

***Aplicación del Método de Diferencias Finitas
Miméticas a un Problema de Dispersión de
Ondas en 1D***

Juan Manuel Rodríguez Bolívar

Noviembre de 2003



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD EXPERIMENTAL DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
ESCUELA DE COMPUTACIÓN

***Aplicación del Método de Diferencias Finitas Miméticas a un Problema de
Dispersión de Ondas en 1D***

Autor: Juan Manuel Rodríguez Bolívar

Tutor: Prof. Carlos Cadenas

Trabajo Especial de Grado presentado ante la ilustre Universidad de Carabobo como credencial de mérito para optar al título de Licenciado en Computación.

Bárbula, Noviembre de 2003

Resumen

En ésta investigación se desarrollaron herramientas computacionales para los métodos de diferencias finitas miméticas, en particular se resuelve una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables. Para ello se usaron las aproximaciones discretas de los operadores de divergencia y gradiente dadas por *Shashkov* y por Castillo. El primer método usado es el de operadores de soporte de *Shashkov* o método $1 - 2 - 1$. Los otros métodos utilizados fueron $2 - 2 - 2$, $4 - 4 - 4$ y $6 - 6 - 6$, todos debido a Castillo. Los cuatro métodos implementados fueron aplicados a diversos problemas, haciendo énfasis en el problema de dispersión de ondas acústicas unidimensional, el cual viene dado por la ecuación *Helmholtz*. Para este problema, cómo se conoce la solución exacta fue posible hacer un estudio del orden de convergencia de los métodos. También se hace el análisis de la contaminación numérica debido al efecto de dispersión dadas por las condiciones de frontera.

Palabras claves: Métodos Miméticos, *Helmholtz*, Dispersión Numérica.

A mis padres, a quienes les debo todo mi ser, que me enseñaron que a través de cosas sencillas se pueden hacer cosas grandes, que sin importar que todo lo que haga, y todo lo que les pueda dar en el futuro, nunca podré pagarles la deuda de amor que les tengo.

Agradecimientos

Bueno antes de decir cualquier cosa, esta era la parte en el trabajo que yo siempre estaba realmente esperando por hacer, cómo no voy a poder incluir a todas las personas que de una u otra forma me ayudaron les ruego que me disculpen, pero siempre les voy a tomar en cuenta, primero le agradezco a Dios por darme la oportunidad de vivir y hacer todas estas cosas, que siempre le pido que me ayude a ser feliz, a mi Mamá que a pesar de sus dificultades siempre ha estado conmigo, a mi Papá que nunca me ha dicho no ante un problema y siempre ha estado pendiente de mi, a mi hermana Briola que es la persona con quién he peleado más en este mundo desde que tengo uso de razón, siempre me ha enseñado algo de cada pelea, a mi tía Sol que siempre me ha cuidado desde niño y por todos los sacrificios que ha hecho por mi, al Padre Carlos León que me enseñó ante las dificultades nunca uno debe rendirse, aún así si uno se ve derrotado, a mi Mamá Miriam y a mi Mamá Marcelina, que siempre me han dado un motivo porque reír y nunca me han negado su afecto, al Profesor Carlos Cadenas por todo el tiempo que dispuso para ayudarme y corregirme, su aporte fue fundamental en éste trabajo y que se le quiere cómo un amigo, al Profesor Orestes Montilla por aquellas largas horas que empleamos para entender estos métodos y quién siempre me ha apoyado a lo largo de ésta investigación, gracias a la ayuda y la atención de los Profesores Héctor Inojosa y Luis Rodríguez por haberme prestado sus máquinas cuando necesitaba trabajar, al Profesor Marcano por haberme prestado el espacio del laboratorio y las salas del Departamento de Matemáticas, al Profesor Dany De Cecchis por sus aclaratorias, a los estudiantes de la primera corte del departamento de Matemáticas que cuando necesitaba algo, siempre me ayudaban a veces sin pedirlo, al gordo Adolfo que siempre me ha sacado de apuros, a la Profesora Desiree Delgado le doy gracias por motivarme en las dificultades y en especial por darme aquel consejo cuando estaba en tercer año cuando tenía que entregar un proyecto que se me había perdido, que luego lo volví hacer y pude entregar, a mis amigos Laura, Alnardo y Melissa por estar pendiente de mi en este trabajo, a mi colega Javier con quién en nuestros trabajos hemos compartido muchos momentos gratos en el laboratorio haciendo nuestros trabajos, por sus ayudas para usar MATLAB y LATEX, también le agradezco a mis otros compañeros Juan Rubén y Miguel cuando estábamos puñaleando estos métodos, que al final todo salió bien.

Índice general

1. Definición del Problema	1
1.1. Introducción	1
1.2. Planteamiento del Problema	1
1.3. Antecedentes	3
1.4. Justificación	5
1.5. Objetivo General	6
1.6. Objetivos Específicos	6
1.7. Metodología Propuesta	7
1.7.1. Análisis	7
1.7.2. Diseño	7
1.7.3. Implementación	7
1.7.4. Prueba y Evaluación	7
2. Marco Teórico	8
2.1. Introducción	8
2.2. Las Principales Ideas de los Algoritmos de Diferencia Finita	8
2.2.1. Funciones de Mallado	9
2.2.2. Mallados Suaves y no Suaves	10
2.2.3. Diferentes Tipos de Funciones de Mallado	11
2.3. Método de Operadores de Soporte	12
2.3.1. Etapas Principales	13
2.3.2. Sistema de Operadores de Diferencia Consistentes en $1D$	15
2.4. Método de Diferencias Finitas de Castillo	18
2.4.1. Operadores Discretos de Segundo Orden	19
2.4.2. Esquemas de Discretización Miméticos (Método de Castillo-Grone)	20
2.4.3. Productos Internos Generalizados	22
2.4.4. Divergencias de Orden Superior	23

2.4.5. Divergencia de Cuarto Orden	26
2.4.6. Gradientes de Orden Superior	28
3. Desarrollo	30
3.1. Introducción	30
3.2. Aplicación del Método de Operadores de Soporte	30
3.3. Aplicación del Método de Segundo Orden	33
3.4. Aplicación del Método de Cuarto Orden	35
3.5. Aplicación del Método de Sexto Orden	40
3.6. Lenguaje de Implementación	45
3.7. Estructura de Datos Fundamentales Empleadas	45
3.8. Análisis de Orden de Convergencia	46
4. Conclusiones y Resultados	47
4.1. Introducción	47
4.2. Aplicación de los Métodos	47
4.3. Cálculo de Errores	54
4.4. Orden de Convergencia	57
4.5. Análisis de Dispersión	61
4.6. Conclusiones y Recomendaciones	67
4.7. Recomendación	68
4.8. Trabajos Futuros	68
A. Código Fuente de la Implementación	69
B. Cálculo de la Dispersión	89

Índice de cuadros

4.1. Comparación entre el Método de Shashkov <i>1-2-1</i> , de Castillo <i>2-2-2</i> , <i>4-4-4</i> y <i>6-6-6</i> con los tres tipos de mallado para $k=3$, $m=15$	54
4.2. Comparación entre el Método de Shashkov <i>1-2-1</i> , de Castillo <i>2-2-2</i> , <i>4-4-4</i> y <i>6-6-6</i> con los tres tipos de mallado para $k=3$, $m=150$	54
4.3. Comparación entre el Método de Shashkov <i>1-2-1</i> , de Castillo <i>2-2-2</i> , <i>4-4-4</i> y <i>6-6-6</i> con los tres tipos de mallado para $k=9$, $m=15$	55
4.4. Comparación entre el Método de Shashkov <i>1-2-1</i> , de Castillo <i>2-2-2</i> , <i>4-4-4</i> y <i>6-6-6</i> con los tres tipos de mallado para $k=9$, $m=150$	55
4.5. Comparación entre el Método de Shashkov <i>1-2-1</i> , de Castillo <i>2-2-2</i> , <i>4-4-4</i> y <i>6-6-6</i> con los tres tipos de mallado para $k=100$, $m=250$	55
4.6. Comparación entre el Método de Shashkov <i>1-2-1</i> , de Castillo <i>2-2-2</i> , <i>4-4-4</i> y <i>6-6-6</i> con los tres tipos de mallado para $k=100$, $m=1000$	56
4.7. Orden de Convergencia de los métodos , con $k = 3$, con m variando de 150 a 1200	60
4.8. Orden de Convergencia de los métodos , con $k = 9$, con m variando de 150 a 1200	60
4.9. Comparación de tiempos al aplicar los métodos al problema de Helmholtz .	60

Índice de figuras

2.1. Mallado Uniforme	10
2.2. Mallado No Uniforme Suave	11
2.3. Mallado No Uniforme No Suave	12
2.4. Discretización Nodal	13
2.5. Discretización de Centro de Celda	14
4.1. Aproximación de la Ecuación de Helmholtz con Mallado Uniforme con el Esquema 1-2-1, $k=3$, $m=15$	48
4.2. Aproximación de la Ecuación de Helmholtz con Mallado Uniforme con el Esquema 1-2-1, $k=3$, $m=150$	49
4.3. Aproximación de la Ecuación de Helmholtz con Mallado Uniforme con el Esquema 1-2-1, $k=9$, $m=15$	50
4.4. Aproximación de la Ecuación de Helmholtz con Mallado Uniforme con el Esquema 1-2-1, $k=9$, $m=150$	51
4.5. Aproximación de la Ecuación de Helmholtz con Mallado Uniforme con el Esquema 1-2-1, $k=100$, $m=250$	52
4.6. Aproximación de la Ecuación de Helmholtz con Mallado Uniforme con el Esquema 1-2-1, $k=100$, $m=1000$	53
4.7. Regresión lineal para el esquema 6-6-6, con $k = 3$ y con m desde 150 hasta 1200	58
4.8. Regresión lineal para el esquema 6-6-6, con $k = 3$ y con m desde 150 hasta 1200	59
4.9. Comparación entre la función $\cos(kh)$ y su función aproximada obtenida por análisis de dispersión bajo el esquema $1 - 2 - 1$	64
4.10. Comparación entre la función $\cos(kh)$ y su función aproximada de la derivada obtenida por análisis de dispersión bajo el esquema $1 - 2 - 1$	65
4.11. Comparación entre la función $\cos(kh)$ y su función de la derivada aproximada obtenida por análisis de dispersión bajo el esquema $2 - 2 - 2$	66

Introducción

En el presente trabajo se les mostrará un nuevo enfoque para resolver problemas de ecuaciones diferenciales, el cual trata de los métodos de diferencias finitas miméticas; que son métodos novedosos y poco estudiados, entre los cuales se mencionan el método de Operadores de Soporte de *Shashkov* para el caso $1 - 2 - 1$, y los métodos de *Castillo* $2 - 2 - 2$, $4 - 4 - 4$ y $6 - 6 - 6$, que son aplicados al problema de la ecuación de *Helmholtz*. Estos métodos tienen la particularidad de imitar propiedades fundamentales de los operadores continuos de la divergencia, gradiente y rotor en forma discreta y estos actuarán sobre dos tipos especiales de conjuntos que son los nodos y las celdas, que a su vez éstos conjuntos se definen en el dominio de la ecuación antes mencionada que es $[0,1]$, cuyo espacio se le llama mallado o tejido, este mallado se puede clasificar de tres maneras: Uniforme, cuando el dominio está dividido en una serie de intervalos, delimitados por los nodos, y estos intervalos tienen la misma longitud $1/(m - 1)$, donde m es el parámetro de entrada que indica la cantidad de nodos que tiene el mallado. Luego se tiene No Uniforme Suave, que es el mallado que se obtiene aplicando una función suave definida en el dominio de la función diferencial en la cual se quiere trabajar, en un dominio que es definido mediante un mallado suave, y por último el mallado No Uniforme No Suave que se obtiene mediante una relación de intervalos como por ejemplo $h, 2h, h, 2h, \dots$

El primer método que se verá, que es el de *Shashkov* se obtiene mediante un análisis algebraico, donde se selecciona un operador, ya sea divergencia o gradiente, que se le llamará operador primal, y en base de éste se calcula el siguiente que puede ser tanto la divergencia o el gradiente. Los métodos de *Castillo* a diferencia del anterior sus operadores se obtienen mediante un análisis matricial, que se basa en un producto interno que es definido por *Castillo*. Estos métodos se aplican a la ecuación de *Helmholtz* y se obtienen una serie de ecuaciones lineales que se le denominan esquemas miméticos. Se verán sus resultados, que son aproximaciones a dicha ecuación, y partir de éstos resultados se harán estudios de errores, orden de Convergencia y Dispersión

de Ondas, donde este último es muy importante, porque mide el efecto de contaminación que se observa al aplicar dicho método a la ecuación de *Helmholtz*.

Capítulo 1

Definición del Problema

1.1. Introducción

En la siguiente sección se mostrará cual es el problema que se plantea en ésta investigación, que es aplicar los métodos de diferencias finitas miméticas a un problema de dispersión de ondas en $1D$, se verá los trabajos que han antecedido a éste trabajo, ya sea de teorías y aplicaciones, también la justificación del mismo, se plantearán los objetivos de ésta investigación, y se señalará que metodología se va a utilizar para cumplir los objetivos de este trabajo.

1.2. Planteamiento del Problema

Recientemente, se ha generado un nuevo enfoque matricial [3] para resolver ecuaciones diferenciales por métodos miméticos, los cuales han sido poco probados, un grupo de investigadores entre los que se mencionan *castillo* y *Shashkov* están comenzando a utilizarlos en diversas áreas, entre las que se encuentran fluidos, electromagnetismo, ondas acústicas, entre otras. Por ello se ha creado la necesidad, para dicho grupo de investigación, de incrementar sustancialmente las pruebas de dicho enfoque. Un interesante y bien conocido problema de resolución numérica es la ecuación *Helmholtz*:

$$p'' + k^2 p = 0, \quad 0 < x < \infty \quad (1.1)$$

donde k representa el número de onda y $p = p(x)$ la presión de la onda, con condiciones de frontera de pared rígida $p'(0) = 0$. Para que este problema este bien planteado se necesita agregar una condición introducida por *Sommerfeld* que es la de irradiación en el borde infinito, en este caso equivale a la ecuación satisfecha por la onda dispersada que

viaja hacia la derecha en el borde infinito.

$$\frac{dp_{sc}}{dx} - ikp_{sc} = 0, \quad x \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

En 1D la condición de irradación de *Sommerfeld* (1.2) se satisface exactamente en cada punto del dominio, cuando $x > 0$, por ello se selecciona el intervalo $[0,1]$. La presión, se puede descomponer en la suma de la presión para la onda incidente y la onda esparcida, $p(x) = p_{inc}(x) + p_{sc}(x)$. Luego el problema a resolver para la onda esparcida p_{sc} sería

$$p_{sc}'' + k^2 p_{sc} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (1.3)$$

$$p_{sc}'(0) = ik \quad (1.4)$$

La ecuación diferencial (1.3) es de segundo orden.

$$\frac{dp_{sc}}{dx}(1) - ikp_{sc}(1) = 0 \quad (1.5)$$

A partir de dicha solución y la presión para la onda incidente se puede obtener la presión total $p(x)$. Se ha probado [4] que la resolución numérica de dicho problema presenta contaminación, por lo cual es de interés estudiar este aspecto.

La ecuación diferencial

$$\alpha p'' + \beta p' + \delta p = f \quad (1.6)$$

donde $\alpha, \beta, \delta, f \in L^2[0, 1]$

sujeta a las condiciones de frontera

$$\gamma_1 p'(0) + \xi_1 p(0) = k_1 \quad (1.7)$$

$$\gamma_2 p'(1) + \xi_2 p(1) = k_2 \quad (1.8)$$

donde $\gamma_1, \gamma_2, \xi_1, \xi_2, k_1, k_2 \in \mathbb{C}$ puede modelar muchos problemas físicos, incluyendo la ecuación de *Helmholtz*. Es de interés conocer tanto la variable primal, cómo la variable secundaria $z = \nabla p$ en , de ésta manera la ecuación (1.6) se transforma en un sistema de ecuaciones diferenciales

Para ello se hará el cambio de variables $z = \nabla p = p'$ obteniendo el sistema de ecuaciones

$$\alpha z' + \beta z + \delta p = f \quad (1.9)$$

$$z = p' \quad (1.10)$$

donde en la ecuación (1.9) z' representa la divergencia de z .

Para obtener dicha solución, esta investigación pretende proveer herramientas computacionales, por el método de diferencias finitas miméticas (*MDFM*), que permitan resolver aproximadamente ecuaciones diferenciales ordinarias las cuales puedan ser expresadas en función de los operadores de divergencia ($\nabla \cdot$), y gradiente (∇) cómo las dadas por (1.9) y (1.10).

1.3. Antecedentes

El problema de aproximar la solución de diversas ecuaciones diferenciales ha llevado a que muchos científicos hayan construyan diferentes métodos para abordar este tema. Hoy en día se necesitan hacer simulaciones de dinámicas de sólidos y líquidos, ondas de choque, ecuaciones de calor entre otros, cuyos dominios requieren ser representados en forma de un tejido o malla, que puede ser estructurada, no estructurada, suave, no suave, ortogonal, no ortogonal, simple, distorsionada, y con otras características que necesitan de su estudio para obtener la solución aproximada en cuestión, de una forma segura, y con la menor cantidad de costo computacional. Uno de ellos es el método de diferencias finitas miméticas.

Actualmente existen varios grupos interdisciplinarios que desarrollan métodos relacionados con los miméticos, entre los que se pueden presentar un conjunto de trabajos publicados en esta área, como metodologías, teorías, y clases de problemas que pueden resolver:

1. En 1995 *J. E. Castillo, J. M. Hyman, M. J. Shashkov y S. Steinberg* publican un artículo [1] donde combinan el método de operadores de soporte con el método de mapeo, y derivan nuevas discretizaciones exactas de cuarto orden miméticas para la divergencia, el gradiente y el laplaciano sobre discretizaciones no uniformes, por los cuales éstos métodos servirán cómo base para obtener el método de diferencias finitas miméticas.
2. En 1996 *M. Shashkov y S. Steinberg* [10] desarrollan un nuevo algoritmo de diferencias finitas para resolver ecuaciones de difusión con coeficientes complejos

sobre un mallado rectangular general. El análisis de este artículo será importante para la construcción de las rutinas a implementar.

3. En 1997 *J. M. Hyman, M. Shashkov* y *S. Steinberg* [5] extienden el método de operadores de soporte a mallados tensoriales y rectangulares, ambos no suaves. Este tipo de mallado será usado para las pruebas de los métodos desarrollados en este trabajo.
4. En 1997 *J. M. Hyman* y *M. Shashkov* [6] usan el método de operadores de soporte para derivar aproximaciones para la divergencia, el gradiente y el rotacional usando análogos discretos de las identidades integrales satisfechas por los operadores diferenciales, que servirán para obtener y entender el método de diferencias finitas miméticas.
5. En 1998 *J. M. Hyman* y *M. Shashkov* [7] describen cómo incorporar las condiciones de frontera dentro de los métodos de diferencias finitas y luego construyen métodos de diferencias finitas seguros para aproximar las ecuaciones de *Maxwell* y las ecuaciones de difusión del campo magnético usando análogos discretos de operadores diferenciales que satisfacen las identidades y teoremas del cálculo vectorial y tensorial en forma discreta, que se usarán para entender los análogos de las propiedades del método de diferencias finitas miméticas.
6. En 1999 *J. E. Morel, M. Shashkov* y *P. K. Smolarkiewics* [9] derivan un esquema de diferenciación de difusión en $3D$ para tejidos hexaédricos, usando el método de operadores de soporte.
7. En el año 2000. *J. M. Hyman, M. Shashkov* y *S. Steinberg* [8] introducen el producto interno estándar, y un nuevo producto interno, donde las definiciones de estos productos internos están basados en la interpolación de los flujos de los campos vectoriales, éste nuevo producto interno es la base para obtener los esquemas a utilizar en éste trabajo.
8. En el año 2001 *J. E. Castillo*, junto con *J. M. Hyman, M. Shashkov* y *S. Steinberg* [2] derivan aproximaciones de diferencia finita de cuarto y sexto orden para los operadores de divergencia y gradiente y así como un producto interno compatible sobre mallas estrechas en una dimensión en un dominio acotado, que son de suma de importancia. En éste artículo se explica de forma detallada como obtener éstos operadores discretos, que satisfacen el teorema de *Green*.

9. Del nueve al once de Julio de 2003, en el *Computational Science Research Center* de *San Diego State University* se realizó el primer Workshop denominado *Mimetic Discretization of Continuum Mechanics*, donde se presentaron una serie de trabajos entre los que se encuentra [14] donde se comienza a utilizar algunos métodos miméticos a un problema de dispersión de ondas en $1D$. En este trabajo además, se hace un estudio preliminar de orden de convergencia y análisis de dispersión. La investigación que se desarrolla en este trabajo es una continuación del trabajo que se acaba de mencionar.

El 21 de Noviembre de 2002, en la Escuela de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela, se desarrollaron las "Primeras Jornadas Venezolanas de Métodos de Discretizaciones Miméticas en Mecánica de Medios Continuos", donde el profesor José Castillo de *San Diego State University* junto con otros investigadores del país expusieron temas relacionados con la generación de nuevos esquemas y nuevas aplicaciones de dichos métodos. Se destaca el hecho que la presentación dada por el Dr. Castillo fue publicada en [3] y es la base del trabajo.

1.4. Justificación

Desde la pasada década, un grupo de investigadores de *San Diego State University* [1], [11], [12], [13] y [14]; y *Los Alamos National laboratory* [10], entre otras instituciones han desarrollado metodologías para resolver ecuaciones diferenciales por los métodos de diferencias finitas miméticas, que sirven para obtener operadores discretos que aproximan a los operadores continuos de divergencia ($\nabla \cdot$) y gradiente (∇), que satisfacen a los análogos discretos de las identidades integrales satisfechas por los operadores diferenciales. Estos análogos discretos de operadores diferenciales satisfacen las identidades y teoremas del cálculo vectorial y tensorial y proveen nuevos métodos de diferencias finitas para una gran clase de ecuaciones diferenciales parciales.

Los análogos discretos de los operadores diferenciales son obtenidos y analizados usando el método de operadores de soporte.

El método de operadores de soporte usa las versiones discretas de identidades integrales, como una base para construir operadores discretos con dominios y rangos compatibles, y es usado para extender un conjunto de operadores discretos para formar

análogos discretos de las identidades integrales.

A partir del año 2002 un grupo de investigadores Venezolanos se han dado la tarea de hacer estudios relacionados a las aplicaciones de dichos métodos a diversos problemas de interés en el ámbito científico. En éstos términos está centrada ésta investigación de forma tal que se puedan hacer comparaciones de éste método con otros que han sido estudiados más profundamente y así colaborar en clarificar las ventajas y desventajas de éstos métodos. Se destaca el hecho que sólo se sabe que éstos métodos han sido aplicados a los problemas relacionados a las ecuaciones de *Maxwell*, *Difusión Magnética* y *Dinámica de Gases*.

1.5. Objetivo General

Desarrollar las herramientas computacionales necesarias para aplicar métodos de diferencias finitas miméticas a un problema de dispersión de onda en 1D, utilizando esquemas en diferencias de orden superior.

1.6. Objetivos Específicos

1. Estudiar diferentes Métodos de Diferencias Finitas Miméticos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales expresadas en función de los operadores de divergencia y gradiente.
2. Implementar los algoritmos necesarios para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.
3. Aplicar los módulos de software realizados a un problema de dispersión de ondas en 1D dada por la ecuación de *Helmholtz*.
4. Estudiar numéricamente el orden de convergencia de los métodos de diferencias finitas miméticas e implementarlos en 2. y utilizados en 3.
5. Encontrar estimados para la contaminación del error al usar los métodos de diferencias finitas miméticas en la aplicación mencionada en 3.

1.7. Metodología Propuesta

Como el problema planteado consiste en desarrollar rutinas para los métodos de diferencias finitas miméticas para la ecuación de *Helmholtz*, la metodología que se desea proponer es utilizar la estrategia del Ciclo de Vida, utilizando el modelo de cascada de un Sistema, planteado por Ian Sommerville en [17] en su libro de Ingeniería de Software utilizando sólo las siguientes cuatro fases o etapas:

1.7.1. Análisis

En esta etapa se plantea resolver la ecuación de *Helmholtz* (1.1), para este caso se evaluarán sus restricciones, se descompondrá en un sistema de ecuaciones de primer orden (1.9) para ver cuál o cuáles son las mejores maneras de resolver dicha ecuación con los distintos métodos de diferencias finitas miméticas.

1.7.2. Diseño

Después de haber realizado el estudio, se procederá a desarrollar los diversos algoritmos correspondientes a los métodos de diferencias finitas miméticas con la ecuación de *Helmholtz*, se buscarán las mejores estructuras de datos, y los algoritmos más eficientes.

1.7.3. Implementación

Consiste en codificar las rutinas de los algoritmos en un lenguaje de programación que genere resultados eficientes y precisos.

1.7.4. Prueba y Evaluación

Durante ésta actividad se realizarán todas las pruebas pertinentes para evaluar, en los diferentes casos qué estas representen, el comportamiento de las rutinas con el problema planteado. Para la realización de ésta fase se llevarán a cabo comparaciones de la solución numérica y la solución analítica, analizando el orden de convergencia de los métodos, así como la contaminación del error en aquellos casos que sea posible.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Introducción

En este capítulo se mostrará la base teórica de los métodos de diferencias finitas miméticas con los que aplicarán al problema de *Helmholtz*, entre los que se verá el método $1 - 2 - 1$ de *Shashkov*, y los métodos de *Castillo*, se mencionarán los tipos de mallado y los tipos de discretizaciones en los que actúan los operadores generados por dichos métodos.

2.2. Las Principales Ideas de los Algoritmos de Diferencia Finita

Un número significativo de problemas de Física e Ingeniería se llevan de la mano con ecuaciones diferenciales con derivadas parciales. Las soluciones explícitas de estas son obtenibles sólo en casos especiales.

La solución de ecuaciones diferenciales por medio de esquemas en diferencias finitas se realiza en dos etapas:

- La generación del esquema de diferencia finita (una aproximación de diferencia a la ecuación diferencial).
- La solución computacional de las ecuaciones diferenciales, la cual se escribe en la forma de un sistema en orden superior de ecuaciones algebraicas lineales y no lineales.

La esencia del método de diferencia finita es la siguiente:

1. El dominio continuo (por ejemplo, un intervalo, un rectángulo, o un dominio de una figura arbitraria) se reemplaza por un conjunto discreto de puntos (nodos), que forman el mallado.
2. En lugar de una función de argumentos continuos, una función de argumentos discretos es considerada. El valor de ésta función se define en los nodos del mallado o en otros elementos del mallado.
3. Las derivadas que están en las ecuaciones diferenciales y en las condiciones de frontera son aproximadas por la expresión diferencial discreta, de éste modo el problema diferencial es transformado a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales o no lineales, que se llama esquema de diferencia finita.

