UNIVERSIDAD DE CARABOBO

CONSEJO UNIVERSITARIO
VALENCIA - VENEZUELA

REPUBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA UNIVERSIDAD DE CARABOBO RECTORA

Asunto: ASCENSO

Data: 199º y 150º

Fecha: 25 JUN 2009

Nº. CD-2540

NO DEBE TRATARSE MAS DE UN ASUNTO EN CADA OFICIO

Ciudadano
Prof. JOSÉ TADEO MORALES CARRILLO
C.I. Nro. V-07.014.500
a/c. Escuela de Educación
Facultad de Ciencias de la Educación

Presente.-

De acuerdo con lo previsto en el Ordinal 4º del Artículo 36 de la Ley de Universidades, atendiendo a la solicitud del Consejo de la Facultad de Ciencias de la Educación y visto el informe del Vicerrectorado Académico Nro. VRAC-ASC-204-09-CD del 14/05/2009, aprobada por la Comisión Delegada del Consejo Universitario en su Sesión N° **038** de fecha **01/06/2009**, en uso de la atribución que le confiere el Artículo 44 del Reglamento Interno respectivo, en virtud de lo establecido en el Capitulo II, Título III del Estatuto del Personal Docente y de Investigación de la Universidad de Carabobo, tengo el honor de ascenderlo a la categoría de Profesor **ASOCIADO,** a partir del **19/03/2009.**

Asciende con el Trabajo Titulado:

"CONSIDERACIONES FILOSÓFICAS SOBRE LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA".
Una aproximación epistemológica.

El Jurado recomienda la publicación de su Trabajo de Ascenso

Atentamente,

Jessy Divo de Romero
Rectora

c.c.: Recursos Humanos
C.I.D. (anexo trabajo de Ascenso)
Dirección de Medios y Publicaciones

Elaborado por: Lisset, 18 de junio de 2009
Revisado por: / CM / TB / OS
01/06/2009 B.6.

Luz de una tierra inmortal....

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE FILOSOFÍA

CONSIDERACIONES FILOSÓFICAS SOBRE LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA
Una aproximación epistemológica.

TRABAJO DE INVESTIGACION PARA ASCENDER A LA CATEGORÍA DE PROFESOR ASOCIADO.

AUTOR: Dr. JOSÉ TADEO MORALES

CAMPUS BARBULA MARZO 2009

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE FILOSOFÍA

CONSIDERACIONES FILOSÓFICAS SOBRE LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA
Una aproximación epistemológica.

AUTOR: Dr. JOSÉ TADEO MORALES

Dentro del debate modernidad – posmodernidad, la búsqueda de sentido y fundamento de las ciencias es tema diario de la academia y, en especial, del quehacer filosófico. Por ello la epistemología, en sus distintas aserciones, ha tenido un gran auge y preponderancia. Autores connotados hablan de la ciencia sin método ni filosofía, en consecuencia hay el resurgir de racionalidades justificativas de nuevas epistemes, por ende, de nuevas perspectivas científicas y eso es praxis de la epistemología de cualquier ámbito científico. No obstante, hay una ciencia de la cual sus fundamentos no han sido aclarados del todo; por el contrario, permanecen como puntos oscuros o cabos sueltos, este es el caso de la Matemática; pues, hasta ahora ha permanecido como un ente rector de cualquier disciplina que intente adquirir el status de ciencia; sin embargo, la pregunta por sus fundamentos permanece en silencio. Estos cuestionamientos datan de tiempos antiguos, pero no resueltos, como se referencia en los pitagóricos y la Academia de Platón. Por otra parte, ya ha transcurrido un siglo de los debates entre Russell, Hilbert, Cantor, Poincaré y Gödel; en este sentido, cabría el preguntarse nuevamente por dichos fundamentos aunque en términos heideggerianos: *el que pregunta ya sabe la respuesta*. Sin embargo, a mediados de siglo un grupo de matemáticos bajo el seudónimo de Bourbaki hizo aportes significativos. No obstante, es posible que realmente no se tenga la respuesta o no se llega a la respuesta pero se hace necesario replantear las preguntas sobre el por qué de la matemática, su realidad, su objeto y su método. ¿Qué ha pasado tras un siglo de las controversias? ¿Vale la pena hacer nuevamente hoy la pregunta? Ciertamente el camino es la filosofía y tres vertientes, la epistemología, la fenomenología y la hermenéutica. Desde aquí se intentará realizar un excurso sobre la Matemática y sus fundamentos.

Palabras Clave: Modernidad, Posmodernidad, Epistemología, Filosofía, Fenomenología, Racionalismo, Matemática, Número, Continuo, Discreto.

Agradecimientos

Mi mayor agradecimiento y consideración a Jeannette compañera y amor eterno.

A mis dos hijos Sarynnette Auxiliadora y José Román, generalmente quienes soportan en silencio y con sacrificio el arduo trabajo de una investigación.

A los Profesores Miguel Ángel Castillo y Dr. Próspero González por las lecturas previas al documento y valiosas observaciones.

A los compañeros docentes del Departamento de Filosofía de la Facultad de Ciencias de la Educación

Mil gracias, José Tadeo

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Históricamente la Matemática ha jugado un papel preponderante dentro del pensamiento humano, prueba de ello es la permanente referencia hacia ella cuando de soluciones y problemas de ciencia se trata. Desde siempre ésta ha estado como juez principal del tema científico. Por otra parte, describir su devenir es realmente comprometedor. Al parecer la historia no es tan clara y notoria como desearían algunos, pues, se enmarca desde elementos tan nítidos de razones absolutas como es el caso de la aritmética donde brillan genialidades como Gauss y si se quiere, en sentido contrario, elementos de oscuridad como el caso de pensamientos mítico religiosos como la corriente pitagórica en la antigüedad y el movimiento de los llamados "Nicolás de Bourbaki" a mediados del siglo pasado.

En los albores del siglo XXI se vienen planteando debates entre filosofía, ciencia y, de una manera llamativa, sobre epistemología; además se ha incorporado al debate el llamado paradigma de la complejidad y las llamadas formas del pensamiento alternativo cuyo frente es el movimiento llamado posmodernidad habiéndose gestado, de esta manera, la necesidad de dar aclaratorias sobre sus fundamentos, ello no implica se solucionen las oscuridades. Por otra parte, la ola posmoderna ha generado dudas en cuanto a los planteamientos que la ciencia moderna consideraba como seguros. Un caso muy particular es el desarrollo vertiginoso que las ciencias sociales han demostrado cuando se deslastran de metodologías rígidas propias de las ciencias naturales y desarrollan un camino propio con las metodologías de investigación de carácter cualitativo y metódicas subjetivas.

En fin, hay todo un movimiento tendiente a configurar o reconfigurar los fundamentos de cualquier disciplina que intente obtener su status científico. Por ello toda la gama de discusiones desde la filosofía como ciencia madre y en especial su apartado, la epistemología. Por otra parte, hay gran necesidad de dar explicaciones en el buen sentido, sobre los fundamentos de todo aquello deseado por configurarse como ciencia, pero no en sentido de las ciencias naturales o ciencia fácticas, aquí el *factum* apunta a elementos de medición distintos, ello no desacredita a la ciencia en cuanto tal; por el contrario, se convierte en paso adelante. Es claro que no se trata de negar la ciencia positiva, no es una dialéctica de los contrarios, se plantea el trascender mediante una apertura paradigmática incorporando nuevos conocimientos para ampliar la llamada Ciencia y generar una episteme mayor.

El siglo pasado (XX), siglo de invenciones y grandes avances de las ciencias y, en especial, del conocimiento humano; generó un cierto desencanto en cuanto a la Matemática. Es muy válido el nuevo camino iniciado en el principio del mismo con la incorporación de disciplinas matemáticas como la geometría fractal, la lógica de los conjuntos borrosos, geometría diferencial y un sin fin de contenidos nuevos e ingeniosos incorporados al ámbito matemático hasta llegar a cúspides como la matemática computacional, donde los ordenadores van mucho más allá de los soñado por Julio Verne. Sin embargo, como lo plantea Morales (1997): "sus orígenes son tan *oscuros* que de ello sólo se guardan algunas teorías". Estas conjeturas no apuntan simplemente al pasado porque, de igual forma, a finales del siglo XIX y en los inicios del XX se establecieron diatribas con grandes pensadores matemáticos que intentaron darle fundamento: Hilbert y Cantor plantearon una corriente llamada el formalismo, por otra parte Whitehead y Russell desarrollaron el logicismo, finalmente Brouwer y Poincaré el intuicionismo, lo importante de este asunto es el punto central: cómo definir un conjunto, al final todo quedó en el aire cuando Gödel con el teorema de incompletitud demuestra la inconsistencia de los sistemas que fundamentan la aritmética como principio fundamental de la Matemática, la famosa diatriba sobre el inicio a partir del concepto de número.

Como consecuencia de lo anterior, el problema de los fundamentos de la Matemática permanece tan inconcluso y con tanta oscuridad como en los tiempos pitagóricos, no obstante: ¡las matemáticas son las matemáticas¡ sería una blasfemia intentar cuestionarlas por cuanto hay todo un peso institucional y tradicional[1]. Al parecer es más útil asirse de las disciplinas matemáticas como herramientas e instrumentos operacionales sin preguntarse por su realidad en tanto realidad e intentar por lo menos hacer las preguntas, desarrolladas por Morales (1997):

> El desarrollo histórico de la Matemática ha estado signado por un enfoque de "ciencia instrumental", es decir, se asocia a la matemática con otras ciencias pero, tomando en consideración sólo su carácter de resolución de problemas y como punto de apoyo a las demás ciencias como la biología, química, física y otras a las que le elabora modelos o fórmulas (p. 3).

Por otra parte, aun cuando la investigación sea sobre elementos matemáticos el camino no puede ser otro que la *filosofía hermenéutica*; pues, es un intento por comprender la realidad de la Matemática, de esta forma al referirse a un objeto matemático en cuanto tal siempre brotan posturas distintas y comprometedoras, en este sentido la filosofía es el medio para problematizar y desde aquí desarrollar una mayéutica, no en sentido de Sócrates sino como lo establece el filósofo francés Gabriel Marcel de una *reflexión segunda o recuperadora*. Por tanto, se intentará, en la medida de lo posible, no recurrir a un uso de tópicos de cálculo, álgebra o análisis avanzados que pudieran comprometer al lector no diestro en Matemática. Sin embargo, la lista de filósofos-matemáticos y matemáticos-filósofos es de vieja data, Pitágoras en adelante, Kant, Husserl y Russell y otros muy connotados dedicados al esfuerzo por comprender las realidades matemáticas y ahora nosotros nos adentramos a esta maravillosa aventura de indagar por los fundamentos de la Matemática.

[1] Sin embargo, una de las intencionalidades de esta investigación es generar conjeturas filosóficas permitiendo dilucidar algunos de los aspectos que hasta ahora permanecen en una especie de letargo intelectual, es evidente el sentido didáctico- pedagógico por cuanto la investigación quiere ser aporte para los estudiantes de pregrado y postgrado de la carrera de Licenciatura en Educación Matemática.

EL PROBLEMA

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La Matemática ha estado siempre "a la mano"[2] de la razón y el pensar humano; desde los antiguos sumerios, babilonios, mesopotámicos, egipcios y griegos (entre otros), ella ha sido parte fundamental en la formación de la cultura occidental, pero no es descartable que, de igual forma, tenga influencia en las culturas del lejano oriente. Es decir, la Matemática se ha venido haciendo presente como parte de la cultura universal y del ser humano.

Es muy importante estudiar cómo desde los primeros filósofos occidentales la pregunta por los elementos y las realidades matemáticas afloran enseguida. La referencia primaria se tiene de Protágoras, conocido como uno de los siete sabios de la antigua Grecia y además por la llamada corriente pitagórica, la cual designa al número como el principio de todas las cosas (αρχέ). Esta postura influencia a Platón de manera muy connotada, cabe recordar la frase famosa del fundador de la Academia: "*quien no sepa geometría, absténgase de ingresar*", ello se confirma al ver la propuesta de este autor en torno a las ciencias, apuntando al conocimiento en cuanto conocimiento científico *(έπιστέμε - episteme)* y noble dado en la inteligencia pura (νόησις - noesis) de las formas perfectas. Si se sigue el esquema de Platón para la ubicación de la ciencia, el camino intermedio es el de la "*razón discursiva* (διάνοια)":

> Propio de las matemáticas, que son inteligibles y, para acceder a ellos, el alma se sirve de los objetos del mundo visible para llegar a ellos a manera de conclusión (Goñi, 2002, p. 36).

Desde aquí se puede intuir que lo más cercano al conocimiento de las esencias en cuanto tal (noesis) es la Matemática, por ello el carácter tan especial brindado por

[2] Estar "a la mano" en sentido de Heidegger, ver Ser y Tiempo.

los griegos. No obstante, cuando se pensaba darle todo el fundamento como conocimiento superior y noético, la Matemática cae en la primera gran crisis, el advenimiento de los números irracionales, como lo manifiestan los historiadores e incluso Piaget, al establecer: al comprender los griegos que √2 (raíz cuadrada de 2) no era un número racional hicieron una celebración de tres meses y mataron cien vacas. El asunto no se trata de una simple anécdota como anécdota, la profundidad del tema está en asumir, con mucho respeto, el "culto" a las realidades y verdades de la Matemática.

Pensar en el mundo griego, es advertir la lucha de la racionalidad contra la irracionalidad, el problema de la razón y del cosmos (orden) frente al mito y caos, donde el gran Dios Zeus impone el orden cuando los titanes intentaron generar desorden en la tierra y, por otro, cuando Prometeo roba el fuego de la sabiduría a los dioses y lo entrega a los hombres generando un paso importante como es el salto del *mito al logos*, de la racionalidad como vía expedita para aclarar las cosas y darle fundamento, dando origen a la filosofía y a las respuestas del por qué de las cosas mediante la razón.

Por otra parte, junto con la razón aparece el pensamiento Matemático, no solamente la geometría ya que la aritmética se manifiesta como posibilidad de lo discreto ambas van en conjunto como lo uno y lo otro. Con los pitagóricos ese mundo se fortalece; sin embargo, cuando la razón comienza su primacía la realidad del pensamiento matemático se ve envuelto en una situación crítica; la aparición de la problemática de la diagonal en los triángulos rectángulos, la mensurabilidad racional se escapa, el teorema desarrollado por los pitagóricos $c^2 = a^2+b^2$ al plantearse el desdoble para calcular la longitud de la diagonal c, generaba una controversia tal, por cuanto hay una constante en su fundamentación que escapa a la proporcionalidad de un número racional definido como conjunto por $Q = \{ x/x = a/b;\ a \varepsilon Z,\ b \varepsilon Z\ \wedge b \neq 0 \}$ y éste no respondía a una constante √2 (raíz cuadrada de 2) pues no es ser originario de un racional, en ese sentido rompe con la ratio. Pero ésta no era solamente la problemática, hay otras como el caso del número necesario para calcular la longitud de la circunferencia el número π (*pi*) de valor 3,1416… y que en la actualidad se han conseguido una cantidad de 900 (novecientos) decimales. De esta forma, la Matemática vive su primera crisis a partir de comprobar que los números irracionales no son originados por un racional (a/b), por el contrario: pareciera que fuesen discontinuidades[3]. Lo interesante del asunto anterior es que hasta la actualidad el problema no ha sido resuelto, por el contrario permanece, aunque en particular no se desee puntualizarlo porque la pragmática y la utilidad funcional en los distintos cálculos y avances permiten no verse encerrado en un círculo vicioso intelectual de la búsqueda de fundamento y encuentro de paradojas, su utilidad es prioritaria.

Siguiendo con la historia, a finales del Siglo XIX y principios del XX se suscitó una nueva problemática sobre la fundamentación de la Matemática, incluso Richard Dedekin planteó respuestas en función de querer encontrar un soporte epistemológico para los irracionales, lo esbozó en forma de cortadura, como haciendo un paréntesis entre racionales para ubicar en medio a los irracionales, esto no fue sino otra conjetura interesante, pero no resuelve la búsqueda de una base sólida donde se pueda fundamentar la Matemática. En este sentido, quedó nuevamente abierta la problemática. Sin embargo, paralelamente se suscitaron otras investigaciones contemporáneas como las de Cantor, Hilbert y otros que llegaron a plantear diversas posturas justificativas de fundamentos de la Matemática. El asunto los llevó a uno sólo, cómo justificar el "conjunto". La teoría intentó dar concreción a todo pensamiento y llevarlo a un punto de encuentro, si se establecía con claridad una piedra angular, que ahora no podía ser la aritmética ni los números en cuanto tal, por ser "entes de razón" y teoría metafísica especulativa, recuérdese que se está en pleno positivismo comtiano, lo mejor era que atendiendo a una teoría del conocimiento centrada en la verdad como adecuación entre lo pensado y la realidad, en este caso

---

[3] Es evidente que $Q \cap I = \emptyset$

sobre el lenguaje y la proposición. De esta forma, si hay una definición clara y distinta en sentido cartesiano o si la hay con toda la precisión y estructuración semántica se podría dar fundamento al significado de conjunto y elemento como fuente de fundamentación de la Matemática. Esa fue la tarea conducida por los llamados logicistas junto a todos aquellos centrados en el giro lingüístico y la filosofía analítica. Esto no deja de lado el camino proseguido por la Matemática como la aparición de nuevas corrientes y formas de conjunto, independientemente de los fundamentos no encontrados y no resueltos como los números *Subrreales* de Martín Kruskal, los *P-Ádicos* de Kurt Hensel y algún otro ente en estudio.

