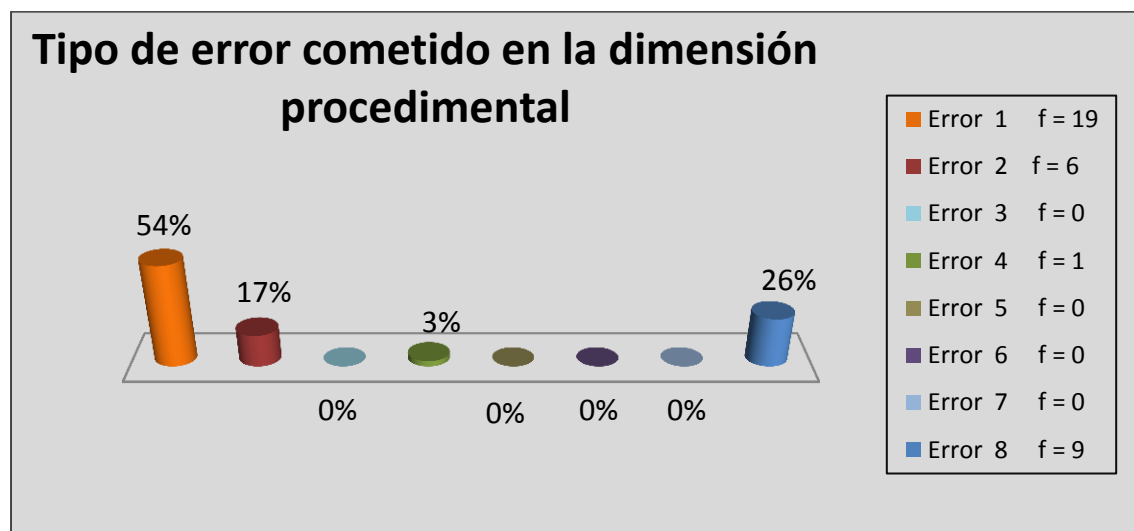
Fuente: Jaimes y Natera (2015)

Gráfico N° 21: Resultados por tipo de error cometido en la dimensión conceptual



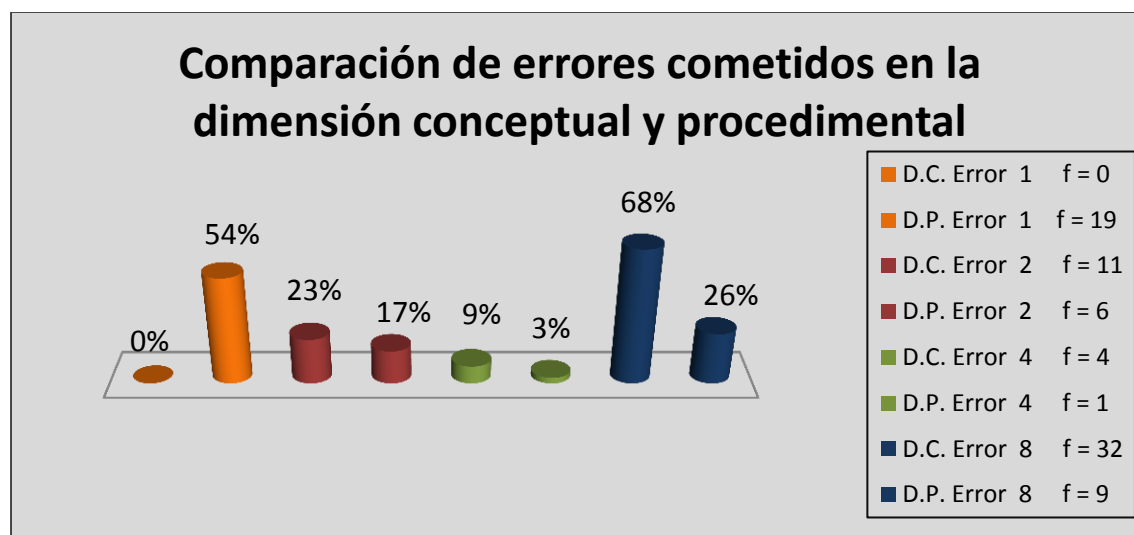
Interpretación: En la tabla 21 y gráfico N° 21, se detallan los errores cometidos en la dimensión conceptual, en donde la mayor frecuencia la obtuvo el error E_8 : debido a la complejidad propia del contenido con un 68% seguido del error E_2 : debido a conocimientos previos y mala comprensión con un 23%, por último el error E_4 : debido a las operaciones intelectuales implicadas con un 9%. Cabe destacar que, el error E_1 : debido a la comprensión de las instrucciones, el error E_3 : debido al testimonio de las concepciones alternativas, el error E_5 : debido a los procedimientos empleados, el error E_6 : debido a la sobrecarga cognitiva mediante el ejercicio y el error E_7 : debido a orígenes en otras disciplina no se encontraron en la producción del instrumento, basados en la tipología de errores de Astolfi (2003). Se destaca en esta dimensión, la complejidad que les genera a los estudiantes, el efectuar las distintas definiciones y teoremas referentes a la Adición y Producto de los Números Naturales.

Gráfico N° 22: Resultados por tipo de error cometido en la dimensión procedimental



Interpretación: En la tabla 21 y gráfico N° 21, se detallan los errores cometidos en la dimensión procedimental, la mayor frecuencia la obtuvo el error E₁: debido a la comprensión de las instrucciones con un 54%, seguido del error E₈: debido a la complejidad propia del contenido con un 26%, luego el error E₂: debido a conocimientos previos y mala comprensión con un 17% y por último el error E₄: debido a las operaciones intelectuales implicadas con un 3%, además los errores E₃: debido al testimonio de las concepciones alternativas, el error E₅: debido a los procedimientos empleados, el error E₆: debido a la sobrecarga cognitiva mediante el ejercicio y el error E₇: debido a orígenes en otras disciplinas; no estuvieron presentes al momento de los encuestados realizar el instrumento, basados en la tipología de errores de Astolfi (2003). Todo esto indica que los estudiantes no acataron las instrucciones dadas al momento de realizar el instrumento, de la misma forma se destacaron deficiencias tanto en los conocimientos previos como en la ejecución de las definiciones y propiedades de la Adición y Producto de los Números Naturales.