2.2.1. Funciones de Mallado

Un ejemplo simple de un mallado es el caso 1D. Dado el dominio de la variable x , por ejemplo el intervalo $[0,1]$, este se divide en $m - 1$ sub-intervalos que son llamados celdas. Los extremos de las celdas son denominados nodos a saber:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{m-2} < x_{m-1} = 1. \quad (2.1)$$

Estos nodos que van desde el intervalo $[0, 1]$ en $m - 1$ sub-intervalos son llamados celdas

$$\{[x_i, x_{i+1}], i = 0, \dots, m - 2\}. \quad (2.2)$$

A este mallado se le denomina **No Uniforme**.

Para la identificación de los nodos, se puede usar el índice i . Si

$$x_i = h * (i - 1), \quad h = 1/(m - 1), \quad (2.3)$$

el mallado es un **Mallado Uniforme**, en éste caso la densidad de la distribución de los nodos pueden ser caracterizados por el parámetro h como se puede ver en la figura 2.1, lo cual tiende a cero cuando el número de nodos se incrementa.

Para mallados no uniformes usualmente se asume que hay algunas constantes C_{max} y C_{min} , las cuales no dependen de h , sino

$$C_{min}h \leq x_{i+1} - x_i \leq C_{max}h. \quad (2.4)$$

Si se toma ésta aceptación cómo válida, entonces si h tiende a cero entonces la longitud de cada celda del mallado también tiende a cero, pero para el caso no uniforme, los mallados son caracterizados por el parámetro h y las constantes C_{max} y C_{min} .

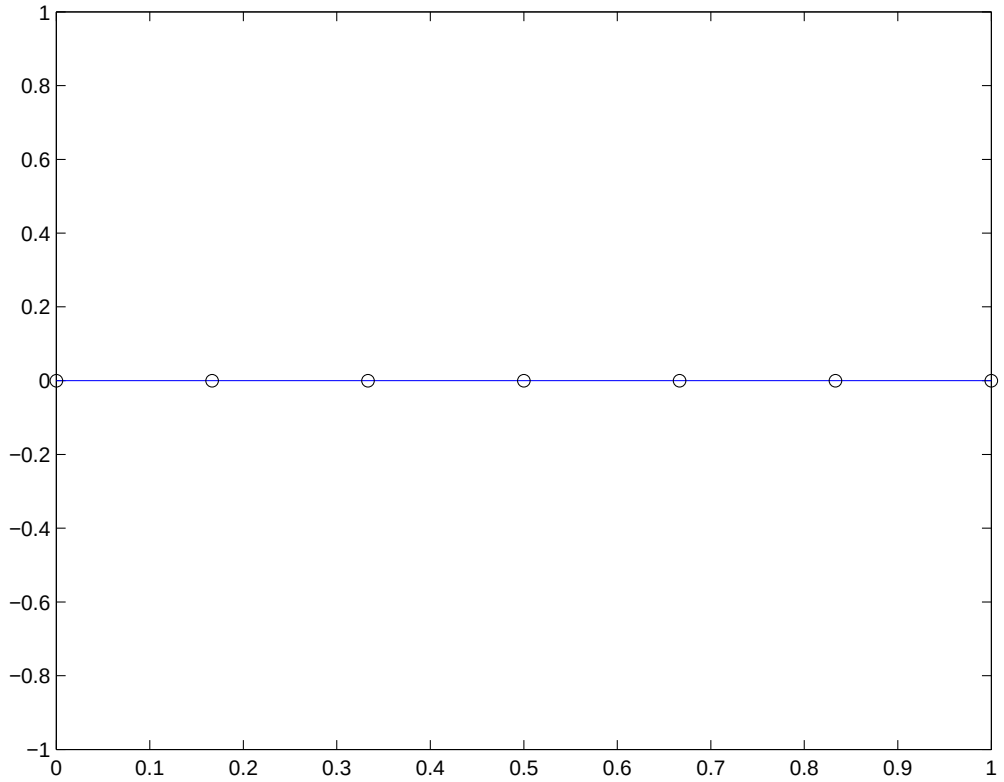


Figura 2.1: Mallado Uniforme

2.2.2. Mallados Suaves y no Suaves

Para el uso de un mallado en una aplicación práctica, es muy útil e importante entender la diferencia entre los dos tipos de mallados no uniformes. El primer tipo de mallado no uniforme es el **mallado suave**. Para explicar ésta notación se asume que hay una función suave $x = x(\xi)$ la cual es una transformación en el segmento $[a, b]$. Para el caso 1D una condición suficiente para ésta, es que la función $x(\xi)$ debería ser una función creciente en dicho intervalo. Se asume que en un segmento $a \leq \xi \leq b$ hay una función de mallado con nodos $\xi_i = \frac{i-1}{m-1}$, $i = 0, \dots, m-1$ en un segmento $a \leq x \leq b$ se le llama **Mallado Suave** como se ve en la figura 2.2, si las coordenadas de éste nodo son dadas de la siguiente forma:

$$x_i = x(\xi_i) \quad (2.5)$$

y la función $x(\xi_i)$ es una función suave. (Nótese que el espacio de la variable ξ usualmente se le llama **espacio lógico**, y el espacio de la variable x se le llama **espacio físico**).

El **mallado no suave** es el mallado que no puede ser construido usando una transformación suave. Un ejemplo de éste tipo podría ser cuando la longitud entre los

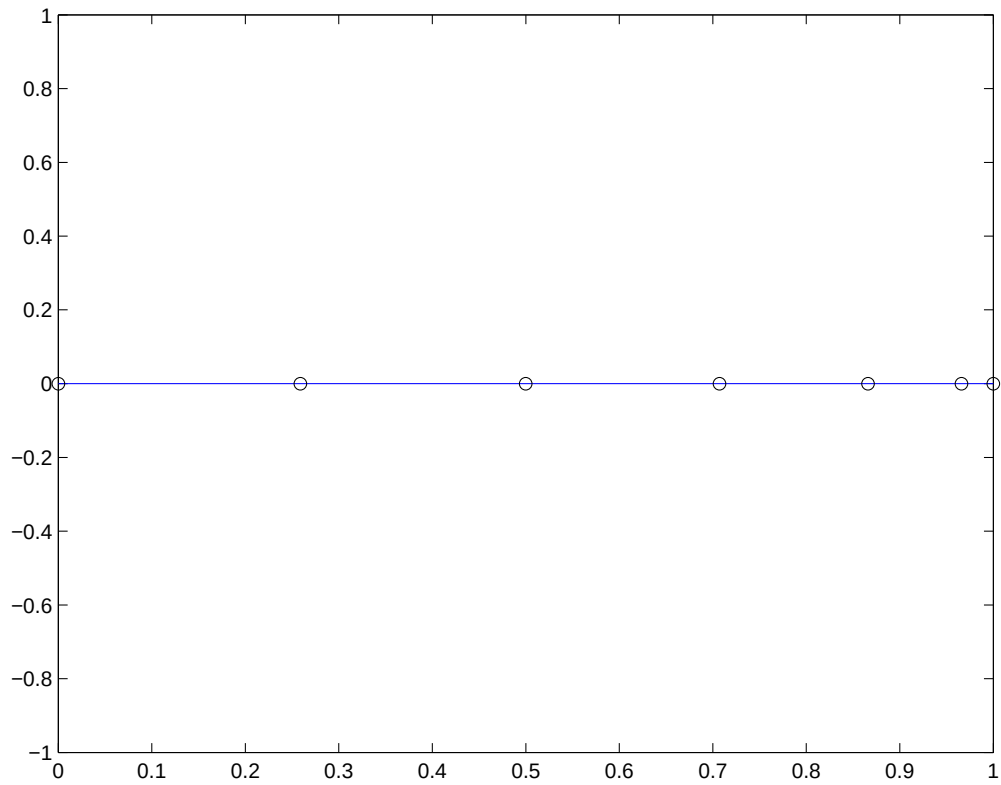


Figura 2.2: Mallado No Uniforme Suave

nodos se alterna de la siguiente forma $h, 2h, h, 2h, \dots$ como se aprecia en la figura 2.3.

2.2.3. Diferentes Tipos de Funciones de Mallado

Hay dos tipos principales de funciones para argumentos discretos en el caso $1D$. En el primer caso, los valores de la función corresponde a los nodos, la cual es la discretización nodal. En éste caso el mallado de la función u^h es un conjunto (vector) de m números:

$$u^h = \{u_i^h, i = 0, \dots, m-1\} \quad (2.6)$$

Usando la interpretación de funciones de mallado como resultado de medidas, se puede decir que en el caso de la discretización nodal, los instrumentos miden valores exactamente en los nodos.

Si es posible medir sólo el valor promedio sobre las celdas (x_i, x_{i+1}) entonces el valor de las funciones de mallado corresponde a las celdas. Esta es la discretización de centro de celda. Es importante notar que en éste caso, el valor de una función no corresponde a

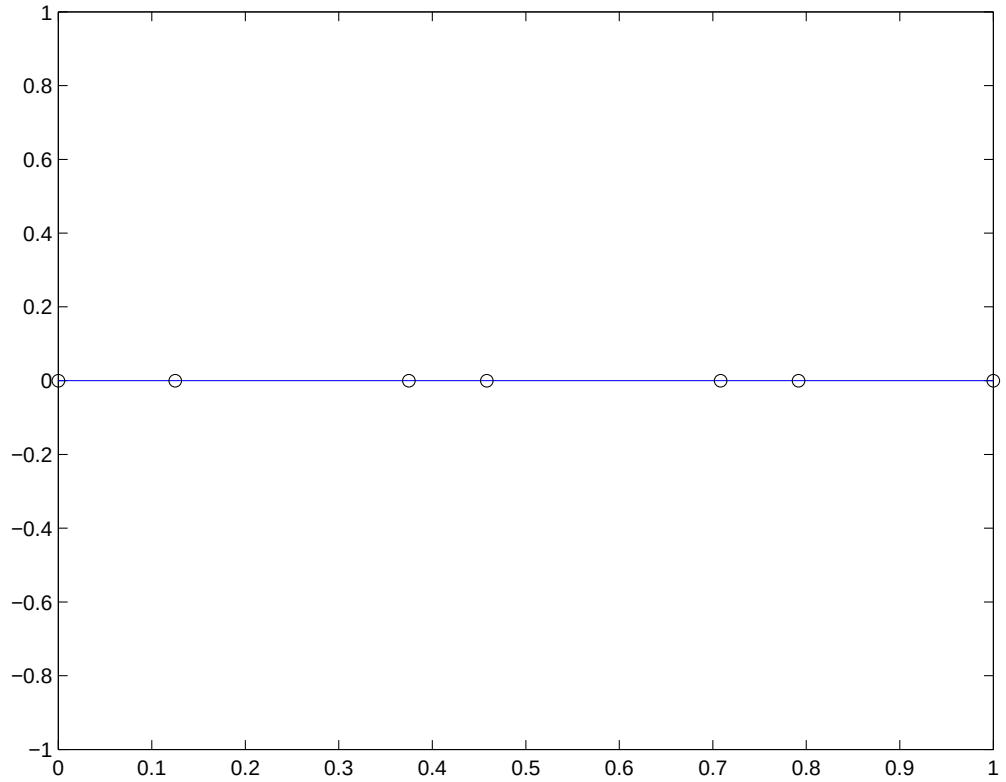


Figura 2.3: Mallado No Uniforme No Suave

un punto específico en la celda, pero corresponde a la celda cómo un objeto geométrico. Hay dos formas para denotar los valores para funciones de mallado de centro de celda. En el primer caso, los índices medios son usados. La notación $u_{i+\frac{1}{2}}^h$ es usada para el valor de la función en la celda (x_i, x_{i+1}) . En el segundo caso, éste valor se conoce con el índice u_i^h del nodo izquierdo de la celda.

Los índices i varían desde 0 hasta $m - 2$.

2.3. Método de Operadores de Soporte

De los diversos métodos que hay para resolver distintas ecuaciones diferenciales, existe uno denominado **Método de Operadores de Soporte**. Este método ha sido desarrollado por A. Favorskii, A. Samarskii, M. Shashkov, y V. Tishkin en [15], y se usa para construir esquemas de diferencias finitas de ecuaciones diferenciales.

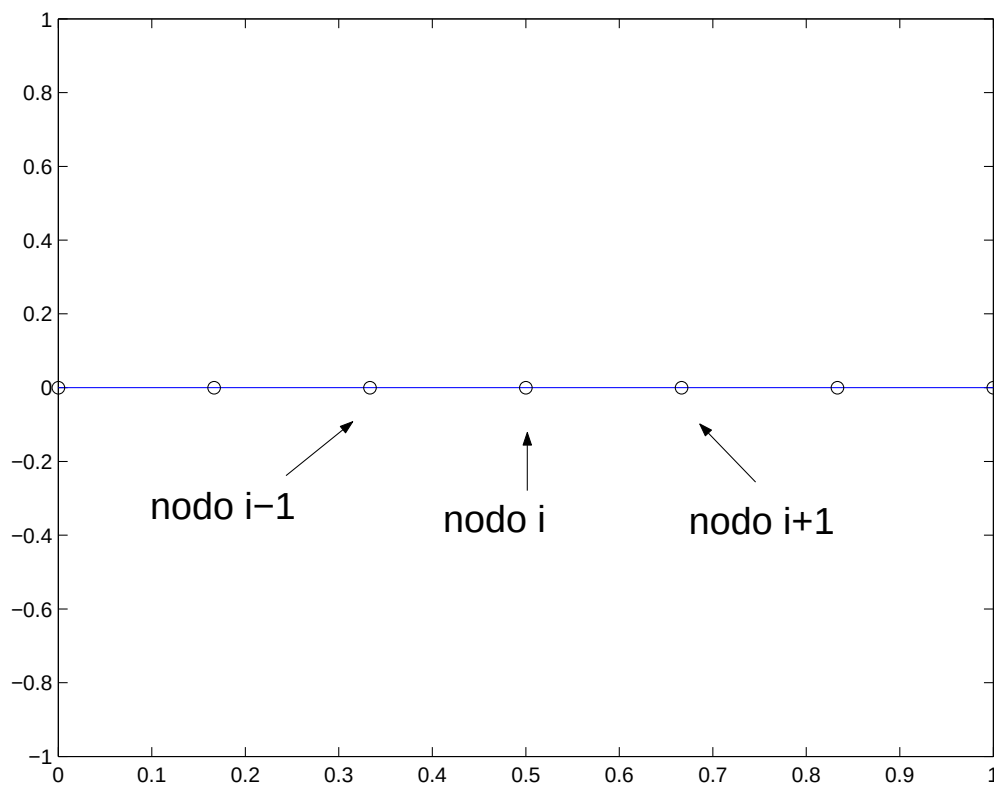


Figura 2.4: Discretización Nodal

2.3.1. Etapas Principales

Hay cinco pasos principales en la construcción de esquemas de diferencias finitas para ecuaciones que modelan procesos físicos con dicho método, que se resumen de la siguiente manera:

1. Primero se escribe la ecuación original en términos de los operadores diferenciales invariantes de primer orden como *div*, *grad* y *curl*.
2. Es importante entender que las propiedades de los operadores diferenciales implican leyes de conservación y otras características principales del sistema original de ecuaciones diferenciales, de tal manera existen dos clases distintas de las propiedades del operador. La primera clase contiene las propiedades de un operador simple. La segunda contiene las propiedades que son enlazadas con dos o más operadores. La segunda clase de propiedades juega un rol principal en éste desarrollo. Las relaciones principales que son usadas para la construcción de

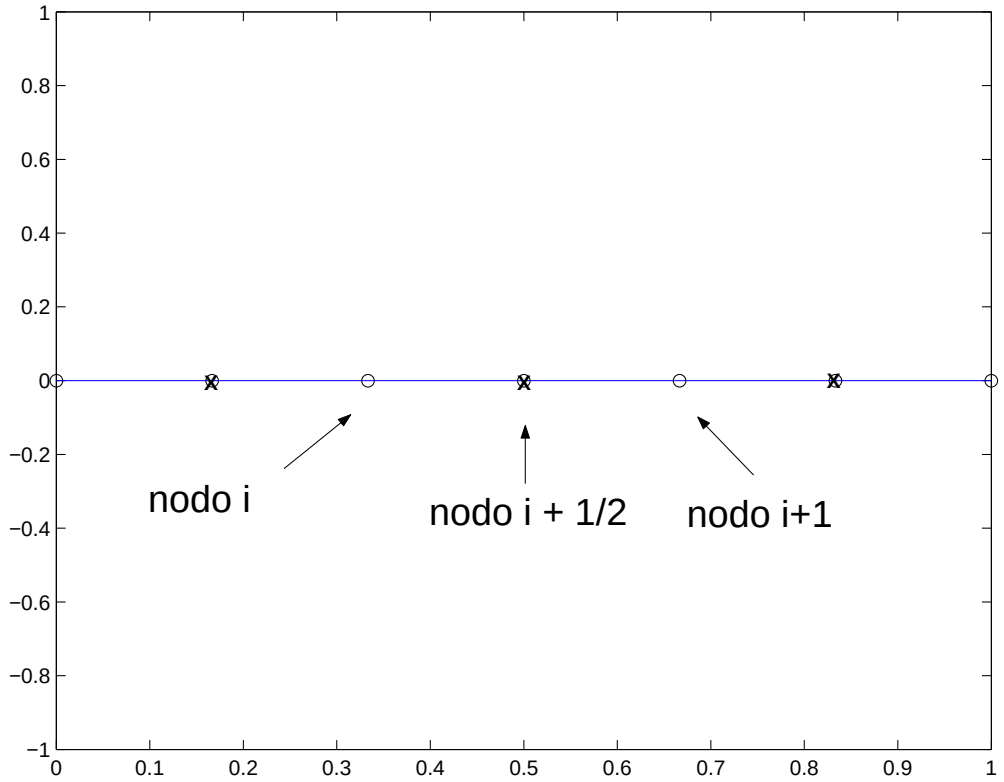


Figura 2.5: Discretización de Centro de Celda

esquemas de diferencias finitas son:

$$\begin{aligned}
 \int_V \varphi \operatorname{div} \vec{A} dV + \int_V (\vec{A}, \operatorname{grad} \varphi) dV &= \oint_S \varphi (\vec{A}, \vec{n}) dS, \\
 \int_V (\vec{A}, \operatorname{curl} \vec{B}) dV + \int_V (\vec{B}, \operatorname{curl} \vec{A}) dV &= \oint_S (\vec{n}, \vec{A} \times \vec{B}) dS, \\
 \int_V \varphi (\vec{C}, \operatorname{curl} \vec{A}) dV - \int_V (\vec{C}, \vec{A} \times \operatorname{grad} \varphi) dV &= \oint_S \varphi (\vec{C}, \vec{n} \times \vec{A}) dS, \\
 \int_V \varphi \psi \operatorname{div} \vec{A} dV + \int_V \varphi (\vec{A}, \operatorname{grad} \psi) dV + \int_V \psi (\vec{A}, \operatorname{grad} \varphi) dV &= \oint_S \varphi \psi (\vec{A}, \vec{n}) dS, \\
 \int_V \nabla \vec{A} \cdot \cdot \psi \hat{\sigma}^* dV + \int_V (\vec{A}, \psi \operatorname{div} \hat{\sigma}) dV + \int_V (\vec{A}, (\operatorname{grad} \psi \cdot \hat{\sigma})) dV &= \oint_S (\psi \vec{n}, (\hat{\sigma} \cdot \vec{A})) dS
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde V es el volumen arbitrario con superficie S y el vector unitario normal $\vec{n}$, φ y ψ son funciones escalares arbitrarias, $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son funciones vectoriales arbitrarias, $\hat{\sigma}$ es la función tensorial arbitraria; $\nabla \vec{A}$ es el gradiente de la función vectorial; $\cdot \cdot$ denota la doble convolución del tensor y el vector; y $\vec{C}$ es un vector tal que $\operatorname{curl} \vec{C} = 0$.

Todas éstas identidades son usadas para obtener aproximaciones de operadores de diferencias consistentes para div y $grad$ que son usados en la construcción de los esquemas de diferencia para cualquier tipo de ecuación diferencial.

3. Se consideran dos tipos de discretizaciones. La primera es la discretización nodal para las funciones escalares y una discretización de centro de celda de la función vectorial del componente cartesiano. La segunda usa la discretización nodal para el componente cartesiano de la función vectorial y la discretización de centro de celda para las funciones escalares.
4. La selección del operador primal debe ser hecha. Este operador debe ser un operador diferencial de primer orden el cual es usado en la formulación de ecuaciones originales, Un análogo para éste operador es dado por la definición. Entonces los otros operadores de diferencia son obtenidos desde la definición de la discretización del operador primal y los análogos de diferencia de identidades integrales. En el caso de discretización nodal de la función vectorial, es natural usar la divergencia con el operador primal. En el caso de discretización nodal de la función escalar, es conveniente usar el operador $grad$ como primal.
5. Las fórmulas para los otros operadores, se llama operadores *derivados*, son obtenidos por la forma del operador primal y la forma de análogos de diferencias de las identidades integrales.
6. Finalmente, si se toma análogos de operadores diferenciales con la forma de las diferenciales originales, entonces podemos obtener el Esquema de Diferencias Finitas para sustituir los operadores discretos en operadores diferenciales.

2.3.2. Sistema de Operadores de Diferencia Consistentes en $1D$

Se va asumir que $V = [0, 1]$ y $\vec{A} = \{AX, 0, 0\}$. Lo cual es, que $\vec{A}$ tiene sólo una componente. Todas las funciones escalares y las componentes dependen sólo de la variable x .

En el caso donde $grad$ y div son ambas iguales a $\frac{du}{dx}$, Se debe construir dos análogos de diferencia diferentes para la primera derivada.

En 1D la primera identidad (2.7) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\int_0^1 \frac{dAX}{dx} dx + \int_0^1 AX \frac{d\varphi}{dx} dx = \varphi(1)AX(1) - \varphi(0)AX(0). \quad (2.8)$$

Por simplicidad, se asume que la función φ es igual a cero en $x = 0$ y $x = 1$. Entonces el lado derecho en la ecuación previa es igual a cero y ésta ecuación se puede volver a escribir de la siguiente forma:

$$\int_0^1 \varphi \frac{dAX}{dx} dx + \int_0^1 AX \frac{d\varphi}{dx} dx = 0. \quad (2.9)$$

En el caso 1D, los análogos en diferencia de la primera derivada deberían imitar algún análogo de ésta identidad.

Se considerará el caso donde la función escalar pertenece a HN , que es el espacio de funciones discretas aproximadas, $u^h \in HN$ y $u_0^h = u_{m-1}^h = 0$. Esto significa que en éste caso se considerará funciones discretas $u^h = (u_1^h, u_2^h, \dots, u_{m-2}^h)$. Es natural en éste caso seleccionar $D_x : HN \rightarrow HC$, donde HC es el espacio de funciones discretas continuas. Evaluando en la celda i .

$$(D_x u^h)_i = \frac{u_{i+1}^h - u_i^h}{x_{i+1} - x_i} \quad (2.10)$$

Debido a que la función u^h es igual a cero en la frontera se modifica la definición del operador D_x en las celdas $i = 1$ e $i = m - 1$.

$$(D_x u^h)_0 = \frac{u_2^h}{x_1 - x_0}, \quad (2.11)$$

$$(D_x u^h)_{m-1} = \frac{-u_{m-1}^h}{x_{m-1} - x_{m-2}}. \quad (2.12)$$

Además, para tener la capacidad de aproximar la segunda derivada, se debería construir otro análogo de diferencia para la primera derivada $\mathcal{D}$ donde $\mathcal{D}_x : HC \rightarrow HN$.

Para construir el operador $\mathcal{D}_x$, se usará el análogo en diferencia de la ecuación (2.9).

Para diferentes funciones $u^h \in HN$ y $v^h \in HC$ se obtiene:

$$\sum_{i=2}^{m-1} u_i^h (D_x v^h)_i V N_i + \sum_{i=1}^{m-1} (D_x u^h)_i v_i^h V C_i = 0, \quad (2.13)$$

donde VC_i es la longitud (Volumen en 3-D) de la celda i , VN_i es una longitud que corresponde al nodo. Existe una restricción natural para VC y VN , la cual debería ser mayor que cero y su suma debería aproximar el volumen total

$$VC_i, VN_i > 0, \quad \sum_{i=0}^{m-2} VC_i \approx 1; \quad \sum_{i=1}^{m-2} VN_i \approx 1. \quad (2.14)$$

En ésta sección se usará las siguientes expresiones para VC :

$$VC_i = x_{i+1} - x_i, \quad i = 0, \dots, m-2 \quad (2.15)$$

y para VN_i

$$VN_i = \begin{cases} \frac{x_2 - x_1}{2}, & \text{si } i = 0, \\ \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2}, & \text{si } i = 1, \dots, m-2 \\ \frac{x_{m-1} - x_{m-2}}{2}, & \text{si } i = m-1 \end{cases} \quad (2.16)$$

Ahora se desarrollará la sumatoria del lado derecho en la identidad (2.13) para escoger el coeficiente u_i^h :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-2} (D_x u^h) v_i^h VC_i &= \frac{u_2^h}{x_2 - x_1} v_1^h (x_2 - x_1) + \sum_{i=1}^{m-3} \frac{u_{i+1}^h - u_i^h}{x_{i+1} - x_i} v_i^h (x_{i+1} - x_i) - \\ &\frac{u_{m-1}^h}{x_m - x_{m-1}} v_{m-1}^h (x_m - x_{m-1}) = \sum_{i=0}^{m-3} u_{i+1}^h v_i^h - \sum_{i=2}^{m-1} u_i^h v_i^h. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para transformar la primera suma en el lado derecho de (2.17) se introduce un nuevo índice para la sumatoria $i' = i + 1$, entonces se obtiene

$$\sum_{i=0}^{m-3} u_{i+1}^h v_i^h = \sum_{i'=1}^{m-2} u_{i'}^h v_{i'-1}^h.$$

Debido a que i' es el índice de la sumatoria, éste se puede denotar cómo i de nuevo, entonces desde la consideración previa se obtiene

$$\sum_{i=0}^{m-2} (D_x u^h)_i v_i^h VC_i = \sum_{i=1}^{m-2} u_i^h (v_{i-1}^h - v_i^h).$$

Finalmente ésta ecuación y el análogo de diferencia de la identidad integral (2.13), se concluye que

$$(D_x v^h)_i = \frac{v_i^h - v_{i-1}^h}{VN_i}$$

y usando la fórmula para VN_i

$$(\mathcal{D}_x v^h)_i = \frac{v_i^h - v_{i-1}^h}{0,5(x_{i+1} - x_{i-1})}, \quad i = 2, \dots, m-1$$

La molécula para el operador $\mathcal{D}_x$ contiene dos celdas: i e $i-1$.