Sin embargo, habiendo pasado un siglo de controversias donde se ha dejado abierto el problema de una epistemología de la Matemática y, aunque el problema no ha sido resuelto y posiblemente no lo será; incluso, autores como De Lorenzo (2005) replantean el problema de los fundamentos de la Matemática en términos de un *Logicismo renovado,* de un *estructuralismo, modalismo, nominalismo y constructivismo*. Es decir, no queda otra situación que un planteamiento filosófico; en este sentido, perduran las discusiones y las tres corrientes filosóficas de la misma dadas a principio del Siglo XX girando en torno a la teoría de conjunto: el formalismo representado por Hilbert, el logicismo cuyo mayor exponente es Russell y el intuicionismo de Brouwer y Poincaré.

De lo anterior cabría preguntarse qué ha pasado con los fundamentos de la Matemática, porque la pragmática continúa. Nadie niega su aplicación al mundo informático y tecnológico, no obstante dónde queda la pregunta sobre sus fundamentos.

El segundo aspecto tiene que ver con el movimiento epocal de la posmodernidad en todos sus sentidos, la posmodernidad como crítica a la modernidad ha dejado profunda huella en cuanto a los fundamentos de la ciencias debido al desarrollo de nuevas racionalidades y nuevas expectativas como los aparentes decretos de: fin de la historia, fin de la ciencia y la muerte del sujeto. Por su parte, la ciencia como tal no la ha estado pasando de lo mejor, el emerger de nuevas racionalidades, metodologías de la investigación y metódicas sujetivas que adquieren autoridad para generar conocimiento científico desde ópticas no previstas y fuera (aparentemente) del positivismo, genera grandes discusiones como lo plantea Martínez (2000) en referencia a Schrödinger: "*la actitud científica ha de ser reconstruida, que la ciencia ha de rehacerse de nuevo"* (p. 15). Es decir, se han ampliado las racionalidades que rigen los rieles del pensamiento científico, la controversia llega hasta el centro del asunto, su jueza rectora: la Matemática.

En consecuencia, si la Matemática fue el centro de razón para determinar qué es ciencia, luego de un siglo cabría preguntarse: ¿cuáles son los fundamentos de la Matemática? ¿Cómo superar los planteamientos de inconsistencia propuestos por Gödel?

Como ya se dijo anteriormente, el problema tratado fue el de la teoría de conjunto desde una perspectiva del lenguaje desarrollado por el giro lingüístico de la filosofía, aquí se dio el planteamiento desde la teoría del conocimiento, así lo presentaron grandes autores positivistas y logico-matemáticos como Wittgenstein; no obstante, qué pasó con el planteamiento ontológico desarrollado por Heidegger y seguidores. Cuando desde Leibniz, Kant, Hegel hay una postura ontológica sobre la Matemática y de realidades de "razón" vuelve la pregunta: ¿esos planteamientos han sido olvidados?

Por último, en la búsqueda de querer encontrar justificaciones, argumentos y, en algunos casos, fundamentos de las ciencias: ¿dónde acudir para sustentar la Matemática?, se debe tener presente que esas son las conjeturas y requieren de respuestas, es decir: ¿cómo responder a los problemas axiológicos de la Matemática?

frente a una doble postura filosófica, la del giro lingüistico y por otra parte a los planteamientos ontológicos del ser: ¿Cómo responder a los fundamentos de la Matemática?, ¿Después de un siglo cuánto se ha avanzado al respecto y cuáles son la posibles alternativas?

De esta forma se hace necesario desarrollar una investigación que permita indagar y generar un posible estatus epistemológico de la Matemática en las consideraciones actuales.

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Desarrollar una aproximación a la realidad Matemática desde la filosofía hermenéutica que permita conformar patrones de discusión en torno a la problemática de la Epistemología de la Matemática.

OBJETIVOS ESPCÍFICOS

Elaborar un arqueo crítico sobre algunas de las distintas crisis sufridas por la Matemática.

Analizar las tres corrientes filosóficas de la Matemática: formalismo, logicismo e intuicionismo para establecer las teorías que la fundamentan.

Exponer conjeturas ontológicas de la Matemática más allá de la filosofía analítica.

Desplegar una aproximación hermenéutica a los principios epistemológicos que fundamentan la Matemática como ciencia.

JUSTIFICACIÓN

Mucho se ha venido comentando sobre los elementos emergentes en la configuración para nuevas realidades científicas, no puede decirse que el positivismo ha pasado de moda. Tampoco el aflorar de nuevas racionalidades que permitan una aproximación al conocimiento científico desde otras perspectivas implican un deslastre de toda ciencia anterior, por ello lo importante es querer dar un soporte epistemológico como marco referencia a toda la realidad ciencia, en especial a la Matemática.

La Matemática, como toda ciencia, se ha desarrollado en su propio devenir; unas veces impuesto por otras disciplinas como la filosofía y otras originadas desde su *ipseidad*. De esta forma, valdría la pena se estudien algunas de las diferentes perspectivas históricas para plantear, de igual modo, diferentes respuestas. En fin de cuentas, si algo llama sustancialmente la atención sobre el qué de los fundamentos de la Matemática es pensar que desde hace más de un siglo han surgido conjeturas, las cuales pudieron, en alguna manera, debilitar y cuestionar sus fundamentos en la actualidad estos problemas siguen abiertos aunque intenten ignorarlos. Por tanto, una investigación sobre los fundamentos de la Matemática es plenamente justificable, incluso se hace necesaria como aporte significativo a los estudiantes de esta ciencia, sea a nivel de pregrado y en especial a los de postgrado.

Por otra parte, la problemática de mayor conjetura ha estado girando en torno a la teoría de conjuntos, el problema de lo continuo, lo discreto y en especial del infinito. Si se asume que la mayoría de los problemas se han desarrollado sobre el estudio de sus fundamentos a partir del giro lingüístico y la filosofía analítica donde el centro estriba entre la semántica y el significado de las proposiciones, cabe el preguntar sobre si hubo o hay algún camino de estudio distinto. En concreto, frente a esta perspectiva el centro del asunto fue el lenguaje en cuanto a su formalidad y la relación sujeto – objeto desde el punto de vista del conocimiento; sin embargo, el problema ontológico de la Matemática en cuanto que Matemática, al parecer requeriría el mismo estudio ontológico y la adecuada profundidad. Ello, aparentemente, no ha realizado o no ha tenido una publicidad tal; de modo que una aproximación a esta problemática sería un elemento a tomar en cuenta para la presente investigación y de ello se trata, dar una revisión a los elementos ontológicos de la Matemática posiblemente no considerados por algunos autores y aún siguen presentes dentro del marco de una ontología.

Otro elemento de considerar está inmerso en cuanto a quien desarrolla la investigación, no se trata de una hacer filosofía en cuanto tal, pues hay un justificativo pedagógico didáctico, y en este sentido el estudio puede dar un aporte significativo para los estudiantes y profesores del área de la Matemáticas, como lo plantea Orellana referido por González (1995), al referir que la mayoría de los matemáticos prefieren describir los objetos de los cuales se ocupa su ciencia antes que preguntarse por los fundamentos. Del mismo modo como lo afirma Morales (2008):

> En el caso del docente de cualquier asignatura no hay cuestionamiento sobre el qué es el conocimiento, su asunto es principalmente la búsqueda de un método de cómo llevarlo y hacer su enfoque en lo didáctico para plantear el contenido de un conocimiento en particular, sea cualquier asignatura, dando por entendido simplemente que es un conocimiento y punto, el asunto radica fundamentalmente en la pregunta por el qué es, no el contenido como contenido sino fundamentalmente dónde lo pudo fundamentar. Hay sospechas en ver la posibilidad de los docentes enseñando sin asumir los compromisos de las didácticas profesadas, según su especificidad y contenidos de conocimientos. Es algo muy personal del investigador en cuanto a distinción de la didáctica, no todo contenido se puede enseñar de la misma manera, ni con la misma metodología, las estrategias varían según el grupo y el contenido (p. 12).

En este sentido es recomendable se planteen los fundamentos de la ciencia que se explica, en este caso particular la Matemática. La importancia radica en la toma de conciencia, es donde se pudiera dar por parte del estudiantado y profesorado de pre y postgrado en las carreras de Licenciatura en Educación Mención Matemática y la Maestría en Educación Matemática un asunción de cierta postura epistemológica por ser un texto adecuado para el estudio de la epistemología de la Matemática.

Por otra parte quedaría la investigación como un aporte de novedad sobre una temática que se ha dejado de lado, a veces involuntariamente y otras no, como es el análisis e indagatoria de los fundamentos de la Matemática y la generación del conocimiento matemático intentando superar toda pragmática funcionalista sobre el empleo de la misma.

BASES DE LA INVESTIGACIÓN

Las bases en las cuales se sustenta la investigación están referidas dentro de un marco totalmente con características teóricas pues, lo deseado es establecer conjeturas y hacer consideraciones de tipo filosófico que permitan desarrollar descripciones de los fundamentos de la Matemática.

De esta manera, la primera base es la "Filosofía"[4], entendida desde su definición más antigua: "El amor a la sabiduría". Es decir, como ciencia del conjeturar sobre los principios de las cosas y de las realidades; asumiendo su rigurosidad, profundidad de pensamiento y no como simple discurso. El punto de análisis es la filosofía occidental bajo ciertos parámetros Aristotélico-Tomistas que han generado, de alguna manera, elementos como la lógica influyendo, clara y abiertamente, en el pensamiento occidental y la racionalidad moderna sin poder deslastrarse de las concreciones de estos planteamientos esbozados en las ciencias por

[4] Entiéndase al mismo tiempo como base filosófica, es decir el empleo de la Filosofía en cuanto tal como base filosófica de la investigación.

Isaac Newton, Leibniz y otros de los cuales sólo se desarrollarán aspectos de teoría.

Frente a la conjetura antes mencionada es importante se asuma la posición de Hessen (1977) frente a la filosofía:

> La actitud del filósofo ante la totalidad de los objetos es una actitud intelectual, una actitud de pensamiento. El filósofo trata de conocer, de saber... Toda filosofía se plantea según esto: la orientación hacia la totalidad de los objetos; segunda el carácter racional, cognoscitivo, de esta orientación (p. 13).

La reflexión anterior plantea rápidamente el cómo es posible asumir este proyecto en desarrollo, sin embargo, existe el permanente riesgo de no aceptar la filosofía como ciencia en el sentido positivístico (del factum, de lo experimentable) pero es fundamental se acepte como ciencia de la totalidad genérica del conocimiento (del espíritu). Además, se hace necesario sea admitido entonces el carácter científico de la filosofía, pero como ciencia de otro "orden"; en sentido de Popper: "conjetura", lo que genera determinadas controversias frente a las ciencias fácticas aun cuando, de por medio estén ciertos parámetros de formalidad científica. Cabe recordar el aspecto fundamental de la filosofía: *problematizar la realidad*, en este caso particular problematizar la realidad Matemática, ver por su entidad en cuanto Matemática.

No obstante, es bueno aclarar que cuando se plantea la filosofía como base "fundamental", es fácil enmarcar basamentos de tipo teórico como particularmente lo exponen autores de relevancia, en especial García Bacca (1985), para quien la ciencia es vista como un soporte teórico y va más allá del hecho empírico.

> Ciencia es, para nosotros un ideal; el ideal de conocimiento teórico, técnico, ontológico, fenomenológico, objetivo y sistemático.
> Por lo tanto a todo campo de conocimiento y acción le ha entrado la obsesión de ponerse en regla con la ciencia... ante la corte suprema científica presidida desde hace siglos por las Matemáticas, ahora acompañada de la física y la lógica. A la filosofía actual también le ha entrado tal "complejo" y se habla de filosofía cual ciencia por excelencia, frente a las demás ciencias que, desgraciadas, no saben, aun siendo ciencia, ni lo que son, ni lo que deben ser (p. 9 - 10).

Es importante entonces determinar que la idea no es establecer una coyuntura de disquisiciones sobre el mundo de las ciencias y los alcances de la filosofía como ciencia, pues según el autor referido: *"Así que el ideal moderno de ciencia excluye por igual el conocimiento abstracto y empírico; incluye el teórico-técnico... exige el conocimiento teórico-técnico ontológico"* (p. 12). En este sentido, la investigación apunta hacia esta diana de ver los aspectos ontológicos los cuales se vienen manifestando en el conocimiento matemático; es decir: indagar sobre las evidencias encontradas ante la realidad matemática. Por otra parte, ya el hecho de decir matemática trae consigo una manifestación de algo, algunos lo refieren a funciones, otros a conjuntos, quienes a elementos de geometría o a números pero, dar manifiesto a cualquier temática matemática es ya “algo”, hay manifiesto.

Sin embargo, García Bacca (1985) al referirse sobre la definición de filosofía incide en el no haber ninguna definición y establece:

> La filosofía actual no tiene definición, tiene una tarea impuesta: trabajar en ciencia, técnica y economía política...
> Si la filosofía no se encarna en nuestras ciencias por virtud de las técnicas, si no corre la aventura de nuestras ciencias y técnicas, si no se levanta a empresa de transformar el mundo natural, la filosofía tendrá o conservará la definición: conocimiento universal y necesario de las causas y principios supremos de todas las cosas". O la de "interpretación del sentido del mundo, o de la concepción del universo y del hombre" (p. 48).

No obstante, se trata de sustentar la investigación en principios que no pueden ser precisados desde la óptica “positiva” de las ciencias, en particular, de las apodadas "naturales" desarrolladas bajo el pensamiento de Augusto Comte y seguidores como Bunge (1981):

> La ciencia como actividad - como investigación - pertenece a la vida social; en cuanto se aplica al mejoramiento de nuestro medio natural y artificial, a la invención y manufacturas de bienes materiales y culturales, la ciencia se convierte en tecnología... (p. 9).

En fin de cuentas, el esfuerzo es asumir una postura basada en la filosofía como fuente para establecer una actitud disciplinar frente a una ciencia erigida como jueza primaria de las demás pero con la situación crítica de tener como fundamentos conjeturas y donde por ser formal se perciben fenómenos, ¡sólo se percibe eso "el fenómeno"! el noúmeno sigue siendo en términos de Kant inaccesible por la vía de la razón, posiblemente sólo por la comprensión, ello hace pensar la problemática de la Matemática como ciencia sin método ni filosofía antes establecido en el planteamiento del problema. Sin embargo, la Matemática no deja de ser ciencia y generadora de conocimiento.

Muy a pesar de lo anterior, todavía es posible dar una visión más aproximada como lo plantea Morles (1991) en cita de Kourganoff:

> Se ha dicho que ciencia es una noción confusa, pero hay consenso en que ella implica un proceso intencional y sistemático de producción de saber o conocimiento verdadero, el cual se expresa mediante conceptos, clasificaciones, descripciones, hipótesis, leyes y teorías o modelos de la realidad (p. 100).

Lo planteado por la referencia, no da espacio a la duda en torno a la filosofía. Según la presentación de Morles en cita a Kourganoff entra el parámetro de "conjetura" cuando se habla de saber. La filosofía es un proceso intencionado en búsqueda de la producción de una episteme y de un conocimiento. Además, si se siguen los patrones de las ciencias modernas como se refirió anteriormente hay todo una teoría y una descripción de los modelos de la realidad generadores, al fin de cuentas, de otro conocimiento.

La segunda base es la Hermenéutica, como el justo arte y ciencia de la interpretación, pues la sospecha es intentar interpretar las conjeturas dándole el sentido deseado, basado en los parámetros de la relatividad "restringida", donde de lo que se ha de conjeturar es sobre el famoso "Principio del Tercer Excluido" dejando de lado el famoso adagio de la modernidad: *"de lo que no se puede hablar, mejor es callarse"* (Wittgenstein, versión castellana de Enrique Tierno Galván, 1975), la

Hermenéutica permitirá hacer estas conjeturas. En este sentido puede ser acotado la posición de Hessen (1977) en cuanto a la filosofía pero enmarcada plenamente con la pretensión de la Hermenéutica:

> La Teoría del conocimiento es, como su nombre lo indica, una teoría, esto es, una explicación e interpretación filosófica principal del conocimiento humano (p. 25).

Desde esta perspectiva se pretende con la consideración de la Teoría del Conocimiento plantear una comprensión de las realidades de la Matemática y es por ello la referencia más acertada en cuanto tal: "Teoría del pensamiento correcto" (p. 21) en el sentido hermenéutico del *justo arte de la interpretación*. Si algo tiene muy claro el análisis hermenéutico y especialmente la tradición alemana, es la búsqueda de sentido al cual apunta todo su discurso hermenéutico, esto lo diferencia de la especulación sin sentido por lo cual algunos, de manera ligera, acusan a los filósofos. Sin embargo, no se pretende analizar las pistas de los posibles conocimientos; se trata de establecer una epistemología en el sentido del estudio de la ciencia; es decir, elaborar una especie de "cartografía" de los fundamentos donde se sustentan las realidades de la Matemática y su conocimiento. El asunto apunta a los conocimientos esparcidos por todo el ambiente científico y ahora son conjugados en teorías. Pero, al parecer, no encuentran motivos de encuentro con la racionalidad imperante permaneciendo oscuros. Del mismo modo, no se ha presentado alguna interpretación deseosa de mostrar la conjunción aparentemente existente entre el elemento fenoménico manifiesto y lo ontológico aparentemente subyacente al asunto. De tal manera que, la aproximación que tienen no puede ser otra que mediante el conocimiento como aproximación a la realidad en su totalidad.

DESCRIPCIÓN METODOLÓGICA

En adecuación al tema por desarrollar, teniendo presente el itinerario del camino deseado por el investigador, la investigación tendrá un carácter *Documental-Bibliográfico.* De esta forma es posible pueda lograrse una “adecuada” aproximación a una posible epistemología de la Matemática.