Gráfico N° 23: Comparación de resultados por tipo de error cometido en las dimensiones conceptual y procedimental

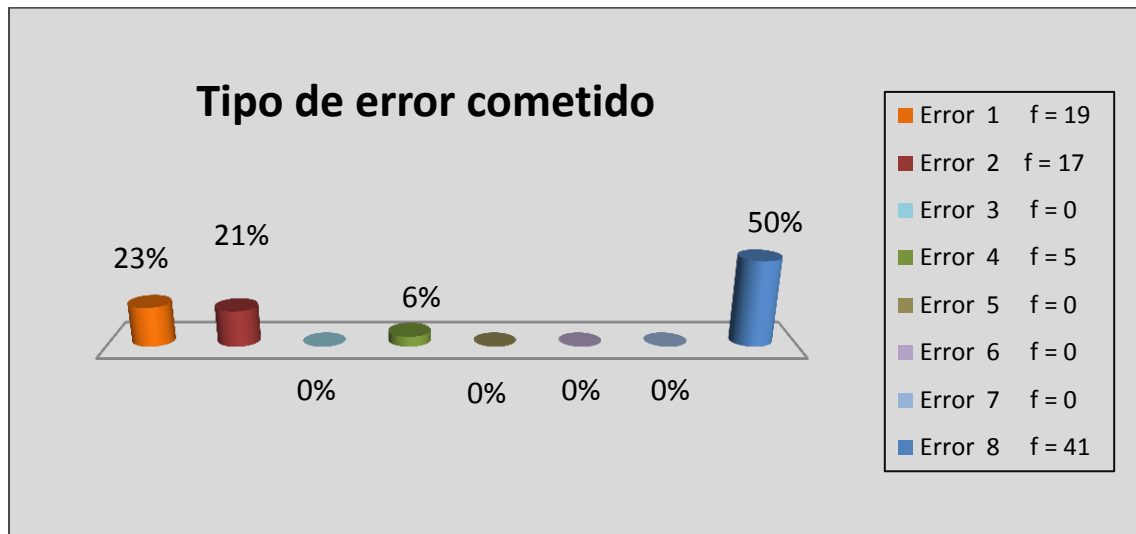


D.C.: Dimensión Conceptual

D.P: Dimensión Procedimental

Interpretación: En la tabla 21 y gráfico N° 23 se comparan los errores cometidos por los estudiantes tanto en la dimensión conceptual como la procedimental basados en la tipología de errores de Astolfi (2003), en donde el error E_1 : debido a la comprensión de las instrucciones, no se encuentra presente en la dimensión conceptual y en dimensión procedimental es el de mayor frecuencia con un 54%, por su parte el error E_2 : debido a conocimientos previos y mala comprensión tiene presencia en ambas dimensiones, en la conceptual tiene un 23% y en la procedimental un 17%, el error E_4 : debido a las operaciones intelectuales implicadas es el de menor frecuencia en ambas dimensiones, en la conceptual con un 9% y en la procedimental con un 3%, por último el error E_8 : debido a la complejidad propia del contenido es el de mayor frecuencia en la dimensión conceptual con un 68%, por cuanto en la dimensión procedimental obtiene un 26%. Por otra parte, el error E_3 : debido al testimonio de las concepciones alternativas, el error E_5 : debido a los procedimientos empleados, el error E_6 : debido a la sobrecarga cognitiva mediante el ejercicio y el error E_7 : debido a orígenes en otras disciplinas, no están presentes en ninguna de estas dimensiones.

Gráfico N° 24: Resultados por tipo de error cometido



Interpretación: En la tabla 21 y gráfico N° 24, se detallan los errores cometidos por los estudiantes en la dimensión conceptual y procedimental descrita en la tipología de errores de Astolfi (2003), donde la mayor frecuencia de errores la tuvo el error E_8 : debido a la complejidad propia del contenido con un 50%, seguido por el error E_1 : debido a la comprensión de las instrucciones con un 23%, luego el error E_2 : debido a conocimientos previos y mala comprensión con un 21% y por último el error E_4 : debido a las operaciones intelectuales implicadas con un 6%, los errores E_3 : debido al testimonio de las concepciones alternativas, el error E_5 : debido a los procedimientos empleados, el error E_6 : debido a la sobrecarga cognitiva mediante el ejercicio y el E_7 : debido a orígenes en otras disciplina no se encontraron en la producción del instrumento. Estos resultados indican que la mitad de los estudiantes presentan problemas debido a la complejidad que les genera el efectuar las distintas definiciones y teoremas referentes a la Adición y Producto de los Números Naturales, así como acatar las instrucciones dadas al momento de realizar el instrumento, de la misma forma se mostraron deficiencias en los conocimientos previos.

CONCLUSIONES

De acuerdo a los objetivos planteados en la investigación, se logró observar la presencia del error en casi la mitad de la resolución de los ítems propuestos en el instrumento, de tal manera que en lo que respecta a la dimensión conceptual se pudo visualizar que un 38,84% de los estudiantes encuestados respondió de forma incorrecta, por otra parte un 8,26% no contestó y un 52,89% de los encuestados lo hizo de forma correcta. Así mismo, se pudo apreciar la presencia del error en la dimensión procedimental donde un 53,03% respondió de forma incorrecta, un 16,67% se abstuvo de responder y un 30,30% respondió correctamente.

En lo que respecta a la dimensión conceptual, en ésta se reportó un 38,84% de respuestas incorrectas, el error más frecuente fue E₈: debido a la complejidad propia del contenido con un 68% relacionado con el trabajo didáctico en el cual se pone en juego los métodos de enseñanza; seguido del error E₂: debido a conocimientos previos y mala comprensión con un 23%, lo que implica que los estudiantes carecen de un aprendizaje previo del contenido; por último el error E₄: debido a las operaciones intelectuales implicadas con un 9% que resultan de las exigencias del docente y de los programas escolares que superan el desarrollo cognitivo del estudiante; en esta dimensión se destaca la complejidad que les genera a los estudiantes, el efectuar las distintas definiciones y teoremas referentes a la Adición y Producto de los Números Naturales.