De ésta forma se puede construir dos operadores de diferencia D_x y $\mathcal{D}_x$ los cuales corresponden a la derivada $\frac{d}{dx}$ que satisface la identidad (2.13).

Actualmente se considera el sub-espacio de HN cuando las funciones discretas son iguales a cero en la frontera.

Debido a que el dominio de un operador es el mismo cómo el rango de los valores del otro operador, los análogos diferentes de la ecuación diferencial de segundo orden pueden ser contruidos:

$$\begin{aligned} D_x(\mathcal{D}_x) &: HC \rightarrow HN \\ \mathcal{D}_x(D_x) &: HN \rightarrow HN. \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.4. Método de Diferencias Finitas de Castillo

Este nuevo método de diferencia finita conserva propiedades fundamentales de los operadores diferenciales continuos y permiten a las aproximaciones discretas de las ecuaciones diferenciales, imitan propiedades discretas críticas, incluyendo leyes de conservación y simetrías en la solución del problema físico fundamental. Los análogos discretos de *div*, *grad* y *rotor* satisfacen las identidades y teoremas del cálculo vectorial y tensorial y proveen nuevos algoritmos seguros para una gran clase de ecuaciones diferenciales.

Una de las partes centrales del análisis vectorial discreto es el análogo de la fórmula de integración por partes. Los operadores compatibles discretos de la divergencia ($\nabla \cdot$), y gradiente (∇) satisfacen a un análogo discreto del Teorema de la Divergencia.

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v} f dV + \int_{\Omega} \vec{v} \nabla f dV = \int_{\partial\Omega} f \vec{v} \cdot \vec{n} dS. \quad (2.19)$$

Aquí Ω es cualquier región suave en un espacio Euclídeo, $\partial\Omega$ es la frontera de la región, $\vec{n}$ es un vector normal exterior a la frontera, f es una función escalar suave definida sobre la clausura de la región, y $\vec{v}$ es un campo vectorial suave definido sobre la región. Para éstos dos operadores, hay tres ideas relacionadas: el **Teorema de la Divergencia**,

la **Conservación Local** y la **Conservación Global**. La conservación local es un caso especial del teorema de la divergencia con $f = 1$ y Ω una simple celda, mientras la conservación global es (2.19) cuando $f = 1$ aplicada a una región. Se refieren a discretizaciones, las cuales poseen propiedades análogas a éstas como **Miméticos**. Así el teorema de la divergencia o ley de conservación local implican una ley de conservación global.

En un conjunto unidimensional, por ejemplo en el intervalo $[0, 1]$ (2.19) se simplifica integrando por partes:

$$\int_0^1 \frac{dv}{dx} f dx + \int_0^1 v \frac{df}{dx} dx = v(1)f(1) - v(0)f(0). \quad (2.20)$$

En algunas aplicaciones, como las leyes de conservación hiperbólicas, el operador gradiente no es necesitado, pero una divergencia si, donde la conservatividad significa que la fórmula de integración por partes, cuando $f \equiv 1$ es:

$$\int_0^1 \frac{dv}{dx} dx = v(1) - v(0). \quad (2.21)$$

2.4.1. Operadores Discretos de Segundo Orden

La divergencia discreta más simple se define la siguiente manera:

$$(Dv)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{v_{i+1} - v_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad 0 \leq i \leq m-2, \quad (2.22)$$

y el gradiente discreto se define como:

$$\begin{aligned} (Gf)_0 &= \frac{f_{\frac{1}{2}} - f_0}{x_{\frac{1}{2}} - x_0} \\ (Gf)_i &= \frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}}, \quad 1 \leq i \leq m-2, \\ (Gf)_{m-1} &= \frac{f_{m-1} - f_{m-\frac{3}{2}}}{x_{m-1} - x_{m-\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde la definición de G en los puntos de frontera es estándar para la teoría de los operadores de soporte. La divergencia D es de segundo orden. mientras el gradiente G tiene una precisión de segundo orden en el interior del dominio y de primer orden en la frontera.

Usando tanto la regla del punto medio y la regla trapezoidal, se definen dos **integrales discretas** para los nodos y los centros de celda de la siguiente manera:

$$I_c = h \sum_{i=0}^{m-2} f_{i+\frac{1}{2}}, \quad (2.24)$$

$$I_{m-1}v = h \left(\frac{v_0}{2} + \sum_{i=1}^{m-2} v_i + \frac{v_{m-1}}{2} \right). \quad (2.25)$$

De ésta manera al desarrollar éstas dos sumatorias se obtiene:

$$I_c(Dv) = v_{m-1} - v_0,$$

$$I_m(GF) = f_{m-1} - f_0 \quad (2.26)$$

Con lo cual se satisface el equivalente discreto de (2.21).

2.4.2. Esquemas de Discretización Miméticos (Método de Castillo-Grone)

Cuando se usa un mallado uniforme, la función v da una $(m+1)$ -upla, y el operador de divergencia es una matriz D de m por $m-1$. Sea $e = (1, 1, \dots, 1)^t$ la m -upla del tamaño de la aproximación. Cómo la divergencia de $v \equiv 1$ es cero, se desea que la matriz D satisfaga la propiedad análoga:

$$De = 0; \quad (2.27)$$

donde e es una $(m+1)$ -upla de unos. Esta condición también puede ser expresada cómo la suma de los elementos de cada fila de D es cero.

Es conveniente expresar que la ley de conservación global en términos de producto interno es:

$$\langle \nabla \cdot v, 1 \rangle = v(1) - v(0), \quad (2.28)$$

el cual tiene el análogo discreto:

$$\langle Dv, e \rangle = v(m-1) - v(0), \quad (2.29)$$

donde e es una m -upla. Esta condición también se puede expresar por la característica que la suma de columnas de D sea igual a $-1, 0, \dots, 0, 1$, lo que equivale a:

$$e^t D = (-1, 0, \dots, 0, 1). \quad (2.30)$$

Suponiendo una función w que es definida como $w(x) = v(1 - x)$, $0 \leq x \leq 1$. Entonces la divergencia de w es el negativo de la divergencia de v . En términos algebraicos esto se expresa cómo la siguiente condición de simetría en D . Sea P_m la matriz de permutación:

$$P_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Si D es de m por $m + 1$, entonces la versión discreta de $\nabla \cdot w = -\nabla \cdot v$ es

$$P_m D P_{m+1} = -D. \quad (2.32)$$

La propiedad (2.32) implica que la matriz D sea **Centro-skew-simétrica**. Por todo lo anterior se puede concluir que D tiene las siguientes propiedades:

1. La suma de filas de D da cero, lo que equivale decir que, $De = 0$, donde $e = (1, 1, \dots, 1)^t$.
2. La suma de columnas de D es $-1, 0, \dots, 0, 1$ lo que equivale, $e^t D = (-1, 0, 0, \dots, 0, 1)$.
3. D es una matriz en banda
4. D tiene una estructura de tipo de **Toeplitz** en las filas interiores y es definida independientemente de m , del número de puntos sobre el mallado.
5. D es **Centro-skew-simétrica**.

El problema de hallar una versión discreta mimética del gradiente es el mismo para hallar una versión discreta mimética para la divergencia, si el producto interno es empleado, Sea D una versión discreta de m por $m + 1$ de la divergencia; entonces se tiene $\widehat{D}$ la matriz D aumentada con dos filas, insertando una fila en la primera y otra en la última, de ceros; y sea G una versión discreta del gradiente de $m + 1$ por $m + 2$. Si v es una $m + 1$ -upla, f es la m -upla, $(f_{\frac{1}{2}}, f_{\frac{3}{2}}, \dots, f_{m-\frac{3}{2}})$, y $\widehat{f}$ es f con los puntos finales f_0 y f_m que son adicionados a los extremos de $\widehat{f}$ que es una $m + 2$ -upla, entonces la ecuación (2.20) es equivalente a:

$$\langle \widehat{D}v, \widehat{f} \rangle + \langle v, G\widehat{f} \rangle = v_{m-1}f_{m-1} - v_0f_0 \quad (2.33)$$

o lo que es lo mismo

$$\langle \widehat{D}v, \widehat{f} \rangle + \langle G^t v, \widehat{f} \rangle = \langle Bv, \widehat{f} \rangle, \quad (2.34)$$

donde B es la matriz $m + 2$ por $m + 1$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

De tal manera, esto implica que $\widehat{D} + G^t = B$, de la cual se obtiene que G debería tener la forma:

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & -D^t \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

2.4.3. Productos Internos Generalizados

Para desarrollar los esquemas de diferencias, se va a necesitar entender los siguientes productos internos, debido que a través de ellos, se utilizara el análisis matricial conveniente para obtener esquemas de orden superior. Una generalización de producto interno sobre m -uplas es:

$$\langle u, v \rangle_Q \equiv \langle Qu, v \rangle = v^t Qu, \quad (2.37)$$

donde Q es una matriz m por m definida positiva. Alternativamente, ésta puede ser expresada de la siguiente forma:

$$\langle u, v \rangle_E = \langle Eu, Ev \rangle = v^t E^t Eu, \quad (2.38)$$

donde E es cualquier matriz en línea de m , la cual satisface $E^t E = Q$; se refiere al producto interno definido por E o Q como un **producto interno generalizado**. Cuando la matriz Q o E es diagonal, se refiere al producto interno correspondiente como un

producto interno pesado. Si se usa un producto interno generalizado, entonces las ecuaciones como la (2.29) o (2.30) se pueden ver como

$$\langle Dv, e \rangle_Q = v_{m-1} - v_0 \quad (2.39)$$

ó

$$e^t Q D = (-1, 0, \dots, 0, 1). \quad (2.40)$$

Se mostrará que los objetivos de la divergencia miméticas de orden superior no pueden logradas con respecto al producto interno estándar, pero puede ser lograda con un producto interno generalizado. De hecho, la matriz Q resulta ser diagonal, centro-simétrica e independiente de m .

2.4.4. Divergencias de Orden Superior

Sea D una matriz de m por $m+1$ que representa a la divergencia discreta, se dice que D es una **aproximación de orden superior** si D es exacta para polinomios de grado menor o igual a k , pero no $k+1$. Existe una matriz molécula natural, S , para las aproximaciones de orden k . Por ejemplo si $k=4$, entonces el tamaño de la banda de S es igual a 4, así cómo las filas internas de S tienen la forma

$$\frac{1}{24} [0, \dots, 0, 1, -27, 27, -1, 0, \dots, 0]. \quad (2.41)$$

Suponiendo que $m=7$ y $k=5$, usando la molécula dada por (2.41) y utilizando las condiciones de la suma de columnas sobre S , se obtiene la matriz

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{25}{24} & \frac{13}{12} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{9}{8} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{13}{12} & \frac{25}{24} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Esta matriz tiene la mayoría de las propiedades requeridas, la suma de filas y columnas son las deseadas. La matriz es de banda, con un tamaño de banda de $b=4$, y ésta es centro-skew-simétrica. La matriz puede ser descrita independientemente de m para $m \geq 5$. Satisface las condiciones de cuarto orden de aproximación en su parte interna, pero no en la frontera. En la próxima proposición se emplearán técnicas de análisis

matricial para modificar la matriz S , para que tenga aproximaciones de cuarto orden en la frontera.

Proposición

No se tiene una matriz de divergencia la cual es de k -ésimo orden para $k \geq 2$ cuando Q es diagonal con respecto al producto interno estándar.

Nótese que la matriz molécula de m por $m + 1$, S , satisface las condiciones miméticas

1. $Se = 0$,
2. $\text{rango}(S) = m$,
3. S es centro skew simétrica,
4. $e^t S = (-1, 0, \dots, 0, 1)$.

Sea Q una matriz diagonal arbitraria de m por m . Es imposible que tanto S y QS satisfagan la condición $Q = I_m$. Se puede notar que S no soporta la condición de k -ésimo orden en la frontera para $k \geq 2$. Si $e^t S = e^t QS$, entonces $e^t(I_m - Q)S = 0$. Tomando el $\text{rango}(S) = m$, $e^t(I_m - Q)S = 0$, de ésta manera $I_m - Q$ es diagonal, y esto forzará que $I_m - Q = 0$.

La matriz S no puede tener caracterizaciones de orden superior en los puntos extremos del intervalo con respecto al producto interno estándar. Debería notarse que los pesos son usados sólo en el producto interno generalizado y nunca son parte de los cálculos. Esta proposición apoya los resultados, para mallados nodales. La aproximación más general $D(A)$, tendrá casi éxito. Mas precisamente, cuando k es tomado, esto debería ser posible para hallar A de k por $\frac{3}{2}k$, la cual satisface las condiciones miméticas.

En forma general, sea $D(A)$ obtenida para reemplazar las t primeras de S con la matriz $[A \ 0]$, donde A es de t por l . Sea la tl -tupla $a = [\text{fila}_1(A), \text{fila}_2(A), \dots, \text{fila}_t(A)]^t$, donde $t = k$, y $l = \frac{3}{2}k$. Las condiciones que se desea que $D(A)$ satisfaga son las condiciones de suma de filas, las condiciones de suma de columnas, y las demás condiciones (de orden k). Estas son condiciones lineales, y se necesita la siguiente notación para expresarlas en términos matriciales. Para un entero positivo n y $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, sea $V(n; x_1, \dots, x_m)$ la **matriz de Vandermonde** de $(n + 1)$ por m .

$$V(n; x_1, \dots, x_m) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^n & \cdots & x_m^n \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Las condiciones de orden y miméticas en $D(A)$ pueden ser expresadas en la forma

$$Ma = r, \quad (2.44)$$

donde M es la matriz de $(tk + t + l)$ por tl

$$M = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & V_t \\ I_l & I_l & \dots & I_l \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

y $V_1, \dots, V_t$ son las siguientes matrices de Vandermonde:

$$V_1 = V(k; 1, -1, -3, \dots, -1 - 2k),$$

$$V_2 = V(k; 3, 1, -1, \dots, 1 - 2k),$$

$$V_3 = V(k; 5, 3, 1, \dots, 3 - k),$$

$$\vdots \quad \vdots$$

$$V_t = V(k; 2t - 1, \dots, 2t - 2k - 3).$$

Aquí la primera fila de V_i corresponde a la condición de la suma de fila i de $D(A)$, las últimas k filas de V_i corresponden a las condiciones de orden (k) en la fila i de A . Las entradas en las matrices de Vandermonde son determinadas por las expansiones de Taylor de las funciones usadas en la aproximación. Las últimas l filas de M , o simplemente la última fila bloque de M , corresponde a las condiciones de suma de columnas en $D(A)$. Sea r una $(tk + t + l)$ -tupla en (2.44) y $c = (0, -2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{k+1}$ se tiene que

$$r = \begin{pmatrix} c \\ c \\ \vdots \\ c \\ d \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

donde $d \in \mathbb{R}^l$ es cambiado para la sumatoria de columna de $(D(A))$ sea $-1, 0, \dots, 0, 1$. Ahora el problema se centra en la ecuación (2.44). Es importante notar que la condición $m \geq 2l - 1$ ó $m \geq 3b - 1$ asegure que las partes no nulas de A y A' en $D(A)$ no se sobrelapen, para que se pueda considerar A independientemente de A' .

2.4.5. Divergencia de Cuarto Orden

Para modificar la matriz S en (2.42) y para obtener la aproximación de orden superior en la frontera, se necesita sólo modificar las esquinas superior izquierda y superior derecha de S . Sea A una matriz de k por l y sea

$$D = D(A) = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{27}{24} & \frac{27}{24} & -\frac{1}{24} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{27}{24} & \frac{27}{24} & -\frac{1}{24} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & & & & & & A' \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

donde $A' = P_k A P_l$ y las filas intermedias de $D(A)$ son justamente tomadas de S .

Para encontrar esta, sea A una matriz de 4 por 6, la cual es la parte más grande de S que puede ser modificada y todavía permite que la sumatoria de columnas para que funcione con A y A' no se sobresaltasen. Esto justifica que D sea de 11 por 12, la cual en un ejemplo de $m \geq 3b - 1$, de ésta manera

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Sea $a_i = \text{fila}_i(A)$ y

$$a = [a_1, a_2, a_3, a_4] \in R^{24} \quad (2.49)$$

Las condiciones en A para que $D(A)$ satisfaga la sumatoria de filas, la sumatoria de columnas, y otras restricciones que son descritas para una ecuación matricial cómo la siguiente. Las condiciones en a_1 corresponde a la matriz

$$V_1 = V(4; 1, -1, -3, -5, -7, -9) \quad (2.50)$$

con

$$V(4; 1, -1, -3, -5, -7, -9) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & -7 & -9 \\ 1 & 1 & 9 & 25 & 49 & 81 \\ 1 & -1 & -27 & -125 & -343 & -729 \\ 1 & 1 & 81 & 625 & 2401 & 6561 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Similarmente se aplica este proceso a:

$$V_2 = V(4; 3, 1, -1, -3, -5, -7), \quad (2.52)$$

$$V_3 = V(4; 5, 3, 1, -1, -3, -5), \quad (2.53)$$

$$V_1 = V(4; 7, 5, 3, 1, -1, -3). \quad (2.54)$$

Aquí V_i es una matriz de Vandermonde la cual satisface las condiciones deseadas en a_i . La ecuación

$$V_i a_i = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

establece cinco restricciones en a_i . La primera es que la sumatoria de a_i sea cero. Las próximas cuatro describan las condiciones en a_i para obtener una aproximación de cuarto orden. Este enfoque se generaliza para cualquier orden de aproximación.

Ahora se usa V_1, V_2, V_3, V_4 para formar una matriz de 26 por 24:

$$M = \begin{pmatrix} V_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_4 \\ I_6 & I_6 & I_6 & I_6 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Sea $r \in R^{26}$ dada en (2.46) donde $C^t = (0, -2, 0, 0)$ y $d^t = (1, 0, 0, -\frac{1}{24}, \frac{13}{12}, -\frac{1}{24})$. Las últimas 6 filas de M y las últimas 6 entradas de r se complementan con la necesidad de cambiar A para que las primeras 6 sumatorias de columnas de $D(A)$ sean -1,0,0,0,0,0. La siguiente ecuación matricial representa las propiedades requeridas:

$$Ma = r \quad (2.57)$$

Sin embargo, este sistema es inconsistente para todas las M de orden correspondientes mayores a uno. Esta conlleva el uso de la escala de las primeras cuatro filas de $D(A)$. Es importante notar que la nueva divergencia va a satisfacer las condiciones del esquema de discretización miméticos con la condición de columna. Ahora se va a mostrar el enfoque

que da las siguientes soluciones:

$$\widehat{V}(4; 1, -1, -3, -5, -7, -9) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 9 & 25 & 49 & 81 \\ 1 & -1 & -27 & -125 & -343 & -729 \\ 1 & 1 & 81 & 625 & 2401 & 6561 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

donde $\widehat{V}$ y $\widehat{b}$ son generadas eliminando la segunda fila de V y b respectivamente, para formar

$$\widehat{M} = \begin{pmatrix} \widehat{V}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \widehat{V}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{V}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widehat{V}_4 \\ I_6 & I_6 & I_6 & I_6 \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

y resolver

$$\widehat{M}a = \widehat{r} \quad (2.60)$$

Y esto dará la divergencia. Para obtener los pesos, se necesita formar una matriz M_w con las filas borradas de M , y para multiplicar M_w por a . Este enfoque produce una familia tri-paramétrica de soluciones. Aquí se presenta una divergencia donde hay cambios sólo en la primera fila:

$$\begin{array}{cccccccc} -\frac{4751}{5192} & \frac{909}{1298} & \frac{6091}{15576} & -\frac{1165}{5192} & \frac{129}{2596} & -\frac{25}{15576} & 0 & 0 \\ \frac{1}{24} & -\frac{27}{24} & \frac{27}{24} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24} & -\frac{27}{24} & \frac{27}{24} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{27}{24} & \frac{27}{24} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{27}{24} & \frac{27}{24} & -\frac{1}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{27}{24} & \frac{27}{24} & -\frac{1}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{27}{24} & \frac{27}{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & -\frac{27}{24} \end{array} \quad (2.61)$$

2.4.6. Gradientes de Orden Superior

Usando la aproximación cuando $v \equiv 1$ de la divergencia discreta $D1 = 0$, la fórmula de sumatoria por partes (2.19) se reduce a:

$$\langle 1, pGf \rangle = f_{m-1} - f_0 \quad (2.62)$$

El operador G dado en (2.23) satisface la condición y es un gradiente de segundo orden en el interior con un error de truncamiento de primer orden en la frontera. La matriz gradiente para este caso es:

$$G = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

De esta misma forma utilizando la aproximación estándar de cuarto orden

$$(Gf)_i = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{24} f_{i-\frac{3}{2}} - \frac{27}{24} f_{i-\frac{1}{2}} + \frac{27}{24} f_{i+\frac{1}{2}} - \frac{27}{24} f_{i+\frac{3}{2}} \right) \quad (2.64)$$

se obtiene

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{1152}{407} & \frac{10063}{3256} & \frac{2463}{9768} & -\frac{3309}{3256} & \frac{2099}{3256} & -\frac{697}{4884} & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{11}{12} & \frac{17}{24} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{24} & \frac{1}{24} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{24} & -\frac{27}{24} & \frac{27}{24} & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

Capítulo 3

Desarrollo

3.1. Introducción

En este capítulo se mostrará como se emplean los métodos de diferencias finitas miméticas a la ecuación diferencial general (1.9), y se obtendrán los esquemas $1 - 2 - 1$, $2 - 2 - 2$, $4 - 4 - 4$ y $6 - 6 - 6$ para el problema de dispersión de onda acústica, luego se justificará el uso del lenguaje *MATLAB*, y se ilustrará la Estructura de Datos utilizada para resolver dichos esquemas, además se definirá el análisis del orden de convergencia, que será parte del estudio de este trabajo para comparar éstos métodos en función del error de norma de energía.

3.2. Aplicación del Método de Operadores de Soporte

En ésta sección se va a tomar el sistema de ecuaciones de Helmholtz (1.9) y (1.10), evaluado en los siguientes puntos:

$$z_i = p'_i \quad (3.1)$$

$$\alpha z'_i + \beta z_i + \delta p_i = f_i \quad (3.2)$$

Que están sujetas a las condiciones de frontera

$$\gamma_1 z(0) + \xi_1 p(0) = K_1 \quad (3.3)$$

$$\gamma_2 z(1) + \xi_2 p(1) = K_2 \quad (3.4)$$

donde $\alpha, \beta, \delta, f \in L^2$, $\gamma_1, \gamma_2, \xi_1, \xi_2, K_1, K_2 \in \mathbb{C}$, y el problema se basa en hallar una solución aproximada para p y z que son las variables.

Se utiliza las siguientes aproximaciones para el gradiente

$$z_0 = \frac{p_{\frac{1}{2}} - p_0}{x_{\frac{1}{2}} - x_0}; \quad i = 0 \quad (3.5)$$

$$p'_i = \frac{p_{i+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}}; \quad i = 1, \dots, m-2 \quad (3.6)$$

$$z_{m-1} = \frac{p_{m-1} - p_{m-\frac{3}{2}}}{x_{m-1} - x_{m-\frac{3}{2}}}; \quad i = m-1 \quad (3.7)$$

Donde m representa la cantidad de nodos sobre el dominio en el mallado.

Despejando todos los términos de la ecuación (3.5) hacia al lado izquierdo se obtiene

$$\left(x_{\frac{1}{2}} - x_0\right) z_0 + p_0 - p_{\frac{1}{2}} = 0 \quad (3.8)$$

Tomando la la ecuación evaluada en los siguientes puntos: $x = x_i$

$$z_i = p'_i; \quad i = 1, \dots, m-2 \quad (3.9)$$

Sustituyendo (3.6) en (3.9) y despejando todos los términos al lado izquierdo se obtiene la siguiente ecuación:

$$\left(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}\right) z_i + p_{i-\frac{1}{2}} - p_{i+\frac{1}{2}} = 0 \quad (3.10)$$

Despejando todos los términos de la ecuación (3.7) hacia al lado izquierdo se obtiene

$$\left(x_{m-1} - x_{m-\frac{3}{2}}\right) z_{m-1} + p_{m-\frac{3}{2}} - p_{m-1} = 0 \quad (3.11)$$

Y la aproximación de la divergencia es la siguiente

$$z'_{i+\frac{1}{2}} = \frac{z_{i+1} - z_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.12)$$

Ahora la ecuación (3.2) se evalúa en los puntos: $x = x_{i+\frac{1}{2}}; i = 1, \dots, m-1$

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}} z'_{i+\frac{1}{2}} + \beta_{i+\frac{1}{2}} z_{i+\frac{1}{2}} + \delta_{i+\frac{1}{2}} p_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}} \quad (3.13)$$

Donde $z_{i+\frac{1}{2}}$ se aproxima por

$$z_{i+\frac{1}{2}} \cong \frac{z_{i+1} + z_i}{2} \quad (3.14)$$

Sustituyendo (3.12) y (3.14) en (3.13) se obtiene la ecuación en diferencias

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{z_{i+1} - z_i}{x_{i+1} - x_i}\right) + \beta_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{z_{i+1} + z_i}{2}\right) + \delta_{i+\frac{1}{2}} p_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}} \quad (3.15)$$

De ésta forma agrupando términos en función de las variables, conjuntamente incluyendo las ecuaciones (3.8), (3.10) y (3.11) además de las condiciones de frontera, el problema a resolver es el siguiente sistema de ecuaciones

$$\gamma_1 z_0 + \xi_1 p_0 = K_1$$

$$\begin{aligned}
& \left(x_{\frac{1}{2}} - x_0\right) z_0 + p_0 - p_{\frac{1}{2}} = 0 \\
& \left(\frac{\beta_{i+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}}{x_{i+1} - x_i}\right) z_i + \left(\frac{\beta_{i+\frac{1}{2}}}{2} + \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}}{x_{i+1} - x_i}\right) z_{i+1} + \delta_{i+\frac{1}{2}} p_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}}; \quad i = 0, \dots, m-2 \\
& \left(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}\right) z_i + p_{i-\frac{1}{2}} - p_{i+\frac{1}{2}} = 0; \quad i = 1, \dots, m-2 \\
& \left(x_{m-1} - x_{m-\frac{3}{2}}\right) z_{m-1} + p_{m-\frac{3}{2}} - p_{m-1} = 0 \\
& \gamma_2 z_{m-1} + \xi_2 p_{m-1} = K_2
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Este sistema se puede representar mediante la siguiente forma matricial

$$Au = F \tag{3.17}$$

Donde $A =$

$$\begin{pmatrix}
\xi_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & x_{\frac{1}{2}} - x_0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \rho_1 & \delta_{\frac{1}{2}} & \rho_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \left(x_{\frac{3}{2}} - x_{\frac{1}{2}}\right) & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \rho_3 & \delta_{m-\frac{1}{2}} & \rho_4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \left(x_{m-1} - x_{m-\frac{3}{2}}\right) & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_2 & \xi_2
\end{pmatrix} \tag{3.18}$$

donde

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \left(\frac{\beta_{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{\alpha_{\frac{1}{2}}}{x_1 - x_0}\right) \\
\rho_2 &= \left(\frac{\beta_{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{\alpha_{\frac{1}{2}}}{x_1 - x_0}\right) \\
\rho_3 &= \left(\frac{\beta_{m-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{\alpha_{m-\frac{1}{2}}}{x_m - x_{m-1}}\right) \\
\rho_4 &= \left(\frac{\beta_{m-\frac{1}{2}}}{2} + \frac{\alpha_{m-\frac{1}{2}}}{x_m - x_{m-1}}\right)
\end{aligned}$$

$$u = \begin{pmatrix} p_0 \\ z_0 \\ p_{\frac{1}{2}} \\ z_1 \\ p_{\frac{3}{2}} \\ z_2 \\ \vdots \\ z_i \\ p_{i+\frac{1}{2}} \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ p_{m-\frac{3}{2}} \\ z_{m-1} \\ p_{m-1} \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} K_1 \\ 0 \\ f_{\frac{1}{2}} \\ 0 \\ f_{\frac{3}{2}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{i+\frac{1}{2}} \\ 0 \\ \vdots \\ f_{m-\frac{3}{2}} \\ 0 \\ K_2 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

3.3. Aplicación del Método de Segundo Orden

Igual en la sección anterior se comenzará tomando el sistema de ecuaciones (3.1) y (3.2) de Helmholtz, con las condiciones de frontera (3.3) y (3.4), de tal forma problema consiste en hallar una solución aproximada para p y z que son las variables de dicho sistema.