Es muy evidente y claro, el camino por donde transitará la investigación estará a cargo de la filosofía en primera instancia, desarrollando el arte de la hermenéutica como “justa interpretación” y tomando en consideración los planteamientos desarrollado por Gadamer (1999):

> No existe un método hermenéutico. Todos los métodos descubiertos por la ciencia pueden dar frutos hermenéuticos, si se le aplican correctamente…
> La hermenéutica no significa tanto un procedimiento cuanto la actitud del ser humano que quiere entender a otro como oyente o lector que quiere entender una manifestación verbal (p. 149).

Es consecuencia la filosofía hermenéutica irá hilvanando y entretejiendo un constructo teórico intentado comprender los fundamentos de la Matemática, ello se hará aunado al carácter fenomenológico de los entes y realidades de la Matemática en sí, por cuanto: al ser en sí ciencia formal, posee elementos “incuestionables” como axiomas, inclusive tiene un gran carga idealista inseparable en todo su devenir histórico y aún se mantiene en la Matemática actual, por ejemplo, cuando se manifiesta lo siguiente: *dada una función,* decía Bernays (1982) ya aquí hay cierta idealidad, se sospecha la existencia, en este sentido esa manifestación o epifanía trae consigo una *aletheia*, de esta forma la mejor aproximación es la fenomenología.

Por otra parte, el camino confluye en lo epistemológico, y en eso consiste el análisis de los fundamentos de la Matemática, plantearse cuáles son los soportes y bases del edificio llamado Matemática, este será el punto neurálgico y central, desarrollar conjeturas sobre los cimientos que sostienen el edifico de la Matemática.

Por otra parte, es bueno aclarar el sentido general de la filosofía, pues la epistemología es una rama planteada desde la filosofía de la ciencia, algunos autores pretenden darle interés a la epistemología como autoridad y autonomía, no obstante su origen es de reciente data, fruto del pensamiento moderno, cuando la ciencias intentaron una autonomía; sin embargo, la filosofía seguirá siendo la madre de todas las ciencias, y si se desea profundizar toda epistemología generalmente se llega a los conceptos primigenios del pensamiento y por tanto a la ontología, es decir a la pregunta por el ser, en este caso a la pregunta por el ser de los "objetos" matemáticos.

De esta forma, para cumplimiento con el desarrollo descrito, la investigación se efectuará en dos momentos, el primero una selección de textos y bibliografía elaborando una cartografía, el segundo momento será la elaboración de un texto con todas las conjeturas de la epifanía hermenéutica provenientes de la crítica a los fundamentos de la Matemática.

FILOSOFÍA, CIENCIA Y EPISTEMOLOGÍA

Iniciar un estudio sobre los fundamentos de la Matemática necesita, en primera instancia, una revisión de los elementos trascendentales que giran en torno a su alrededor. Por las características tan especiales de dicha disciplina, en cuanto tal, hay tres soportes que requieren de un estudio preliminar para, desde allí, iniciar el análisis del significado de los fundamentos en como bases primigenias generadoras de esta disciplina tan connotada, por tal motivo se comienza el estudio de los principios de la Matemática con un arqueo de los significados característicos de la Filosofía, la Ciencia y la Epistemología. Cabe notar que, el estudio disciplinar se hace en dicho orden y como si fuesen separadas simplemente desde una praxis didáctica, pues es imposible, para el investigador, separar su quehacer de su ser aunque se encuentren diferencias metodológicas. En ese sentido se apertura el estudio desde la *Madre de Todas las Ciencias*…. la Filosofía.

En la actualidad muchos anuncios han realizado distintos movimientos intelectuales paradigmáticos, tales como: *el fin de la ciencia y la muerte del sujeto* proclamados por algunos de los llamados posmodernos entre los que resalta Francis Fukuyama. Sin embargo, ya a finales del Siglo XIX Nietzsche anunciaba de manera irreverente y desafiante: "*Dios ha muerto, larga vida al hombre".* Ahora, en los albores del XXI Vattimo (2000) califica la sentencia dictada desde una perspectiva interesante: "*Dios ha muerto, pero el hombre no la ha pasado demasiado bien"* (p. 33). Analizar dicho planteamiento es comprometedor porque la humanidad ha seguido creyendo en lo trascendental y hasta la misma ciencia se ha convertido en algunos casos en religión; por tanto, no se trata de si Dios ha muerto o no. En este sentido un dictamen o decreto no genera, de por sí, un cambio en el ser y pensar del humano. El decreto de la muerte como fin y punto final, no necesariamente plasma un apagar la luz y bajar la "santamaría"[5] de la razón. Aun cuando autores como Fernández y otros (2000) planteando una ciencia sin método ni filosofía establecen temáticas que inician de la manera siguiente:

> El propósito de este ensayo es producir una contribución para abordar la problemática de la ciencia y resucitar ciertas coordenadas en función de reflexionar sobre la cuestión de verdad, lejos de la filosofía y del cientificismo… (p. 91).

Al parecer, se está viviendo un momento en el cual no solamente está en crisis el humanismo y el quehacer científico, la crisis más fuerte pareciera la de la *razón* y, por ende, no se encuentran argumentos que justifiquen o avalen los fundamentos de las racionalidades emergentes. En ese sentido, Nietzsche acierta con su propuesta de una transmutación de valores[6] pues, de manera desafiante, propone una perspectiva distinta acusando a los viejos valores de no haber hecho sino encadenar al hombre. Para él, la moral cristiana ha sido una forma de subyugar al hombre. Lo interesante es el tiempo transcurrido desde Nietzsche (1844 – 1900) y la toma de conciencia sobre esta temática de la racionalidad y la razón en la actualidad, es decir: pareciera dársele el *status* ameritado por el autor un siglo después; aunque en un tiempo por los años setenta se hablaba, de manera "*jocosa"*, de los *profetas del desastre*. Sin embargo la profecía se ha estado cumpliendo, en términos de Mires (1996): se ha infiltrado y es ahora cuando se ha advertido su infiltración.

Otra variable importante es la asunción silenciosa del nihilismo como la actitud de moverse a un punto X, ello genera una pregunta muy relevante y de actualidad: *¿Hacia dónde se puede dirigir la búsqueda de la razón?* En primera instancia, al parecer, haría falta llegar a mutuos acuerdos, y esto lo manifiestan pensadores relevantes como Jürgen Habermas y Adela Cortina en sus planteamientos

---

[5] Dícese de puerta de movimiento vertical, a manera de persiana metálica que se enrolla con un movimiento ascendente y se desenrolla para cerrar con un movimiento descendente, asegurando el espacio.

[6] Cfr. Verneaux Roger (1966). *Historia de la Filosofía Contemporánea*. Editorial Herder. Barcelona. España.

de la Acción Comunicativa y los mínimos acuerdos para la construcción de una Ética. Es decir, esgrimir un hacia dónde; pero, sin saber cuál es este hacia dónde es algo muy serio por no haber una teleología, esto es abrir un campo a la expectativa de un hacer por hacer o un salir a caminar sin rumbo. En este punto, una solución sería la vuelta a la hermenéutica como *búsqueda de sentido.* Pudiera también pensarse en términos modernos con el famoso *sentido común*, el cual, al parecer, se ha esfumado o ha caído en el olvido como diría Heidegger. Es así como, instrumentos de ubicación y referencia que apuntan a un "norte" y orientan el camino, como la brújula y otros más, han estado fallando por cuanto las mediciones que antes eran claras y seguras, ahora se han llenado de oscuridad; desde entonces se anda a la deriva en un océano dominado por Poseidón y otros dioses, alejando y confundiendo cada vez más a la humanidad, alejándola del reino de Ítaca, sintiéndose cual Ulises (Odiseo), viviendo en un maravilloso mundo de aventuras pero con el anhelo de regresar a casa al encuentro con Penélope y Telémaco, vuelta al hogar, al calor de la familia.

Boff (2002), en otro sentido, habla del coraje interno y el sentido de trascendencia como elemento constitutivo del ser humano para asumir las prohibiciones e ir más allá, el placer de hacer lo prohibido. En este caso particular, lo prohibido pareciera la vuelta a la razón, trasgredir el sentido de lo irracional y sin sentido, aparentemente reinante, y volver significativamente a la "cordura". En consecuencia, cuando el autor mencionado desarrolla antropológicamente el paso realizado por Lucy, *astrolopitecus piticino*, quien era un ejemplar femenino y al dejar las comodidades de su tierra: la selva, adentrándose en la sabana y el árido desierto pareciera dar un salto al vacío. Lo importante aquí, es la aventura de trascender porque la consecuencia de ello no fue lo vivido y experimentado por Ulises, la consecuencia dura de ese andar de Lucy, es salir para quedar y morir en esas situaciones críticas teniendo como consecuencia *la evolución* del ser humano, de primate al *humanus*. Nuevamente surge la expectativa del hacia dónde sin teleología, no obstante pareciera una esperanza de un horizonte siempre abierto hacia el cual se dirige el ser humano y tiene la necesidad de salir impulsado por la propia realidad de ser en apertura permanente a la trascendencia.

Volviendo a las disquisiciones de Lucy y Ulises algunos querrán interpretar de manera contradictoria ambas aventuras teniendo todo el derecho; sin embargo, tanto el camino a Ítaca en el sentido de estar de vuelta y el salto a la sabana como coraje, son momentos fundamentales del pensar humano, aunque parezcan contradictorios. La aventura siempre marca la expectativa del hacia dónde planteado desde Lucy, sin menospreciar el desafío de Ulises, aparentemente se asume un viaje a lo desconocido, sin seguridad de retorno, no hay vuelta y la consecuencia del viaje lo marca el sentido de trascendencia. Esa es una de las actitudes y acciones típicamente del humano, es decir: al establecer una prohibición, siempre le llamará la atención de mirar más allá y sentirá en su interior el placer de trasgredir el límite. Sin embargo, esta posición no desmejora la otra perspectiva del sentido de aventura, casi obligada, como consecuencia de un desafío por el que pasa Ulises por cuanto su viaje no deja de ser peligroso. Lo importante es: ¡ver el camino!, hay algo que permite interpretar el viaje, motivos justificativos no faltan, es importante buscar explicaciones y tratar de comprender. Pues, tarde o temprano, el caminar por la estepa y la sabana, o el navegar por la inmensidad del mar: ¡algo le dejan a la humanidad! En la actualidad es posible aventurarse a plantear que, se está en camino, aparentemente no se sabe si es de ida o de vuelta, lo que importa es comprender el viaje. En alguna manera, cartesianamente se sabe del viaje en ejecución, pero no del camino: ¿sabana o mar? No se trata de reflexionar si es Lucy quien camina o Ulises quien navega. Sin embargo, la certeza es la vivencia del viaje, sentirse en movimiento y mantener una actitud de trascendencia es la clave del asunto.

Sin querer ser categórico ni dogmático, cabría la posibilidad de plantear un retorno y un llegue, porque el que retorna vuelve a un punto de origen, el que camina llega a algún punto y no se sabe si es X. Metafóricamente se ha estado hablando de algo que fue la fortaleza de la modernidad y el cuestionamiento de la posmodernidad, el problema de la razón humana. Si el sujeto de viaje es el pensamiento humano y la razón, puede hablarse de encontrar un locus común para la llegada, hay un punto de encuentro el cual pudiera ser de inflexión o un punto límite. Ciertamente, en el sentido del camino transitado por Lucy (el pensamiento humano) el llegue tiene un nombre: la Filosofía. De igual forma, en el retorno de Ulises (del pensamiento humano) es también a la Filosofía. Es decir, la ida es a la filosofía y la vuelta también. El devenir del pensamiento humano fue del mito al logos hasta la modernidad y en la posmodernidad se abrió la posibilidad del logos al mito, como lo plantea acertadamente Trías (2000) la razón de límite, entre lo racional y lo irracional. Es decir la filosofía de frontera:

> Mi propuesta filosófica, pretende someter a la razón filosófica a un diálogo constante y continuo con sus propias sombras. No intenta ni pretende disolver nuestra inteligencia en lo irracional (en la locura, en la disolución de la identidad, en el pensamiento mítico o mágico, en el mundo ético de las pasiones, en las estéticas de los siniestros o en relación al ámbito de lo sagrado). Se trata más bien, de favorecer un constante forcejeo entre la razón y esas sombras. Ese diálogo preserva el carácter *crítico* de la razón. Y en él consigue la razón adquirir madurez y solvencia en virtud de esa prueba (p. 11).

En este sentido la pretensión es desarrollar una crítica permitiendo aclarar, en la medida de lo posible, desde la filosofía el problema de la razón como ente rector del pensamiento y brújula de la teleología cuyo fin es la vuelta al sentido común. Pero el camino vuelve al principio, a la madre de todas las ciencias: la Filosofía, este es el planteamiento por desarrollar a continuación.

CONSIDERACIONES SOBRE LA FILOSOFÍA.

El camino iniciado apunta a la vuelta de la filosofía como disciplina del pensamiento humano, el primer intento es por aclarar la filosofía como punto de partida y, al mismo tiempo, de llegada. Ya previamente se planteó el camino asumido en dos perspectivas: la ida sin retorno y el anhelo de volver, esta dialéctica es permanente. Sin embargo, cuando de filosofía se trata, inmediatamente surgen muchas definiciones y es posible que al final ninguna satisfaga el anhelo del pensador, ellas van desde *el amor por la sabiduría* como perspectiva primaria, hasta las desatadas por un escepticismo tal donde no hay definición, como lo estableció García Bacca (1985) pero, sí tiene una tarea y, en este sentido, la filosofía se revitaliza frente a todo el discurso en su contra establecido por los llamados métodos donde la operatividad era el centro del asunto, así lo refiere Sáez (2003):

> Al intentar despejar las hipótesis de trabajo fundamentales que hemos empleado hay que afrontar, primero, una pregunta que atañe al sentido mismo del propósito. ¿Acaso hay *una* filosofía actual, posee señas de identidad propia, se puede hablar de una filosofía actual? La cuestión parece trivial, lo cierto es que la aludida forma reticular del pensamiento actual ha dado lugar a diagnósticos muy dispares de los que quisiéramos señalar dos polares. Una de las opiniones más radicales dictaminan que las diversas corrientes del espectro actual han evolucionado de un modo tan divergente que no sólo se hace imposible esperar una tasación de validez de sus resultados, comparándolos y valorándolos unos con respecto a otros, sino que diluye su unidad misma. El sentido de los respectivos planteamientos de las líneas filosóficas es, según ello, heterogéneo hasta el punto de que no es prometedora la empresa de enlazarlas en torno a problemas comunes. La opinión polarmente extrema tiende a unificar la heterogeneidad de las vertientes bajo un mismo techo unificador… según la cual convergen en la problemática del "sentido" y de la "comprensión" (p. 18).

Lo interesante de la perspectiva declarada por Sáez (2003) es que ninguna de las posturas es la correcta y no puede ser categórica. Tal diatriba lleva al campo de la ciencia por la teoría de la relatividad al preguntar por cuál: ¿la absoluta o la restringida? Es decir, no es posible plantear una sola, en un paradigma abierto a distintas formas de pensamiento desde el axioma posmoderno de: *¡todo vale!*, pudiéramos, a partir de estos lineamientos, conjeturar que la tercera vía planteada por el autor referenciado es correcta y no lo es. Es decir, lo indómito de la filosofía es y será la imposibilidad de encasillarla en un único pensamiento, su capacidad de trascender cualquier frontera del pensar es lo que la mantiene como madre de todas las ciencias. Por ello la dualidad de Lucy y Ulises. El problema fundamental es por la tarea que tiene asignada, en este sentido vuelve a cobrar importancia "el amor a la sabiduría"; aquí marca distancia con respecto al desarrollo de la modernidad donde el centro del asunto giraba en torno al conocimiento. Es una distinción en la cual se fundamenta a la filosofía, pues no se trata de una estructura fija y sólida como se pretendió y es así como vuelve el autor a establecer:

> Los fundamentos de la filosofía actual hay que buscarlos, en efecto, en el horizonte de las cuestiones que ha abierto la modernidad. En la modernidad asistimos a un giro copernicano que fue determinante en la forma en que se comprendió la filosofía actual y que, aporéticamente, constituye, constituye uno de los motivos más importantes contra el que reaccionan la mayoría de las corrientes (Sáez, 2000, p. 18 – 19).

Si de problema se trata, lo paradójico de la modernidad es su permanente intento de querer aclarar e iluminar las cosas, comprometiéndose cada momento con mayor profundidad llegando a vueltas sin retorno o salidas paradójicas. Éste es uno de los problemas filosóficos de la modernidad, la razón sostenida por la explicación científica de demostración generó planteamientos encajonando a la ciencia en un método y llegando a cuestionar los principios de la ciencia en cuanto ciencia, uno de los elementos interesante fue que en la búsqueda de la razones científicas de la ciencia, la modernidad respondió con la *epistemología*, entendida por algunos como *filosofía de la ciencia*; sin embargo, el ataque sistemático contra toda perspectiva metafísica condujo a la ciencia a contrariarse en sí, por cuanto ¿cómo conjeturar sobre los fundamentos de la ciencia sin hacer planteamientos metafísicos? ¿Es posible hablar de la jueza de las ciencias como la Matemática, siendo ésta una ciencia formal sin recurrir a elucubraciones metafísicas? Estas particularidades generaron cuestionamientos más profundos y casi insalvables. En este sentido se ha venido describiendo la filosofía según el dicho venezolano: *sabe más por vieja que por diabla*. Es así como, permanente evade los cuestionamientos y regresa con argumentos fortalecidos terminando socavando las bases de los pensamientos contrarios, sobre esto continúa Sáez (2003):

> Sobre ese fondo, la modernidad misma ha sido criticada desde el interior de la filosofía, acusada bien de haberse convertido en cómplice de la crisis, bien de ser su causa profunda… Según el diagnóstico

> menos radical, aunque no menos dramático, la modernidad ha depuesto su noble proyecto ilustrado, en virtud del cual podría haber resplandecido la autonomía del sujeto y la normativa universal del Logos, pero que ha conducido a la objetivación del individuo y a la instrumentalización de la racionalidad (p. 19).