Adicionalmente, cabe señalar que el error E₁: debido a la comprensión de las instrucciones, el error E₃: debido al testimonio de las concepciones alternativas, el error E₅: debido a los procedimientos empleados, el error E₆: debido a la sobrecarga cognitiva mediante el ejercicio y el error E₇: debido a orígenes en otras disciplina, forman parte de la tipología de errores de Astolfi (2003), no se apreciaron en la producción del instrumento.

Por su parte, en la dimensión procedimental en la cual se reportó un 53,03% de respuestas incorrectas, el error más frecuente fue E_1 : debido a la comprensión de las instrucciones con un 54% esto tiene relación con el lenguaje propio de cada disciplina, seguido del error E_8 : debido a la complejidad propia del contenido con un 26% relacionado con el trabajo didáctico en el cual se pone en juego los métodos de enseñanza, luego el error E_2 : debido a conocimientos previos y mala comprensión con un 17% y por último el error E_4 : debido a las operaciones intelectuales implicadas con un 3%; todo ello indica, que los encuestados no acataron las instrucciones dadas al momento de realizar el instrumento, de la misma forma se destacaron deficiencias tanto en los conocimientos previos como en la ejecución de las definiciones y propiedades de la Adición y Producto de los Números Naturales.

Asimismo, cabe mencionar que el error E_3 : debido al testimonio de las concepciones alternativas, el error E_5 : debido a los procedimientos empleados, el error E_6 : debido a la sobrecarga cognitiva mediante el ejercicio y el error E_7 : debido a orígenes en otras disciplinas; que también forma parte de la tipología errores establecida por Astolfi (2003), no estuvieron presentes al momento de los encuestados realizar el instrumento.

Al realizar la comparación de los errores presentes en ambas dimensiones se pudo apreciar que el error E_1 : debido a la comprensión de las instrucciones, no se encuentra presente en la dimensión conceptual mientras que en la dimensión procedimental este error es el más frecuente con un 54%; por su parte, el error E_2 : debido a conocimientos previos y mala comprensión, en la dimensión conceptual obtuvo un 23% y en la procedimental un 17%; el error E_4 : debido a las operaciones intelectuales implicadas es el de menor frecuencia en ambas dimensiones, en la conceptual con un 9% y en la procedimental con un 3%; finalmente el error E_8 : debido a la complejidad propia del contenido es el de mayor frecuencia en la dimensión conceptual con un 68%, en lo que respecta a la dimensión procedimental adquirió una frecuencia de 26%. Por otra parte, el error E_3 : debido al testimonio de las concepciones alternativas, el error E_5 : debido a los procedimientos empleados, el error E_6 : debido a la sobrecarga cognitiva mediante el

ejercicio y el error E_7 : debido a orígenes en otras disciplinas, no están presentes en ninguna de estas dimensiones.

Definitivamente, se afirma la presencia del error por parte de los estudiantes donde la mayor frecuencia es representada por el error E_8 : debido a la complejidad propia del contenido con un 50%, seguido por el error E_1 : debido a la comprensión de las instrucciones con un 23%, luego el error E_2 : debido a conocimientos previos y mala comprensión con un 21% y por último el error E_4 : debido a las operaciones intelectuales implicadas con un 6%; estos resultados indican que la mitad de los estudiantes presentan problemas debido a la complejidad que les genera el efectuar las distintas definiciones y teoremas referentes a la Adición y Producto de los Números Naturales, así como acatar las instrucciones dadas al momento de realizar el instrumento, de la misma forma se observó deficiencias en los conocimientos previos. Cabe destacar que, el error E_3 : debido al testimonio de las concepciones alternativas, el error E_5 : debido a los procedimientos empleados, el error E_6 : debido a la sobrecarga cognitiva mediante el ejercicio y el E_7 : debido a orígenes en otras disciplina; no se encontraron en la producción del instrumento.

RECOMENDACIONES

Una vez analizados los resultados de la investigación “Errores que cometen los estudiantes en el contenido Adición y Producto de Números Naturales del programa de la asignatura Álgebra II del plan de estudio de la Licenciatura en Educación mención Matemática que oferta la Facultad de Ciencias de la Educación, es necesario proponer una serie de acciones que le den continuidad a dicho estudio.

En primera instancia, se le recomienda a los docentes de Algebra II:

- Realizar los ajustes necesarios relacionados con el trabajo didáctico que le permita al estudiante gozar de una educación de mejor calidad, motivado a que el error más frecuente en la dimensión conceptual de esta investigación es el

error E_8 : debido a la complejidad propia del contenido, en el cual, se pone en duda la eficacia de los métodos de enseñanza empleados por el docente.

- Diseñar los instrumentos de evaluación, empleando un lenguaje adecuado que le permita al estudiante comprender las exigencias del docente, ya que en el presente estudio el error más frecuente en la dimensión procedimental es el error E_1 : debido a la comprensión de las instrucciones; es decir que el docente al momento de elaborar las evaluaciones, emplea un lenguaje poco entendible para el estudiante.

En segunda instancia, se recomienda a los estudiantes:

- Emplear estrategias de aprendizajes que les permita tener una mejor perspectiva del contenido, las cuales, los motivaran a esforzarse por comprender la simbología matemática y así facilitar la interpretación de las instrucciones al momento de resolver algún ejercicio; todo esto debido a que la complejidad del contenido es el error más frecuente en la dimensión conceptual y aunado a esto en la procedimental el error fue el debido a las instrucciones; de allí que, queda claro que para la resolución de problemas es necesario tener dominio de las definiciones para así comprender las instrucciones.

En tercera instancia, se recomienda al Departamento de Matemática:

- Realizar cursos, talleres y charlas de inducción que les permita tanto a los docentes como a los estudiantes implementar estrategias innovadoras de enseñanza y aprendizaje, con la finalidad darles a conocer herramientas que faciliten la interacción entre ellos, para así promover verdaderos cambios; ya que, los resultados de este estudio permitieron observar que el error más frecuente en los estudiantes es el error E_8 : debido a la complejidad propia del contenido.