Se utiliza las siguientes aproximaciones para el gradiente

$$p'_0 = \frac{-8p_0 + 9p_{\frac{1}{2}} - p_{\frac{3}{2}}}{-8x_0 + 9x_{\frac{1}{2}} - x_{\frac{3}{2}}}; \quad \text{para } i = 0 \quad (3.20)$$

$$p'_i = \frac{p_{i+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}}; \quad \text{para } i = 1, \dots, m-2 \quad (3.21)$$

$$p'_{m-1} = \frac{8p_{m-1} - 9p_{m-\frac{3}{2}} + p_{m-\frac{5}{2}}}{8x_{m-1} - 9x_{m-\frac{3}{2}} + x_{m-\frac{5}{2}}}; \quad \text{para } i = m-1 \quad (3.22)$$

Donde m representa la cantidad de nodos sobre el dominio en el mallado.

Sustituyendo (3.20), (3.21) y (3.22) en (3.1), se obtiene

$$z_0 \left(-8x_0 + 9x_{\frac{1}{2}} - x_{\frac{3}{2}} \right) + 8p_0 - 9p_{\frac{1}{2}} + p_{\frac{3}{2}} = 0 \quad (3.23)$$

$$\left(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} \right) z_i + p_{i-\frac{1}{2}} - p_{i+\frac{1}{2}} = 0 \quad (3.24)$$

$$z_{m-1} \left(8x_{m-1} - 9x_{m-\frac{3}{2}} + x_{m-\frac{5}{2}} \right) - 8p_{m-1} + 9p_{m-\frac{3}{2}} - p_{m-\frac{5}{2}} = 0 \quad (3.25)$$

Y la aproximación de la divergencia es la siguiente

$$z'_{i+\frac{1}{2}} = \frac{z_{i+1} - z_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (3.26)$$

Ahora la ecuación (3.2) se evalúa en los puntos: $x = x_{i+\frac{1}{2}}$; $i = 1, \dots, m-1$

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}} z'_{i+\frac{1}{2}} + \beta_{i+\frac{1}{2}} z_{i+\frac{1}{2}} + \delta_{i+\frac{1}{2}} p_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

Donde $z_{i+\frac{1}{2}}$ se aproxima por

$$z_{i+\frac{1}{2}} \cong \frac{z_{i+1} + z_i}{2} \quad (3.28)$$

Sustituyendo (3.26) y (3.28) en (3.27) se obtiene la ecuación en diferencias

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{z_{i+1} - z_i}{x_{i+1} - x_i} \right) + \beta_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{z_{i+1} + z_i}{2} \right) + \delta_{i+\frac{1}{2}} p_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

De ésta forma agrupando términos en función de las variables, conjuntamente incluyendo las ecuaciones (3.23), (3.24) y (3.25) además de las condiciones de frontera, el problema a resolver es el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \gamma_1 z_0 + \xi_1 p_0 &= K_1 \\ z_0 \left(-8x_0 + 9x_{\frac{1}{2}} - x_{\frac{3}{2}} \right) + 8p_0 - 9p_{\frac{1}{2}} + p_{\frac{3}{2}} &= 0 \\ \left(\frac{\beta_{i+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}}{x_{i+1} - x_i} \right) z_i + \left(\frac{\beta_{i+\frac{1}{2}}}{2} + \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}}{x_{i+1} - x_i} \right) z_{i+1} + \delta_{i+\frac{1}{2}} p_{i+\frac{1}{2}} &= f_{i+\frac{1}{2}} \quad \text{Para } i = 0, \dots, m-2 \\ \left(x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} \right) z_i + p_{i-\frac{1}{2}} - p_{i+\frac{1}{2}} &= 0 \quad \text{Para } i = 1, \dots, m-2 \\ z_{m-1} \left(8x_{m-1} - 9x_{m-\frac{3}{2}} + x_{m-\frac{5}{2}} \right) - 8p_{m-1} + 9p_{m-\frac{3}{2}} - p_{m-\frac{5}{2}} &= 0 \\ \gamma_2 z_{m-1} + \xi_2 p_{m-1} &= K_2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Este sistema se puede representar mediante la siguiente forma matricial

$$Au = F \quad (3.31)$$

Donde $A =$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & \zeta & -9 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_1 & \delta_{\frac{1}{2}} & \rho_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \rho_3 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \rho_4 & \delta_{m-\frac{1}{2}} & \rho_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 9 & \vartheta & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \xi_2 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

donde

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \left(\frac{\beta_{\frac{1}{2}}}{2} - \frac{\alpha_{\frac{1}{2}}}{x_1 - x_0} \right) \\
\rho_2 &= \left(\frac{\beta_{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{\alpha_{\frac{1}{2}}}{x_1 - x_0} \right) \\
\rho_3 &= \left(x_{\frac{3}{2}} - x_{\frac{1}{2}} \right) \\
\rho_4 &= \left(\frac{\beta_{m-\frac{1}{2}}}{2} - \frac{\alpha_{m-\frac{1}{2}}}{x_m - x_{m-1}} \right) \\
\rho_5 &= \left(\frac{\beta_{m-\frac{1}{2}}}{2} + \frac{\alpha_{m-\frac{1}{2}}}{x_m - x_{m-1}} \right) \\
\zeta &= \left(-8x_0 + 9x_{\frac{1}{2}} - x_{\frac{3}{2}} \right) \\
\vartheta &= \left(8x_{m-1} - 9x_{m-\frac{3}{2}} + x_{m-\frac{5}{2}} \right) \\
u &= \begin{pmatrix} p_0 \\ z_0 \\ p_{\frac{1}{2}} \\ z_1 \\ p_{\frac{3}{2}} \\ z_2 \\ \vdots \\ z_i \\ p_{i+\frac{1}{2}} \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ p_{m-\frac{3}{2}} \\ z_{m-1} \\ p_{m-1} \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} K_1 \\ 0 \\ f_{\frac{1}{2}} \\ 0 \\ f_{\frac{3}{2}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{i+\frac{1}{2}} \\ 0 \\ \vdots \\ f_{m-\frac{3}{2}} \\ 0 \\ K_2 \end{pmatrix} \tag{3.33}
\end{aligned}$$

3.4. Aplicación del Método de Cuarto Orden

Para éste método se utiliza las siguientes aproximaciones para el gradiente dado por (2.64)

$$p'_0 = \frac{-\frac{1152}{407}p_0 + \frac{10063}{3256}p_{\frac{1}{2}} + \frac{2483}{9768}p_{\frac{3}{2}} - \frac{3309}{3256}p_{\frac{5}{2}} + \frac{2099}{3256}p_{\frac{7}{2}} - \frac{697}{4884}p_{\frac{9}{2}}}{h}; \tag{3.34}$$

$$p'_1 = \frac{-\frac{11}{12}p_{\frac{1}{2}} + \frac{17}{24}p_{\frac{3}{2}} + \frac{3}{8}p_{\frac{5}{2}} - \frac{5}{24}p_{\frac{7}{2}} + \frac{1}{24}p_{\frac{9}{2}}}{h}; \quad (3.35)$$

$$p'_i = \frac{\frac{1}{24}p_{i-\frac{3}{2}} - \frac{27}{24}p_{i-\frac{1}{2}} + \frac{27}{24}p_{i+\frac{1}{2}} - \frac{1}{24}p_{i+\frac{3}{2}}}{h}; \quad \text{para } i = 2, \dots, m-3 \quad (3.36)$$

$$p'_{m-2} = \frac{\frac{11}{12}p_{m-\frac{3}{2}} - \frac{17}{24}p_{m-\frac{5}{2}} - \frac{3}{8}p_{m-\frac{7}{2}} + \frac{5}{24}p_{m-\frac{9}{2}} - \frac{1}{24}p_{m-\frac{11}{2}}}{h}; \quad (3.37)$$

$$p'_{m-1} = \frac{\frac{1152}{407}p_{m-1} - \frac{10063}{3256}p_{m-\frac{3}{2}} - \frac{2483}{9768}p_{m-\frac{5}{2}} + \frac{3309}{3256}p_{m-\frac{7}{2}} - \frac{2099}{3256}p_{m-\frac{9}{2}} + \frac{697}{4884}p_{m-\frac{11}{2}}}{h}; \quad (3.38)$$

Donde m representa la cantidad de nodos sobre el dominio en el mallado.

Sustituyendo (3.34), (3.35), (3.36), (3.37) y (3.38) en (3.1), se obtiene

$$z_0h + \frac{1152}{407}p_0 - \frac{10063}{3256}p_{\frac{1}{2}} - \frac{2483}{9768}p_{\frac{3}{2}} + \frac{3309}{3256}p_{\frac{5}{2}} - \frac{2099}{3256}p_{\frac{7}{2}} + \frac{697}{4884}p_{\frac{9}{2}} = 0; \quad (3.39)$$

$$z_1h + \frac{11}{12}p_{\frac{1}{2}} - \frac{17}{24}p_{\frac{3}{2}} - \frac{3}{8}p_{\frac{5}{2}} + \frac{5}{24}p_{\frac{7}{2}} - \frac{1}{24}p_{\frac{9}{2}} = 0; \quad (3.40)$$

$$z_ih - \frac{1}{24}p_{i-\frac{3}{2}} + \frac{27}{24}p_{i-\frac{1}{2}} - \frac{27}{24}p_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{24}p_{i+\frac{3}{2}} = 0; \quad \text{para } i = 2, \dots, m-3 \quad (3.41)$$

$$z_{m-2}h - \frac{11}{12}p_{m-\frac{3}{2}} + \frac{17}{24}p_{m-\frac{5}{2}} + \frac{3}{8}p_{m-\frac{7}{2}} - \frac{5}{24}p_{m-\frac{9}{2}} + \frac{1}{24}p_{m-\frac{11}{2}} = 0; \quad (3.42)$$

$$z_{m-1}h - \frac{1152}{407}p_{m-1} + \frac{10063}{3256}p_{m-\frac{3}{2}} + \frac{2483}{9768}p_{m-\frac{5}{2}} - \frac{3309}{3256}p_{m-\frac{7}{2}} + \frac{2099}{3256}p_{m-\frac{9}{2}} - \frac{697}{4884}p_{m-\frac{11}{2}} = 0; \quad (3.43)$$

Y la aproximación de la divergencia es la siguiente

$$z'_{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{-4751}{5192}z_0 + \frac{909}{1298}z_1 + \frac{6091}{15576}z_2 - \frac{1165}{5192}z_3 + \frac{129}{2596}z_4 - \frac{25}{15576}z_5}{h} \quad (3.44)$$

$$z'_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{24}z_{i-1} - \frac{27}{24}z_i + \frac{27}{24}z_{i+1} - \frac{1}{24}z_{i+2}}{h}; \quad i = 1, \dots, m-2; \quad (3.45)$$

$$z'_{m-\frac{3}{2}} = \frac{\frac{4751}{5192}z_{m-1} - \frac{909}{1298}z_{m-2} - \frac{6091}{15576}z_{m-3} + \frac{1165}{5192}z_{m-4} - \frac{129}{2596}z_{m-5} + \frac{25}{15576}z_{m-6}}{h} \quad (3.46)$$

Ahora la ecuación (3.2) se evalúa en los puntos: $x = x_{i+\frac{1}{2}}; i = 1, \dots, m-1$

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}}z'_{i+\frac{1}{2}} + \beta_{i+\frac{1}{2}}z_{i+\frac{1}{2}} + \delta_{i+\frac{1}{2}}p_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}} \quad (3.47)$$

Donde $z_{i+\frac{1}{2}}$ se aproxima por

$$z_{\frac{1}{2}} = \frac{5z_0 + 15z_1 - 5z_2 + z_3}{16}, \quad (3.48)$$

$$z_{i+\frac{1}{2}} = \frac{-z_{i-1} + 9z_{i+1} + 9z_i - z_{i+2}}{16}, \quad (3.49)$$

$$z_{m-\frac{1}{2}} = \frac{5z_m + 15z_{m-1} - 5z_{m-2} + z_{m-3}}{16}. \quad (3.50)$$

De ésta forma agrupando términos en función de las variables, conjuntamente incluyendo las ecuaciones (3.39), (3.40), (3.41), (3.42) y (3.43) además de las condiciones de frontera, el problema a resolver es el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} & \gamma_1 z_0 + \xi_1 p_0 = K_1 \\ & z_0 h + \frac{1152}{407} p_0 - \frac{10063}{3256} p_{\frac{1}{2}} - \frac{2483}{9768} p_{\frac{3}{2}} + \frac{3309}{3256} p_{\frac{5}{2}} - \frac{2099}{3256} p_{\frac{7}{2}} + \frac{697}{4884} p_{\frac{9}{2}} = 0; \\ & \left(\frac{5\beta_{\frac{1}{2}}}{16} - \frac{4751\alpha_{\frac{1}{2}}}{5192h} \right) z_0 + \left(\frac{15\beta_{\frac{1}{2}}}{16} + \frac{909\alpha_{\frac{1}{2}}}{1298h} \right) z_1 + \left(-\frac{5\beta_{\frac{1}{2}}}{16} + \frac{6091\alpha_{\frac{1}{2}}}{15576h} \right) z_2 + \\ & \quad \left(\frac{\beta_{\frac{1}{2}}}{16} - \frac{1165\alpha_{\frac{1}{2}}}{5192h} \right) z_3 + \frac{129\alpha_{\frac{1}{2}}}{2596h} z_4 - \frac{25\alpha_{\frac{1}{2}}}{15576h} z_5 + \delta_{\frac{1}{2}} p_{\frac{1}{2}} = f_{\frac{1}{2}} \\ & z_1 h + \frac{11}{12} p_{\frac{1}{2}} - \frac{17}{24} p_{\frac{3}{2}} - \frac{3}{8} p_{\frac{5}{2}} + \frac{5}{24} p_{\frac{7}{2}} - \frac{1}{24} p_{\frac{9}{2}} = 0; \\ & \left(-\frac{\beta_{i+\frac{1}{2}}}{16} + \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}}{24h} \right) z_{i-1} + \left(\frac{9\beta_{i+\frac{1}{2}}}{16} - \frac{27\alpha_{i+\frac{1}{2}}}{24h} \right) z_i + \left(\frac{9\beta_{i+\frac{1}{2}}}{16} + \frac{27\alpha_{i+\frac{1}{2}}}{24h} \right) z_{i+1} + \\ & \quad \left(-\frac{\beta_{i+\frac{1}{2}}}{16} - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}}{24h} \right) z_{i+2} + \delta_{i+\frac{1}{2}} p_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}} \quad \text{para } i = 1, \dots, m-2 \\ & z_i h - \frac{1}{24} p_{i-\frac{3}{2}} + \frac{27}{24} p_{i-\frac{1}{2}} - \frac{27}{24} p_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1}{24} p_{i+\frac{3}{2}} = 0; \quad \text{para } i = 2, \dots, m-3 \\ & z_{m-2} h - \frac{11}{12} p_{m-\frac{3}{2}} + \frac{17}{24} p_{m-\frac{5}{2}} + \frac{3}{8} p_{m-\frac{7}{2}} - \frac{5}{24} p_{m-\frac{9}{2}} + \frac{1}{24} p_{m-\frac{11}{2}} = 0; \\ & \left(\frac{5\beta_{m-\frac{3}{2}}}{16} + \frac{4751\alpha_{m-\frac{3}{2}}}{5192h} \right) z_{m-1} + \left(\frac{15\beta_{m-\frac{3}{2}}}{16} - \frac{909\alpha_{m-\frac{3}{2}}}{1298h} \right) z_{m-2} + \left(-\frac{5\beta_{m-\frac{3}{2}}}{16} - \frac{6091\alpha_{m-\frac{3}{2}}}{15576h} \right) z_{m-3} + \\ & \quad \left(\frac{\beta_{m-\frac{3}{2}}}{16} + \frac{1165\alpha_{m-\frac{3}{2}}}{5192h} \right) z_{m-4} - \frac{129\alpha_{m-\frac{3}{2}}}{2596h} z_{m-5} - \frac{25\alpha_{m-\frac{3}{2}}}{15576h} z_{m-6} + \delta_{m-\frac{3}{2}} p_{m-\frac{3}{2}} = f_{m-\frac{3}{2}} \\ & z_{m-1} h - \frac{1152}{407} p_{m-1} + \frac{10063}{3256} p_{m-\frac{3}{2}} + \frac{2483}{9768} p_{m-\frac{5}{2}} - \frac{3309}{3256} p_{m-\frac{7}{2}} + \frac{2099}{3256} p_{m-\frac{9}{2}} - \frac{697}{4884} p_{m-\frac{11}{2}} = 0; \\ & \gamma_2 z_{m-1} + \xi_2 p_{m-1} = K_2 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Este sistema se puede representar mediante la siguiente forma matricial

$$Au = F \quad (3.52)$$

Donde $A =$

$$\begin{pmatrix}
 \xi_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 \frac{1152}{407} & h & -\frac{10063}{3256} & 0 & -\frac{2483}{9768} & 0 & \frac{3309}{3256} & 0 & -\frac{2099}{3256} & 0 & \frac{697}{4884} & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & \varsigma_1 & \delta_{\frac{1}{2}} & \varsigma_2 & 0 & \varsigma_3 & 0 & \varsigma_4 & 0 & \frac{129\alpha}{2596h} & 0 & -\frac{25\alpha}{15576h} & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & \frac{11}{12} & h & -\frac{17}{24} & 0 & -\frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{24} & 0 & -\frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & \varsigma_5 & 0 & \varsigma_6 & \delta_{\frac{3}{2}} & \varsigma_7 & 0 & \varsigma_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & -\frac{1}{24} & 0 & \frac{27}{24} & h & -\frac{27}{24} & 0 & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & 0 & \varsigma_9 & 0 & \varsigma_{10} & \delta_{i+\frac{1}{2}} & \varsigma_{11} & 0 & \varsigma_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\
 \vdots & 0 & 0 & -\frac{1}{24} & 0 & \frac{27}{24} & h & -\frac{27}{24} & 0 & \frac{1}{24} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

$$\begin{pmatrix}
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{24} & 0 & \frac{27}{24} & h & -\frac{27}{24} & 0 & \frac{1}{24} & 0 & 0 \\
 \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varsigma_{13} & 0 & \varsigma_{14} & \delta_{m-\frac{5}{2}} & \varsigma_{15} & 0 & \varsigma_{16} & 0 \\
 \vdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} & 0 & -\frac{5}{24} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{17}{24} & h & -\frac{11}{12} & 0 & 0 \\
 \vdots & 0 & 0 & \frac{25\alpha}{15576h} & 0 & -\frac{129\alpha}{2596h} & 0 & \varsigma_{17} & 0 & \varsigma_{18} & 0 & \varsigma_{19} & \delta_{m-\frac{3}{2}} & \varsigma_{20} & 0 \\
 \vdots & 0 & 0 & 0 & -\frac{697}{4884} & 0 & \frac{2099}{3256} & 0 & -\frac{3309}{3256} & 0 & \frac{2483}{9768} & 0 & \frac{10063}{3256} & h & -\frac{1152}{407} \\
 \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_2 & \xi_2
 \end{pmatrix}$$

donde

$$\varsigma_1 = \left(\frac{5\beta_{\frac{1}{2}}}{16} - \frac{4751\alpha_{\frac{1}{2}}}{5192h} \right)$$

$$\varsigma_2 = \left(\frac{15\beta_{\frac{1}{2}}}{16} + \frac{909\alpha_{\frac{1}{2}}}{1298h} \right)$$

$$\varsigma_3 = \left(-\frac{5\beta_{\frac{1}{2}}}{16} + \frac{6091\alpha_{\frac{1}{2}}}{15576h} \right)$$

$$\varsigma_4 = \left(\frac{\beta_{\frac{1}{2}}}{16} - \frac{1165\alpha_{\frac{1}{2}}}{5192h} \right)$$

$$\varsigma_5 = \left(-\frac{\beta_{\frac{1}{2}}}{16} + \frac{\alpha_{\frac{1}{2}}}{24h} \right)$$

$$\varsigma_6 = \left(\frac{9\beta_{\frac{1}{2}}}{16} - \frac{27\alpha_{\frac{1}{2}}}{24h} \right)$$

$$\varsigma_7 = \left(\frac{9\beta_{\frac{1}{2}}}{16} + \frac{27\alpha_{\frac{1}{2}}}{24h} \right)$$

$$\varsigma_8 = \left(-\frac{\beta_{\frac{1}{2}}}{16} - \frac{\alpha_{\frac{1}{2}}}{24h} \right)$$

$$\varsigma_9 = \left(-\frac{\beta_{i+\frac{1}{2}}}{16} + \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}}{24h} \right)$$

$$\varsigma_{10} = \left(\frac{9\beta_{i+\frac{1}{2}}}{16} - \frac{27\alpha_{i+\frac{1}{2}}}{24h} \right)$$

$$\varsigma_{11} = \left(\frac{9\beta_{i+\frac{1}{2}}}{16} + \frac{27\alpha_{i+\frac{1}{2}}}{24h} \right)$$

$$\varsigma_{12} = \left(-\frac{\beta_{i+\frac{1}{2}}}{16} - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}}}{24h} \right)$$

$$\varsigma_{13} = \left(-\frac{\beta_{m-\frac{3}{2}}}{16} + \frac{\alpha_{m-\frac{3}{2}}}{24h} \right)$$

$$\varsigma_{14} = \left(\frac{9\beta_{m-\frac{3}{2}}}{16} - \frac{27\alpha_{m-\frac{3}{2}}}{24h} \right)$$

$$\varsigma_{15} = \left(\frac{9\beta_{m-\frac{3}{2}}}{16} + \frac{27\alpha_{m-\frac{3}{2}}}{24h} \right)$$

$$\varsigma_{16} = \left(-\frac{\beta_{m-\frac{3}{2}}}{16} - \frac{\alpha_{m-\frac{3}{2}}}{24h} \right)$$

$$\varsigma_{17} = \left(\frac{\beta_{m-\frac{3}{2}}}{16} + \frac{1165\alpha_{m-\frac{3}{2}}}{5192h} \right)$$

$$\varsigma_{18} = \left(-\frac{5\beta_{m-\frac{3}{2}}}{16} - \frac{6091\alpha_{m-\frac{3}{2}}}{15576h} \right)$$

$$\varsigma_{19} = \left(\frac{15\beta_{m-\frac{3}{2}}}{16} - \frac{909\alpha_{m-\frac{3}{2}}}{1298h} \right)$$

$$\varsigma_{20} = \left(\frac{5\beta_{m-\frac{3}{2}}}{16} + \frac{4751\alpha_{m-\frac{3}{2}}}{5192h} \right)$$

$$u = \begin{pmatrix} p_0 \\ z_0 \\ p_{\frac{1}{2}} \\ z_1 \\ p_{\frac{3}{2}} \\ z_2 \\ \vdots \\ z_i \\ p_{i+\frac{1}{2}} \\ z_{i+1} \\ \vdots \\ p_{m-\frac{3}{2}} \\ z_{m-1} \\ p_{m-1} \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} K_1 \\ 0 \\ f_{\frac{1}{2}} \\ 0 \\ f_{\frac{3}{2}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{i+\frac{1}{2}} \\ 0 \\ \vdots \\ f_{m-\frac{3}{2}} \\ 0 \\ K_2 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

3.5. Aplicación del Método de Sexto Orden

Para este método se utiliza las siguientes aproximaciones para el gradiente, obtenidas en [2], donde se da una familia de 10 parámetros de gradientes de sexto orden.