Aparentemente, ahora quien una vez fue jueza pasa al banquillo de los acusados, quién en alguna forma instauró un pensamiento sólido, ahora vuelve a las conjeturas contrarias. Eso sin contar los momentos de oscuridad que permanecen como el caso de los fundamentos de la Matemática en particular. De esta forma, la ida y la vuelta tienen un nombre: la filosofía. Sin embargo, lo importante no es tratar de buscar el objeto ni su método, el primero pudiera ser el cuestionamiento de la realidad y la búsqueda de la comprensión del sentido de la realidad como realidad. Ahora bien, la modernidad en cuanto tal, como todo, ha tenido un inicio muy duro, el confrontar a un paradigma establecido como el escolástico es realmente asombroso. Por otra parte, como lo plantea acertadamente Bachellard (1974) debe haber ruptura epistemológica, el conocimiento puede convertirse en obstáculo para el mismo conocimiento. En términos muy dialécticos, lo que una vez fue la tesis, tarde o temprano deberá ser negado en una antítesis y finalmente trascenderá a una síntesis para iniciar el nuevo devenir y comenzar otra vez. Al parecer puede afirmarse la permanencia dos cosas: la realidad y la mentalidad con la cual se aproxima cada quién a la misma.

Por otra parte, cabría la pregunta por la filosofía en la posmodernidad. Uno de los puntos a tratar en al inicio de la temática fue, como lo plantea en su totalidad un grupo connotado de investigadores dirigidos por Lanz (2000) en tono paradójico: *La Ciencia sin Método ni Filosofía*. En realidad parece una cuento para niños, ya se dijo antes, decretar el fin desde un edicto sin ser un dios es algo comprometedor, no es posible poner por el fin al argumento de: *todo vale*, no es suficiente y hay la exigencia de un por qué. Aquí entra en juego la filosofía, ella increpa no solamente al procedimiento científico y lo interesante es que llega a increparse a sí misma, esto es lo que realmente, a manera de pensar del investigador, ocurrió en la modernidad. Es decir, la filosofía fue marginada por la ciencia y ella desató un huracán con las grandes preguntas entre la que figuraban en primera fila: ¿El por qué de la ciencia? Esto derruyó las bases del pensamiento científico al encontrar debilidades y oscuridades que la ciencia en tanto que ciencia no podía resolverse a sí misma. Sin embargo, inmediatamente cuestionó los planteamientos de los creyentes en una ciencia sin filosofía y sin método, pues negar no implica borrar ni eliminar, y aunque lo implique, borrar la realidad no es acabar con una especie.

Aunque lo irracional pareciera acabar con el sentido común, este no ha dejado de serlo, la capacidad de juzgar y buscar la verdad no se agota, la actitud de trascendencia implica mucho más de lo que se cree, para ello el ejemplo desarrollado por Moreno (2008) analizando la historia de vida de un delincuente popular venezolano llamado Alfredo[7] estableciendo aspectos como:

> … Ya tenía… como veintidós años, veintidós años. Me volv.. me volví a í pa Caracas. Y… por allá, ¿no?, robábamos bastante. Robábamos… las tiendas. Entonces un día encontramos un niño que se llama ¡cónchale, se me olvidó el nombre! Bueno, Javier Rodrigo Martínez. Era un niño de la calle y yo me… me reflejé en él, mi infancia. Y… pero yo ya era un hombre. Ya tenía cadena; ya era el papa de Sabana Grande. Tenía el poder…
> Sí. Y tenía dinero. Entonces me reflejé en él mi infancia y lo rescaté. Lo ayudé. Lo único malo que hice fue enseñale a robá. Pero él vestía bien, comía bien… Pero era un niño. Pero era de la calle y yo lo rescaté (p. 47).

Con mucho respeto, por lo crítico y triste de la referencia, pues el investigador asumirá siempre una postura a favor de lo humano, en el delincuente se ve un sentido común, si se quiere un sentido ético y un proyecto moral sustentado y fundamentado en el sentido humano, querer salvar al otro y dar lo poseído, compartir su ser. Si esta investigación tuviese un corte teológico, no cabría mejor cita que la siguiente tomada

[7] Recordemos que es un nombre asignado por los investigadores, posiblemente nada tenga que ver con el auténtico nombre del sujeto que es estudiado.

del Evangelio de Lucas:

> Entonces subieron al tejado, quitaron tejas y bajaron al enfermo en su camilla, poniéndolo en medio de la gente, delante de Jesús.
> Viendo Jesús la fe de estos hombres, dijo al paralítico: "Amigo, tus pecados quedan perdonados". De inmediato los maestros de la Ley y los fariseos empezaron a pensar: "¿Cómo puede blasfemar de este modo? ¿Quién puede perdonar los pecados fuera de Dios?"
> Jesús leyó sus pensamientos y les dijo: "¿Por qué piensan ustedes así? ¿Qué es más fácil decir: "Tus pecados te son perdonados", o decir: "Levántate y anda"? Sepan pues, que el Hijo del Hombre tiene poder en la tierra para perdonar los pecados. Entonces dijo al paralítico. "Yo te lo ordeno: levántate, toma tu camilla y vete a tu casa". Y al instante el hombre se levantó a la vista de todos, tomó la camilla en la que estaba tendido y se fue a casa dando gloria a Dios (5, 19 – 26).

En sentido filosófico, este pasaje plantea algo hermoso del ser humano, entre la enfermedad física y si se quiere, el sentimiento metafísico. La realidad humana es una, pero puede manifestarse en diferentes aristas, cada quien desde donde mejor la comprende, en este sentido Alfredo brinda lo que tiene a este niño en situación de abandono, en calle. Quedaría el conjeturar ético, hizo bien o mal. Era mejor que este infante quedase en a merced de la nada o que "una mano amiga le rescatara de esa situación".

En todo esto no hay más que una búsqueda de sentido, un querer interpretar a fondo la realidad manifiesta. Al parecer no se poseen las claves para descifrar los fenómenos, posiblemente se tienen claves para analizar las evidencias. Sin embargo eso no conduce a conclusiones claras y eficientes.

Volviendo al tema, la filosofía se erige como ese faro de referencia frente a un mar embravecido, como atalaya de vigilancia para divisar algún punto de referencia. Muchos han tratado de increpar a la filosofía, sin embargo por propia naturaleza ésta se mantiene como la referencia obligatoria cuando de reflexión y pensamiento se trata. La ciencia ha comenzado sus críticas y terminado enredada dentro la misma, es más, cuestionada por la filosofía. El sentido de la filosofía pareciera ser como la tela de araña, mientras más la presa se mueve e intenta romperla quedará cada momento más enredado. En pocas palabras y volviendo a la Sagrada Escritura: *La Piedra que desecharon los arquitectos es ahora la Piedra Angular.* Preguntar por los fundamentos no puede partir de otro elemento que no sea la filosofía. En este sentido, preguntar por los fundamentos de la Matemática no tiene otra opción que hacerlo desde la filosofía.

Lo anterior justifica el desarrollo de la investigación, además se deberá llegar a un acuerdo donde el medio es la filosofía, no se trata de un discurso donde no hay sino conjeturas, más allá de ello, se desea la búsqueda de sentido y por ello éste se nos presenta como un medio y, a nuestro entender, el más adecuado. De esta forma el punto de partida para los fundamentos de cualquier ciencia tiene que ver en cuanto tal con la Filosofía. Al preguntar por el por qué de la Matemática, la respuesta tiene un marco referencial y es la filosofía.

Si algo se creyó, de manera incorrecta[8], era el distanciarse permanente de la ciencia y la filosofía, tal vez a causa del paradigma escolástico por cuanto algunos modernos lo consideran como período del oscurantismo pues, ven la modernidad, como una reacción o la contraposición dialéctica; sin embargo, el ser humano responde en cada época a su problema del conocimiento con los instrumentos y herramientas a su alcance, en este sentido el *humanus* va trascendiendo momento a momento su transitar por lo espacio – temporal y lo epocal.

Si se desea hacer conjeturas sobre la ciencia es bueno iniciar desde un principio como lo plantean los antiguos griegos, ya Platón y Aristóteles se debaten tratando de esclarecer el significado. No obstante es bueno se manejen ciertas premisas. El término ciencia proviene del latín, del vocablo *scire* y su significado es conocimiento. De esta forma la traducción es conocimiento, en otras palabras: decir

[8] Según la postura del investigador.

ciencia significa entender conocimiento. Platón distingue entre conocimientos, los provenientes del mundo sensible los reúne en la llamada opinión (doxa, δόξα) y, en un rango más notable, el conocimiento con fundamento, o conocimiento científico (conocimiento fundamentado, *έπιστέμε*). Desde esta perspectiva, García Bacca (1985) advierte la ciencia como un ideal, pues para Platón la *noesis* no pertenece al mundo sensible, la intelección es el contemplar plenamente a la Idea cara a cara, por tanto la perspectiva teleológica determinará el sentido de la ciencia, el hacia dónde pero apuntando a la *Noesis*. Conocer es contemplar y la perspectiva intermedia para la contemplación son aquellas verdades a las que se accede mediante la discusión o depuración de las ideas, cabe recordar que la dialéctica platónica significa depurar las ideas, es aquí donde cobra gran importancia el planteamiento de las matemáticas como ciencias de acceso a la episteme:

> La *razón discursiva* (διάνοια) propio de las matemáticas, que son inteligibles y, para acceder a ellos, el alma se sirve de los objetos del mundo visible para llegar a ellos a manera de conclusión (Goñi, 2002, p. 136).

Por tanto, la matemática quedará intermedia en un status tal, permitiendo una especie de acceso a las formas puras brindadas por la noesis.

Haciendo un gran salto epocal, la modernidad es un momento significativo de la ciencia, por cuanto es posible analizarla con toda racionalidad desde su objeto y su método. Las consideraciones para desarrollar una episteme consiguen fundamentos cuando es posible determinar su objeto, es decir el campo o el locus y el método, el cómo. Esto es interesante por cuanto, hay una manera de dar cuenta sobre la ciencia misma. Sin embargo, la posmodernidad habla de una ciencia sin filosofía ni método como se ha referido anteriormente. Lo interesante de estos aspectos es que la clarificación de la ciencia ya viene desde la antigüedad y su ideal principal es el de la medición como lo plantea acertadamente García Bacca (1980) en la introducción a la traducción personal del Teeteto, conocido como el Diálogo sobre la Ciencia escrito por Platón:

Ciencia es "sentiencia mensurante".
Ciencia es "opinión verdadera".
Ciencia es "opinión verdadera razonada".

Se ha elegido con un sentido arbitrario, por cuanto Platón influenciado por Pitágoras da el fondo matemático al sentido de la ciencia el traductor García Bacca establece un fondo *aritmético – geométrico*, en ese sentido se apertura el fundamento de la ciencia, la ciencia está construida sobre bases provenientes de la matemática. Ello lo confirma Bunge (1981):

> La ciencia procura siempre medir y registrar los fenómenos. Los números y las formas geométricas son de gran importancia en el registro, la descripción y la inteligencia de los sucesos y procesos. En lo posible tales datos debieran disponerse en tablas o resumirse en fórmulas matemáticas. Sin embargo la formulación matemática, deseable como es, no es una condición indispensable para que el conocimiento sea científico; lo que caracteriza el conocimiento científico es la exactitud en un sentido general antes que la exactitud numérica o métrica, la que es inútil si media la vaguedad conceptual. Más aún, la investigación científica emplea, en medida creciente capítulos no numéricos y no métricos de la matemática, tales como la topología, la teoría de los grupos, o el álgebra de las clases, que no son ciencias del número y de la figura, sino de la relación (p. 22).

Lo interesante del asunto es que hablar de ciencia (conocimiento), al igual que la filosofía, parece partir de la Matemática para dar una vuelta y volver a la Matemática. Como lo establece Platón, para que se de el conocimiento auténtico de las formas hay la llamada Razón Discursiva (διάνοια) (Goñi, 2002, p. 136), es decir determinación de una verdad mediante la deducción. Por ello, desde esta perspectiva la ciencia tiene una especie de escalera y el paso a la Noesis (νόησις) se da con un punto intermedio donde lo discursivo apunta a la Matemática como punto previo para el auténtico conocimiento generando la Episteme *(έπιστέμε)* llamado conocimiento científico producto de la dialéctica entendida como depuración de las ideas. Es claro para Platón que todo conocimiento es una reminiscencia, por tanto el hacer recordar es vital, en algunos de sus diálogos está como elemento transversal el conocimiento matemático, por ello en el Menón, el tema fundamental es sobre la adquisición de la virtud, pero el tema utilizado sobre el concepto es el recuerdo de los elementos matemáticos suscitando el problema de la diagonal de un cuadrilátero rectangular cuyo punto central es del problema de la diagonal donde el centro del asunto es la llamada raíz cuadrada de dos (√2). Esa es la ciencia en la que cree Platón y el método de elucidación es la dialéctica en el diálogo para intentar conclusiones. De esta forma tiene sentido las tres perspectivas esgrimidas al inicio del tema.

Por otra parte, el alumno más brillante de Platón manifiesta su perspectiva del significado de ciencia. Es claro la postura contraria, aun cuando para autores como Mondin (1999) estableciendo que el camino desarrollado por Aristóteles para llegar al universal es contrario al de Platón; éste parte de la cosa concreta y llega, si se quiere a la idea y el otro parte de la idea en cuanto idea, la distinción es de método pero el contenido es igual. El punto final es la idea.

Lo interesante es la discusión sobre el método porque el punto final sigue siendo el mismo para los dos, el camino es distinto pero el resultado permanece igual.

No obstante: ¿qué entiende Aristóteles por ciencia?

Es interesante ver que este autor plantea una diferencia interesante entre el significado de ciencia en cuanto ciencia, de arte y de técnica. Además apertura la discusión entre teoría y práctica. Por otra parte, analiza algo fundamental, los principios en este aspecto Aristóteles inicia una auténtica epistemología por cuanto indica la necesidad de establecer los principios que rigen una ciencia:

> Entre todas las ciencias, son las más rigurosas las que son más ciencias de principios; las que recaen sobre un pequeño número de principios son más rigurosas que aquellas cuyo objeto es múltiple; la aritmética, es más rigurosa que la geometría. La ciencia que estudia las causas es la que puede enseñar mejor, porque los que explican las causas de cada cosa son los que verdaderamente enseñan (Aristóteles, 2007, p. 46).

En primer lugar, lo establecido arranca con algo muy interesante: el de asumir como punto de partida principios. En este sentido, surgen compromisos ontológicos para la ciencia. Este punto es clave, los principios son los elementos que regirán el camino de cualquier ciencia o, más notablemente, del conocimiento en cuanto conocimiento. Es decir, ya desde la antigüedad el estagirita plantea la necesidad de unas reglas de juego en cuanto a ciencia se refiere, este es uno de los problemas fundamentales en la posmodernidad cuando se desea pasar por encima de las reglas. Dichos como ciencia sin filosofía no tiene cabida en el planteo aristotélico, por cuanto la filosofía establece los principios que rigen el camino proseguido por la ciencia.

El tercer punto clave es la ciencia que estudia a los principios, aun cuando se hace una distinción entre teoría y práctica, lo teórico tendrá un valor trascendental pues, a los principios no se llega por la vía de la acción sino especulativamente, en ello Platón tiene razón, el discernimiento y depuración de los principios no surge de la acción.

Aristóteles hace una diferencia entre el conocimiento y la experiencia estableciendo que:

> El arte comienza, cuando un gran número de nociones suministradas por la experiencia, se forma una sola concepción general que se aplica a todos los casos semejantes. Saber que tal remedio ha curado a Calias atacado por tal enfermedad, que ha producido el mismo efecto en Sócrates u en muchos otros tomados individualmente, constituye la experiencia; pero saber que tal remedio ha curado a toda clase de enfermos atacados de cierta enfermedad,…, es arte. La experiencia es el conocimiento de las cosas particulares, y el arte, por el contrario, el de lo general.
>
> … Los hombres de la experiencia saben bien que tal cosa existe, pero no saben por qué existe; los hombres de arte, por lo contrario, conocen el por qué y la causa (Aristóteles, 2007, p. 42-43)

De esta forma, Aristóteles ve la diferencia entre la simple experiencia en cuanto el hacer y dominar un oficio y, el saber los principios y causas. Por tanto, ciencia es una generalidad. Poseer la teoría y el dominio de lo particular, porque el mismo autor hable del error cuando sólo se plantea el asunto teórico, esto puede corroborarse con la teoría del conocimiento ya que para conocer el inicio es por la experiencia y ésta se va ampliando en la memoria, el conocimiento va del acto particular de la experiencia para llegar al concepto. En este particular, la teorización como generalidad llega como punto de cúspide del conocimiento, por ello la ciencia o el arte es la generalidad a partir de la experiencia particular y del dominio.