REFERENCIAS

- Astolfi, J. (2003). *El error, un medio para enseñar*. Sevilla, España: Diada Editora.
- Borjón, E., Hernández, J. y Sosa, L. (2014). Reflexiones del Profesor de Matemática al Analizar los Errores de los Estudiantes. *ALME*, vol. 27. 1933-1943.
- Cañibano, A., D'Andrea, R. y Sastre P. (2014). Errores u Obstáculos Epistemológicos. *ALME*, vol. 27, 227-234
- Constitución* de la República Bolivariana de Venezuela (2000). Gaceta Oficial de la República Bolivariana de Venezuela N° 5453 (Extraordinaria). Distribuidora ML. C.A. Caracas.
- García Suarez, J., Lupiañez, J. y Segovia, I. (2011). *Errores y dificultades de estudiantes mexicanos de primer curso universitario en la resolución de tareas algebraicas*. Granada, España.
- Gil, F., & Gómez, E. (2011). *Errores cometidos por los estudiantes en el contenido de teoría de conjuntos según la Teoría de Astolfi*. (Tesis de pregrado) Universidad de Carabobo, Nagueagua, Venezuela.
- Guevara, R. (2010), *Errores en los contenidos de matemática que presentan los estudiantes en la asignatura Matemática I en la Universidad de Oriente*. (Tesis de pregrado) Universidad de Oriente, Cumana, Venezuela.
- Hernández, R., Fernández C. y Baptista, P. (1999). *Metodología de la Investigación*. Colombia: Editorial Mc Graw Hill.
- Izaguirre, Y., & Martínez, Y. (2011). *Errores que cometen los estudiantes de la mención Matemática de la FaCE-UC al manejar el contenido de Límite según la taxonomía de Astolfi*". (Tesis de pregrado) Universidad de Carabobo, Nagueagua, Venezuela.
- Ley Orgánica de Educación* (2009). Gaceta Oficial de la República Bolivariana de Venezuela N° 5929 (Extraordinario) Agosto 15, 2009. Distribuidora ML. C.A. Caracas.

- Marvez, J., & Rumbos, I. (2012). *Errores que cometen los estudiantes de la mención Matemática de la FaCE-UC, en el contenido de teoría de conjuntos de Álgebra I*, (Tesis de pregrado) Universidad de Carabobo, Nagueagua, Venezuela.
- Mijares, H. (2013). *Errores que cometen los estudiantes en el contenido integrales indefinidas de la Unidad Curricular Cálculo II, en el cuarto semestre de la mención Matemática de la FaCE-UC*. (Tesis de pregrado) Universidad de Carabobo, Nagueagua, Venezuela.
- Murillo, M., & Salina, A. (2011). *Errores manifestados por los estudiantes en conocimientos previos de Matemática desde la Teoría de Astolfi. Con una muestra de 142 estudiantes del primer semestre de la FaCE-UC de la asignatura Lógica-Matemática*. (Tesis de pregrado) Universidad de Carabobo, Nagueagua, Venezuela.
- Popper, K. (1980). *La lógica de la investigación científica*. Madrid, España
- Radillo, M. (2011). Obstáculos y Errores en el Aprendizaje de la Geometría Euclídeana, relacionados con la Traducción entre Códigos del Lenguaje Matemático, en el nivel licenciatura. *ALME*, vol. 24, 429-438
- Radillo, M. (2013) Análisis Lingüístico de Errores en la Solución de Problemas de Geometría Euclídeana. *ALME*, vol. 26, 251-260
- Rico, L. (1995) *Errores en el Aprendizaje de la Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Sierra, C. (2004) *Estrategias para la Elaboración de un Proyecto de Investigación*. Maracay, Venezuela: Ed. Insertos Médicos de Venezuela C.A.
- Tamayo, M. (1999). *Aprende a Investigar*. Bogotá, Colombia: Arfo Editores Ltda.

Anexo

Anexo A: Tabla de Operacionalización

Objetivo General: Analizar los errores que cometen los estudiantes en Adición y Producto de los Números Naturales del cuarto semestre de la asignatura de Álgebra II adscrita al Departamento de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación en el periodo 1-2015, según la Taxonomía de Astolfi				
Variable	Definición Conceptual de la Variable	Dimensiones	Indicadores	Ítems
Errores cometidos por los estudiantes en Adición y Producto de los Números Naturales.	Astolfi (2003) menciona que “los errores sólo pueden ser “fallos” de un sistema que no ha funcionado correctamente, fallos que hay que castigar. Y esto se traduce de muchas maneras convergentes.	Conceptual	- Reconoce la Definición de Adición de los Números Naturales.	1
			- Indica la Inyectividad de Imagen de la Función Sucesor de los Números Naturales.	2
			- Distingue los axiomas de la Adición de los Números Naturales.	3
			- Identifica la Propiedad Conmutativa de la Adición de los Números Naturales.	4
			- Reconoce la Unicidad y Existencia de Imagen del Producto de los Números Naturales.	5
			- Distingue la Definición de Producto de los Números Naturales.	6
			- Identifica la Propiedad Conmutativa del Producto de los Números Naturales.	7
			- Distingue la Unicidad y Existencia de Imagen de la Adición de los Números Naturales.	8
			- Identifica la Propiedad Asociatividad del Producto de los Números Naturales.	9

Objetivo General: Analizar los errores que cometen los estudiantes en Adición y Producto de los Números Naturales del cuarto semestre de la asignatura de Álgebra II adscrita al Departamento de Matemática y Física de la Facultad de Ciencias de la Educación en el periodo 1-2015, según la Taxonomía de Astolfi