Cabe decir que la fórmula usual para éste gradiente es de sexto orden de aproximación de la derivada excepto en las fronteras y los dos primeros puntos interiores de cada frontera.

$$p'_0 = -\frac{568557184}{150834915h}p_0 + \frac{455704609}{83579520h}p_{\frac{1}{2}} - \frac{128942179}{41789760h}p_{\frac{3}{2}} + \frac{15911389}{6964960h}p_{\frac{5}{2}} - \frac{142924471}{117011328h}p_{\frac{7}{2}} + \frac{20331719}{50147712h}p_{\frac{9}{2}} - \frac{2688571}{38307280h}p_{\frac{11}{2}} + \frac{187529}{41789760h}p_{\frac{13}{2}} - \frac{6207}{27859840h}p_{\frac{15}{2}}, \quad (3.55)$$

$$p'_1 = \frac{496}{3465h}p_0 - \frac{811}{640h}p_{\frac{1}{2}} + \frac{449}{384h}p_{\frac{3}{2}} - \frac{29}{960h}p_{\frac{5}{2}} - \frac{11}{448h}p_{\frac{7}{2}} + \frac{13}{1152h}p_{\frac{9}{2}} - \frac{37}{21120h}p_{\frac{11}{2}}, \quad (3.56)$$

$$p'_2 = -\frac{8}{385h}p_0 + \frac{179}{1920h}p_{\frac{1}{2}} - \frac{153}{128h}p_{\frac{3}{2}} + \frac{381}{320h}p_{\frac{5}{2}} - \frac{101}{1344h}p_{\frac{7}{2}} + \frac{1}{128h}p_{\frac{9}{2}} - \frac{3}{7040h}p_{\frac{11}{2}} \quad (3.57)$$

$$p'_i = -\frac{9}{1920h}p_{i-\frac{5}{2}} + \frac{125}{1920h}p_{i-\frac{3}{2}} - \frac{2250}{1920h}p_{i-\frac{1}{2}} + \frac{2250}{1920h}p_{i+\frac{1}{2}} - \frac{125}{1920h}p_{i+\frac{3}{2}} + \frac{9}{1920h}p_{i+\frac{5}{2}}; \quad i = 3, \dots, m-4 \quad (3.58)$$

$$p'_{m-3} = \frac{8}{385h}p_{m-1} - \frac{179}{1920h}p_{m-\frac{3}{2}} + \frac{153}{128h}p_{m-\frac{5}{2}} - \frac{381}{320h}p_{m-\frac{7}{2}} + \frac{101}{1344h}p_{m-\frac{9}{2}} - \frac{1}{128h}p_{m-\frac{11}{2}} + \quad (3.59)$$

$$p'_{m-2} = -\frac{496}{3465h}p_{m-1} + \frac{811}{640h}p_{m-\frac{3}{2}} - \frac{449}{384h}p_{m-\frac{5}{2}} + \frac{29}{960h}p_{m-\frac{7}{2}} + \frac{3}{7040h}p_{m-\frac{13}{2}}, \quad (3.60)$$

$$p'_{m-1} = \frac{568557184}{150834915h}p_{m-1} - \frac{455704609}{83579520h}p_{m-\frac{3}{2}} + \frac{128942179}{41789760h}p_{m-\frac{5}{2}} - \frac{15911389}{6964960h}p_{m-\frac{7}{2}} + \frac{142924471}{117011328h}p_{m-\frac{9}{2}} - \frac{20331719}{50147712h}p_{m-\frac{11}{2}} + \frac{2688571}{38307280h}p_{m-\frac{13}{2}} - \frac{187529}{41789760h}p_{m-\frac{15}{2}} + \frac{6207}{27859840h}p_{m-\frac{17}{2}}. \quad (3.61)$$

Donde m representa la cantidad de nodos sobre el dominio en el mallado.

Sustituyendo (3.55), (3.56), (3.57), (3.58), (3.59), (3.60) y (3.61) en (3.1), se obtiene

$$z_0h + \frac{568557184}{150834915}p_0 - \frac{455704609}{83579520}p_{\frac{1}{2}} + \frac{128942179}{41789760}p_{\frac{3}{2}} - \frac{15911389}{6964960}p_{\frac{5}{2}} + \frac{142924471}{117011328}p_{\frac{7}{2}} - \quad (3.62)$$

$$\frac{20331719}{50147712}p_{\frac{9}{2}} + \frac{2688571}{38307280}p_{\frac{11}{2}} - \frac{187529}{41789760}p_{\frac{13}{2}} + \frac{6207}{27859840}p_{\frac{15}{2}} = 0, \quad (3.63)$$

$$z_1h - \frac{496}{3465}p_0 + \frac{811}{640}p_{\frac{1}{2}} - \frac{449}{384}p_{\frac{3}{2}} + \frac{29}{960}p_{\frac{5}{2}} + \frac{11}{448}p_{\frac{7}{2}} - \frac{13}{1152}p_{\frac{9}{2}} + \frac{37}{21120}p_{\frac{11}{2}} = 0, \quad (3.64)$$

$$z_2h + \frac{8}{385}p_0 - \frac{179}{1920}p_{\frac{1}{2}} + \frac{153}{128}p_{\frac{3}{2}} - \frac{381}{320}p_{\frac{5}{2}} + \frac{101}{1344}p_{\frac{7}{2}} - \frac{1}{128}p_{\frac{9}{2}} + \frac{3}{7040}p_{\frac{11}{2}} = 0, \quad (3.64)$$

$$z_ih + \frac{9}{1920}p_{i-\frac{5}{2}} - \frac{125}{1920}p_{i-\frac{3}{2}} + \frac{2250}{1920}p_{i-\frac{1}{2}} - \frac{2250}{1920}p_{i+\frac{1}{2}} + \frac{125}{1920}p_{i+\frac{3}{2}} - \frac{9}{1920}p_{i+\frac{5}{2}} = 0; \quad i = 3, \dots, m-4 \quad (3.65)$$

$$z_{m-3}h - \frac{8}{385}p_{m-1} + \frac{179}{1920}p_{m-\frac{3}{2}} - \frac{153}{128}p_{m-\frac{5}{2}} + \frac{381}{320}p_{m-\frac{7}{2}} - \frac{101}{1344}p_{m-\frac{9}{2}} + \frac{1}{128}p_{m-\frac{11}{2}} - \quad (3.66)$$

$$\frac{3}{7040}p_{m-\frac{13}{2}} = 0, \quad (3.67)$$

$$z_{m-2}h + \frac{496}{3465}p_{m-1} - \frac{811}{640}p_{m-\frac{3}{2}} + \frac{449}{384}p_{m-\frac{5}{2}} - \frac{29}{960}p_{m-\frac{7}{2}} -$$

$$\frac{11}{448}p_{m-\frac{9}{2}} + \frac{13}{1152}p_{m-\frac{11}{2}} - \frac{37}{21120}p_{m-\frac{13}{2}} = 0, \quad (3.68)$$

$$z_{m-1}h - \frac{568557184}{150834915}p_{m-1} + \frac{455704609}{83579520}p_{m-\frac{3}{2}} - \frac{128942179}{41789760}p_{m-\frac{5}{2}} + \frac{15911389}{6964960}p_{m-\frac{7}{2}} -$$

$$\frac{142924471}{117011328}p_{m-\frac{9}{2}} + \frac{20331719}{50147712}p_{m-\frac{11}{2}} - \frac{2688571}{38307280}p_{m-\frac{13}{2}} + \frac{187529}{41789760}p_{m-\frac{15}{2}} - \frac{6207}{27859840}p_{m-\frac{17}{2}} = 0,$$

Y la aproximación de la divergencia es la siguiente

$$z'_{\frac{1}{2}} = -\frac{1077397}{1273920h}z_0 + \frac{25110610}{78983040h}z_1 + \frac{4955527}{39491520h}z_2 - \frac{25369793}{19745760h}z_3 + \frac{12220145}{15796608h}z_4 - \frac{21334421}{78983040h}z_5 + \frac{460217}{9872880h}z_6 - \frac{101017}{39491520h}z_7 + \frac{3359}{26327680h}z_8, \quad (3.69)$$

$$z'_{\frac{3}{2}} = \frac{31}{960h}z_0 - \frac{687}{640h}z_1 + \frac{129}{128h}z_2 + \frac{19}{192h}z_3 - \frac{3}{32h}z_4 + \frac{21}{640h}z_5 - \frac{3}{640h}z_6, \quad (3.70)$$

$$z'_{i+\frac{1}{2}} = -\frac{9}{1920h}z_{i-2} + \frac{125}{1920h}z_{i-1} - \frac{2250}{1920h}z_i + \frac{2250}{1920h}z_{i+1} - \frac{125}{1920h}z_{i+2} + \frac{9}{1920h}z_{i+3}, \quad (3.71)$$

$$i = 2, \dots, m-4,$$

$$z'_{m-\frac{5}{2}} = -\frac{31}{960h}z_{m-1} + \frac{687}{640h}z_{m-2} - \frac{129}{128h}z_{m-3} - \frac{19}{192h}z_{m-4} + \frac{3}{32h}z_{m-5} - \frac{21}{640h}z_{m-6} + \frac{3}{640h}z_{m-7}, \quad (3.72)$$

$$z'_{m-\frac{3}{2}} = \frac{1077397}{1273920h}z_{m-1} - \frac{25110619}{78983040h}z_{m-2} - \frac{4955527}{39491520h}z_{m-3} + \frac{25369793}{19745760h}z_{m-4} - \quad (3.73)$$

$$\frac{12220145}{15796608h}z_{m-5} + \frac{21334421}{78983040h}z_{m-6} - \frac{460217}{9872880h}z_{m-7} + \frac{101017}{39491520h}z_{m-8} - \frac{3359}{26327680h}z_{m-9}.$$

Es necesario decir que se tuvo que sustituir el segundo término de la primera fila de la matriz de la divergencia D para el caso $6-6-6$, que se muestra en [2], debido a que la suma de todos los términos de esa primera fila no fué cero, entonces se tuvo que sumar todos los términos de esa fila menos el segundo que es $(\frac{15668474643803}{32472850116480})$ y se sustituyó por el negativo de la suma que fué $(\frac{25110619}{78983040})$, para que se pueda cumplir la propiedad que la sumatoria de todos los elementos de cada fila de la matriz sean cero, y cómo también se tiene que cumplir que la matriz tiene que ser *centro-skew-simétrica*, también se sustituye el penúltimo de término de la última fila de la matriz de divergencia D por $(-\frac{25110619}{78983040})$, con éste cambio si se puede llegar a un buen esquema de diferencias para poder resolver el problema de *Helmholtz* con coeficientes en diferencias de orden seis.

Ahora la ecuación (3.2) se evalúa en los puntos: $x = x_{i+\frac{1}{2}}; i = 1, \dots, m-1$

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}}z'_{i+\frac{1}{2}} + \beta_{i+\frac{1}{2}}z_{i+\frac{1}{2}} + \delta_{i+\frac{1}{2}}p_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}} \quad (3.74)$$

Donde $z_{i+\frac{1}{2}}$ se aproxima por

$$z_{\frac{1}{2}} = \frac{784350}{1667200}z_0 + \frac{992250}{1667200}z_1 - \frac{210000}{1667200}z_2 + \frac{151200}{1667200}z_3 - \frac{60750}{1667200}z_4 + \frac{10150}{1667200}z_5, \quad (3.75)$$

$$z_{\frac{3}{2}} = -\frac{25375}{1013344}z_0 + \frac{472815}{1013344}z_1 - \frac{675255}{1013344}z_2 - \frac{137095}{1013344}z_3 + \frac{30744}{1013344}z_4 - \frac{3000}{1013344}z_5, \quad (3.76)$$

$$z_{i+\frac{1}{2}} = \frac{9}{768}z_{i-2} - \frac{75}{768}z_{i-1} + \frac{450}{768}z_i + \frac{450}{768}z_{i+1} - \frac{75}{768}z_{i+2} + \frac{9}{768}z_{i+3}, \quad i = 2, \dots, m-3 \quad (3.77)$$

$$z_{m-\frac{5}{2}} = -\frac{25375}{1013344}z_{m-1} + \frac{472815}{1013344}z_{m-2} - \frac{675255}{1013344}z_{m-3} - \frac{137095}{1013344}z_{m-4} + \quad (3.78)$$

$$\frac{30744}{1013344}z_{m-5} - \frac{3000}{1013344}z_{m-6},$$

$$z_{m-\frac{3}{2}} = \frac{784350}{1667200}z_{m-1} + \frac{992250}{1667200}z_{m-2} - \frac{210000}{1667200}z_{m-3} + \frac{151200}{1667200}z_{m-4} - \frac{60750}{1667200}z_{m-5} + \frac{10150}{1667200}z_{m-6} \quad (3.79)$$

Estas aproximaciones son obtenidas por expansiones de Taylor con siete puntos, todas estas aproximaciones son de orden seis, básicamente se toma seis puntos sucesivos, separados a una misma distancia h , y luego se juega con el punto, que va a estar en medio de dos, es decir con distancia $\frac{h}{2}$, primero se coloca el punto en medio de tres en tres y se obtiene la fórmula centrada, después entre dos y cuatro, se obtiene la segunda y penúltima ecuación, y por último entre uno y cinco para obtener la primera y última ecuación.

Luego se va tener un juego o un conjunto de ecuaciones, básicamente seis, y con la combinación de ellas se obtienen estas aproximaciones.

La divergencia antes mencionada, es una aproximación usual de sexto orden de la derivada excepto en las fronteras y en el primer punto interior de cada frontera.

De ésta forma agrupando términos en función de las variables, conjuntamente incluyendo las ecuaciones (3.62), (3.63), (3.64), (3.65), (3.65), (3.66), (3.67) y (3.68) además de las condiciones de frontera, el problema a resolver es el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \gamma_1 z_0 + \xi_1 p_0 &= K_1 \\ z_0 h + \frac{568557184}{150834915}p_0 - \frac{455704609}{83579520}p_{\frac{1}{2}} + \frac{128942179}{41789760}p_{\frac{3}{2}} - \frac{15911389}{6964960}p_{\frac{5}{2}} + \frac{142924471}{117011328}p_{\frac{7}{2}} - \\ &\quad \frac{20331719}{50147712}p_{\frac{9}{2}} + \frac{2688571}{38307280}p_{\frac{11}{2}} - \frac{187529}{41789760}p_{\frac{13}{2}} + \frac{6207}{27859840}p_{\frac{15}{2}} = 0, \\ &\quad \left(\frac{784350}{1667200}\beta_{\frac{1}{2}} - \frac{1077397}{1273920h}\alpha_{\frac{1}{2}} \right) z_0 + \left(\frac{992250}{1667200}\beta_{\frac{1}{2}} + \frac{25110619}{78983040h}\alpha_{\frac{1}{2}} \right) z_1 + \\ &\quad \left(-\frac{210000}{1667200}\beta_{\frac{1}{2}} + \frac{49955527}{39491520h}\alpha_{\frac{1}{2}} \right) z_2 + \left(\frac{151200}{1667200}\beta_{\frac{1}{2}} - \frac{25369793}{19745760h}\alpha_{\frac{1}{2}} \right) z_3 + \\ &\quad \left(-\frac{60750}{1667200}\beta_{\frac{1}{2}} + \frac{12220145}{15796608h}\alpha_{\frac{1}{2}} \right) z_4 + \left(\frac{10150}{1667200}\beta_{\frac{1}{2}} - \frac{21334421}{78983040h}\alpha_{\frac{1}{2}} \right) z_5 + \\ &\quad \frac{460217}{9872880h}\alpha_{\frac{1}{2}}z_6 - \frac{101017}{39491520h}\alpha_{\frac{1}{2}}z_7 + \frac{3369}{26327680h}\alpha_{\frac{1}{2}}z_8 + \delta_{\frac{1}{2}}p_{\frac{1}{2}} = f_{\frac{1}{2}}, \\ z_1 h - \frac{496}{3465}p_0 + \frac{811}{640}p_{\frac{1}{2}} - \frac{449}{384}p_{\frac{3}{2}} + \frac{29}{960}p_{\frac{5}{2}} + \frac{11}{448}p_{\frac{7}{2}} - \frac{13}{1152}p_{\frac{9}{2}} + \frac{37}{21120}p_{\frac{11}{2}} &= 0, \\ &\quad \left(-\frac{25375}{1013344}\beta_{\frac{3}{2}} + \frac{31}{960h}\alpha_{\frac{3}{2}} \right) z_0 + \left(\frac{472815}{1013344}\beta_{\frac{3}{2}} - \frac{687}{640h}\alpha_{\frac{3}{2}} \right) z_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{675255}{1013344} \beta_{\frac{3}{2}} - \frac{129}{128h} \alpha_{\frac{3}{2}} \right) z_2 + \left(-\frac{137095}{1013344} \beta_{\frac{3}{2}} + \frac{19}{192h} \alpha_{\frac{3}{2}} \right) z_3 + \left(\frac{30744}{1013344} \beta_{\frac{3}{2}} - \frac{3}{32h} \alpha_{\frac{3}{2}} \right) z_4 + \\
& \quad \left(-\frac{3000}{1013344} \beta_{\frac{3}{2}} + \frac{21}{640h} \alpha_{\frac{3}{2}} \right) z_5 - \frac{3}{640h} \alpha_{\frac{3}{2}} z_6 + \delta_{\frac{3}{2}} p_{\frac{3}{2}} = f_{\frac{3}{2}}, \\
& z_2 h + \frac{8}{385} p_0 - \frac{179}{1920} p_{\frac{1}{2}} + \frac{153}{128} p_{\frac{3}{2}} - \frac{381}{320} p_{\frac{5}{2}} + \frac{101}{1344} p_{\frac{7}{2}} - \frac{1}{128} p_{\frac{9}{2}} + \frac{3}{7040} p_{\frac{11}{2}} = 0, \\
& \left(\frac{9}{768} \beta_{i+\frac{1}{2}} - \frac{9}{1920h} \alpha_{i+\frac{1}{2}} \right) z_{i-2} + \left(-\frac{75}{768} \beta_{i+\frac{1}{2}} + \frac{125}{1920h} \alpha_{i+\frac{1}{2}} \right) z_{i-1} \\
& \quad \left(\frac{450}{768} \beta_{i+\frac{1}{2}} - \frac{2250}{1920h} \alpha_{i+\frac{1}{2}} \right) z_i + \left(\frac{450}{768} \beta_{i+\frac{1}{2}} + \frac{2250}{1920h} \alpha_{i+\frac{1}{2}} \right) z_{i+1} \\
& \quad \left(-\frac{75}{768} \beta_{i+\frac{1}{2}} - \frac{125}{1920h} \alpha_{i+\frac{1}{2}} \right) z_{i+2} + \left(\frac{9}{768} \beta_{i+\frac{1}{2}} + \frac{9}{1920h} \alpha_{i+\frac{1}{2}} \right) z_{i+3} \\
& \quad \delta_{i+\frac{1}{2}} p_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}}; \quad i = 2, \dots, m-4, \\
& z_i h + \frac{9}{1920} p_{i-\frac{5}{2}} - \frac{125}{1920} p_{i-\frac{3}{2}} + \frac{2250}{1920} p_{i-\frac{1}{2}} - \frac{2250}{1920} p_{i+\frac{1}{2}} + \frac{125}{1920} p_{i+\frac{3}{2}} - \\
& \quad \frac{9}{1920} p_{i+\frac{5}{2}} = 0; \quad i = 3, \dots, m-4 \\
& z_{m-3} h - \frac{8}{385} p_{m-1} + \frac{179}{1920} p_{m-\frac{3}{2}} - \frac{153}{128} p_{m-\frac{5}{2}} + \frac{381}{320} p_{m-\frac{7}{2}} - \frac{101}{1344} p_{m-\frac{9}{2}} + \frac{1}{128} p_{m-\frac{11}{2}} - \\
& \quad \frac{3}{7040} p_{m-\frac{13}{2}} = 0, \\
& \left(-\frac{25375}{1013344} \beta_{m-\frac{5}{2}} - \frac{31}{960h} \alpha_{m-\frac{5}{2}} \right) z_{m-1} + \left(\frac{472815}{1013344} \beta_{m-\frac{5}{2}} + \frac{687}{640h} \alpha_{m-\frac{5}{2}} \right) z_{m-2} + \\
& \left(\frac{675255}{1013344} \beta_{m-\frac{5}{2}} - \frac{129}{128h} \alpha_{m-\frac{5}{2}} \right) z_{m-3} + \left(-\frac{137095}{1013344} \beta_{m-\frac{5}{2}} - \frac{19}{192h} \alpha_{m-\frac{5}{2}} \right) z_{m-4} + \\
& \left(\frac{30744}{1013344} \beta_{m-\frac{5}{2}} + \frac{3}{32h} \alpha_{m-\frac{5}{2}} \right) z_{m-5} + \left(-\frac{3000}{1013344} \beta_{m-\frac{5}{2}} - \frac{21}{640h} \alpha_{m-\frac{5}{2}} \right) z_{m-6} \\
& \quad + \frac{3}{640h} \alpha_{m-\frac{5}{2}} z_{m-7} + \delta_{m-\frac{5}{2}} p_{m-\frac{5}{2}} = f_{m-\frac{5}{2}}, \\
& z_{m-2} h + \frac{496}{3465} p_{m-1} - \frac{811}{640} p_{m-\frac{3}{2}} + \frac{449}{384} p_{m-\frac{5}{2}} - \frac{29}{960} p_{m-\frac{7}{2}} - \\
& \quad \frac{11}{448} p_{m-\frac{9}{2}} + \frac{13}{1152} p_{m-\frac{11}{2}} - \frac{37}{21120} p_{m-\frac{13}{2}} = 0, \\
& \left(\frac{784350}{1667200} \beta_{m-\frac{3}{2}} + \frac{1077397}{1273920h} \alpha_{m-\frac{3}{2}} \right) z_{m-1} + \left(\frac{992250}{1667200} \beta_{m-\frac{3}{2}} - \frac{25110619}{78983040h} \alpha_{m-\frac{3}{2}} \right) z_{m-2} + \\
& \left(-\frac{210000}{1667200} \beta_{m-\frac{3}{2}} - \frac{49955527}{39491520h} \alpha_{m-\frac{3}{2}} \right) z_{m-3} + \left(\frac{151200}{1667200} \beta_{m-\frac{3}{2}} + \frac{25369793}{19745760h} \alpha_{m-\frac{3}{2}} \right) z_{m-4} + \\
& \left(-\frac{60750}{1667200} \beta_{m-\frac{3}{2}} - \frac{12220145}{15796608h} \alpha_{m-\frac{3}{2}} \right) z_{m-5} + \left(\frac{10150}{1667200} \beta_{m-\frac{3}{2}} + \frac{21334421}{78983040h} \alpha_{m-\frac{3}{2}} \right) z_{m-6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{460217}{9872880h}\alpha_{m-\frac{3}{2}}z_{m-7} + \frac{101017}{39491520h}\alpha_{m-\frac{3}{2}}z_{m-8} - \frac{3369}{26327680h}\alpha_{m-\frac{3}{2}}z_{m-9} + \delta_{m-\frac{3}{2}}p_{m-\frac{3}{2}} = f_{m-\frac{3}{2}}, \\
& z_{m-1}h - \frac{568557184}{150834915}p_{m-1} + \frac{455704609}{83579520}p_{m-\frac{3}{2}} - \frac{128942179}{41789760}p_{m-\frac{5}{2}} + \frac{15911389}{6964960}p_{m-\frac{7}{2}} - \\
& \frac{142924471}{117011328}p_{m-\frac{9}{2}} + \frac{20331719}{50147712}p_{m-\frac{11}{2}} - \frac{2688571}{38307280}p_{m-\frac{13}{2}} + \frac{187529}{41789760}p_{m-\frac{15}{2}} - \frac{6207}{27859840}p_{m-\frac{17}{2}} = 0, \\
& \gamma_2 z_{m-1} + \xi_2 p_{m-1} = K_2
\end{aligned} \tag{3.80}$$

.

3.6. Lenguaje de Implementación

El Lenguaje de programación escogido para implementar estos esquemas fue *MATLAB*. *MATLAB* es el nombre abreviado de "Matrix LABoratory", este es un programa para realizar cálculos numéricos con **vectores** y **matrices** como se observan en los esquemas $1-2-1$, $2-2-2$, $4-4-4$ y $6-6-6$. Como caso particular puede también trabajar con números escalares, tanto reales como complejos. Una de las capacidades más atractivas de este programa es la de realizar una amplia variedad de **gráficos** en dos y tres dimensiones. *MATLAB* posee un entorno de programación propio y a la vez una interfaz propia de comandos que facilita la ejecución de funciones ya establecidas en el mismo programa o definidas por el usuario.

3.7. Estructura de Datos Fundamentales Empleadas

Para representar los esquemas anteriormente vistos ($1-2-1$, $2-2-2$, $4-4-4$ y $6-6-6$) se va necesitar de la siguiente estructura:

$$m = \text{entero};$$

$$x = \text{arreglo}[2 * m - 1] \text{ de real};$$

Donde m representa la cantidad de nodos sobre el mallado, y estos se encuentran en el vector x , que puede ser uniforme, no uniforme suave y no uniforme no suave.

Luego se tiene un arreglo C que contiene la información correspondiente de las constantes γ_1 , ξ_1 , K_1 , γ_2 , ξ_2 y K_2 que representan las condiciones de frontera, que pueden ser de tipo *Robin*, *Dirichlet* o de *Newmann*.

$$C = \text{arreglo}[6] \text{ de complejo};$$

La matriz K la matriz principal del sistema de ecuaciones lineales a resolver, la cual anteriormente se ha denominado A , esta matriz es de orden $(2 * m + 1) * (2 * m + 1)$.

$$K = \text{matriz}[2 * m + 1][2 * m + 1] \text{ de real}; \quad (3.81)$$

El Vector F va a contener los valores intercalados de la siguiente forma: $(K_1, 0, f_{\frac{1}{2}}, 0, f_{\frac{3}{2}}, \dots, f_{m-\frac{5}{2}}, 0, f_{m-\frac{3}{2}}, 0, K_2)$, y el vector u que va a contener la solución de la presión y su derivada y este se muestra de la siguiente manera $(p_0, z_0, p_{\frac{1}{2}}, z_1, p_{\frac{3}{2}}, \dots, p_{m-\frac{3}{2}}, z_{m-1}, p_{m-1})$, donde la presión va estar definida sobre los centros de celda y su derivada sobre los nodos.

$$F = \text{arreglo}[2 * m + 1] \text{ de complejo};$$

$$u = \text{arreglo}[2 * m + 1] \text{ de complejo};$$

3.8. Análisis de Orden de Convergencia

Para hacer un análisis del orden de convergencia de los métodos desarrollados en este trabajo, los mismos se aplican tomando en consideración una discretización uniforme del intervalo $[0, 1]$ e ir incrementando la cantidad de subintervalos de forma sucesiva, para ello en los programas hechos en MATLAB se define una variable a la que se denominó *factor*, así el número inicial de intervalos n es factor y se va incrementando de *factor* en *factor* hasta que alcanza el valor de *orden – matriz – graficas* al cuadrado por *factor*. Luego se calculan los errores cometidos en la aproximación para cada valor de n ; pudiéndose, a través de una regresión lineal, calcular la pendiente de dicha recta que representa el orden de convergencia de cada uno de los métodos, esto es ya que el error está acotado, o sea $\|Error\| \leq Ch^r$, donde r es el denominado orden de convergencia. En este trabajo la medida del error se calcula basándose en la norma dos ($\|\cdot\|_2$) de la diferencia entre la solución analítica y la solución numérica.

En todos los métodos se presenta dos gráficas de convergencia que corresponden a los valores de $k = 3$ y $k = 9$. También se presentan cuadros para diversos valores de factor donde se muestran tanto el orden de convergencia para la variable primaria p como para la variable secundaria z , para diversos valores de k .

Capítulo 4

Conclusiones y Resultados

4.1. Introducción

Después de haber hecho el estudio de los métodos miméticos de *Shashkov 1-2-1* y los de *Castillo 2-2-2, 4-4-4 y 6-6-6*, para aplicarlos a la ecuación de *Helmholtz* donde se obtuvieron esquemas para la solución de dicha ecuación a través de una ecuación diferencial general (1.9), donde se obtuvieron aproximaciones con distintos datos de entrada cómo k que es el número de onda, m la cantidad de nodos sobre el mallado y con los tres tipos de mallado utilizados en los esquemas $1 - 2 - 1$ y $2 - 2 - 2$; donde $4 - 4 - 4$ y $6 - 6 - 6$ sólo se utilizó mallado uniforme; se hicieron pruebas con estos métodos y diferentes valores de k y m obteniendo como resultado las gráficas de la solución aproximada, calculándose el error cometido, lo cual permite hacer el estudio del orden de convergencia, así como también del análisis de dispersión. En las próximas secciones se tratan cada una de dichos aspectos.