Vistas la confrontación entre Platón y Aristóteles el camino de la ciencia tiene un punto común, sea partiendo de la Idea en la noesis y luego como una especie de abstracción desde las cosas sensibles pero, dándole primacía a lo inteligible o por la vía inductiva partiendo de la experiencia sensible para llegar al concepto o la generalidad. Aparentemente esto no ha cambiado, el querer hacer ciencia hoy no dista mucho de estos planteamientos, al final hacer ciencia en cuanto ciencia dependerá en gran medida del método; sin embargo, el punto clave será la generalidad.

Volviendo al planteamiento de García Bacca estableciendo la ciencia como un ideal se enmarca dentro de ambas distinciones antes descritas, ello da concordancia y el otro elemento es que ya Aristóteles apunta a los principios. Si algo tiene un aspecto importante es esa actitud ontológica de ideal. Sin embargo en tiempos de actualidad el problema de la ciencia se vuelve más complejo, ahora se entrecruzan nuevos planteamientos como el ciencia, técnica y tecnología, esto lo advierte García Bacca (1967):

> La técnica incluye un *plan racional* de montaje de algo (casa, televisor, universidad, plan de obras públicas…) mientras que la práctica monta algo según *receta*, fórmula hecha (formulario). No hay inconveniente en que el mismo objeto sea montado por un técnico y por un práctico, que colaboren y coexistan prácticos con técnicos, sobre lo mismo… (p. 15).

Es decir, el llevar a cabo una actividad mediante una serie de instrucciones no difiere de la práctica ni hace un salto hacia la ciencia, en Aristóteles el ideal planteado era el de la generalidad, para García Bacca (1967) la conexión entre una ciencia y la práctica es algo racionalmente causal. Es bueno aclarar el significado de racional, no es simplemente de razón o proporción, va más allá pues es el centro del asunto de la modernidad, lo racional moderno tiene como elemento de cúspide el sentido de que algo es porque se es de una forma y no poder ser contradictorio, racional es tener una estructura lógica de viabilidad que le sustenta y no puede ser de ninguna otra. Por ello los racionalistas como Leibniz plantean "verdades de razón y verdades de hecho". La primeras se adecuan a una lógica ideal, indubitable y universal, las segundas surgen de la experiencia y son contingentes.

Pero asunto fundamental del ser ciencia está, en alguna manera, en lo epistémico, es decir: la diferencias es en lo fundamente y su respectiva fundamentación:

> El agrimensor egipcio tuvo la buena suerte de que sus *recetas* para hacer linderos de los campos, tras las inundaciones deslindantes del Nilo, resultaban ser *teoremas* de geometría, y de ellos recibieran ellas su validez. La receta valía en virtud de la fórmula, aún sin saber que la receta era receta de una fórmula (García Bacca, 1967, p. 15).

En atención a los planteamientos en desarrollo, se puede interpretar el asunto como el hacer de una práctica científica sin cientificidad en el sentido de uso de herramientas sin conocer el manejo de la herramienta y lo eficiente que pudiera ser, es un ser menos que estar a la mano, es decir un uso para la inmediatez, porque la diferencia estriba, según interpretamos a García Bacca en el conocimiento de los fundamentos, en el darse cuenta, en sentido kantiano cuando se hacen las preguntas del por qué, esto lleva a conjeturar que científico es aquel que emplea los fundamentos de su ciencia y tiene la generalidad de los contrario podría caerse en una simple aplicación de conocimiento o generar una simple práctica empírica por repetición de acontecimientos. En este sentido, cabría el planteamiento posmoderno de una ciencia sin método ni filosofía.

Cerrando el planteamiento de García Bacca (1967) desarrollando una mayéutica en sentido de Marcel Gabriel[9] para establecer una primera aproximación a la definición de ciencia:

> *Ciencia,* -en virtud de su preconcepto actual, explicitado-, tiende a ser conocimiento teórico (no práctico), *ontológico* (no axiológico), *calificadamente verdadero* (no opinable, artículo de fe…), *objetivo* (no conciencial) y *sistémico* (no enciclopédico)…
> *… Ciencia es (o tiende a ser) conocimiento teórico, ontológico, verdadero, objetivo y sistemático...* (p. 30).

El aporte significativo sobre el aspecto de lo entendido como ciencia apunta a los elementos tanto de Platón como Aristóteles, ciertamente el término ciencia tiene sentido en la medida en que surge lo epistemológico, pues como lo desarrolla el autor García Bacca se puede ser un práctico de oficio, utilizando fórmulas sin saber que son fórmulas, desarrollando ideales sin tener en cuenta la profundidad y el compromiso tras bastidores a los que conducen las acciones implícitas y derivadas.

Uno de los aspectos fundamentales, y muy acorde con el desarrollo de esta investigación, es la relevancia del aspecto teórico que soporta el sentido de ciencia, es aquí donde entra lo filosófico y el por qué del surgimiento y florecimiento de la epistemología. Ciertamente, no se trata de algo axiológico en la búsqueda de valores trascendentales en cuanto a idealidades dadas a priori, el problema es ontológico la pregunta por el ser, ¿qué es ciencia?... ¿Cuáles son sus principios?... ¿Desde qué axiomas se deducen sus lineamientos?

Dar respuestas a las interrogantes son tareas del que desea hacer filosofía y del

[9] Filósofo francés que plantea una mayéutica afirmando lo que no es algo, para luego dilucidar lo que sí es.

que intenta comprender la ciencia en cuanto que ciencia y no simplemente en la practicidad de su aplicación.

LA MATEMÁTICA
En búsqueda de sus fundamentos

Iniciar el estudio del qué de la Matemática, de sus fundamentos y, en la medida de lo posible, de su *ser* para querer desarrollar ciencia de la Matemática en el sentido planteado como ideal y teoría, vale la pena echar una mirada a la siguiente experiencia:

> *John Forbes Nash, junior –genio de las matemáticas, autor de una teoría del comportamiento racional y visionario de la "máquina pensante"- llevaba casi media hora sentado con su visitante, otro matemático. Caía la tarde de un día laborable de primavera de 1959 y aunque era el mes de mayo, hacía un calor molesto. Nash estaba repatingado en un sillón de una esquina de la sala del hospital e iba vestido de forma desaliñada, con una camisa de nailon que le colgaba flojamente por fuera de los pantalones desabrochados; su cuerpo poderoso estaba inerte como un muñeco de trapo y sus rasgos delicados carecían de expresión. Mantenía clavada la mirada mortecina en un punto situado justo delante del pie izquierdo del profesor George Mackey, de Harvard, y sólo se movía para apartarse el pelo largo y oscuro de la frente, en una acción espasmódica y repetitiva. El visitante estaba erguido en su asiento, oprimido por el silencio, y tenía plena conciencia de que las puertas que daban a la sala estaban cerradas con llave. Finalmente Mackey no pudo contenerse más; su voz sonó ligeramente quejumbrosa, pero hizo un gran esfuerzo por resultar amable:*
>
> *-¿Cómo es posible? –empezó a decir-, ¿cómo es posible que usted, un matemático, un hombre consagrado a la razón y a la demostración lógica… cómo es posible que haya creído que los extraterrestres le estaban enviando mensajes? ¿Cómo puede haber creído que los alienígenas lo habían reclutado para salvar el mundo? ¿Cómo es posible…?*
>
> *Nash levantó por fin la vista y contempló a Mackey fijamente, sin pestañear y con una mirada tan fría e inexpresiva como la de un pájaro o una serpiente; luego, como si hablara para sí mismo, en tono razonable y con cadencia sureña lenta y suave dijo:*
>
> *-Porque las ideas que concebí sobre seres sobrenaturales acudieron a mí del mismo modo en que las hicieron las ideas*

matemáticas y por esa razón las tomé en serio[10].

De la referencia se desarrollan aspectos que van más allá de lo anecdótico. No se trata simplemente de situaciones controversiales por los que atraviesan o han vivido muchos de los matemáticos, esto realmente se ha observado en la historia de las ciencias en general y no solamente en la Matemática. El planteamiento de Nash, premio Nóbel en economía por su teoría de juegos en Matemática es realmente comprometedor, más allá de la situación esquizofrénica y de una historia de vida particular, el hecho de la pregunta en cuanto: ¿qué es lo real en Matemática? da una tonalidad deslumbrante por cuanto asume una ontología, si se quiere de carácter platónico. Por ello es bueno ir más allá de lo anecdótico y hacer la pregunta sobre cómo se origina la idea Matemática, sus principios y en especial la epistemología, donde adquiere fundamentación una ciencia que ha sido la jueza de las demás.

Al estudiar la historia de la Matemática generalmente se tienen vertientes separadas pero hay algunos puntos de acuerdo en tesis importantes, tal vez lo que más une es el sentido de estudio de la cantidad, en la aserción de lo discreto como la aritmética y la contraposición dialéctica de lo continuo como la geometría; sin embargo, detallemos algunas definiciones al respecto, se es posible plantear alguna en concreto. Iniciemos el estudio por aproximarnos a la posible definición.

No obstante, en el caso de la Matemática en cuanto tal, muy probablemente las definiciones no se amontonen, por el contrario, lo corriente en el asunto es la omisión; en este sentido, pareciera que al intentar dar explicaciones la situación se incline más hacia un compromiso ontológico; es decir, los autores no apuntan a las consideraciones epistemológicas de la ciencia que profesan, la pragmática desarrolla por las bondades de las aplicaciones y sus resultados, como lo plantea Orellana (citado por González, 1995) acotan situaciones no comprometedoras en cuanto al ser

[10] NASAR Sylvia (2001), *una mente prodigiosa.* Editorial Círculo de Lectores. Barcelona. España. Además es una nota de George Mackey, profesor de matemáticas de la Universidad de Harvard,

de la Matemática estableciendo: “La mayoría de los matemáticos prefieren describir los objetos de los cuales se ocupa su ciencia y las propiedades que ellas satisfacen a fin de comprender cuál es su definición” (p. 7). Desde esta perspectiva indagar sobre el qué de una epistemología de la Matemática es un intento generalmente dado a partir de resultados y por eso algunos autores asumen posturas como la manifiesta en términos de Quine; es decir, de compromiso ontológico con una teoría, pero la dificultad mayor se establece al darse cuenta de que en Matemática las teorías sobre sus fundamentos son muy pocas y éstas, al mismo tiempo, son problemáticas y controversiales. En pocas palabras, cuando se desea asumir alguna teoría epistémica de la Matemática, de las pocas existentes, la controversia es su soporte, conduciendo a situaciones calificadas como tiempo perdido por conducir a una especie de nudos “gordianos”. Por ello se hace tan complejo y comprometedor plantear cualquier definición u aproximación general mediante la cual se permita establecer qué es la Matemática.

Por otra parte, si algo ha estado presente en la historia de esta ciencia es lo oscuro del surgir de la misma, aquí la referencia es de la Matemática en cuanto ciencia; muy a pesar de ello al ir a su significado en cuanto tal, Matemática proviene del griego: **Μάθημα, ατος, τό (μανθάνω), estudio, ciencia, conocimiento, instrucción,** por otra parte, **μαθηματικός, estudioso, científico, matemático**[11]. En consecuencia, el término en cuanto tal se refiere a “alguien” en especial y no *hacia algo* o actividad en particular como se quiere ver en la actualidad. Desde el caso tan especial de los pitagóricos no solamente hay un aspecto de ciencia sino de *misticidad* al insistir en “alguien”: **el estudioso**. Por ello, lo controversial del significado de Matemática derivado de allí. Es decir, no se trata de una ciencia particular como ahora se ha establecido con un objeto de estudio definido, sino sería (a forma pensar del investigador) encaminarse más hacia el estudioso, en tanto estudioso, como

---

entrevista, Cambridge, Massachussets, 14 de diciembre de 1995.

[11] BALGUE Miguel (1968). Diccionario Griego – Español. Compañía Bibliográfica Española. Madrid.

actividad en el quehacer y no a la ciencia, recordando que, para la ciencia, ya Platón mira hacia la episteme en el sentido de conocimiento fundamentado o conocimiento con fundamento al cuál hoy designamos como conocimiento científico. Por tanto, el término Matemática apunta hacia el ser que estudia, el estudioso y no a qué estudia es decir: la ciencia en tanto ciencia, en particular. Ahora bien, los elementos asumidos con el término de lo que hoy se establece como ciencia eran la aritmética y la geometría, es decir la sempiterna discusión entre lo discreto y lo continuo. Esto concuerda con las perspectivas de autores quienes asientan en la *estética* el ser de la Matemática como una postura donde la belleza está en el hacer y la razón comedida de las cosas; sin embargo, un previo del asunto es la hermenéutica de García Bacca (1980) en la introducción al Teetetos, estableciendo para Platón tres tipos de ciencia: sentiencia mensurante, opinión verdadera y opinión verdadera razonad, en este sentido se pudiese dar un giro hacia la estética cuando de Matemática se trata.

Por otra parte, frente al asunto de la estética, ésta no implica simplemente la belleza en tanto que belleza, como elemento significativo y "sentiencia mensurante" planteado por García Bacca, mantiene un sentir y una medida entendida desde la perfección griega en torno a la *proporción*, lo bello tiene proporcionalidad de allí el elemento de estética, por cuanto hay una medición como lo refiere Capelletti (1990): *De las matemáticas toma precisamente las notas o especificaciones que sirven para caracterizar la belleza: el orden (τάξις), la simetría (συμμετρία) y la limitación (τὸ ώρσμένον)*[12].

Insistir en el qué de la Matemática implica una remisión a las discusiones del principio, las diatribas entre maestro y alumno. Desde los inicios del pensamiento griego hay una dualidad persistente en torno al significado de ciencia, en particular de la Matemática, los escritos de Platón y Aristóteles tienen un punto crucial por ser

[12] CAPELLETI Ángel (1991). *Aristóteles. La poética.* Traducción. Monte Ávila Editores. Caracas. Venezuela.

la cúspide, el primero apunta hacia la Idea y el segundo parte de lo físico, desde aquí pueden estudiarse dos perspectivas distintas sobre el significado de Matemática. Aun cuando para algunos la diferencia entre uno y otro es metodológica pues el punto de llegada pudiera considerarse el mismo, el concepto o la idea. Sin embargo, uno parte de lo general y universal para demostrar la idea y el otro parte de lo concreto para abstraer y llegar al mismo punto. Lo conclusivo del asunto está en la controversia desarrollada en función de qué es la Matemática y cuáles serán sus fundamentos.

Por otra parte, en la actualidad al intentar definir la Matemática en cuanto tal, salen al encuentro una gama de cuestiones apuntando a sostener una discusión en torno a los objetos, según los objetos así será la ciencia y el estudio de los mismos. Lo primero en llamar la atención es el esbozo planteado por Badiou (2002) en torno a la concepción de ciencia:

> La oscuridad del enunciado resulta de lo que parece imponerse por una concepción intencional del pensamiento: en esta concepción, todo pensamiento es pensamiento de un objeto. Dejamos así establecido que la matemática es un pensamiento en la misma medida en que existen objetos matemáticos, y la investigación filosófica trata de la naturaleza y origen de esos objetos (p.37).

Al parecer se pueden derivar distintas consideraciones de esta definición planteada por el autor donde afirma que la Matemática es un pensamiento. Sin embargo, el asunto no es tan claro y señalaría en primera instancia a una problemática ontológica, es decir, interrogar e interrogarse por el ente en cuanto ente matemático. Es evidente la existencia de objetos matemáticos, a ellos nos referimos cuando hablamos de números, funciones y demás elementos agrupados en torno a la Matemática. El asunto se vuelve borroso cuando se entra en discusión sobre sus orígenes y su realidad, pues la pragmática utilitaria de sus objetos es innegable. No obstante el autor se remonta a la problemática del origen refiriéndose a la problemática entre Platón y Aristóteles.

En conjunto otro grupo de autores dirigidos por Bautista (2004) apuntan al significado de la Matemática como *"herramienta intelectual"* ello lo configuran por la precisión y aproximación a la naturaleza, es decir en primera instancia establecen como gran parte de la historia y referido por Morales (1997) la Matemática como ciencia instrumental al servicio de las demás ciencias, sin embargo hay un apuntar un poco más allá:

> Las matemáticas están constituidas por un grupo complejo de teorías, técnicas y conocimientos que tienen su desarrollo propio y que pueden ser usadas para el entendimiento y exploración de nuestro entorno social y natural gracias a su alto nivel de sofisticación…
> La matemática es una herramienta indispensable para describir el mundo que nos rodea. Su ayuda ha sido invaluable para formar la imagen que el hombre moderno tiene del Universo y el lugar que ocupa en él (Bautista, 2004, p.2).

Este planteamiento vuelve a corroborar el problema fundamental acotado por algunos autores en el sentido de querer explicar un concepto mediante una definición, ello lo plantea Sanguinetti (1989), en cuanto se hacen descripciones del objeto pero no se dice qué es el objeto, aun cuando la postura vuelve a estimarse en cuanto a la situación de ciencia a la mano de otras ciencias.

Otra definición es la asumida por Courant y Robbins (2002):

> Las Matemáticas, como una expresión de la mente humana, reflejan la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética. Sus elementos básicos son la lógica y la intuición, el análisis y la construcción, la generalidad y la individualidad. Aunque diferentes tradiciones realzan aspectos diferentes, sólo la interacción de fuerzas antitéticas y la lucha por su síntesis lo que constituye la vida, la utilidad y el valor supremo de la ciencia matemática (p.17).

Nuevamente el asunto queda difuso, lo que concuerda con las dos aproximaciones anteriores es la relación de la misma con la mente humana, este es uno de los elementos más importante que empieza a mostrarse, permitiendo afirmar el aspecto de "actividad" y de "hacer" en donde se desenvuelve la Matemática. Hasta ahora hay un común denominador sobre la actividad intelectual sobre la que gira ese concepto llamado Matemática.