Variable	Definición Conceptual de la Variable	Dimensiones	Indicadores	Ítems
Errores cometidos por los estudiantes en Adición y Producto de los Números Naturales.	Astolfi (1999) menciona que “los errores sólo pueden ser “fallos” de un sistema que no ha funcionado correctamente, fallos que hay que castigar. Y esto se traduce de muchas maneras convergentes.	Conceptual	- Indica la Unicidad de Imagen de la Función Sucesor de los Números Naturales.	10
			- Identifica la Propiedad Distributiva del Producto a la Derecha respecto a la Adición Números Naturales.	11
		Procedimental	- Demuestra el Teorema del Sucesor de P ($S(p)$) para la Adición de los Números Naturales.	12
			- Comprueba el Método de Reducción al Absurdo de la Adición de los Números Naturales.	13
			- Demuestra el Elemento Neutro del Producto en los Números Naturales.	14
			- Demuestra la Propiedad Asociativa de la Adición de los Números Naturales.	15
			- Demuestra el Elemento Neutro de la Adición en los Números Naturales.	16
			- Comprueba el Método Contra Reciproco del Producto de los Números Naturales.	17

Anexo B: Carta a los Expertos



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
CATEDRA: DISEÑO DE INVESTIGACIÓN



Profesor(a): _____

Estimado Docente:

Cumplimos con participarle que usted ha sido seleccionado en calidad de experto, para la validación del instrumento que fue elaborado con el fin de recabar información necesaria para la investigación titulada. “Errores que comenten los estudiantes en el contenido Adición y Producto de Números Naturales según la Tipología de errores de Astolfi (2003), la cual es realizada por los bachilleres Jaimes Aimara y Natera Carlos, como requisito para obtener el título de Licenciado en Educación mención Matemática, correspondiente al semestre 1-2015

Esperando de usted su valiosa colaboración

Jaimes Aimara

Natera Carlos

Anexo:

- Objetivos de la Investigación
- Tabla de especificaciones
- Instrumento
- Formato de Validación

Anexo C: Instrucciones



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
CATEDRA: DISEÑO DE INVESTIGACIÓN



INSTRUMENTO DE RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

El presente instrumento tiene como objeto la evaluación de los errores que cometen los estudiantes en Adición y Producto de los Números Naturales, con el fin de analizar las deficiencias mostradas.

INSTRUCCIONES PARA EL LLENADO

Este formulario se ha redactado con la finalidad de llenar cada uno de los datos que se les solicita; además cabe destacar que este es totalmente anónimo, tiene un lapso de duración de 60 minutos para responder las 17 preguntas cerradas que conforman el instrumento, las cuales están distribuidas en dos partes: una primera parte conceptual y otra procedimental.

Datos Socioeducativos:

Edad: _____ Sexo: F () M ()
Tipo de Estudiante: Regular () Repitiente ()
Cuántas veces: _____

GRACIAS POR SU COLABORACIÓN

Anexo D: Instrumento

PARTE I: A continuación se presentan 11 preguntas cerradas, las cuales deberá seleccionar marcando con una X en el recuadro correspondiente de la respuesta correcta:

1.) La definición de Adición de los Números Naturales $\forall k, l \in N$ es:

d. $k + S(l) = S(k + l)$	
e. $k + S(l) = S(l + k)$	
f. $S(l) + k = S(k + l)$	

2.) Indique cuál de las siguientes expresiones representa la Inyectividad de la Función Sucesor:

d. $\forall n_1, n_2 \in N \ni S(n_1) = S(n_2) \rightarrow n_1 = n_2$	
e. $\forall n_1, n_2 \in N \ni S(n_1) \neq S(n_2) \rightarrow n_1 \neq n_2$	
f. $\forall n_1, n_2 \in N \ni n_1 = n_2 \rightarrow S(n_1) = S(n_2)$	

3.) De los siguientes Axiomas, cual no pertenece a la Adición de los Números Naturales:

d. $\forall k, l \in N, k + S(l) = S(k + l)$	
e. $\forall n \in N, n + 0 = n$	
f. $\forall n, m \in N, n \cdot S(m) = n \cdot m + n$	

4.) La Propiedad Conmutativa de la Adición de los Números Naturales se denota:

d. $\forall p, q, r \in N, (p + q) + r = q + (p + r)$	
e. $\forall p, q \in N, p \cdot q = q \cdot p$	
f. $\forall p, q \in N, p + q = q + p$	

5.) Indique la condición de Unicidad y Existencia de Imagen para que el Producto de los Números Naturales sea una Ley de Composición Interna:

d. $\forall m, n, p \in N, m = p \rightarrow m + n = p + n$ y $\forall m, n \in N, m + n \in N$	
e. $\forall m, n, p \in N, m = p \rightarrow m \cdot n = p \cdot n$ y $\forall m, n \in N, m \cdot n \in N$	
f. $\forall m, n, p \in N, m \neq p \rightarrow m \cdot n \neq p \cdot n$ y $\forall m, n \in N, m \cdot n \in N$	

6.) La definición del Producto de los Números Naturales $\forall m, n \in N$, es:

d. $n \cdot S(m) = m \cdot n + m$	
e. $n \cdot S(m) = n \cdot m + n$	
f. $n \cdot S(m) = m + S(n)$	

7.) La Propiedad Conmutativa del Producto de los Números Naturales se denota:

d. $\forall p, q, r \in N, (p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$	
e. $\forall p, q \in N, p \cdot q = q \cdot p$	
f. $\forall p, q \in N, p + q = q + p$	

8.) Indique la condición de Unicidad y Existencia de Imagen para que la Adición de los Números Naturales sea una Ley de Composición Interna:

d. $\forall m, n, p \in N, m + n \neq p + n \rightarrow m \neq p$ y $\forall m, n \in N, m + n \in N$	
e. $\forall m, n, p \in N, m + n = p + n \rightarrow m = p$ y $\forall m, n \in N, m + n \in N$	
f. $\forall m, n, p \in N, m \neq p \rightarrow m + n \neq p + n$ y $\forall m, n \in N, m + n \in N$	

9.) La Propiedad Asociativa del Producto de los Números Naturales es:

d. $\forall a, b \in N, (a \cdot b) = (b \cdot a)$	
e. $\forall a, b, c, d \in N, (a \cdot b) \cdot c + d = d + (a \cdot b) \cdot c$	
f. $\forall a, b, c \in N, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	