4.2. Aplicación de los Métodos

En las figuras 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6 se presentan tanto la curva obtenida por el método de Operadores de Soporte para diversos valores de k y m observándose que a medida que se incrementa m , la solución aproximada se acerca más a la solución exacta, esto ocurrió en todas las pruebas realizadas para este método y también para los métodos de *Castillo*, es decir $2 - 2 - 2$, $4 - 4 - 4$ y $6 - 6 - 6$. Sólo se presentan las gráficas para el método de Operadores de soporte porque no hay básicamente ninguna diferencia observable a simple vista.

En todos los casos, cuando se aumenta el número de onda k es necesario incrementar la cantidad de nodos para mantener el error en la misma magnitud. A medida que se

aumenta k también se observa, cuando el valor de m no es lo suficientemente grande, el efecto de contaminación debido a la dispersión numérica, esto se puede observar en la 4.3.

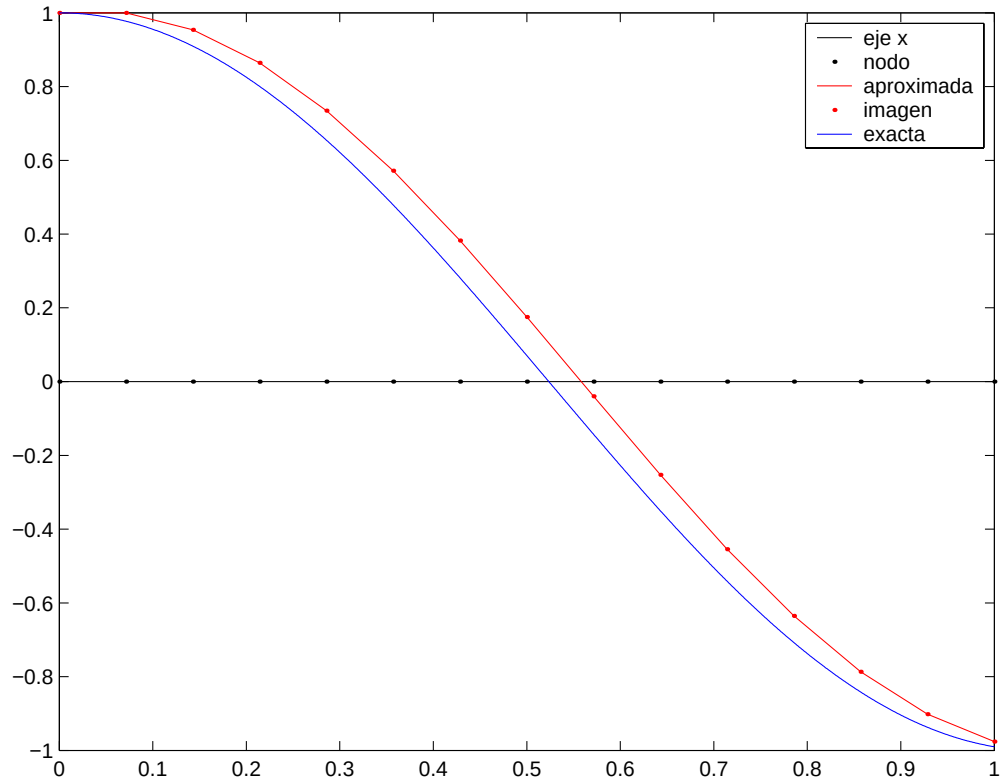


Figura 4.1: Aproximación de la Ecuación de Helmholtz con Mallado Uniforme con el Esquema 1-2-1, $k=3$, $m=15$

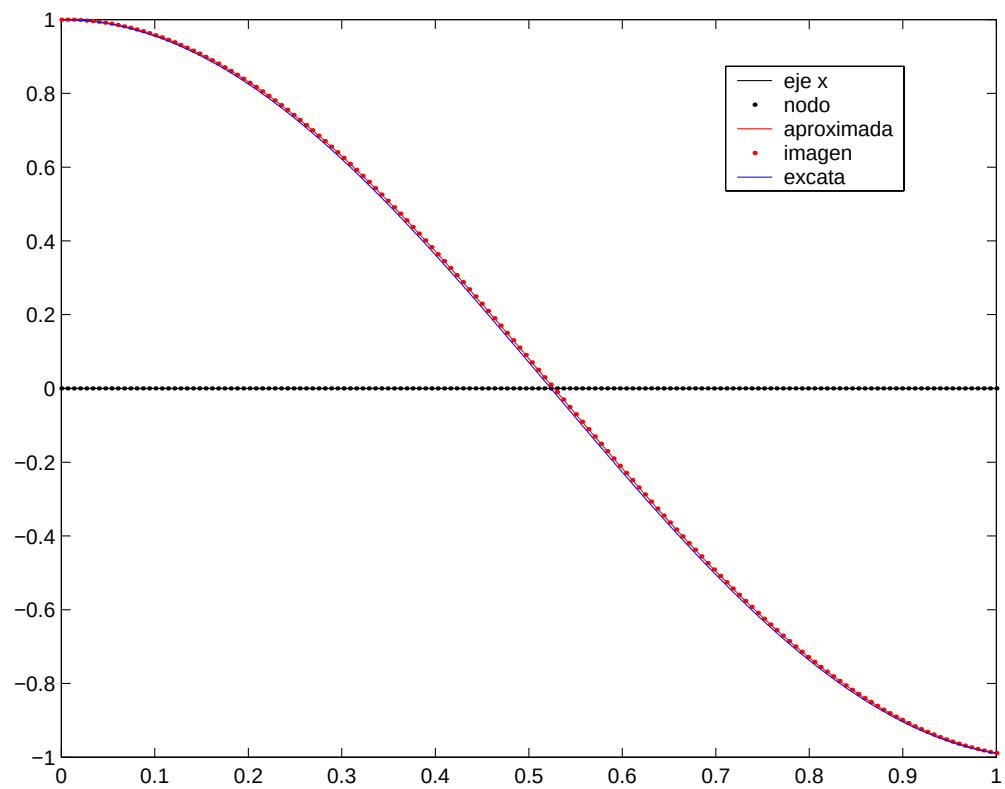


Figura 4.2: Aproximación de la Ecuación de Helmholtz con Mallado Uniforme con el Esquema 1-2-1, $k=3$, $m=150$

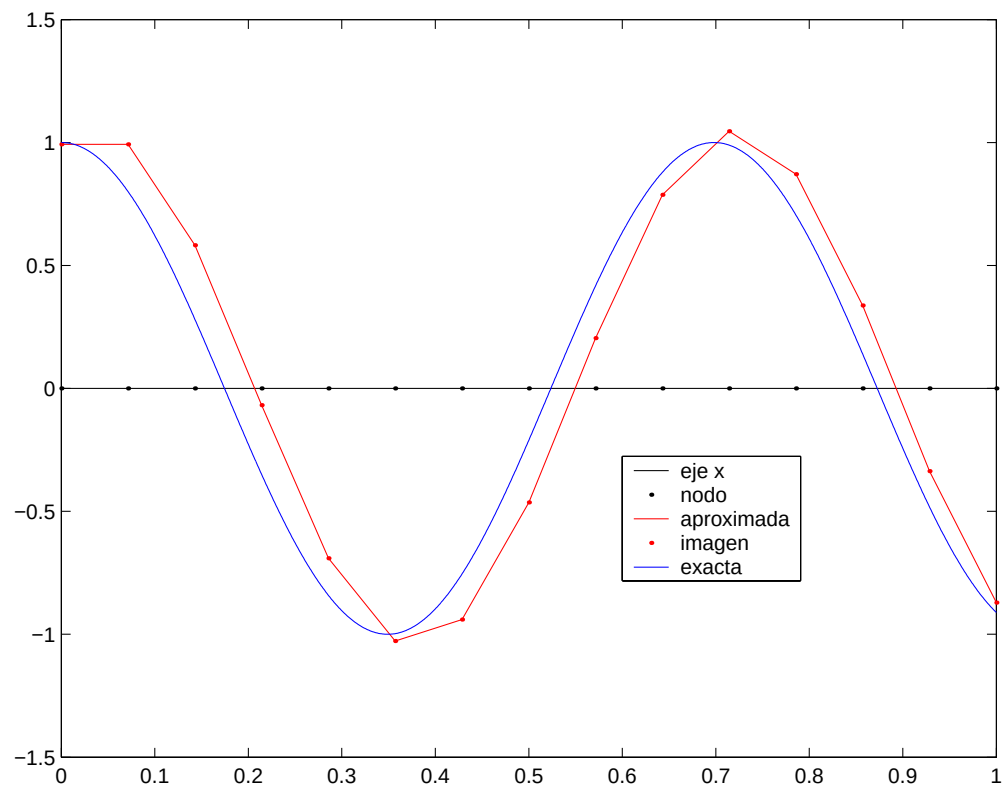


Figura 4.3: Aproximación de la Ecuación de Helmholtz con Mallado Uniforme con el Esquema 1-2-1, $k=9$, $m=15$

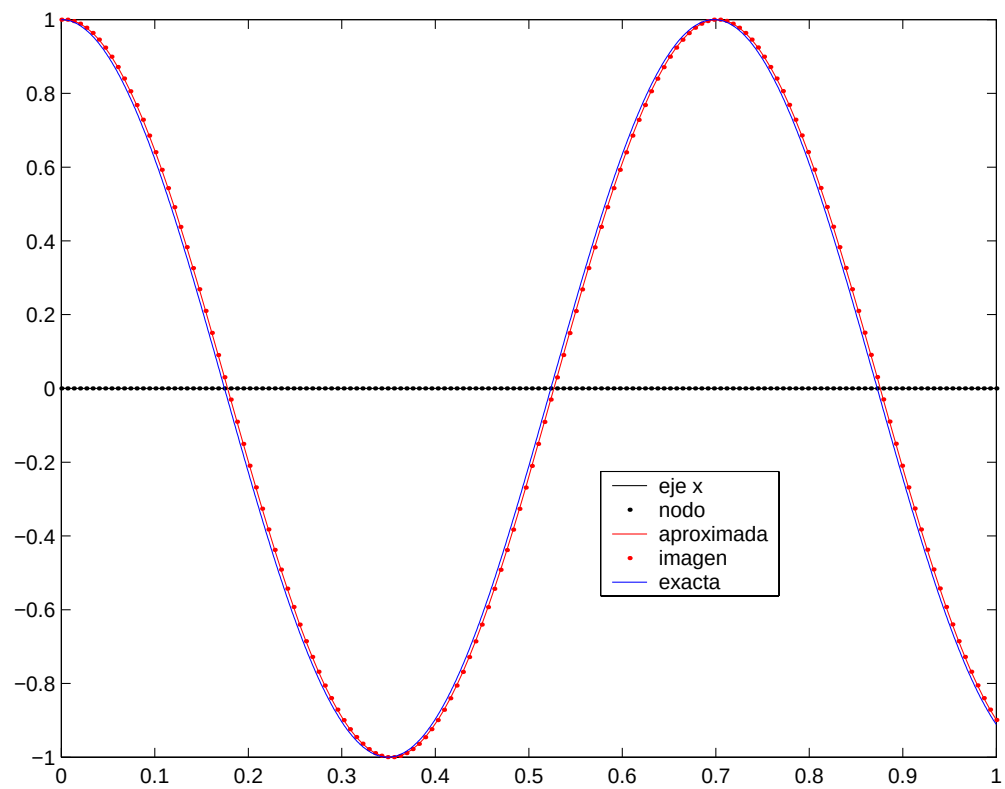


Figura 4.4: Aproximación de la Ecuación de Helmholtz con Mallado Uniforme con el Esquema 1-2-1, $k=9$, $m=150$

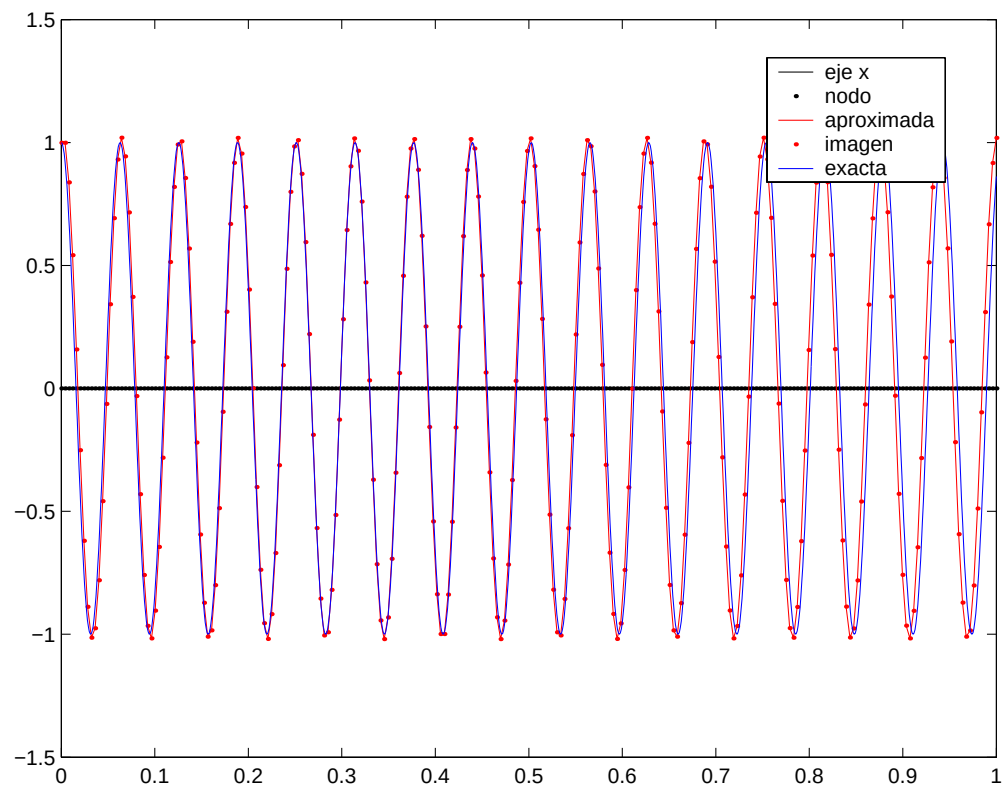


Figura 4.5: Aproximación de la Ecuación de Helmholtz con Mallado Uniforme con el Esquema 1-2-1, $k=100$, $m=250$

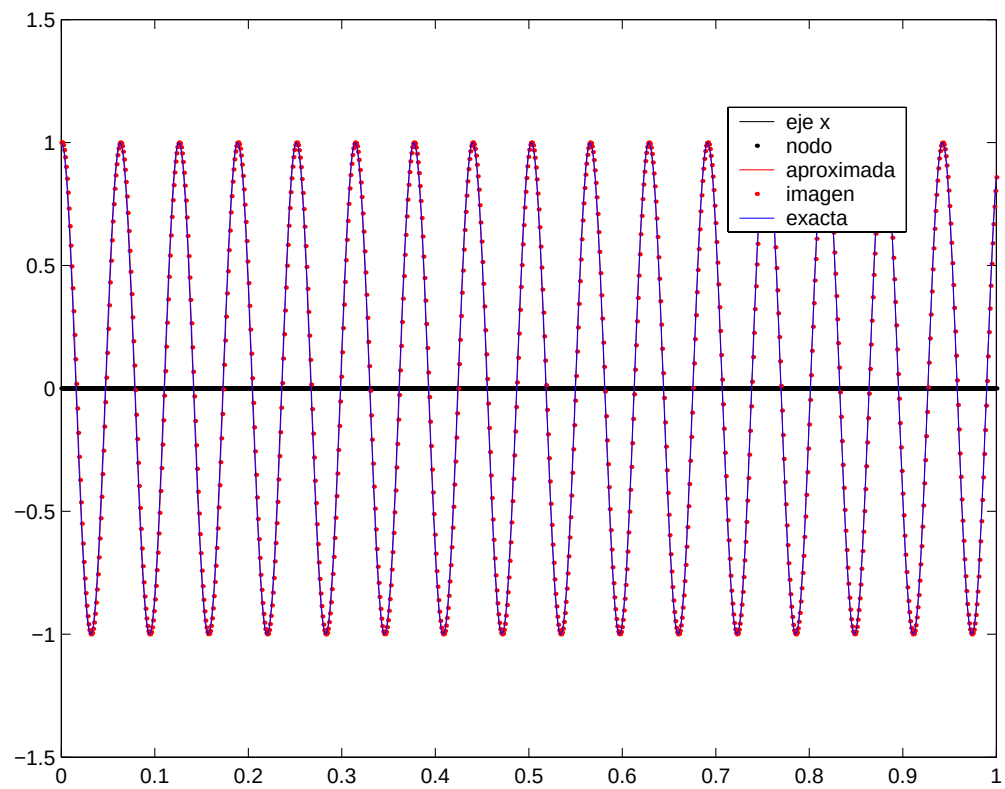


Figura 4.6: Aproximación de la Ecuación de Helmholtz con Mallado Uniforme con el Esquema 1-2-1, $k=100$, $m=1000$

k=3, m=15							
Uniforme				No Uniforme No Suave		No Uniforme Suave	
1-2-1	2-2-2	4-4-4	6-6-6	1-2-1	2-2-2	1-2-1	2-2-2
0.0535	0.0533	0.0548	0.05566	0.0657	0.066	0.075	0.0749

Cuadro 4.1: Comparación entre el Método de Shashkov 1-2-1, de Castillo 2-2-2, 4-4-4 y 6-6-6 con los tres tipos de mallado para k=3, m=15

k=3, m=150							
Uniforme				No Uniforme No Suave		No Uniforme Suave	
1-2-1	2-2-2	4-4-4	6-6-6	1-2-1	2-2-2	1-2-1	2-2-2
0.0051	0.0051	0.0051	0.0053	0.0063	0.0063	0.0073	0.0073

Cuadro 4.2: Comparación entre el Método de Shashkov 1-2-1, de Castillo 2-2-2, 4-4-4 y 6-6-6 con los tres tipos de mallado para k=3, m=150

4.3. Cálculo de Errores

En esta sección se presenta en cuadros el valor del error cometido al aplicar los métodos 1 – 2 – 1, 2 – 2 – 2, 4 – 4 – 4 y 6 – 6 – 6 al problema de dispersión de onda unidimensional utilizando mallados uniformes $x_i = ih$ donde $h = \frac{1}{m}$, no uniforme suave $x(\xi_i) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi_i\right)$; $i = 0, \dots, m-1$ y no uniforme no suave con los nodos espaciados según la regla $x(\xi_i) = \xi_i + (-1)^{i-1}\frac{h}{4}$. Para calcular el error se usó la norma de energía dada por $error(u_i) = \sqrt{\sum (u_i - u_{ih})^2 h}$.

Para un número de onda $k = 3$, con una cantidad de nodos $m = 15$ como puede observarse en el cuadro 4.1, cuando se emplea el mallado uniforme la solución aproximada se acerca más a la solución real, que al utilizar los otros tipos de mallado. se usa mallado uniforme el mínimo error cometido se observó para el esquema 2 – 2 – 2 pero sin mucha diferencia en relación con los otros métodos. Al usar mallados no uniformes se obtienen soluciones más alejadas a la solución real. Luego al aumentar $m = 150$ en el cuadro 4.2, el error disminuye significativamente en todos los casos, y la mejor solución la comparten los métodos 1 – 2 – 1, 2 – 2 – 2 y 4 – 4 – 4, sin mucha ventaja con respecto al método 6 – 6 – 6, manteniéndose el mallado uniforme como el mejor para usar en este caso.

Luego al variar el número de onda $k = 9$, y usando $m = 15$ en el cuadro 4.3 se puede observar que el error aumentó con respecto a cuadro 4.1, al aumentar k se observó que

k=9, m=15							
Uniforme				No Uniforme No Suave		No Uniforme Suave	
1-2-1	2-2-2	4-4-4	6-6-6	1-2-1	2-2-2	1-2-1	2-2-2
0.1303	0.1254	0.1647	0.1643	0.1609	0.1603	0.1533	0.1499

Cuadro 4.3: Comparación entre el Método de Shashkov 1-2-1, de Castillo 2-2-2, 4-4-4 y 6-6-6 con los tres tipos de mallado para $k=9$, $m=15$

k=9, m=150							
Uniforme				No Uniforme No Suave		No Uniforme Suave	
1-2-1	2-2-2	4-4-4	6-6-6	1-2-1	2-2-2	1-2-1	2-2-2
0.0151	0.0151	0.0154	0.0158	0.0195	0.0195	0.0204	0.0204

Cuadro 4.4: Comparación entre el Método de Shashkov 1-2-1, de Castillo 2-2-2, 4-4-4 y 6-6-6 con los tres tipos de mallado para $k=9$, $m=150$

se mantuvo el mallado uniforme como el que permite calcular la mejor solución, en este caso método $2 - 2 - 2$ posee el mínimo error, pero también se puede apreciar que en el caso no uniforme suave da mejor solución que para no uniforme no suave, luego al aumentar la cantidad de nodos a 150, los métodos $1 - 2 - 1$ y $2 - 2 - 2$ dan el mismo el error al usar mallado uniforme, pero en éste caso el mallado no uniforme no suave vuelve a ser mejor que al usar mallado no uniforme suave.

Para el caso donde $k = 100$ y 250 se refleja que el menor error fue para el esquema $4 - 4 - 4$, pero sin muchas diferencias significativas con respecto a los demás métodos de esta investigación a excepción del mallado no uniforme suave, ya que presenta un error muy alto con respecto a los demás mallados para los métodos $1 - 2 - 1$ y $2 - 2 - 2$, al aumentar $m = 1000$, los errores disminuyen significativamente siendo los mejores los esquemas $1 - 2 - 1$ y $2 - 2 - 2$.

k=100, m=250							
Uniforme				No Uniforme No Suave		No Uniforme Suave	
1-2-1	2-2-2	4-4-4	6-6-6	1-2-1	2-2-2	1-2-1	2-2-2
0.1228	0.121	0.0977	0.1008	0.15	0.148	0.4424	0.4424

Cuadro 4.5: Comparación entre el Método de Shashkov 1-2-1, de Castillo 2-2-2, 4-4-4 y 6-6-6 con los tres tipos de mallado para $k=100$, $m=250$

k=100, m=1000							
Uniforme				No Uniforme No Suave		No Uniforme Suave	
1-2-1	2-2-2	4-4-4	6-6-6	1-2-1	2-2-2	1-2-1	2-2-2
0.0158	0.0158	0.0251	0.0257	0.023	0.0232	0.0269	0.0269

Cuadro 4.6: Comparación entre el Método de Shashkov 1-2-1, de Castillo 2-2-2, 4-4-4 y 6-6-6 con los tres tipos de mallado para k=100, m=1000

4.4. Orden de Convergencia

Como es sabido, el error cometido al calcular las aproximaciones a la solución de las ecuaciones diferenciales, está acotado por $\|error\| \leq Ch^r$, donde h es la medida de la discretización, r es el orden de convergencia y C una constante mayor que cero. Para calcular r se acostumbra hacer el siguiente procedimiento:

1. Se escribe la desigualdad anterior como una igualdad

$$y = Ch^r$$

2. Se aplica logaritmo obteniendo

$$\log(y) = \log(C) + r \log(h)$$

3. Como $-\log(y)$ y $-\log(h)$ son negativos, se multiplican por -1 obteniendose

$$-\log(y) = -\log(C) - r \log(h)$$

4. Se gráfica $-\log(y)$ contra $-\log(h)$ basándose en los datos obtenidos del error y h para diversos niveles de discretización.

En las figuras 4.7 y 4.8 se presentan como ejemplo dos regresiones lineales para esquema 6–6–6, para los números de igual a tres y nueve. Luego en los cuadros 4.7 y 4.8 se presentan los valores del orden de convergencia para todas las pruebas realizadas. En estos cuadros la penúltima fila corresponde a la variable primal y la última a la derivada.