> Matemática pura es la clase de todas las proposiciones de la forma "*p* implica *q*", donde *p* y *q* son proposiciones que contienen una o más variables, las mismas en ambas proposiciones, y ni *p* ni *q* contienen constante alguna excepto las constantes lógicas. Y las constantes lógicas son todas nociones definibles en función de lo siguiente: Implicación, la relación de un término a una clase de la que es miembro, la noción de *tal que*, la noción de relación, y otras nociones tales que pueden hallarse involucradas en la noción general de proposiciones de la forma anterior. Además de ellas la matemática *usa* una noción que no forma parte de las nociones que considera, la noción de verdad (Russell, 1948, p. 29).

Como acota la cita, pues su autor es el filósofo Bertrand Russell y la referencia viene de su obra magna Principios de la Matemática, el problema interesante es la connotación de "rara" dada por él a su propia definición. Es controversial y se entiende el asunto por su creencia en poder reducir la Matemática a la lógica, junto a otros autores como Alfred Whitehead y Goltob Frege son connotados representantes de una corriente filosófica que ve los fundamentos de la Matemática en la lógica, dicha corriente es conocida con el sustantivo de *logicismo.*

Al querer hacer una hermenéutica de lo expuesto en la definición, se advierte una terminología que apunta a una estructura desarrollada por la lógica, ciencia concebida como formal y cuya misión es el estudio del razonamiento, lo interesante es que la definición y la concepción de lógica parece advertirse casi intuitivamente y de manera inmediata lo que no ocurre con la matemática, al respecto escribe Bunge (1981) plantea una aproximación a ambas como formales:

> Así, la lógica y la matemática –esto es, los diversos sistemas de lógica formal y los diferentes capítulos de la matemática pura- son racionales, sistemáticos y verificables, pero no son objetivos, no nos dan informaciones acerca de la realidad: simplemente no se ocupan de los hechos. La lógica y la matemática trata de entes ideales; estos entes, tanto los abstractos como los interpretados, sólo existen en la mente humana. A los lógicos y a los matemáticos no se les da objeto de

> estudio: ellos construyen sus propios objetos. Es verdad que a menudo lo hacen por abstracción de objetos reales… más aún, el trabajo del lógico o del matemático satisface las necesidades del naturalista, del sociólogo o del tecnólogo, y es por eso que la sociedad los tolera y, ahora, hasta los estimula. Pero la materia prima que emplean los lógicos y los matemáticos no es fáctica sino ideal (p. 10).

Nuevamente el problema se torna complejo, el hilo conductor es la coincidencia en torno a la idealidad de los objetos matemáticos o, mejor dicho, de los entes matemáticos. Vuelven entonces las conjeturas sobre: ¿qué son estos entes? ¿cómo es posible aproximarse a ellos? Caracterizados por la idealidad parecería necesaria una vuelta a Platón pero el problema no quedaría allí desde un realismo ingenuo, por el contrario se abriría una ventana ontológica para preguntarse por el ente en cuanto ente, conduciendo el tema a la magna pregunta sobre el ser.

Sin embargo, hay un planteamiento controversial de Badiou (2002):

> La matemática no es ni física ni metafísica…
> Pero, en tal caso, ¿qué es? En realidad es una activación ficticia que se produce allí donde se da una carencia de existencia en acto. La objetividad matemática existe en potencia en lo sensible, y allí permanece en la latencia definitiva de su acto. De este modo, es cierto que un hombre posee en potencia el uno aritmético, o que un cuerpo posee en potencia tal o cual forma pura. No se trata del uno aritmético o la esfera geométrica tenga una existencia separada, ni de que existan como tales en un hombre o en un planeta. Se trata de que el pensamiento puede activar el uno o la esfera a partir de la experiencia de un organismo o de un objeto (p. 39).

Como se ha destacado, el asunto toma un aspecto de conjetura al intentar darle ubicuidad espacial, la problemática está en el significado de realidad, desde la perspectiva lógica no es físico ni metafísico, pareciera entonces que la realidad está determinada por estos dos “espacios”. La identificación apunta a elementos planteados por Aristóteles como “potencia”, una especie capacidad que, en cualquier momento es detonada. Un ejemplo interesante es: “el niño es un hombre en potencia”. Es decir, no se niega que un niño no sea un hombre en cuanto adulto, pero no puede ser considerado como adulto en cuanto tiene las capacidades para llegar a ser, sin embargo no lo es.

Tanto en la perspectiva platónica como en la aristotélica en cuanto al concepto punto cúspide de la inteligencia que asume la abstracción sea por la vía que sea, en el sentido de salida de lo concreto o por el contrario salida de la idealidad y captada por la *noesis* definir la Matemática no cabría sino desde la ontología, la Matemática *es* y la probabilidad es apuntar a sus objetos en función de la ocupación que realiza la ciencia en cuestión. Rápidamente y en sentido heideggeriano: *"la pregunta condiciona la respuesta"* y al paso sale rápidamente Platón:

> "Extranjero, me haces demasiado honor al creerme capaz de saber si la virtud puede enseñarse, o si hay algún otro modo de adquirirla. Pero disto tanto de saber si es o no susceptible de ser enseñada, que no tengo siquiera la menor idea de que pueda ser". Yo Menón me encuentro en el mismo caso. Comparto en esta materia la indigencia de mis conciudadanos, y me reprocho a mí mismo el no saber nada acerca de la virtud. No sabiendo qué es, ¿cómo podría conocer en qué consiste? (Sobre la Virtud, Menón. En Reyes y otros, 1973).

Lo controversial del asunto: "nadie busca lo que no se le ha perdido", buscar lo que no se conoce es imposible, se busca lo conocido porque si se tenía se le ha extraviado y ahora necesita encontrarlo pues sabe lo que es, buscar sin saber qué se busca es darle sentido al nihilismo, esta es la perspectiva donde Sócrates intenta mostrar que la virtud es innata y "originaria", es reminiscencia. Sin embargo, el problema en torno a la definición de Matemática es preocupante por cuanto apunta a ninguna definición en particular, por tanto insistamos en la pregunta ¿qué es Matemática?

Sin embargo aunque la pregunta se mantiene abierta, la Matemática puede ser caracterizada, según Fatone (1969) como ciencia abstracta, formal y deductiva, como ciencia de las relaciones y ciencia de la cantidad. Sin embargo, en la actualidad, muchas de estas características siguen siendo cuestionadas, lo importante es que permanece siempre el entorno a la cantidad y la medida. Pareciera finalmente algo común de la doble perspectiva aceptada desde un comienzo, la medida de lo continuo como la geometría y lo discreto como la aritmética. Por ello, muchos desarrollan sus estudios desde la aritmética y en especial el número como elementos fundamentales de base para el edificio matemático.

Fatone (1969) resume los siguientes aspectos:

> La Matemática, Ciencia de la Cantidad. Por cantidad se ha entendido, tradicionalmente, "los susceptible de aumento o disminución", "o lo que admite el más y el menos"… Medir una cantidad no era sino establecer la relación entre una cantidad y otra; establecer esa relación era encontrar un número y solía definirse como la medida de la cantidad… Pero hay disciplinas que no estudian cantidades ni dan cuenta de ello…
>
> La Matemática, Ciencia Abstracta. Estudia las relaciones independientemente de los objetos que en ella intervienen. Por ello se ha podido decir que la matemática no estudia ningún objeto, caso de las representaciones con letras: a, b, c….
>
> La Matemática, Ciencia Formal. Por prescindir de todo objeto, sería una ciencia formal, como la lógica. Pero la matemática no estudia cualquier clase de relaciones, sino las susceptibles de ser expresadas recurriendo a conceptos de cantidades…
>
> La Matemática, Ciencia Exacta. Sus resultados se expresan en relaciones numéricas de absoluta certeza. Pero siempre las relaciones no son numéricas, ni siempre su certeza es absoluta.
>
> La Matemática, Ciencia Deductiva. La deducción es el razonamiento en que, dadas ciertas premisas, se obtienen de ellas necesariamente otras. En este sentido, la matemática es ciencia deductiva, por el carácter forzoso de la relación que establece entre las afirmaciones de que parte y a las afirmaciones a que llega (P. 173 – 175).

Como se ha estado debatiendo, si la ciencia es en función de los objetos que trata, nuevamente comienzan las controversias sobre las distintas aserciones de lo que estudia la Matemática, especialmente sobre los aspectos de generalidad y formalidad acerca de las cantidades y las relaciones. Por ello, no es posible reducirla a una concepción particular de la Matemática como en muchos casos se ha venido planteando, se hace necesaria una visión que asuma los aspectos particulares sin perder la generalidad y viceversa, esta es la tensionalidad en la que se hace posible comprender el significado de Matemática, evidentemente por ello se revisa desde los primeros planteamiento y desde las distintas discusiones como la de los grandes maestros de la antigua Grecia: Platón y Aristóteles.

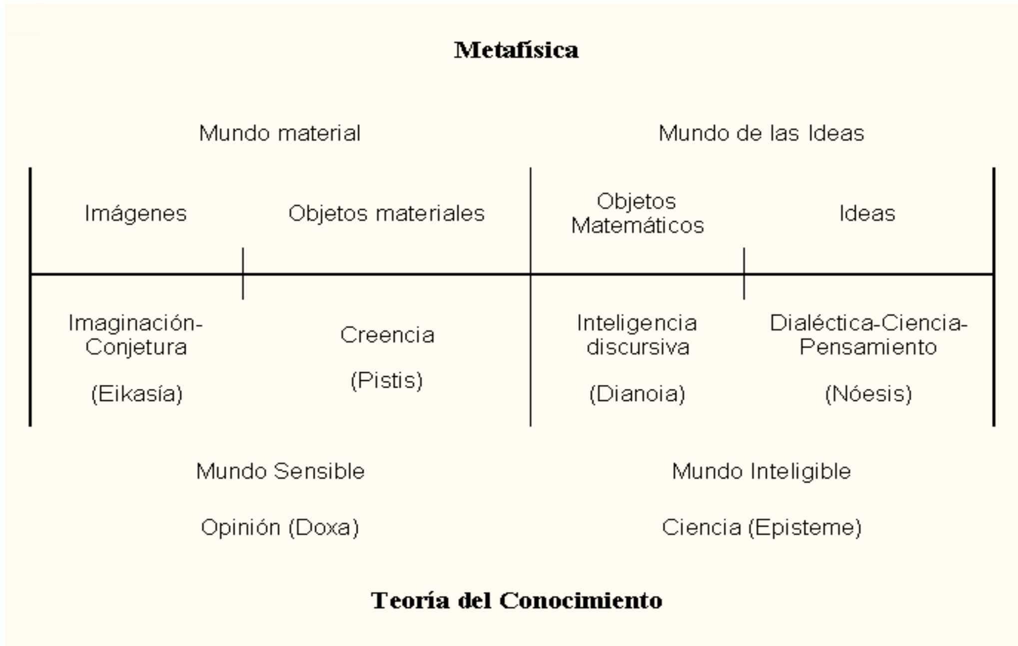
CONTROVERSIA ENTRE PLATÓN Y ARISTÓTELES

Insistir en el qué de la Matemática implica una remisión a las discusiones del principio, las diatribas entre maestro y alumno. Desde los inicios del pensamiento griego hay una dualidad persistente en torno al significado de ciencia, en particular de la Matemática, los escritos de Platón y Aristóteles tienen un punto crucial por ser la cúspide, el primero apunta hacia la Idea y el segundo parte de lo físico, desde aquí pueden estudiarse dos perspectivas distintas sobre el significado de Matemática. Aun cuando autores como Mondin (1999) plantea la diatriba entre Platón y Aristóteles como un asunto metodológico, sin embargo el final es el mismo. El primero parte de la idea o lo ideal para llegar al concepto y el segundo parte de la realidad física para llegar al concepto aun cuando mantienen ciertas diferencias específicas lo que permanece al final es el mismo producto.

EL SIGNIFICADO DE LA MATEMÁTICA EN PLATÓN.

Este gran ateniense recordado en la historia por su gran cantidad de escritos llamados Diálogos Socráticos, establece en ellos un nivel preponderante en cuanto al lugar ocupado por dicha ciencia. El tema tiene dos connotaciones, el problema de la ciencia y en particular el problema del conocimiento, se hacen estas distinciones simplemente para explicarse de la mejor manera. El punto radica en el estudio de varios elementos, por ejemplo el papel interesante juega el significado de Idea, dicho término, según García Morente (1985) es creado por Platón, y el significado es de ver. Desde la perspectiva del conocimiento esto se vuelve controversial por que la vista permite captar el mundo exterior, sin embargo el mundo que se capta por la idea es el de la noesis, contemplar las Ideas eternas.

El problema de la Matemática es ubicado en el cuadro que a continuación se plantea y es tomado del Diálogo de la República:



Como se observa en el cuadro, los objetos matemáticos, están en el mundo de las ideas donde se da la *noesis* (ver claramente, intuir la realidad auténtica), sin embargo hay una duda razonable por cuanto si son ideas no se admiten sino dentro de una razón discursiva o *diánoia (διάνοια)* como lo plantea Goñi (2002): *La razón discursiva (διάνοια) propio de las matemáticas, que son inteligibles y, para acceder a ellos, el alma se sirve de los objetos del mundo visible para llegar a ellos a manera de conclusión* (p.136) . Ahora bien, la pregunta importante es cómo se llega, el autor antes mencionado afirma que a la para las ideas se llega mediante la inteligencia pura o noesis (νόησις) la cual se atiende mediante la *dialéctica* sin necesidad de recurrir a las formas sensibles, la dialéctica en sentido de Platón es la depuración de las ideas, caso particular los diálogos. Es decir, mediante la pregunta y la repregunta Sócrates profundiza la temática, aunque algunas veces no concluya, sin embargo, hay casos en los cuales no se llega a ningún acuerdo como contesta Sócrates:

> Poco me importa; conversaré con él en otra ocasión, Menón. Por lo que a nosotros se refiere, en nuestro discurso hemos analizado la cuestión, y hablado como debíamos, se sigue que la virtud no es natural al hombre y que no puede aprenderse, sino que llega por

> influencia divina a aquellos en quienes se encuentra sin necesidad de inteligencia por su parte (Diálogo el Menón en Reyes, 1973, p. 378)

Desde un punto de vista controversial pareciera una pérdida de tiempo el discurso por cuanto no conduce a una respuesta certera, es decir: sin conclusión. Por lo cual, es bueno recordar el sentido prominente de filosofía, no se trata de una deducción o una inducción categórica como lo supondría algún método científico de actualidad, la tarea del filósofo es el de cuestionar la realidad y desde Sócrates el hacer evidenciar las ideas; de esta forma, no es extraña la salida sin aparentes conclusiones. Por otra parte Aristóteles manifiesta en crítica a Platón:

> A los seres matemáticos se les convierte en intermedios entre las ideas y los objetos sensibles formando una tercera especie de seres fuera de las ideas y de los seres sometidos a nuestros sentidos. Pero no hay un tercer hombre, ni un caballo fuera del caballo en sí de los caballos particulares. Por lo contrario, si no tiene esto lugar, ¿de qué seres debe decirse que se ocupan los matemáticos? (Aristóteles, 2006, p. 299).

La diferencia entre uno y otro estriba en la siguiente pregunta: ¿qué es la realidad en cuanto realidad? Es bueno aclarar que Platón mantiene un *realismo ingenuo*, realismo por cuanto asume en plenitud a la realidad en cuanto tal, es decir a las ideas; el mundo de las ideas para él es el verdadero y el mundo sensible es simplemente una "especie de copia", ¡y no muy buena!, del mundo ideal; es decir, hay una inversión en cuanto al sentido de la realidad como luego lo plantea en la famosa alegoría de la caverna, existe el mundo de la luz y existe la realidad sensible donde están los condenados que solamente ven el reflejo de la realidad auténtica. Sin embargo, la crítica aristotélica apunta a la existencia de una tercera realidad intermedia.

Desde esta perspectiva, volviendo a la temática en cuestión, la Matemática ocupará en la filosofía de Platón un puesto sin igual, especialmente la geometría. Cabe destacar que en los diálogos el elemento transversal gira en torno a las distintas consideraciones de la Matemática, desde la belleza plasmada en las formas y discusiones o las disonancia aparecidas en la aritmética en cuanto al advenimiento de los números irracionales a quienes García Bacca (1985) establece como caso "monstruoso" (άλογον), entendiendo desde esta perspectiva que no guardaba proporción y por tanto belleza, por cuanto para Protágoras uno de los grandes, de los llamados siete sabios quién le da un papel preponderante a la medida:

> Protágoras pasaba ya públicamente, por ser el autor de aquella sentencia "de todas las cosas, el hombre es medida"[13] , levantando así la palabra vulgar y culta de "medida" a palabra-concepto-norma de antropología y ontología. Palabra típicamente griega y proclamada como tal por algunos de los Siete Sabios. "Lo óptimo (αριστον) es la medida (μέτρον)" (García Bacca, 1980, p. 10).