10.)Indique cuál de las siguientes expresiones representa la Unicidad de Imagen de la Función Sucesor:

d. $\forall n_1, n_2 \in N \ni n_1 = n_2 \rightarrow S(n_1) = S(n_2)$	
e. $\forall n_1, n_2 \in N \ni S(n_1) \neq S(n_2) \rightarrow n_1 = n_2$	
f. $\forall n_1, n_2 \in N \ni S(n_1) = S(n_2) \rightarrow n_1 = n_2$	

11.)El Producto Distribuye a la Derecha respecto a la Adición definida en N y se denota:

d. $\forall a, b, c \in N, a.(b + c) = (a.b) + (a.c)$	
e. $\forall a, b, c \in N, (b + c).a = (a.b) + (c.b)$	
f. $\forall a, b, c \in N, (b + c).a = (b.a) + (c.a)$	

PARTE II: A continuación se presentan 6 preguntas cerradas, las cuales deberá seleccionar marcando con una X en el recuadro correspondiente de la respuesta correcta, además deberá justificar su respuesta en el cuadro presente; de lo contrario la respuesta será invalidada.

12.) $\forall p \in N$, *elsucesor* $S(p)$ es:

d. $p + 0$	
e. $p + 1$	
f. $p + s(1)$	

13.) Al aplicar el método de reducción al absurdo, a la siguiente expresión:

$\forall m, n \in N, m + n = 0 \rightarrow m = 0 \wedge n = 0$ se obtiene:

g. $\forall m, n \in N, m + n = 0 \wedge (m = 0 \vee n = 0)$	
h. $\forall m, n \in N, m + n = 0 \wedge (m \neq 0 \vee n \neq 0)$	
i. $\forall m, n \in N, m + n = 0 \vee (m \neq 0 \wedge n \neq 0)$	

14.) $\forall n \in N, n \times 1$ es:

d. $n \times 0$	
e. 1	
f. n	

15.)La Propiedad Asociativa de la Adición de los Números Naturales es:

d. $\forall a, b, c \in N, (a + b) + c = a + (b + c)$	
e. $\forall a, b, c \in N, (a + b) + c \neq a + (b + c)$	
f. $\forall a, b, c \in N, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	

--

16.)Indique cuál de las siguientes expresiones representa el Elemento Neutro en la Adición de los Números Naturales:

d. $\forall n, \in N, n + 0 = 0$	
e. $\forall n, \in N, n + 0 = n$	
f. $\forall n \in N, n \times 1 = n$	

--

17.) Al aplicarle el Método Contra Recíproco a la siguiente expresión $\forall m, n \in \mathbb{N}$,
 $m \cdot n = 0 \rightarrow m = 0 \vee n = 0$, resulta:

d. $m \neq 0 \vee n \neq 0 \rightarrow m \cdot n \neq 0$	
e. $m = 0 \wedge n = 0 \rightarrow m \cdot n \neq 0$	
f. $m \neq 0 \wedge n \neq 0 \rightarrow m \cdot n \neq 0$	

MUCHAS GRACIAS

Anexo E: Validaciones



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
CÁTEDRA: DISEÑO DE INVESTIGACIÓN



VALIDACIÓN DE INSTRUMENTOS

En el presente formato, se presentan varios aspectos a considerar para validar los ítems que conforman el instrumento. Para ello se brindan dos (2) alternativas (SI-NO) para que seleccione la opción que considere correcta y, al final, puede realizar las observaciones que considere pertinentes en el espacio designado para ello.

Experto: Yenedith García

Autor (a, es): Jaimes Aimara y Natera Carlos

ÍTEM	ASPECTOS A CONSIDERAR									
	Redacción adecuada		Coherencia interna		Lenguaje ajustado al nivel		Pertinencia con los objetivos a medir		Mide lo que pretende	
	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
1	✓		✓		✓		✓		✓	
2	✓		✓		✓		✓		✓	
3	✓		✓		✓		✓		✓	
4	✓		✓		✓		✓		✓	
5	✓		✓		✓		✓		✓	
6	✓		✓		✓		✓		✓	
7	✓		✓		✓		✓		✓	
8	✓		✓		✓		✓		✓	
9	✓		✓		✓		✓		✓	
10	✓		✓		✓		✓		✓	
11	✓		✓		✓		✓		✓	
12	✓		✓		✓		✓		✓	
13	✓		✓		✓		✓		✓	
14	✓		✓		✓		✓		✓	
15	✓		✓		✓		✓		✓	
16	✓		✓		✓		✓		✓	
17	✓		✓		✓		✓		✓	

CONSIDERACIONES GENERALES	SÍ	NO	OBSERVACIONES
La hoja de presentación del instrumento es pulcra y contiene instrucciones claras y precisas para que se puedan emitir las respuestas			
El instrumento está presentado adecuadamente. En caso de no ser así señale cuáles aspectos se deben mejorar			
Los ítems se ordenaron de manera lógica y secuencial, y están adaptados a la tabla de operacionalización o de especificaciones			
Se evidencia en la redacción de los objetivos general y específicos, las bases teóricas que sustentan la investigación			
Los ítems son adecuados para recolectar la información necesaria y pertinente a la investigación. De ser negativa su respuesta, sugiera los ítems a modificar, incluir y/o eliminar			
La redacción de los ítems no sugieren la respuesta (sesgo). De ser negativa la respuesta indique cuáles ítems presentan esa condición y deben ser, por tanto, modificados			

OBSERVACIONES: _____

VALIDEZ			
APLICABLE	☒	NO APLICABLE	☐
APLICABLE ATENDIENDO A LAS OBSERVACIONES			

Validado por: <i>Yenedith García</i>	e-mail: <i>yegarcia16@yahoo.com</i>
Cédula de Identidad: <i>24299534</i>	Teléfono(s): <i>0414-4251921</i>
Firma: <i>ym58</i>	Fecha: <i>25/02/15</i>



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
CÁTEDRA: DISEÑO DE INVESTIGACIÓN



VALIDACIÓN DE INSTRUMENTOS

En el presente formato, se presentan varios aspectos a considerar para validar los ítems que conforman el instrumento. Para ello se brindan dos (2) alternativas (SI-NO) para que seleccione la opción que considere correcta y, al final, puede realizar las observaciones que considere pertinentes en el espacio designado para ello.