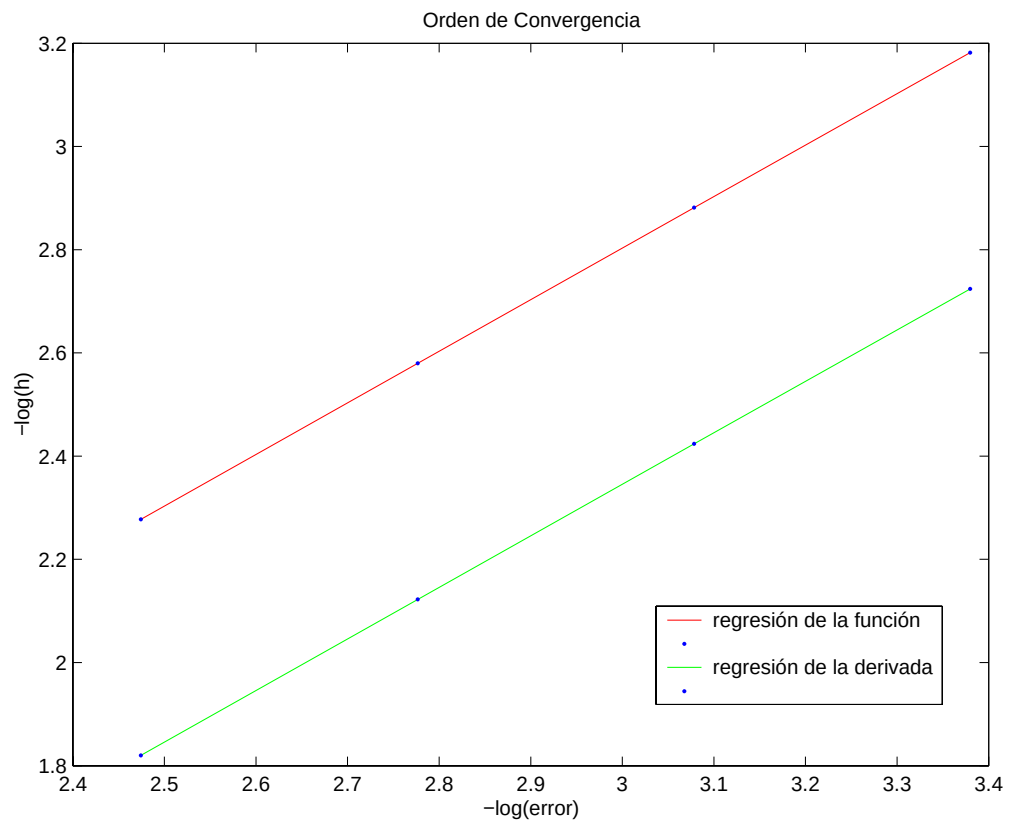


Figura 4.7: Regresión lineal para el esquema 6-6-6, con $k = 3$ y con m desde 150 hasta 1200

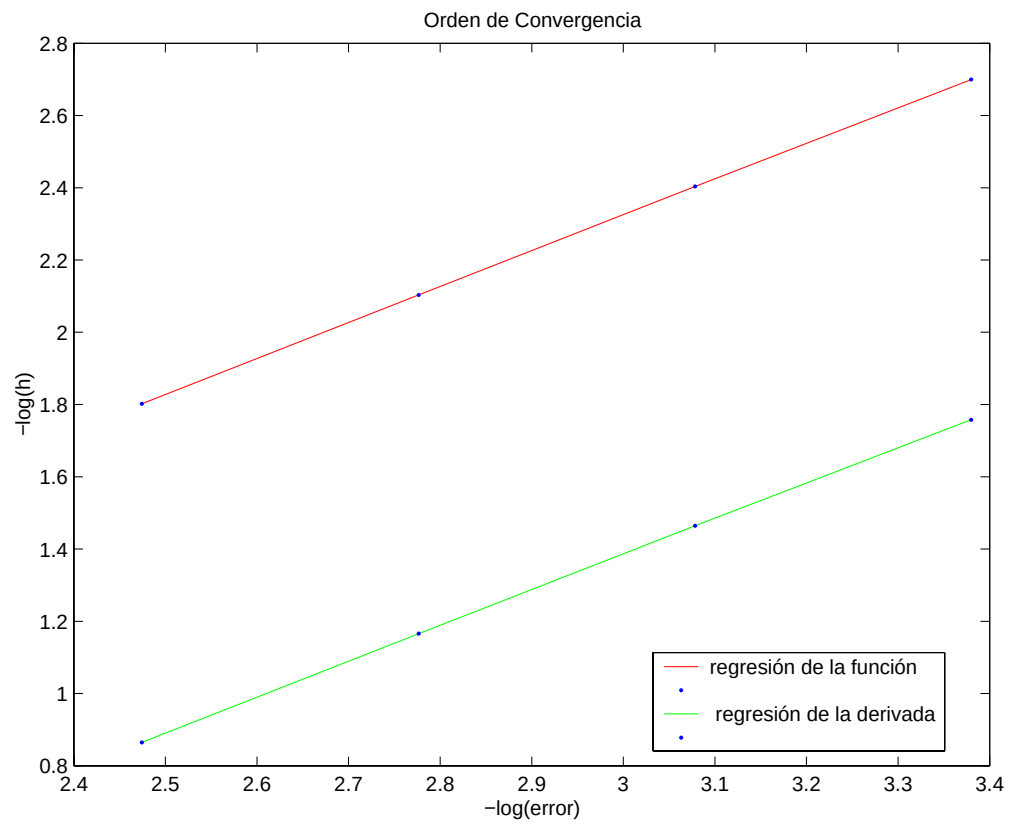


Figura 4.8: Regresión lineal para el esquema 6-6-6, con $k = 3$ y con m desde 150 hasta 1200

Uniforme				No Uniforme No Suave		No Uniforme Suave	
1-2-1	2-2-2	4-4-4	6-6-6	1-2-1	2-2-2	1-2-1	2-2-2
0.9984	0.999	1.0	0.9989	0.9988	0.9988	0.7498	0.7493
0.9986	0.999	1.0	0.9981	1.002	1.002	0.7498	0.7498

Cuadro 4.7: Orden de Convergencia de los métodos , con $k = 3$, con m variando de 150 a 1200

Uniforme				No Uniforme No Suave		No Uniforme Suave	
1-2-1	2-2-2	4-4-4	6-6-6	1-2-1	2-2-2	1-2-1	2-2-2
0.9904	0.9904	1.0001	0.9916	0.9898	0.9898	0.7418	0.7418
0.9912	0.9912	1.0001	0.987	0.9926	0.9926	0.7433	0.7433

Cuadro 4.8: Orden de Convergencia de los métodos , con $k = 9$, con m variando de 150 a 1200

Es necesario decir que todos estos resultados se obtuvieron gracias a un equipo *PENTIUM IV*, de un procesador de 2100 Mhz, con una memoria RAM de 256 Mb, cuando se probaron los métodos, todos tardaron en valores casi idénticos de tiempo según la cantidad de nodos, cómo se puede ver en el siguiente cuadro 4.9:

	K=3	K=9	K=100
m=15	0.5 seg	0.75 seg	-
m=150	3 seg	4.5 seg	-
m=250	-	-	7 seg
m=1000	-	-	5 min

Cuadro 4.9: Comparación de tiempos al aplicar los métodos al problema de Helmholtz

4.5. Análisis de Dispersión

En esta sección se hará un análisis de la diferencia entre el número de onda de la solución analítica y el de la solución numérica que no es más que el comúnmente denominado error de contaminación por efecto de dispersión. El error total es la suma del error de interpolación más el error debido al efecto de contaminación. En las figuras 4.1 y 4.3 se puede observar claramente el efecto de contaminación. Para calcular el número de onda de la solución numérica se utilizarán las ecuaciones en diferencias obtenidas previamente. En cada caso se utilizan diferentes ecuaciones, para la presión en $1-2-1$ se necesitaron la dos últimas ecuaciones, para la derivada, en z , $1-2-1$ se necesitaron las tres últimas y para z en $2-2-2$ se necesitaron las cuatro últimas, para z tanto de $1-2-1$ como de z $2-2-2$ ya estos cálculos han sido abordados por [14], siendo el estudio para p $1-2-1$ novedoso en éste trabajo. Todos estos procedimientos se pueden ver en el Apéndice B, utilizando el programa *MAPLE* *V*. Para la presión en $2-2-2$, se obtuvo números complejos cuyas expresiones fueron muy complicadas, donde era indispensable calcular la parte real y no se pudo obtener. Se intento hacer el mismo procedimiento para el esquema $4-4-4$, donde se obtuvo una ecuación polinómica de grado nueve, donde no se puede calcular sus raíces.

Ahora se presenta el procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones en diferencias. Sea el conjunto de ecuaciones en diferencias:

$$f(n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+r}, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}) = 0 \quad (4.1)$$

$$\vdots \quad (4.2)$$

$$g(n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+r}, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}) = 0 \quad (4.3)$$

Luego, estas ecuaciones se combinan en una para eliminar las variables según el caso, z' s o p' s y luego se hace el cambio de variables:

$$x_i = \chi_i \lambda^i \quad (4.4)$$

Con lo cual se obtiene una ecuación polinómica en λ , donde se procede a extraer sus raíces.

Como es sabido $\lambda = |\lambda| \exp(i\tilde{k}h)$, donde se considera la parte real y despejando $\tilde{k}$ se obtiene

$$\tilde{k} = \frac{1}{h} \arccos \left[\frac{Re(\lambda)}{|\lambda|} \right] \quad (4.5)$$

donde $K = kh$ aproximado y k el número de onda, y el $\cos(K) = \text{Re}(\lambda)$

Y luego se obtiene el error relativo que es el siguiente:

$$E_{r,k} = \frac{\tilde{k} - k}{k} \quad (4.6)$$

Utilizando este análisis se obtuvieron los siguientes resultados:

Para calcular la presión p en el esquema $1 - 2 - 1$ se tomaron las tres últimas ecuaciones del sistema que conforman dicho esquema:

$$\left(-\frac{1}{h}\right) z_{m-2} + \frac{1}{h} z_{m-1} + k^2 p_{m-\frac{3}{2}} = 0 \Rightarrow -z_{m-2} + z_{m-1} + hk^2 p_{m-\frac{3}{2}} = 0 \quad (4.7)$$

$$z_{m-1} \frac{h}{2} + p_{m-\frac{3}{2}} - p_{m-1} = 0 \quad (4.8)$$

$$z_{m-1} - ikp_{m-1} = 0 \Rightarrow z_{m-1} = ikp_{m-1} \quad (4.9)$$

Al sustituir (4.8) en (4.7)

$$\left(\frac{ikh}{2} - 1\right) p_{m-1} + p_{m-\frac{3}{2}} = 0 \quad (4.10)$$

Y al hacer el cambio de $p_i = \chi \lambda^{2i}$ y despejando λ se obtiene la siguiente ecuación:

$$\lambda = \frac{2}{2 - ikh} \quad (4.11)$$

Para luego al desarrollar (4.11) en series de *Taylor* se puede decir que el error relativo de p en $1 - 2 - 1$ es el siguiente:

$$E_{r,k} = -\frac{1}{12}(kh)^2 + \frac{3}{2}(kh)^4 \quad (4.12)$$

De la misma forma que la anterior, para obtener z en $1 - 2 - 1$ se toma (4.9) y despejando p_{m-1} se tiene que:

$$p_{m-1} = \frac{z_{m-1}}{ik} \quad (4.13)$$

Y al sustituir (4.13) en (4.8), se puede decir que:

$$-\left(\frac{h}{2} - \frac{1}{ik}\right) z_{m-1} = p_{m-\frac{3}{2}} \quad (4.14)$$

Después al sustituir (4.14) en (4.7) se obtiene:

$$\left(1 - \frac{h^2 k^2}{2} + \frac{hk}{i}\right) z_{m-1} - z_{m-2} = 0 \quad (4.15)$$

Y al hacer el cambio $z_i = \chi \lambda^i$, y despejando λ se tiene que:

$$\lambda = \frac{1}{1 - \frac{h^2 k^2}{2} + \frac{hk}{i}} \quad (4.16)$$

Al desarrollar (4.16) en series de *Taylor* se obtiene que el error relativo para z en $1 - 2 - 1$ es:

$$E_{r,k} = \frac{1}{6}(kh)^2 - 3(kh)^4 \quad (4.17)$$

Para conseguir z en $2 - 2 - 2$ se toman las cuatro últimas ecuaciones en diferencias:

$$z_{m-2}h + p_{m-\frac{5}{2}} - p_{m-\frac{3}{2}} = 0 \quad (4.18)$$

$$-\frac{1}{h}z_{m-2}\frac{1}{h} + k^2p_{m-\frac{3}{2}} = 0 \Rightarrow -z_{m-2} + z_{m-1} + k^2hp_{m-\frac{3}{2}} = 0 \quad (4.19)$$

$$3hz_{m-1} - 8p_{m-1} + 9p_{m-\frac{3}{2}} - p_{m-\frac{5}{2}} = 0 \quad (4.20)$$

$$z_{m-1} - ikp_{m-1} = 0 \Rightarrow p_{m-1} = \frac{z_{m-1}}{ik} \quad (4.21)$$

Al sustituir (4.21) en (4.20) se tiene que:

$$\left(3h - \frac{8}{ik}\right)z_{m-1} + 9p_{m-\frac{3}{2}} - p_{m-\frac{5}{2}} = 0 \quad (4.22)$$

y al despejar $p_{m-\frac{3}{2}}$:

$$p_{m-\frac{3}{2}} = \frac{1}{9}p_{m-\frac{5}{2}} - \left(\frac{h}{3} - \frac{8}{9ik}\right)z_{m-2} \quad (4.23)$$

al sustituir (4.23) en (4.19):

$$p_{m-\frac{5}{2}} = \frac{9z_{m-2}}{k^2h} - \left(\frac{9}{k^2h} - 3h + \frac{8}{ki}\right)z_{m-1} \quad (4.24)$$

y a su vez (4.24) en (4.18):

$$\left(h + \frac{8}{k^2h}\right)z_{m-2} + \left(3h - \frac{8}{k^2h} - \frac{8}{ki}\right)z_{m-1} = 0 \quad (4.25)$$

que al luego haciendo el cambio de variable $z_i = \chi\lambda^i$ y despejando λ se obtiene:

$$\lambda = \frac{8 - 3k^2h^2 - 8ikh}{k^2h^2 - 8} \quad (4.26)$$

Y al igual que las anteriores, se desarrolla (4.26) se obtiene el error relativo para z en $2 - 2 - 2$:

$$E_{r,k} = -\frac{1}{24}(kh)^2 + \frac{33}{4}(kh)^4 \quad (4.27)$$

En las figuras (4.9), (4.10) y (4.11), se presentan graficamente la parte real de λ al mismo tiempo que la curva $\cos(kh)$, observándose que para $kh \rightarrow 0$ las curvas son similares, esto es lo que se esperaba. Un dato imoportante es que no aparece la frecuencia de corte como ocurre con los métodos de elementos finitos tanto *Galerkin Mixto* como *Mínimos Cuadrados* en [4].

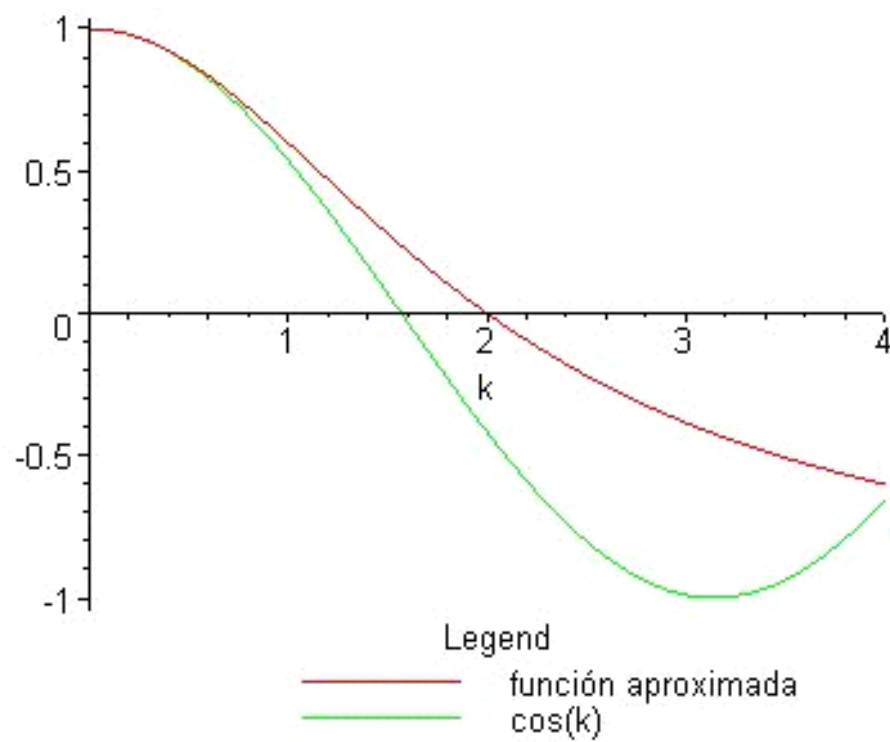


Figura 4.9: Comparación entre la función $\cos(kh)$ y su función aproximada obtenida por análisis de dispersión bajo el esquema 1 – 2 – 1

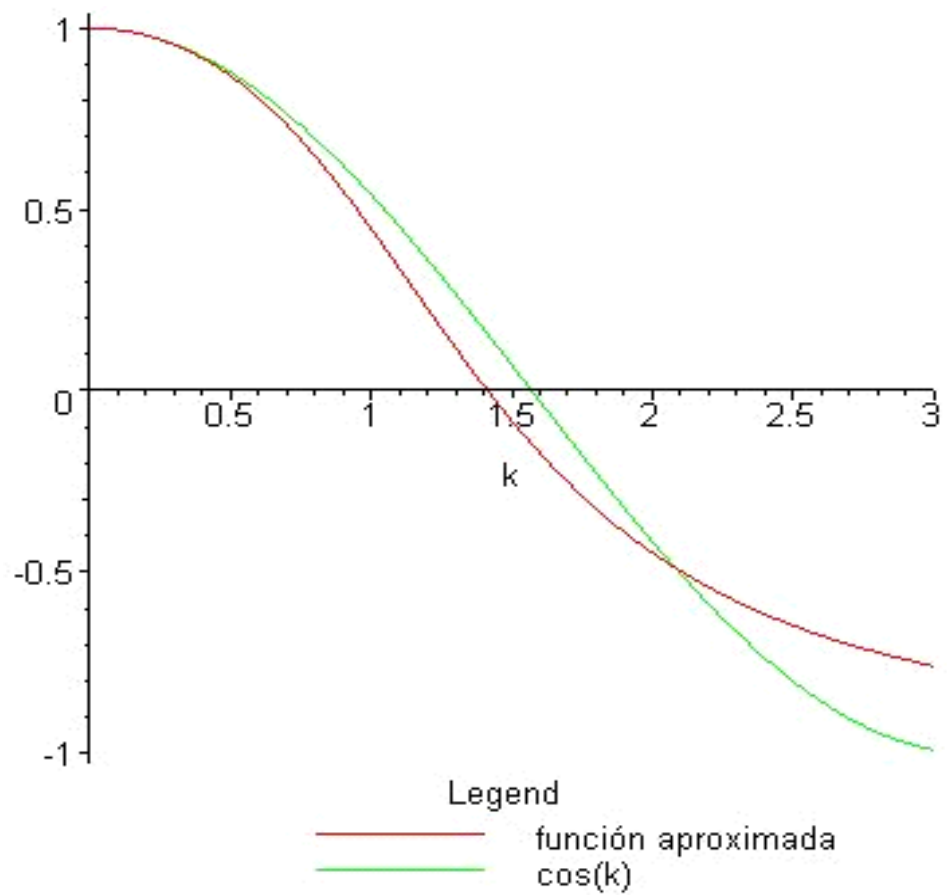


Figura 4.10: Comparación entre la función $\cos(kh)$ y su función aproximada de la derivada obtenida por análisis de dispersión bajo el esquema $1 - 2 - 1$

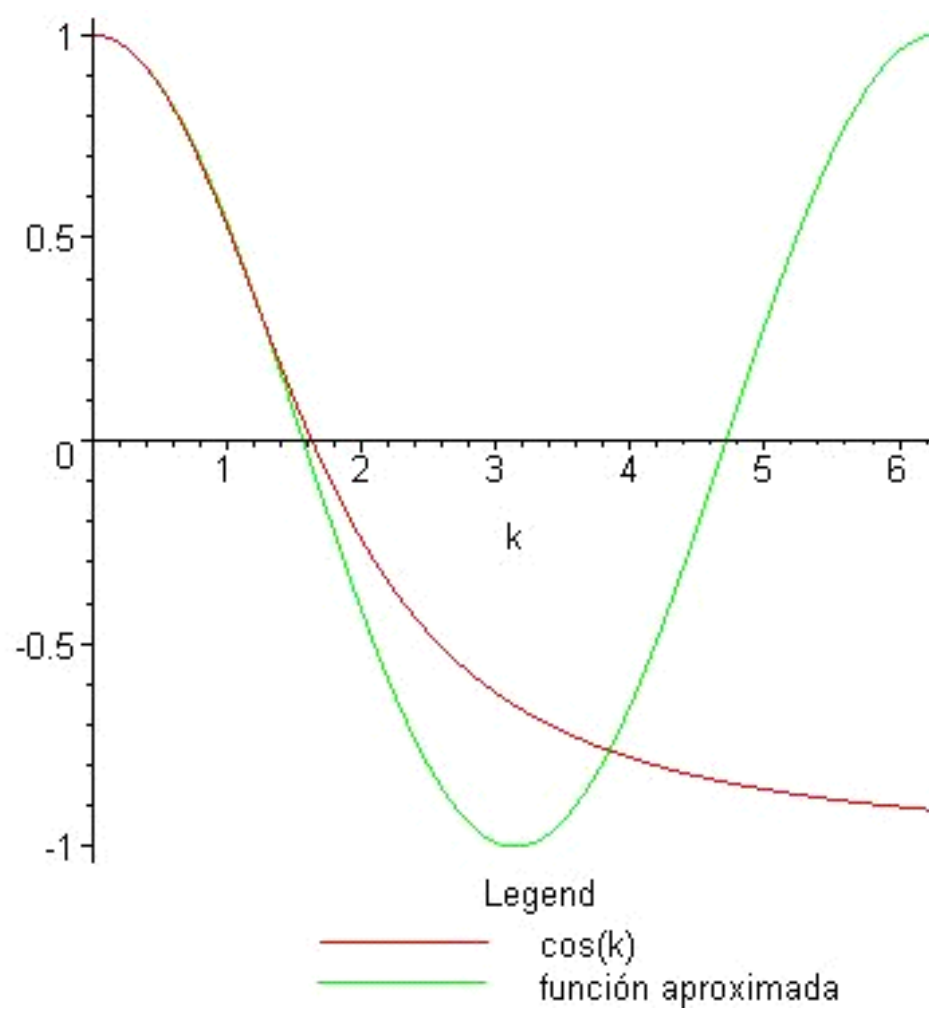


Figura 4.11: Comparación entre la función $\cos(kh)$ y su función de la derivada aproximada obtenida por análisis de dispersión bajo el esquema $2 - 2 - 2$

4.6. Conclusiones y Recomendaciones

Después de haber estudiado éstos métodos a través de diversos artículos a partir del año 1995 hasta el presente, principalmente los de Shashkov y Castillo, aplicando la metodología propuesta que plantea Ian Sommerville que es el ciclo de vida, con un ligero cambio en el análisis, en este trabajo se obtuvieron resultados interesantes que no se esperaban según la teoría formulada por sus autores en todas las medidas que se utilizaron como el error de norma de energía, el cálculo del orden de convergencia, y el análisis de la dispersión; pero aunque éstos resultados objetivamente son buenos, no son eficientes al compararlos con otros métodos empleados para resolver este problema, como los métodos de elementos finitos, volumen finitos y diferencias finitas, no obstante se puede decir lo siguiente:

- Según el estudio hecho, se reafirma que el uso de mallados uniformes da resultados más eficientes que usando los otros dos tipos de mallado según por el error de norma ($\|\cdot\|_2$) de energía.
- No hay diferencias significativas, según los datos en cada método para el caso de mallado uniforme.
- El orden de convergencia de todos los métodos es aproximadamente uno, excepto para el caso de mallado no uniforme suave que es alrededor de 0.7.
- El análisis de dispersión en todos los casos estudiados dieron orden $(kh)^2$, siendo un poco menor $2 - 2 - 2$

Cómo estos métodos son recientes, todavía hace falta mucho que desarrollar tanto la parte teórica, cómo hacer el estudio en casos de ecuaciones en diferencia de orden mayores a dos para mallados no uniformes, hacer la teoría para el caso de mallados no estructurados en $2D$ y $3D$; y en la parte práctica aplicar éstos métodos a muchos problemas de la vida real cómo dinámica de fluidos, campos eléctricos, ecuaciones de temperatura, sistemas de simulación de medios físicos, etc, aunque estos métodos son recientes sus resultados a ciertos problemas han sido satisfactorios cómo en [7], [9] y [10].

4.7. Recomendación

Revisar los coeficientes de tanto la matriz de divergencia y gradiente del método $6-6-6$ en [2], debido a que la primera fila de la matriz de divergencia en este método no cumple con las propiedades según la teoría estudiada, se tuvo que cambiar uno de los coeficientes para que se pueda cumplir con la misma.

4.8. Trabajos Futuros

1. Hacer el estudio de estos métodos utilizando ecuaciones en diferencia mayores a seis.
2. Estudiar este problema con estos mismos métodos empleados para el caso $2-D$.
3. Aplicar estos métodos a otros conjunto de problemas que requieren el uso de ecuaciones diferenciales.
4. Desarrollar la teoría para mallados no uniforme para los casos de orden superior en $1D$.
5. Desarrollar la teoría que soporte mallados no uniformes en $2D$.
6. Desarrollar una interfaz de usuario para hacer más amigable el interacción entre el programa y el usuario.