Lo preponderante en el asunto, son las posibles consideraciones hermenéuticas que inmediatamente nos asaltan, por cuanto hay un elevar de lo "vulgar", si se quiere, a lo culto. Esto es clave en la referencia a los llamados Siete Sabios, es decir a Protágoras, por tanto no solamente hay un salto o elevación del término en cuanto tal sino el salto a lo místico. Lo denotado es la parte de la estética tras telón, no solamente lo óptimo en cuanto lo mejor, si de proporcionalidad se trata entonces el tema gira en torno a lo bello como sinónimo de perfección, por ello la perspectiva platónica de la geometría como forma perfecta. Pero lo más importante en cuanto al tema en desarrollo es la fortaleza que le asigna el mismo autor en cuanto al término de estética, por cuanto se parte del sentir, percibir y con lo referido por Protágoras no es simplemente el plano antropológico y o subjetivo, hay un elemento de medición que está tras bastidores como lo establece García Bacca (1980):

> *Principio general*: "El hombre es la medida de todas las cosas: en las que están siendo reales mide lo que tienen de ser; en las que no están siendo reales mide lo que tienen de no ser".
> *Secuela primera*: Luego los sentidos del Hombre son, en cuanto de Hombre, tienen triple función: 1.- antropo-métrica, 2.- antropo-geométrico-aritmética, 3.- antropo-ontológica.
> Y por una *tercera secuela*, perteneciente al orden conceptual verbal (λόγος), el término αϊσθησις no puede tener ni la significación vulgar ni aplicarse a una extensión o conjunto de aspecto de las cosas, tal cual la sostienen animales no racionales: de sentidos no mensurantes; y por no ser ellos mismo "medida" de todo, tampoco puede αϊσθησις tener

[13] Ἀντρωπος μέτρον πάντων

> la significación (comprensión) o alcance (extensión) que le den los sentidos y a los sentido por ellos que son hombres vulgares: ni geómetras ni antro-pómetras.
> En el texto traducido hallará el lector como "traducción" de αϊσθησις la palabra (nueva) de "sentiencia" en vez de la "corriente" vulgar y no definida, de "sensación" – otros traductores vierten αϊσθησις por percepción (p. 15).

Lo importante del asunto está en que, de alguna manera, al sentir, percibir o desarrollar el acto de la percepción (αϊσθησις - aistesis) hay una implicación de medir, en este sentido la estética es un acto de medición. Esto es clave para la discusión de Platón al querer deducir los entes matemáticos como realidades propias en sí como fuera de la naturaleza y en un mundo aparte. Pero, por otra parte el hombre como animal racional una de sus características es sentir y eso es un acto de medición como percibir. Por tanto en la medida mediante la cual se percibe una realidad hace una medición.

Podemos establecer pues, para Platón, la Matemática es la conclusión mediante la cual se llega a la forma perfecta, forma no en cuanto simple geometría de exposición de algo sino, por el contrario, la forma en cuanto perfección y acceso a la realidad en tanto que realidad. Cabe destacar, de igual manera, la influencia pitagórica en Platón; por tanto, no se trata de elementos en tanto que elementos como si fuese una especie de colección, se trata de un orden místico del cual se deriva la realidad, muy a pesar de ser una realidad no plena por ser copia para Platón hay un orden en cuanto a los números derivado del principio máximo, *el bien*. Como lo plantea Fraile (1956): *"La ciencia es una ascensión del alma hacia el bien"* (p. 32), esto ha de considerarse por otra parte en la paideia griega, pues el elemento final de la educación apunta a la virtud, el conocimiento como punto fundamental de ser del griego, la discusión sobre el saber y la sabiduría son los elementos fundamentales a los cuales aspira un ciudadano y por ende el ser sabio.

Lo interesante en el mundo griego, al menos para Platón, el acceso al conocimiento genera una virtud, la virtud está allí, en la aproximación al conocimiento, evidentemente conocer es ver, pero lo importante del conocimiento no es tanto el conocer en cuanto qué conocer, la implicación es: si conozco, entonces estoy obligado a vivir; ello es lo fundamental para el griego, si conoces vives, conocer la virtud es vivirla y proclamarla no hay diferencia entre conocer y hacer. Además el mundo está regido por la idea del Suprema del Bien:

> La idea de Bien es para el mundo inteligible lo que el sol para el mundo sensible. El sol es a la vez principio de la luz y principio de calor de vida. La IDEA DE BIEN es el sol del mundo inteligible… es la que da al espíritu la capacidad de comprender las cosas… ES EL PRINCIPIO DEL SER Y SU ESENCIA (Diccionario Espasa – Calpes, 1963, p. 32).

Esta claro, de esta manera y desde la perspectiva platónica, la realidad auténtica es la del mundo de las ideas y es por eso la ciencia es ascender a ese mundo, al de la realidad auténtica. Por esto los discursos de Sócrates en querer depurar las cosas y llegar al concepto o a la idea en tanto que idea. Corroborando lo planteado anteriormente en tanto que la dianoía como deducción y depuración para llegar al concepto, en este sentido Fraile (1956) establece: *La ciencia es una ascensión del alma hacia la verdad y el bien* (p. 32). Por tanto el ser matemático tiene sentido como estudioso y persona en búsqueda de la verdad, que accede a la idea de bien por ello la famosa década pitagórica:

*	UNO
* *	UNO + UNO (división del UNO) dos
* * *	UNO + dos
* * * *	dos + dos

De esta forma, el UNO configura el principio de todo, y el orden establecido por Platón como la Idea máxima el Bien de la cual participa el hombre por mímesis y anamnesis, es decir que, tanto por imitación como por recuerdo, se accede a la idea en tanto que idea, además utilizando el medio de la dialéctica como proceso para acceder a la verdad.

La realidad de los entes matemáticos en Platón cumple la función fundamental del conocimiento y de acceso a la verdad como formas puras y, sobre todo, al punto más importante el acceso al Bien, al principio a la Idea o Concepto

Un punto de conclusión es lo planteado por Morales (1997):

> El número es un ente racional, existe en sí y pertenece al mundo de las Ideas. En última instancia ellos son los utilizados en la realidad sensible por los artesanos y comerciantes en la construcción de objetos, medida de las cosas y en el comercio cantidad y valor de una mercancía (p. 37).

Por otra parte, la filosofía de Platón ha permanecido en algunos aspectos, y en la historia se desarrolló con mucha amplitud hasta generar un movimiento llamado neoplatonismo encabezado por uno de sus máximos seguidores como el caso de Plotino, al respecto refiere Goñi (2002):

> Plotino retoma el planteamiento henológico de Platón, según quedó planteado en el Sofista y el Parménides. La unidad de las Ideas queda garantizada porque todas ellas participan de la Idea de Bien (que a veces llaman lo Uno) lo cual está por encima del ser…
> Lo Uno está por encima de todo, por encima del ser y de la inteligencia, y justamente por eso causa de todo ser y de toda inteligencia (p. 268).

Nuevamente la influencia Pitagórica en la filosofía de Platón ahora establecida por un continuador de dicha escuela, cabe enaltecer la diferencia en años transcurridos hasta Plotino cuando ya la academia contaba con unos quinientos años de pensamiento. Lo interesante es desde luego, el surgimiento colateral de una nueva religión, el pensamiento cristiano, si se quiere, derivado del pensamiento judío aunque con marcadas diferencias. Lo importante es la perspectiva de lo supremo, en la filosofía de Plotino, es importante recordar el principio de emanación y del *nous*, lo uno está más allá, es el sustento y soporte de la realidad y por emanación es causante de todo ser.

> *Lo uno es todas las cosas y ninguna de ellas. Principio de todas las cosas, no es todas las cosas; pero es todas las cosas ya que todas en cierto modo vuelven a él; o más bien desde este punto no son aún, pero serán.*
> *¿Cómo vienen de lo Uno, que es simple y que en su identidad no muestra ninguna diversidad, ningún doblez?*
> *Porque ninguna está en él, todas vienen de él. Para que el ser sea, lo Uno no es el ser. El ser es como su primogénito*[14].

Este pensamiento refleja plenamente la influencia aristotélica como punto por cuanto el tiempo transcurrido de Platón a Plotino es distante, el segundo autor es ubicado como nacido en Egipto en el año 204 y fallece en el 270 después de Cristo, pero el elemento estudiado es lo concerniente a la Matemática resaltando nuevamente esta síntesis entre las distintas corrientes: pitagorismo, platonismo y aristotelismo. Sin embargo, el planteamiento fundamental de Plotino es el seguimiento y profundización de Platón.

Por otra parte es posible admitir el aspecto de potencia aristotélica y de la dínamis, es decir la capacidad de ser, siendo sin agotarse sus principios, la dualidad entre lo discreto y lo continuo, ver que en el fluir no es llegar a lo contrario, no es fluir para dejar de ser, el ser mismo es el fluir pero en términos de Aristóteles hay una potencia y acto, capacidad de ser siendo.

> Imagínate, en efecto, una fuente que no tenga un principio distinto de ella pero que se halla entregado a todos los ríos sin haberse agotado en ellos, sino permaneciendo ella misma en quietud; imagínate que los ríos salidos de ella estén todavía juntos antes de fluir uno en dirección y otro en otra pero como presintiendo ya cada uno dónde ha de enviar su respectiva corriente[15].

Este punto será nuevamente estudiado en la modernidad por Hegel en su idealismo. En este sentido, el asunto es importante por cuanto de este principio ontológico, todo brota del Uno, esto es la pura y real influencia mística pitagórica

[14] Referencia de Goñi Carlos al Texto de Plotino, Enéadas. Editorial Gredos. Madrid.
[15] Ídem.

pero llena del más absoluto racionalismo platónico, una auténtica *noesis* del principio de los principios el Uno, cuya subordinación es el ser como principio emanado. Ahora bien, este aspecto ontológico inmediatamente nos pone al frente del problema de cuál puede ser el origen de la Matemática. Asumiendo la parte racional porque este autor tiene también influencia aristotélica en cuanto al problema de la medición a partir de la sensación, hace su estudio y replantea las categorías aristotélicas pues a la pregunta sobre el Uno, Plotino responde: *La potencia de todas las cosas, sin la cual nada sería, como surge la luz del sol* (Goñi, 2002, p. 269). De esta forma, el principio originario de la Matemática sería el principio de los principios. Inmediatamente se puede advertir el origen de la aritmética, el uno como cardinal fundamental del cual puede deducirse cualquier tipo de relación de orden o de cualquier otro tipo. El Uno sería el cardinal originario y al mismo tiempo como fuente generadora del devenir. Esto no es más que volver a la década desarrollada por Platón. De Aristóteles asume también influencia de la potencia y de la dínamis como posibilidad del motor inmóvil.

SIGNIFICADO DE LA MATEMÁTICA EN ARISTÓTELES.

Plantear el problema de la Matemática en el estagirita, al igual que en su maestro, implica iniciarse por el punto clave, este no es otro que el de la teoría del conocimiento y especialmente con centro en el significado de ciencia, no es nada oculto la controversia entre los dos grandes del pensamiento helénico. El punto de partida de Aristóteles:

> El placer que nos causan las percepciones de nuestros sentidos es una prueba de esta verdad. Nos agradan por sí mismas, independientemente de su utilidad, sobre todo las de la vista. En efecto, no sólo cuando tenemos la intención de obrar, sino cuando ningún objeto práctico nos proponemos, preferimos, por decirlo así, el conocimiento visible a todos los demás conocimientos que nos dan los demás sentidos. Y la razón es que la vista, mejor que los otros sentidos, nos da a conocer los objetos, y nos descubre entre ellos un gran número de diferencias (Aristóteles, 2006, p. 41- 42).

Continuando con lo anterior, para Aristóteles la Matemática no está desvinculada de la realidad en tanto que naturaleza (Physis, φισις) y no como realidad de carácter ideal ajena al mundo natural o sensible; si existe una realidad, debe partir del objeto sensible y perceptible por nuestros sentidos. Por tanto, no hay otra vía de acceso al conocimiento, la experiencia prima cualquier otra vía por la cual sea posible acceder al conocimiento. De esta forma, el conocimiento se aprehende por los sentidos y luego pasa por una especie de filtro hasta llegar al *intelecto agente* el cual, termina de abstraer la "forma" para generar la imagen o concepto. En consecuencia, la existencia de una realidad entendida como Matemática debe estar inmersa en la realidad sensible (cosas) como tal.

> A los seres matemáticos se les convierte en intermedios entre las ideas y los objetos sensibles formando una tercera especie de seres fuera de las ideas y de los seres sometidos a nuestros sentidos. Pero no hay ni un tercer hombre, ni un caballo fuera del caballo en sí y de los caballos particulares. Por el contrario, si no tiene esto lugar, ¿de qué seres puede decirse que se ocupan los matemáticos? Evidentemente no es de los seres que conocemos por los sentidos, porque ninguno de ellos tiene los caracteres de los que estudian las ciencias matemáticas. Y, por otra parte, la ciencia que buscamos no se ocupa de los seres matemáticos, porque ninguno de ellos se concibe sin una materia. Tampoco recae sobre las sustancias sensibles por que son perecederas (Aristóteles, 2006, p. 299).

Al desarrollar un análisis de la crítica aristotélica al realismo de Platón realmente nos conduce a una especie de emboscada lógica, anuncia seguidamente que la ciencia encargada de hacer el abordaje temático no pueden estar sobre basamentos físicos ni sensibles y, de alguna forma, atañen al movimiento y a la percepción reconociendo que son cambiables. Lo pertinente del asunto es el reconocimiento también por parte de Aristóteles de la realidad y naturaleza distinta de los seres matemáticos. Planteando entonces, una alternativa de carácter metafísico, valga el término, acude inmediatamente a un supremo: La Filosofía como la ciencia a ocuparse de este asunto, para lo que manifiesta:

> Será, pues, la ciencia de los primeros géneros: estos géneros será la unidad y el ser, porque son los que principalmente abrazan todos los seres, teniendo por excelencia el carácter de principios, porque son primeros por su naturaleza: suprimid el ser y la unidad; todo lo demás

> desaparece en el instante, porque todo es unidad y ser… (Aristóteles, 2006, p. 300).

La unidad como principio inmediatamente remite a Pitágoras y su influencia en Platón con el UNO como principio generador. Lo cual va más allá de la dupla existencial aristotélica entre materia y forma. Toda materia posee una forma, o mucho mejor, toda materia es manifiesta en forma. En cuanto a la forma, no se trata para el investigar, de la forma geométrica (figura) a las que apunta su maestro aunque algunos autores como García Morente (1983) difiere:

> La palabra "forma" la toma Aristóteles de la geometría; la toma de la influencia que tiene la geometría sobre Sócrates y sobre Platón… La influencia de la geometría fue enorme, y Aristóteles entendió por forma, primero y principalmente, la figura de los cuerpos, la forma en el sentido más vulgar de la palabra, la forma que un cuerpo tiene, la forma como terminación límite de la realidad corpórea en el sentido de la estatuaria, en el sentido de la escultura… (p. 88).

El punto discordante, no es la forma geométrica o mejor dicho la figura, es bueno recordar: en Matemática la figura no es más que la proyección de un sólido sobre un plano; la figura tiene solamente dos dimensiones por estar en el plano o superficie, por el contrario, los sólidos apuntan al volumen y sus dimensiones son tres: alto, ancho y profundo. Por tanto la realidad en tanto que realidad no es plana, la forma tiene una caracterización más profunda. Desde esta perspectiva se asume un momento más allá y García Morente (1983) lo nombra en ese sentido:

> Aquello que hace que la cosa sea lo que es, aquello que reúne los elementos materiales, en el sentido amplio…, entrando también lo inmaterial. Aquello que hace entrar a los elementos materiales en un conjunto, les confiere unidad y sentido (p. 88).

Todo aquello lo cual es manifiesto, es manifiesto en tanto forma tiene, por cuanto la música mediante el sonido tiene una forma, aunque no es perceptible por la vista, en tanto no se vea la vibración, si es captable al sentido auditivo. Por tanto, la forma en Aristóteles difiere del planteamiento geométrico de figura. Además hay una incorporación importante en cuanto se le adhiere el sentido, la forma indica el sentido y finalidad. La cosa es, además siendo manifiesta su sentido: “cada cosa es lo que es porque ha sido hecha inteligentemente” (García Morente, 1983, p. 89).

Pero volviendo al problema del ser, este asunto se plantea en cuanto es lo más general y contradictorio, además porque termina “no siendo nada”, desde esta perspectiva lo desarrolla Weissmahr (1986) respondiendo a la pregunta por el conocer:

> El objeto propio de la metafísica… sólo se entiende adecuadamente lo que la expresión “ser” designa, si se parte de la idea de que no significa nada objetivo, nada que exista a la manera de las determinaciones particulares. Significa más bien lo ineludible y que no puede reducirse a ninguna cosa, cada condición condicionante y por lo mismo incondicionada en toda realidad, lo que nosotros suponemos necesariamente en todos nuestros actos conscientes y en cada uno de nuestros enunciados. El ser como tal no puede significar nada objetivo por el mero hecho de que designa lo que corresponde a todo lo que *es* de alguna manera… No solo pertenece al ser lo que nosotros pensamos, sino que el pensamiento mismo es una forma de ser (p. 67).

Cabe recordar inmediatamente el planteamiento de Parménides: *“el ser es pensamiento”*, desde esta perspectiva el asunto toma nuevamente el aspecto controversial, por cuanto el término se vuelve realmente confuso porque, al referirnos al término, indica por un lado que lo general es el ser, y esto no se refiere a una cosa en particular, inclusive va más allá de un objeto concreto, ser no es un objeto en tanto que objeto, Aristóteles se refiere a esto como un ente y Heidegger (1998): *“No sabemos lo que significa ser…* (p. 28) Sin embargo cuando surge la pregunta la respuesta es un asunto de *comprensión* de esta forma nuevamente determina el significado del término:

> Pero ya cuando preguntamos: ¿qué es “ser”?, no movemos en una comprensión del “es”, sin que podamos fijar conceptualmente los que significa el “es”. Ni siquiera conocemos el horizonte desde el cual deberíamos captar y fijar ese sentido. *Esta es la comprensión del ser mediana y vaga del factum* (Heidegger, 1998, p. 29)[16]

[16] Rivera hace una aclaratoria en cuanto al significado de *mediana* que transcribimos tal cual.