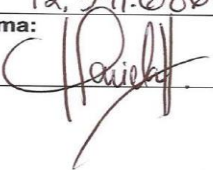
Experto: Mariela Lilibeth Herrera Ruiz
Autor (a, es): Jaimes Olimara y Natera Carlos

ÍTEM	ASPECTOS A CONSIDERAR									
	Redacción adecuada		Coherencia interna		Lenguaje ajustado al nivel		Pertinencia con los objetivos a medir		Mide lo que pretende	
	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
1	✓		✓		✓		✓		✓	
2	✓		✓		✓		✓		✓	
3	✓		✓		✓		✓		✓	
4	✓		✓		✓		✓		✓	
5	✓		✓		✓		✓		✓	
6	✓		✓		✓		✓		✓	
7	✓		✓		✓		✓		✓	
8	✓		✓		✓		✓		✓	
9	✓		✓		✓		✓		✓	
10	✓		✓		✓		✓		✓	
11	✓		✓		✓		✓		✓	
12	✓		✓		✓		✓		✓	
13	✓		✓		✓		✓		✓	
14	✓		✓		✓		✓		✓	
15	✓		✓		✓		✓		✓	
16	✓		✓		✓		✓		✓	
17	✓		✓		✓		✓		✓	

CONSIDERACIONES GENERALES	SÍ	NO	OBSERVACIONES
La hoja de presentación del instrumento es pulcra y contiene instrucciones claras y precisas para que se puedan emitir las respuestas	✓		
El instrumento está presentado adecuadamente. En caso de no ser así señale cuáles aspectos se deben mejorar	✓		
Los ítems se ordenaron de manera lógica y secuencial, y están adaptados a la tabla de operacionalización o de especificaciones	✓		
Se evidencia en la redacción de los objetivos general y específicos, las bases teóricas que sustentan la investigación	✓		
Los ítems son adecuados para recolectar la información necesaria y pertinente a la investigación. De ser negativa su respuesta, sugiera los ítems a modificar, incluir y/o eliminar	✓		
La redacción de los ítems no sugieren la respuesta (sesgo). De ser negativa la respuesta indique cuáles ítems presentan esa condición y deben ser, por tanto, modificados	✓		

OBSERVACIONES: _____

VALIDEZ	
APLICABLE	NO APLICABLE
APLICABLE ATENDIENDO A LAS OBSERVACIONES	

Validado por:	e-mail:
Mariela Lilibeth Herrera	marielalilibeth@gmail.com
Cédula de Identidad:	Teléfono(s):
12.341.686	0416 4390837
Firma:	Fecha:
	02/03/2015



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
CÁTEDRA: DISEÑO DE INVESTIGACIÓN



VALIDACIÓN DE INSTRUMENTOS

En el presente formato, se presentan varios aspectos a considerar para validar los ítems que conforman el instrumento. Para ello se brindan dos (2) alternativas (SI-NO) para que seleccione la opción que considere correcta y, al final, puede realizar las observaciones que considere pertinentes en el espacio designado para ello.

Experto: Yovanny A. Diaz

Autor (a, es): Joumes Cimara y Natera Carlos

ÍTEM	ASPECTOS A CONSIDERAR									
	Redacción adecuada		Coherencia interna		Lenguaje ajustado al nivel		Pertinencia con los objetivos a medir		Mide lo que pretende	
	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
1	✓		✓		✓		✓		✓	
2	✓		✓		✓		✓		✓	
3	✓		✓		✓		✓		✓	
4	✓		✓		✓		✓		✓	
5	✓		✓		✓		✓		✓	
6	✓		✓		✓		✓		✓	
7	✓		✓		✓		✓		✓	
8	✓		✓		✓		✓		✓	
9	✓		✓		✓		✓		✓	
10	✓		✓		✓		✓		✓	
11	✓		✓		✓		✓		✓	
12	✓		✓		✓		✓		✓	
13	✓		✓		✓		✓		✓	
14	✓		✓		✓		✓		✓	
15	✓		✓		✓		✓		✓	
16	✓		✓		✓		✓		✓	
17	✓		✓		✓		✓		✓	

CONSIDERACIONES GENERALES	SÍ	NO	OBSERVACIONES
La hoja de presentación del instrumento es pulcra y contiene instrucciones claras y precisas para que se puedan emitir las respuestas	✓		
El instrumento está presentado adecuadamente. En caso de no ser así señale cuáles aspectos se deben mejorar	✓		
Los ítems se ordenaron de manera lógica y secuencial, y están adaptados a la tabla de operacionalización o de especificaciones	✓		
Se evidencia en la redacción de los objetivos general y específicos, las bases teóricas que sustentan la investigación	✓		
Los ítems son adecuados para recolectar la información necesaria y pertinente a la investigación. De ser negativa su respuesta, sugiera los ítems a modificar, incluir y/o eliminar	✓		
La redacción de los ítems no sugieren la respuesta (sesgo). De ser negativa la respuesta indique cuáles ítems presentan esa condición y deben ser, por tanto, modificados	✓		

OBSERVACIONES: _____

VALIDEZ	
APLICABLE	✓ NO APLICABLE
APLICABLE ATENDIENDO A LAS OBSERVACIONES	

Validado por: <i>Yovanny A Diaz</i>	e-mail: <i>42314@hotmail.com</i>
Cédula de Identidad: <i>9675373</i>	Teléfono(s): <i>0414 228686</i>
Firma: <i>[Signature]</i>	Fecha: <i>02-03-15</i>



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
CÁTEDRA: DISEÑO DE INVESTIGACIÓN



VALIDACIÓN DE INSTRUMENTOS

En el presente formato, se presentan varios aspectos a considerar para validar los ítems que conforman el instrumento. Para ello se brindan dos (2) alternativas (SI-NO) para que seleccione la opción que considere correcta y, al final, puede realizar las observaciones que considere pertinentes en el espacio designado para ello.