Apéndice A

Codigo Fuente de la Implementación

```
%Programa Principal para resolver la ecuacion de Helmholtz, de orden dos,  
%usando el metodo de operadores de soporte que plantea Shashkov  
function p = principal()  
    clear all;  
    band = 1;  
    while band == 1  
        disp(' ');  
        m = leer_nodos; %Obtencion de la cantidad de nodos sobre el espacio  
        %que se desea trabajar  
        disp(' ');  
        c = comp; %En esta funcion se obtiene los valores de las constantes  
        %xi's, gamma's y K's  
        disp(' ');  
        %Obtencion de las funciones alpha, betha, delta y f  
        disp(' ');  
        disp('Lectura de las funciones alpha, betha, delta y f');  
        disp(' ');  
        disp('Por favor, inserte el valor de la funcion alpha ');  
        alpha = leer_funcion;  
        disp(' ');
```



```

disp('Por favor, inserte el valor de la funcion betha ');
betha = leer_funcion;
disp(' ');
disp('Por favor, inserte el valor de la funcion delta ');
delta = leer_funcion;
disp(' ');
disp('Por favor, inserte el valor de la funcion f ');
f= leer_funcion;
disp(' ');
ban = 0;
b_met = 0;
%En este ciclo se escoge el tipo de mallado que puede ser uniforme, no
%uniforme suave y no uniforme no suave
while (b_met==0)
    disp('Metodos: ');
    disp(' ');
    disp('Escoga solo uno de los Metodos: ');
    disp('1: Metodo 1-2-1');
    disp('2: Metodo 2-2-2');
    disp('3: Metodo 4-4-4');
    disp('4: Metodo 6-6-6');
    disp(' ');
    op_met = input('¿Cual elige?: ');
    if (op_met>0 & op_met<5)
        b_met = 1;
    end
end
while (ban==0)

```

```

if op_met == 3 | op_met == 4
    x=mallado_uniforme(m);
    h = x(2) - x(1);
    ban = 1;
else
    disp('Tipos de Mallado:')
    disp(' ');
    disp('Escoga entre las siguientes opciones: ');
    disp('1 : Mallado Uniforme');
    disp('2 : Mallado No Uniforme no Suave');
    disp('3 : Mallado no Uniforme Suave');
    disp(' ');
    op = input('¿Cual elige?: ');
    if (op>0 & op<4)
        ban = 1;
        if op==1
            x=mallado_uniforme(m);
            h = x(2) - x(1);
        end
        if op==2
            x=mallado_no_uniforme_no_suave(m);
            h = x(3) - x(2);
        end
        if op==3
            x=mallado_no_uniforme_suave(m);
            h = x(2*m-1) - x(2*m-2);
        end
    end
end

```

```

        end
    end
    %Aqui se obtiene el vector F
    F=sparse(2*m+1,1);
    F=generar_F(c,x,m,f);
    A = sparse(2*m+1,2*m+1);
    %Obtencion de la matriz A
    if op_met == 1
        A=generar_K(c,alpha,betha,x,delta,m);
    end
    if op_met == 2
        A=generar_K_2_2_2(c,alpha,betha,x,delta,m);
    end
    if op_met == 3
        A=generar_K_4_4_4(c,alpha,betha,x,h,delta,m);
    end
    if op_met == 4
        A=generar_K_6_6_6(c,alpha,betha,x,h,delta,m);
    end
    ud = A\F;
    %la siguiente funcion nos permite observar las aproximaciones de la
    %presion y su derivada con respecto a la funcion original
    up = graficar(ud,x,m,h);
    disp(' ');
    disp('Entre las siguientes opciones solo escoja una: ');
    disp(' ');
    disp('1:si');
    disp('0:no');

```

```

    band = input('¿Desea continuar con otra ecuacion?: ');
    while band<0 or band>1
        disp(' ');
        disp('Por favor vuelva a teclear con los valores predeterminados');
        band=input('¿Desea continuar con otra ecuacion?: ');
    end
end

%-----
function m = leer_nodos()
    m=0;
    while m <= 3
        m = input('inserte la cantidad de nodos: ');
        if m == 3
            disp(' ');
            disp('Por favor vuelva a teclear un numero mayor de tres');
        end
    end
end

%-----
function c=comp()
    c(2) = input('Inserte el valor de gamma_uno: ');
    c(1) = input('Inserte el valor de xi_uno: ');
    c(3) = input('Inserte el valor de k_uno: ');
    c(5) = input('Inserte el valor de gamma_dos: ');
    c(4) = input('Inserte el valor de xi_dos: ');
    c(6) = input('Inserte el valor de k_dos: ');

%-----
function f = leer_funcion()
    f = input('Inserte el valor de la funcion: ', 's');

```

```

%-----
function x = mallado_uniforme(m)

    x(1) = 0;

    for i=2:2*m-2

        x(i) = (i-1)/(2*m-2);

    end

    x(2*m - 1) = 1;

%-----
function x = mallado_no_uniforme_no_suave(m)

    e = mallado_uniforme(m);

    h = 1/(2*m-2);

    x(1) = 0;

    for i=2:2*m-2

        x(i) = e(i) + ((-1)^(i-1))*(h/4);

    end

    x(2*m - 1) = 1;

%-----
function x = mallado_no_uniforme_suave(m)

    e = mallado_uniforme(m);

    for i=1:2*m - 1

        x(i) = sin(pi/2*e(i));

    end

%-----
function F = generar_F(c,x,m,f)

    fe = fcnchk(f);

    F(1,1) = c(3);

    for i=2:2:2*m

        F(i,1) = 0;

```

```

        if (i < 2*m)
            F(i+1,1) = feval(fe,x(i));
        end
    end

    F(2*m+1,1) = c(6);

%-----
function K = generar_K(c,alpha,betha,x,delta,m)

    al = fcnchk(alpha);
    be = fcnchk(betha);
    dele = fcnchk(delta);

    K(1,1) = c(1);
    K(1,2) = c(2);
    K(2,1) = 1;
    K(2,2) = x(2) - x(1);
    K(2,3) = -1;

    for i = 1:m-1

        K(2*i+1,2*i) = feval(be,x(2*i))/2 -
            feval(al,x(2*i))/(x(2*i+1)-x(2*i-1));

        K(2*i+1,2*i+1) = feval(dele,x(2*i));

        K(2*i+1,2*i+2) = feval(be,x(2*i))/2 +
            feval(al,x(2*i))/(x(2*i+1)-x(2*i-1));

    end

    for i = 1:m-2

        K(2*i+2,2*i+1)= 1;

        K(2*i+2,2*i+2) = x(2*i+2) - x(2*i);

        K(2*i+2,2*i+3) = -1;

    end

    K(2*m,2*m-1) = 1;

```

```

K(2*m,2*m) = x(2*m-1) - x(2*m-2);
K(2*m,2*m+1) = -1;
K(2*m+1,2*m) = c(5);
K(2*m+1,2*m+1) = c(4);

%-----

function K = generar_K_2_2_2(c,alpha,betha,x,delta,m)
    al = fcnchk(alpha);
    be = fcnchk(betha);
    dele = fcnchk(delta);
    K(1,1) = c(1);
    K(1,2) = c(2);
    K(2,1) = 8;
    K(2,2) = -8*x(1) + 9*x(2) - x(4);
    K(2,3) = -9;
    K(2,5) = 1;
    for i = 1:m-1
        K(2*i+1,2*i) = feval(be,x(2*i))/2 -
            feval(al,x(2*i))/(x(2*i+1)-x(2*i-1));
        K(2*i+1,2*i+1) = feval(dele,x(2*i));
        K(2*i+1,2*i+2) = feval(be,x(2*i))/2 +
            feval(al,x(2*i))/(x(2*i+1)-x(2*i-1));
    end
    for i = 1:m-2
        K(2*i+2,2*i+1)= 1;
        K(2*i+2,2*i+2) = x(2*i+2) - x(2*i);
        K(2*i+2,2*i+3) = -1;
    end

```

```

end

K(2*m,2*m+1) = -8;

K(2*m,2*m) = 8*x(2*m-1)-9*x(2*m-2)+x(2*m-4);

K(2*m,2*m-1) = 9;

K(2*m,2*m-3) = -1;

K(2*m+1,2*m) = c(5);

K(2*m+1,2*m+1) = c(4);

%-----
function K = generar_K_4_4_4(c,alpha,betha,x,h,delta,m)

h = 2*h;

al = fcnchk(alpha);

be = fcnchk(betha);

dele = fcnchk(delta);

K(1,1) = c(1);

K(1,2) = c(2);

K(2,1) = 1152/407;

K(2,2) = h;

K(2,3) = -10063/3256;

K(2,5) = -2483/9768;

K(2,7) = 3309/3256;

K(2,9) = -2099/3256;

K(2,11) = 697/4884;

K(3,2) = (5/16)*feval(be,x(2)) -
(4751/5192)*feval(al,x(2))/h;

K(3,3) = feval(dele,x(2));

K(3,4) = (15/16)*feval(be,x(2)) +
(909/1298)*feval(al,x(2))/h;

```



```

K(3,6) = (-5/16)*feval(be,x(2)) +
(6091/15576)*feval(al,x(2))/h;
K(3,8) = (1/16)*feval(be,x(2)) -
(1165/5192)*feval(al,x(2))/h;
K(3,10) = (129/2596)*feval(al,x(2))/h;
K(3,12) = (-25/15576)*feval(al,x(2))/h;
K(4,3) = 11/12;
K(4,4) = h;
K(4,5) = -17/24;
K(4,7) = -3/8;
K(4,9) = 5/24;
K(4,11) = -1/24;
for i = 2:m-2
    K(2*i+1,2*i-2) = -feval(be,x(2*i-2))/16 +
    (1/24)*feval(al,x(2*i-2))/h;
    K(2*i+1,2*i+1) = feval(dele,x(2*i-2));
    K(2*i+1,2*i) = (9/16)*feval(be,x(2*i-2)) -
    (27/24)*feval(al,x(2*i-2))/h;
    K(2*i+1,2*i+2) = (9/16)*feval(be,x(2*i-2)) +
    (27/24)*feval(al,x(2*i-2))/h;
    K(2*i+1,2*i+4) = -feval(be,x(2*i-2))/16 -
    (1/24)*feval(al,x(2*i-2))/h;
end
for i = 2:m-3
    K(2*i+2,2*i-1) = -1/24;
    K(2*i+2,2*i+1) = 27/24;
    K(2*i+2,2*i+2) = h;
    K(2*i+2,2*i+3) = -27/24;

```

```

K(2*i+2,2*i+5) = 1/24;
end
K(2*m,2*m+1) = -1152/407;
K(2*m,2*m) = h;
K(2*m,2*m-1) = 10063/3256;
K(2*m,2*m-3) = 2483/9768;
K(2*m,2*m-5) = -3309/3256;
K(2*m,2*m-7) = 2099/3256;
K(2*m,2*m-9) = -697/4884;
K(2*m-2,2*m-1) = -11/12;
K(2*m-2,2*m-2) = h;
K(2*m-2,2*m-3) = 17/24;
K(2*m-2,2*m-5) = 3/8;
K(2*m-2,2*m-7) = -5/24;
K(2*m-2,2*m-9) = 1/24;
K(2*m-1,2*m) = (5/16)*feval(be,x(2*m-2)) +
(4751/5192)*feval(al,x(2*m-2))/h;
K(2*m-1,2*m-1) = feval(dele,x(2*m-2));
K(2*m-1,2*m-2) = (15/16)*feval(be,x(2*m-2)) -
(909/1298)*feval(al,x(2*m-2))/h;
K(2*m-1,2*m-4) = (-5/16)*feval(be,x(2*m-2)) -
(6091/15576)*feval(al,x(2*m-2))/h;
K(2*m-1,2*m-6) = (1/16)*feval(be,x(2*m-2)) +
(1165/5192)*feval(al,x(2*m-2))/h;
K(2*m-1,2*m-8) = (-129/2596)*feval(al,x(2*m-2))/h;
K(2*m-1,2*m-10) = (25/15576)*feval(al,x(2*m-2))/h;
K(2*m+1,2*m) = c(5);
K(2*m+1,2*m+1) = c(4);

```

```

%-----
function K = generar_K_6_6_6(c,alpha,betha,x,h,delta,m)

    al = fcnchk(alpha);
    be = fcnchk(betha);
    dele = fcnchk(delta);
    h = 2*h;

    K(1,1) = c(1);
    K(1,2) = c(2);
    K(2,1) = 568557184/150834915;
    K(2,2) = h;
    K(2,3) = -455704609/83579520;
    K(2,5) = 128942179/41789760;
    K(2,7) = -15911389/6964960;
    K(2,9) = 142924471/117011328;
    K(2,11) = -20331719/50147712;
    K(2,13) = 2688571/38307280;
    K(2,15) = -187529/41789760;
    K(2,17) = 6207/27859840;
    K(3,2) = (784350/1667200)*feval(be,x(2)) -
    (1077397/1273920)*feval(al,x(2))/h;
    K(3,3) = feval(dele,x(2));
    K(3,4) = (992250/166700)*feval(be,x(2)) +
    (25110619/78983040)*feval(al,x(2))/h;
    K(3,6) = (-210000/1667200)*feval(be,x(2)) +
    (49955527/39491520)*feval(al,x(2))/h;
    K(3,8) = (151200/1667200)*feval(be,x(2)) -
    (25369793/19745760)*feval(al,x(2))/h;
    K(3,10) = (-60750/1667200)*feval(be,x(2)) +

```

```

(12220145/15796608)*feval(al,x(2))/h;
K(3,12) = (10150/1667200)*feval(be,x(2)) -
(21334421/78983040)*feval(al,x(2))/h;
K(3,14) = (460217/9872880)*feval(al,x(2))/h;
K(3,16) = (-101017/39491520)*feval(al,x(2))/h;
K(3,18) = (3369/26327680)*feval(al,x(2))/h;
K(4,1) = -496/3465;
K(4,3) = 811/640;
K(4,4) = h;
K(4,5) = -449/384;;
K(4,7) = 29/960;
K(4,9) = 11/448;
K(4,11) = -13/1152;
K(4,13) = 37/21120;
K(5,2) = (-25375/1013344)*feval(be,x(4)) +
(31/960)*feval(al,x(4))/h;
K(5,4) = (472815/1013344)*feval(be,x(4)) -
(687/640)*feval(al,x(4))/h;
K(5,5) = feval(dele,x(4));
K(5,6) = (675255/1013344)*feval(be,x(4)) +
(129/128)*feval(al,x(4))/h;
K(5,8) = (-137095/1013344)*feval(be,x(4)) +
(19/192)*feval(al,x(4))/h;
K(5,10) = (30744/1013344)*feval(be,x(4)) -
(3/32)*feval(al,x(4))/h;
K(5,12) = (-3000/1013344)*feval(be,x(4)) +
(21/640)*feval(al,x(4))/h;
K(5,14) = -3/640*feval(al,x(4));

```

```

K(6,1) = 8/385;
K(6,3) = -179/1920;
K(6,5) = 153/128;
K(6,6) = h;
K(6,7) = -381/320;
K(6,9) = 101/1344;
K(6,11) = -1/128;
K(6,13) = 3/7040;
for i = 7:2:2*m-5
    K(i,i-5) = (9/768)*feval(be,x(i-1)) -
        (9/1920)*feval(al,x(i-1))/h;
    K(i,i-3) = (-75/768)*feval(be,x(i-1)) +
        (125/1920)*feval(al,x(i-1))/h;
    K(i,i-1) = (450/768)*feval(be,x(i-1)) -
        (2250/1920)*feval(al,x(i-1))/h;
    K(i,i) = feval(dele,x(i-1));
    K(i,i+1) = (450/768)*feval(be,x(i-1)) +
        (2250/1920)*feval(al,x(i-1))/h;
    K(i,i+3) = (-75/768)*feval(be,x(i-1)) -
        (125/1920)*feval(al,x(i-1))/h;
    K(i,i+5) = (9/768)*feval(be,x(i-1)) +
        (9/1920)*feval(al,x(i-1))/h;
end
for i = 8:2:2*m-6
    K(i,i-5) = 9/1920;
    K(i,i-3) = -125/1920;
    K(i,i-1) = 2250/1920;
    K(i,i) = h;

```

```

K(i,i+1) = -2250/1920;
K(i,i+3) = 125/1920;
K(i,i+5) = -9/1920;
end

K(2*m,2*m+1) = -568557184/150834915;
K(2*m,2*m) = h;
K(2*m,2*m-1) = 455704609/83579520;
K(2*m,2*m-3) = -128942179/41789760;
K(2*m,2*m-5) = 15911389/6964960;
K(2*m,2*m-7) = -142924471/117011328;
K(2*m,2*m-9) = 20331719/50147712;
K(2*m,2*m-11) = -2688571/38307280;
K(2*m,2*m-13) = 187529/41789760;
K(2*m,2*m-15) = -6207/27859840;

K(2*m-1,2*m) = (784350/1667200)*feval(be,x(2*m-2)) +
(1077397/1273920)*feval(al,x(2*m-2))/h;
K(2*m-1,2*m-1) = feval(dele,x(2*m-2));
K(2*m-1,2*m-2) = (992250/166700)*feval(be,x(2*m-2)) -
(25110619/78983040)*feval(al,x(2*m-2))/h;
K(2*m-1,2*m-4) = (-210000/1667200)*feval(be,x(2*m-2)) -
(49955527/39491520)*feval(al,x(2*m-2))/h;
K(2*m-1,2*m-6) = (151200/1667200)*feval(be,x(2*m-2)) +
(25369793/19745760)*feval(al,x(2*m-2))/h;
K(2*m-1,2*m-8) = (-60750/1667200)*feval(be,x(2*m-2)) -
(12220145/15796608)*feval(al,x(2*m-2))/h;
K(2*m-1,2*m-10) = (10150/1667200)*feval(be,x(2*m-2)) +
(21334421/78983040)*feval(al,x(2*m-2))/h;
K(2*m-1,2*m-12) = (-460217/9872880)*feval(al,x(2*m-2))/h;

```

$K(2*m-1, 2*m-14) = (101017/39491520)*feval(al, x(2*m-2))/h;$
 $K(2*m-1, 2*m-16) = (-3369/26327680)*feval(al, x(2*m-2))/h;$
 $K(2*m-2, 2*m+1) = 496/3465;$
 $K(2*m-2, 2*m-1) = -811/640;$
 $K(2*m-2, 2*m-2) = h;$
 $K(2*m-2, 2*m-3) = 449/384;;$
 $K(2*m-2, 2*m-5) = -29/960;$
 $K(2*m-2, 2*m-7) = -11/448;$
 $K(2*m-2, 2*m-9) = 13/1152;$
 $K(2*m-2, 2*m-11) = -37/21120;$
 $K(2*m-3, 2*m) = (-25375/1013344)*feval(be, x(2*m-4)) -$
 $(31/960)*feval(al, x(2*m-4))/h;$
 $K(2*m-3, 2*m-2) = (472815/1013344)*feval(be, x(2*m-4)) +$
 $(687/640)*feval(al, x(2*m-4))/h;$
 $K(2*m-3, 2*m-3) = feval(dele, x(2*m-4));$
 $K(2*m-3, 2*m-4) = (675255/1013344)*feval(be, x(2*m-4)) -$
 $(129/128)*feval(al, x(2*m-4))/h;$
 $K(2*m-3, 2*m-6) = (-137095/1013344)*feval(be, x(2*m-4)) -$
 $(19/192)*feval(al, x(2*m-4))/h;$
 $K(2*m-3, 2*m-8) = (30744/1013344)*feval(be, x(2*m-4)) +$
 $(3/32)*feval(al, x(2*m-4))/h;$
 $K(2*m-3, 2*m-10) = (-3000/1013344)*feval(be, x(2*m-4)) -$
 $(21/640)*feval(al, x(2*m-4))/h;$
 $K(2*m-3, 2*m-12) = 3/640*feval(al, x(2*m-4));$
 $K(2*m-4, 2*m+1) = -8/385;$
 $K(2*m-4, 2*m-1) = 179/1920;$
 $K(2*m-4, 2*m-3) = -153/128;$
 $K(2*m-4, 2*m-4) = h;$

```

K(2*m-4,2*m-5) = 381/320;
K(2*m-4,2*m-7) = -101/1344;
K(2*m-4,2*m-9) = 1/128;
K(2*m-4,2*m-11) = -3/7040;
K(2*m+1,2*m) = c(5);
K(2*m+1,2*m+1) = c(4);

%-----
function up = graficar(ud,x,m,h);
    for i=1:m-1
        p(i) = real(ud(2*i-1));
        z(i) = real(ud(2*i));
        xp(i) = x(2*i-1);
        xz(i) = x(2*i);
    end
    p(m) = real(ud(2*m-1));
    xp(m) = x(2*m-1);
    for i=1:m
        v(i) = 0;
    end
    p = p';
    y=0:0.001:1;
    fun = input('Inserte la funcion exacta: ','s');
    fu=fcnchk(fun);
    for i=1:1001
        up(i) = real(feval(fu,y(i)));
    end
    for i=1:m
        uprox(i,1) = real(feval(fu,x(2*i-1)));

```



```

end

error = norm(p - upaprox,2)*sqrt(h)
up = up';
figure(1);
plot(xp,v,'bla-',xp,v,'bla.',xp,real(p),'r-',xp,p,'r.',y,up,'b-');

%-----
%En el siguiente trozo de codigo se muestra como se calcula
%el orden de convergencia
for i=1:m-1
    p(i) = real(ud(2*i-1));
    z(i) = real(ud(2*i));
    xp(i) = x(2*i-1);
    xz(i) = x(2*i);
end
p(m) = real(ud(2*m-1));
xp(m) = x(2*m-1);
for i=1:m
    v(i) = 0;
end
p = p';
y=0:0.001:1;
for i=1:1001
    up(i) = real(feval(fu,y(i)));
    dp(i) = real(feval(de,y(i)));
end
for i=1:m

```

```

        upaprox(i,1) = real(feval(fu,x(2*i-1)));
    end
    for i=1:m-1
        dpaprox(i) = real(feval(de,x(2*i)));
    end;
    error = norm(p - upaprox,2)*sqrt(h);
    errorord = norm(z - dpaprox,2)*sqrt(h);
    W(band,1) = -log10(error);
    Z(band,1) = -log10(h);
    Wd(band,1) = -log10(errorord);
    Zd(band,1) = -log10(h);
    band;
    %Aqui se observa la pendiente de la recta dada por la regresion
    if band == 4
        b = reglineal(Z,W);
        bd = reglineal(Zd,Wd);
        b(1)
        bd(1)
    end
    clear p, upaprox;
    clear d, dpaprox;
    band = band + 1;
    m = 2*m;
    figure(2);
    plot(Z,W,'red',Z,W,'blue.',Zd,Wd,'green',Zd,Wd,'blue. ');
    xlabel('-log(error)');
    ylabel('-log(h)');
    title('Orden de Convergencia');

```

end

Apéndice B

Cálculo de la Dispersión

```
%Cálculo de la Dispersión para p en 1_2_1
```

```
> restart:Digits:=10:
```

```
> _EnvExplicit:=true:
```

```
>
```

```
>
```

```
>
```

```
> x1:= (4 - k^2)/sqrt(16 +8*k^2 + k^4);
```

$$x1 := \frac{4 - k^2}{((4 + k^2)^{1/2})}$$

```
> erro1:=evalf(taylor(arccos(x1),k=0,20));
```

$$\text{erro1} := 1. k^3 - .08333333333 k^5 + .01250000000 k^5 - .002232142857$$

$$\begin{aligned}
& k^7 + .0004340277778 k^9 - .00008877840909 k^{11} + \\
& .00001878004808 k^{13} - .4069010417 \cdot 10^{-5} k^{15} + .8975758272 \cdot 10^{-6} \\
& k^{17} + O(k^{19})
\end{aligned}$$

```
> erro1:=1.*k-.8333333333e-1*k^3+.1250000000e-1*k^5;
```

$$\text{erro1} := 1. k^1 - .08333333333 k^3 + .01250000000 k^5$$

```
>
```

```
> error_rel:=(erro1-k)/k;
```

$$\text{error_rel} := \frac{-.08333333333 k^3 + .01250000000 k^5}{k}$$

```
>
```

```
%-----
```

```
%Cálculo de la Dispersión para z en 1_2_1
```

```
> restart:Digits:=10:
```

```
> _EnvExplicit:=true:
```

```
> x1:= (2-k^2)/sqrt(4+k^4);
```

$$x1 := \frac{2 - k^2}{(4 + k^4)^{1/2}}$$

```
> erro1:=evalf(taylor(arccos(x1),k=0,20));
```

$$\begin{aligned} \text{erro1} := & 1. k + .1666666667 k^3 - .05000000000 k^5 - .01785714286 k^7 \\ & + .006944444444 k^9 + .002840909091 k^{11} - .001201923077 k^{13} \\ & - .0005208333333 k^{15} + .0002297794118 k^{17} + 0(k^{19}) \end{aligned}$$

```
> erro1:=1.*k+.1666666667*k^3-.5000000000e-1*k^5;
```

$$\text{erro1} := 1. k + .1666666667 k^3 - .05000000000 k^5$$

```
> plot([x1,cos(k)], k=0..3);
```

```
>
```

```
> error_rel:=(erro1-k)/k;
```

```

                                3                5
                                .1666666667 k  - .050000000000 k
error_rel := -----
                                k

>
>
%-----
%Cálculo de la Dispersión para z en 2_2_2
> restart:Digits:=10:
> _EnvExplicit:=true:
>
>
>
> x1:= (8 - 3*k^2)/sqrt(9*k^4 + 16*k^2 + 64);

                                2
                                8 - 3 k
x1 := -----
                                4          2          1/2
                                (9 k  + 16 k  + 64)

> erro1:=evalf(taylor(arccos(x1),k=0,7));

                                3                5        7
erro1 := 1. k + .04166666667 k  - .03437500000 k  + 0(k )

```

```
> erro1:=1.*k+.4166666667e-1*k^3-.3437500000e-1*k^5;
```

$$\text{erro1} := 1. \, k + .04166666667 \, k^3 - .03437500000 \, k^5$$

```
> plot([x1,cos(k)], k=0..2*Pi);
```

```
>
```

```
>
```

```
>
```

```
> error_rel:=(erro1-k)/k;
```

$$\text{error_rel} := \frac{.04166666667 \, k^3 - .03437500000 \, k^5}{k}$$

```
>
```

```
>
```

```
>
```

```
>
```

```
>
```

```
>
```

```
>
```

```
>
```

```
>
```

```
>
```

```
>
```


Bibliografía

- [1] J.E. Castillo, J.M. Hyman, M.J. Shashkov and S. Steinberg, High-Order Mimetic Finite Difference Methods on Nonuniform Grids, In ICOSAHOM-95, Proc. Of The Third International Conference on Spectral and High Order Methods. Houston. Texas, 5-9. June (1995). Special Issue of Houston Journal of Mathematics
- [2] J.E. Castillo, J.M. Hyman, M. Shashkov and S. Steinberg, Fourth- and Six-Order Conservative Finite Difference Approximations of the Divergence and Gradient, Applied Numerical Mathematics, 171-187 (2001).
- [3] J.E. Castillo, R.D. Grone, A Matrix Analysis Approach to Higher-Order Approximations for Divergence and Gradients Satisfying a Global Conservation Law, SIAM J, MATRIX ANAL, Vol. 25, No. 1, pp. 128-142 (2003)
- [4] Carlos Cadenas, Formulación y Aplicación del Método de Elementos Finitos Mínimos Cuadrados a un Problema de Dispersión de Onda y Comparación con Otros Métodos Numéricos, (2003)
- [5] James Hyman, Mikhail Shashkov and Stanly Steinberg, The Numerical Solution of Diffusion Problems in Strongly Heterogeneous Non-Isotropic Materials, Journal of Computational Physics 132, 130-148 (1997).
- [6] James M. Hyman and Mikhail Shashkov, Adjoint Operators for the Natural Discretizations of the Divergence, Gradient, and Curl on Logically Rectangular Grids, Applied Numerical Mathematics 25, 413-442 (1997).
- [7] J.M. Hyman and M. Shashkov, Approximation of Boundary Conditions for Mimetic Finite-Difference Methods, Computers Math. Applic. vol 36, No. 5, pp 79-99, 1998.
- [8] James Hyman, Mikhail Shashkov and Stanly Steinberg, The Effect of Inner Products for Discrete Vector Fields on The Accuracy of Mimetic Finite Difference Methods,

Los Alamos Report (2000), An International Journal of Computers Mathematics with Applicatio 42 (2001) p.p. 1527-1547.

- [9] J.E. Morel, Michael L. Hall and Mikhail J. Shashkov, A Local Support-Operators Diffusion Discretization Scheme for Hexahedral Meshes, Submitted to Journal of Computational Physics (2000).
- [10] M. Shashkov and Stanly Steinberg, Solving Diffusion Equations with Rough Coefficients in Rough Grids, Journal of Computational Physics 129, 383-405 (1996).
- [11] G. Larrazábal, Sparse Linear System Arising 2D Mimetic Discretization: An Experimental Study. Workshop on Mimetic Discretization Methods, San Diego (2003).
- [12] S. Rojas, One Dimensional Mimetic Finite Difference Computations with Rough Coefficients. Workshop on Mimetic Discretization Methods, San Diego (2003).
- [13] J. M. Guevara-Jordán, A 2D Mimetic Finite Difference Approach for Source and Sink Steady State Problems. Workshop on Mimetic Discretization Methods, San Diego (2003).
- [14] C. Cadenas, Application of Mimetic Finite Difference Methods to Acoustic Scattering. Workshop on Mimetic Discretization Methods, San Diego (2003).
- [15] A. A. Samarskii, V. F. Tishkin, A. P. Favorskii, and M. Shashkov, Operational Finite-Difference Schemes, Diff. Eqns., 17 No. 7, 854-862, (1981).
- [16] A. A. Samarskii, V. F. Tishkin, A. P. Favorskii, and M. Shashkov, Employment of the Reference-Operator Method in the Construction of Finite Difference Analogs of Tensor Operations, Diff. Eqns., 18, No. 7, 881-885, (1982).
- [17] Ian Sommerville, Ingeniería de Software (1998).