Experto: Jesús Morales

Autor (a, es): Jaimes Amara y Natera Carlos

ÍTEM	ASPECTOS A CONSIDERAR									
	Redacción adecuada		Coherencia interna		Lenguaje ajustado al nivel		Pertinencia con los objetivos a medir		Mide lo que pretende	
	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
1	/		/		/		/		/	
2	/		/		/		/		/	
3	/		/		/		/		/	
4	/		/		/		/		/	
5	/		/		/		/		/	
6	/		/		/		/		/	
7	/		/		/		/		/	
8	/		/		/		/		/	
9	/		/		/		/		/	
10	/		/		/		/		/	
11	/		/		/		/		/	
12	/		/		/		/		/	
13	/		/		/		/		/	
14	/		/		/		/		/	
15	/		/		/		/		/	
16	/		/		/		/		/	
17	/		/		/		/		/	

CONSIDERACIONES GENERALES	SÍ	NO	OBSERVACIONES
La hoja de presentación del instrumento es pulcra y contiene instrucciones claras y precisas para que se puedan emitir las respuestas			
El instrumento está presentado adecuadamente. En caso de no ser así señale cuáles aspectos se deben mejorar			
Los ítems se ordenaron de manera lógica y secuencial, y están adaptados a la tabla de operacionalización o de especificaciones			
Se evidencia en la redacción de los objetivos general y específicos, las bases teóricas que sustentan la investigación			
Los ítems son adecuados para recolectar la información necesaria y pertinente a la investigación. De ser negativa su respuesta, sugiera los ítems a modificar, incluir y/o eliminar			
La redacción de los ítems no sugieren la respuesta (sesgo). De ser negativa la respuesta indique cuáles ítems presentan esa condición y deben ser, por tanto, modificados			

OBSERVACIONES: _____

VALIDEZ	
APLICABLE	NO APLICABLE
APLICABLE ATENDIENDO A LAS OBSERVACIONES	

Validado por: <i>Jesus Morales</i>	e-mail: <i>Jmoralea@gmail.com</i>
Cédula de Identidad: <i>10-738139</i>	Teléfono(s): <i>04120379189</i>
Firma: <i>[Firma]</i>	Fecha: <i>21/04/15</i>



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
ESCUELA DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA Y FÍSICA
CÁTEDRA: DISEÑO DE INVESTIGACIÓN



VALIDACIÓN DE INSTRUMENTOS

En el presente formato, se presentan varios aspectos a considerar para validar los ítems que conforman el instrumento. Para ello se brindan dos (2) alternativas (SI-NO) para que seleccione la opción que considere correcta y, al final, puede realizar las observaciones que considere pertinentes en el espacio designado para ello.

Experto: Reina Segura

Autor (a, es): Jaimes Cimara y Natera Carlos

ÍTEM	ASPECTOS A CONSIDERAR									
	Redacción adecuada		Coherencia interna		Lenguaje ajustado al nivel		Pertinencia con los objetivos a medir		Mide lo que pretende	
	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
1	/		/		/		/		/	
2	/		/		/		/		/	
3	/		/		/		/		/	
4	/		/		/		/		/	
5	/		/		/		/		/	
6	/		/		/		/		/	
7	/		/		/		/		/	
8	/		/		/		/		/	
9	/		/		/		/		/	
10	/		/		/		/		/	
11	/		/		/		/		/	
12	/		/		/		/		/	
13	/		/		/		/		/	
14	/		/		/		/		/	
15	/	/	/		/		/		/	
16	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/
17	/		/		/		/		/	

CONSIDERACIONES GENERALES	SI	NO	OBSERVACIONES
La hoja de presentación del instrumento es pulcra y contiene instrucciones claras y precisas para que se puedan emitir las respuestas			
El instrumento está presentado adecuadamente. En caso de no ser así señale cuáles aspectos se deben mejorar			
Los ítems se ordenaron de manera lógica y secuencial, y están adaptados a la tabla de operacionalización o de especificaciones			
Se evidencia en la redacción de los objetivos general y específicos, las bases teóricas que sustentan la investigación			
Los ítems son adecuados para recolectar la información necesaria y pertinente a la investigación. De ser negativa su respuesta, sugiera los ítems a modificar, incluir y/o eliminar			
La redacción de los ítems no sugieren la respuesta (sesgo). De ser negativa la respuesta indique cuáles ítems presentan esa condición y deben ser, por tanto, modificados			

OBSERVACIONES: _____

VALIDEZ	
APLICABLE	NO APLICABLE
APLICABLE ATENDIENDO A LAS OBSERVACIONES	X

Validado por: <i>Reina Segura</i>	e-mail: <i>reina.maj@gmail.com</i>
Cédula de Identidad: <i>13046695</i>	Teléfono(s): <i>0412-5038279</i>
Firma: <i>[Firma]</i>	Fecha: <i>03-03-2015</i>

Anexo F: Cálculo de la Confiabilidad

COEFICIENTE DE CONFIABILIDAD KUDER RICHARDSON KR-20																		
	ÍTEMS																	
SUJETOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	TOTAL
1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	9
2	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	5
3	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	9
TRC	3	1	3	2	1	1	3	0	3	1	2	0	2	0	0	0	1	
P	1	0,333333	1	0,666667	0,333333	0,333333	1	0	1	0,333333	0,666667	0	0,666667	0	0	0	0,333333	
Q	0	0,666667	0	0,333333	0,666667	0,666667	0	1	0	0,666667	0,333333	1	0,333333	1	1	1	0,666667	
P*Q	0	0,222222	0	0,222222	0,222222	0,222222	0	0	0	0,222222	0,222222	0	0,222222	0	0	0	0,222222	
SP*Q	1,777778																	
VT	5,333333																	

Confiabilidad 0,708333

$$Kr20 = \left(\frac{N}{N-1} \right) \left[1 - \left(\frac{\sum p \cdot q}{Vt} \right) \right] = 0,71$$

Interpretación del Coeficiente de Confiabilidad

Rangos Coeficiente Alfa

Muy Alta 0,81 a 1

Alta 0,61 a 0,80

Moderada 0,41 a 0,60

Baja 0,21 a 0,40

Muy Baja 0,01 a 0,20