Al parecer la situación es todavía más compleja por lo profundo e incuestionable para algunos del pensamiento del gran filósofo de la modernidad, no obstante de esta temática lo importante para este caso en particular, es que a diferencia de otros el ser no es definible y tampoco conceptualizable, no es definible por cuanto se escapa a cualquier encierro mental, ya en el inicio del tema se advierte esta dificultad. No obstante y a pesar de todas las dificultades el problema tiene una solución, el tan famoso camino desarrollado por Heidegger y continuado por su alumno Gadamer, el problema del ser es uno de los grandes temas de la hermenéutica por cuanto se puede comprender y no una demostración.

En este sentido es clara la situación pues en la filosofía siempre se apunta a un quien y, en alguna, forma se quiere seguir sus designios. Por ello, Aristóteles asume los retos por cuanto nos hace volver al problema de la Matemática en tanto que Matemática, definirla desde el ser y la generalidad es privarla de su realidad. No se trata de algo fuera de lo físico porque el autor asume el mundo físico; sin embargo, lo plantea desde lo metafísico en el sentido de más allá, esto no le da una categoría de idealidad en el sentido de Platón, la situación sería en tanto a lo que Aristóteles llama la "capacidad de" es decir la potencia. La realidad para Aristóteles tiene una especie de dos momentos, el momento en que están contenido todas las posibilidades de ser y el momento de ser siendo. Esto nos conecta con lo anteriormente establecido en torno al significado de unidad como principio admitiendo como punto de partida lo establecido por Aristóteles (2006):

> Y si se admiten por principios la unidad y el ser, que son, al parecer, por excelencia los principios inmóviles, y si al mismo tiempo ninguno de estos dos principios es un ser determinado, una ciencia, ¿cómo existirán separados y en sí? Porque estos son los caracteres que buscamos en los principios eternos y primeros. Si, por otra parte, la unidad y el ser son el ser determinado y la esencia, entonces todos los seres serán esencias; porque el ser se dice igualmente de todos los

---

La palabra mediana corresponde al término alemán **durchschnittlich** *que significa literalmente "que hace un corte a través de algo" y podría traducirse como lo hace Gaos, por la expresión de "término medio"...*

seres, y la unidad de un cierto número… (p. 302).

De acuerdo con lo anterior se ha llegado a dos puntos importante, el del ser y el de la unidad, como lo refiere el mismo autor: *principios inmóviles*, esa inmovilidad tiene un sentido significativo, advirtiendo que provienen de Parménides y Platón en cuanto a la corruptibilidad, en ese sentido el ser es y no puede ser al mismo tiempo por cuanto se establece una contradicción. El otro aspecto importante es por cuanto Aristóteles inicia una seria travesía de lo físico a lo metafísico como ya se dijo anteriormente. Una cosa es plantear el conocimiento como abstracción de las cosas y otra es ver la independencia de la Matemática de los elementos físicos; ello, en alguna forma, sería la influencia de su maestro, aun cuando no la duplicación de la realidad, esto lo establece de la siguiente manera:

> Hay una ciencia del ser considerado en tanto que ser e independiente de todo objeto material: veamos pues si es preciso admitir la identidad de esta ciencia con la física, o más bien su diferencia. La física trata de los seres que tienen en sí mismos el principio del movimiento. *La matemática es una ciencia teórica ciertamente y que trata de objetos inmóviles; pero estos objetos no están separados de la materia…* (Aristóteles, 2006, p. 313).

El asunto es realmente contradictorio, por cuanto al continuar con la referencia el mismo autor plantea la existencia de una tercera ciencia diferente a la física y a la matemática llamada: La ciencia del ser independiente e inmóvil (Aristóteles, 2006, p. 313), a esta ciencia la llama la Teología, por tanto según el estagirita existen tres ciencias como son: la Física que estudia el movimiento de los objetos, la Matemática que estudia los objetos inmóviles, pero no separados de la materia y la Teología que sería el estudio del primer principio o del principio por excelencia.

La sospecha es si, en alguna manera, había la complicación por parte de Platón en admitir una especie de intermedio donde se fundamentaba la Matemática como dianoía, punto intermedio para accesar a la noesis. Aquí no está claro cómo el principio está en las cosas pero al mismo tiempo plantea una especie de inmaterialidad. Volviendo a referirnos al principio de unidad, o de clase.

> Aristóteles plantea tres tipos de conocimientos: *el teorético, el poiético y el práctico.* El primero tiene que ver con la *episteme*, con la ciencia; el segundo la *techné*, con el arte y, el tercero con lo práctico, es decir con la ética. Si bien es cierto que todos estos planos son de total interés, el que resulta más relevante es el teorético para responder a la pregunta por la matemática[17].

> Aristóteles desarrolló una física cualitativa, el mundo supra-lunar era explicado sólo en términos de actualidad; es decir, que no tenía cambios, mientras que el mundo sublunar efectivamente estaba en acto, por su existencia misma, pero se trataba de un acto en potencia, esto es: siempre estaba en movimiento, todo esto era explicado por conceptos como: acto, potencia, finito, infinito, movimiento, cambio, sujeto, accidente, lugar, continuo, contrario, vacío, lleno, etc. El análisis de cada uno de estos conceptos obliga a que en su comprensión se involucren las teorías matemáticas y geométricas de la época[18].

De este modo Aristóteles para aquellos quienes asumen e interpretan este pensamiento un punto clave es el de las categorías como predicables de la sustancia en especial sobre la "cuantidad" donde se deduce lo que puede decirse o predicarse del ente y que le es característico, frente a ello define dicha categoría de la siguiente manera:

> La cantidad es discreta o continua. Se compone ya de cosas cuyas partes tienen entre sí una relación de posición, ya de cosas cuyas partes no tienen posición respectiva.
> Son cantidades discretas, por ejemplo el número y la palabra, son cantidades continuas, la línea, la superficie, el cuerpo y además el tiempo y el espacio (Aristóteles, 1992, p. 30).

Si algo se debate hoy día es la pertinencia y el acuerdo entre los matemáticos contemporáneos de la dualidad matemática entro lo continuo y lo discreto, uno da origen a la geometría y el otro a la aritmética, son las dos perspectivas de lo que puede decirse de una realidad como quantum, como paquete, por lo que prosigue el

[17] http://www.virtualum.edu.co/hexa/nro54/aristoteles.pdf
[18] http://www.virtualum.edu.co/hexa/nro54/aristoteles.pdf

estagirita:

> En efecto, no hay para las partes del número ningún término en común en que ellas se unan. Así cinco, es ciertamente una parte de diez, pero cinco y cinco no dependen el uno del otro mediante ningún término común: son ambos cantidades discretas. Tres y siete tampoco se ligan mediante un término común, y puede decirse en general respecto al número, que no es posible ligar sus partes por ninguna relación común; estas partes son siempre cuantidades discretas (Aristóteles, 1992, p.30)

Desde este punto de vista, la construcción de la aritmética es clara, lo discreto, ninguna relación de orden apunta a la cardinalidad. Por otra parte, muy interesante es cuando se habla de lo común, al apuntar a la imposibilidad de reunir por lo común lo hace en sentido de la autonomía atómica de cada número, un tres es independiente de otro tres, pero ambos suman seis que al mismo tiempo es independiente y si se quiere monádico con respecto a cualquier otro número incluso igual o equivalente por ser discreto, lo clave del asunto es que la posibilidad de reunir y conjeturar es el criterio insipiente de *clase* que sospechamos se encuentra en la perspectiva aristotélica en el sentido de la cantidad discreta pero siempre la posibilidad de una colección con la posibilidad de agregar o desagregar para generar una colección distinta e independiente a lo que vuelve a plantear:

> Con respecto al número sucede todo lo contrario; sería imposible mostrar, ni cómo sus partes tienen entre sí una relación de posición, ni dónde están, ni cómo se ligan las unas con las otras. La misma dificultad se produce respecto a las partes del tiempo; porque ninguna de las partes del tiempo es permanente. Ahora bien; ¿lo que no es permanente puede tener una posición? Podría decirse más bien que las partes del tiempo tienen entre sí un cierto orden, puesto que en el tiempo esta parte es anterior y aquella posterior. Lo mismo sucede con el número, puesto que el uno va antes que el dos y el dos antes que el tres, esto si se quiere es una especie de orden, pero no una posición (Aristóteles, 1992, p.31).

Lo anterior si confirma la especie de mónada conformada por cada número, por ello aunque admite una especie de orden en cuanto ordinalidad, el problema a manera de ver es de la cardinalidad y la propia autonomía del número que lo hace discreto. Lo que no puede perderse es que estos elementos son característicos de los objetos y son predicables, cabe recordar lo preestablecido en la teoría del conocimiento aristotélico, la abstracción es el camino para alcanzar el concepto, aunque el fin sea una idea de característica platónica el método es desde los objetos concretos hacia los universales. En ese aspecto Aristóteles pasa de la cantidad a la cuantidad, no se trata de una especie de trabalenguas; por el contrario, es un cambio de lo cuantitativo a lo cualitativo una especie de abstracción y generalización, de una cantidad o número, discreta en su ser a un universal o cualidad del ser en reunión de seres o en el establecimiento de categorías que pueden predicarse de muchos seres. Por ello Aristóteles determina nuevamente su significado:

> La cuantidad no parece ser susceptible de más y de menos; por ejemplo una cosa de dos codos no tiene estos dos codos ni más ni menos que otra de la misma dimensión. Lo mismo sucede con los números: tres no es mas que tres al igual que cinco es cinco, y recíprocamente… La cuantidad no es susceptible de más ni de menos…
> La propiedad más especial de la cuantidad es la de ser igual o desigual (Aristóteles, 1992, p. 33).

De esta forma, la cuantidad es algo predicable del ente, es una de las llamadas categorías y podemos asumirla como el punto de partida de la Matemática, porque la ciencia que se ocupará de establecer el quantum en el objeto será la Matemática aunque el autor desarrollará con mayor fertilidad la física. Sin embargo, siempre quedará la influencia de su maestro Platón y con toda el respeto, querrá dar explicaciones del mismo punto pero desde diferente perspectiva aun cuando al final coincidan.

Volviendo al problema sobre el Ser y su aspecto metafísico, el asunto se convierte en trascendental cuando la respuesta apunta no al centro del Ser en cuanto Ser, sino a lo que se puede decir del Ser, por cuanto podía responder a la dualidad potencia – acto y a problemas teológicos como el Motor – Inmóvil, Aristóteles desarrolla una tesis interesante por cuanto acepta la corruptibilidad de los cuerpos y ve, en Platón la incorruptibilidad estando en lo ideal. Sin embargo, como se ha referido el punto final tanto en Aristóteles como en Platón son los Conceptos Universales, en este sentido hay coincidencia. Entonces una de las salidas interpretadas es lo que se puede decir del ser, ya se evidenció la existencia de una ciencia encargada de estudiar los principios, además, mientras más tiende a los principios primigenios más fortaleza tendrá. Por ello la pregunta sobre el Ser es fundamental, cuando se intenta responder el problema se traslada al verbo *es*, en este momento surgen las llamadas categorías, siendo estas maneras de cómo puede decirse algo o, mejor dicho, cómo puede describirse algo en función de su actuación, eso es referible al ente en particular y no al ente en cuanto ente (el ser).

De acuerdo con lo anterior se ha llegado a dos puntos importantes, el del ser y el de la unidad, como lo refiere el mismo autor: *principios inmóviles*, esa inmovilidad tiene un sentido significativo, advirtiendo su proveniencia de Parménides y Platón en cuanto a la corruptibilidad, en ese sentido el ser es y no puede ser al mismo tiempo por cuanto se establece una contradicción. El otro aspecto importante es por cuanto Aristóteles inicia una seria travesía de lo físico a lo metafísico como ya se dijo anteriormente. Una cosa es plantear el conocimiento como abstracción de las cosas y otra es ver la independencia de la Matemática de los elementos físicos; ello, en alguna forma, sería la influencia de su maestro, aun cuando no la duplicación de la realidad, esto lo establece de la siguiente manera.

Aun cuando se intente cuidar los aspectos ahora considerados metafísicos como establecimiento diferente a los inicios de la metafísica aristotélica por cuanto en la actualidad dicha terminología es distinta, cabe destacar la famosa connotación de más allá de la física y no más allá de lo real, pensar desde la perspectiva aristotélica la Matemática prácticamente se impone como exigencia de estudio de relaciones de la realidad física, dicha realidad puede ser caracterizada para poder ser estudiada y allí donde se inicia a la necesidad imperiosa de un estudio con determinados principios que atienden a un marco de pensamiento que hace posible la comprensión de la realidad en cuestión y en atención a la actuación y comportamiento de la misma.

RACIONALISMO E IDEALISMO COMO PERSPECTIVAS DE SOLUCIÓN

Si algunas corrientes filosóficas mantienen fuertes nexos a favor de lo metafísico en la Matemática son las corrientes Idealista y Racionalista, por ello es importante iniciar un estudio de los fundamentos de dichas corrientes. Estas dos alternativas no son separadas pero sí conjuntas cuyo elemento fundamental es el pensamiento dando lugar al sitio donde, para muchos, se da la Matemática en tanto que Matemática, algunos como Badiou (2002) refieren la Matemática como un pensamiento. Por otra parte hay autores como Verneaux (1989), quien establece una especie de nexo entre uno y otro, en particular el idealismo como consecuencia lógica del racionalismo. Del mismo modo, determinar qué autores pertenecen a una u otra corriente filosófica es comprometedor, en ese sentido pudiéramos conjeturar casos especiales como Platón donde algunos lo refieren tanto a una corriente como a otra.

Tal vez, lo más acertado sea plantear la perspectiva de Hessen (2000), quien ubica al racionalismo desde el punto de vista de origen del conocimiento y al idealismo como una solución metafísica, es decir la primera posición como elemento epistemológico donde se origina el conocimiento y la segunda sería una respuesta.

Por lo que interesa a la investigación desarrollemos a continuación ambas posturas, entablando la consecuencia de uno frente al otro. Lo común del asunto es la ubicación de la realidad Matemática en ambos pensamientos, tanto en uno como en otro la perspectiva de los objetos matemáticos como entes de razón e idealidades estará siempre presente.

EL RACIONALISMO, ENTES DE RAZÓN

Como se ha establecido en la introducción a esta temática, advertir la definición partiendo del pensamiento de Hessen (2000):

> La posición epistemológica que ve en el pensamiento, en la razón, la fuente principal del conocimiento humano, se llama racionalismo (de

ratio = razón). Según él, un conocimiento sólo merece, en realidad, este nombre cuando es lógicamente necesario y universalmente válido. Cuando nuestra razón juzga que una cosa tiene que ser así y que no puede ser de otro modo (p. 40).

El racionalismo se presenta como una perspectiva muy interesante de la modernidad, los principios de la razón y la visión de una explicación distinta del mundo abren espacios distintos para reinterpretar la lógica. Inmediatamente se advierte una superación del mundo místico de la escolástica y la búsqueda de una ciencia universal, la salida la advierte inmediatamente Vernaux (1989):

> Las matemáticas son para Descartes este tipo de ciencia, pues son a la vez rigurosas y progresivas. Para que el conocimiento sea científico, en cualquier campo, pero especialmente en física y metafísica, debe desarrollarse a priori, partir de ideas claras y distintas captadas por intuición, y deducir las verdades por orden, como la serie de los teoremas de la geometría (p. 55).

Lo importante de la conjetura anterior y, en especial, para Descartes, personaje de suma relevancia, como inicio de la modernidad es la *garantía de la certeza* como principio fundamental de la ciencia y no de la verdad ontológica. Por ello, es interesante recordar el reordenamiento de la razón ya no en función de una silogística escolástica, sino para dar explicación de los fenómenos partiendo de lo conocido a lo desconocido, la silogística solamente daba explicaciones a los principios partiendo del género, ahora será un riel por donde transitar para partir de las causas y controlar los efectos, en este aspecto Cassirer (1986) advierte un distanciamiento del uso de la silogística y una reordenación del cómo aparece una nueva manera de ver la lógica.

> En la repudiación de la dialéctica, en la recusación del silogismo como método fundamental del conocimiento, se dan la mano el escepticismo y la ciencia de la experiencia, el ideal histórico del humanismo y la nueva filosofía de la naturaleza.
> Durante algún tiempo, parece como si esta negación representase la última palabra, el fallo inapelable, como si la observación directa de las cosas viniese a desplazar y a sustituir definitivamente a la reflexión en torno a la esencia y a las leyes de entroque de los conceptos. El espíritu no necesita seguir siendo educado en la dialéctica: se enfrenta

> directamente a la *experiencia* exterior e interior, que abre ante él una fuente más copiosa y segura de conocimiento… Una nueva *lógica* de la investigación (p. 447).

Aunque al parecer se diera una contradicción, es mucho más tarde cuando se niega la metafísica, el advenimiento de Descartes y Newton generan expectativas donde el punto de encuentro es la superación de encierro metafísico del género para poder desarrollar la ciencia, la lógica sigue siendo la lógica y su utilidad ahora tiene un sentido más amplio por cuanto ahora da explicaciones a la realidad física como el caso de Newton. La Matemática no pierde su sentido metafísico, ahora ella se establece como referencia obligatoria para la ciencia como lo refiere nuevamente Verneaux (1989):

> La idea de una Matemática universal pasa por Spinoza, que expone su *Ética en Sentido Geométrico*; después a Leibniz que sueña con un álgebra general que construya la ciencia integral por una simple combinación de signos, y por último a Wolf, cuya metafísica se desarrolla a priori, sobre el modelo de las matemáticas. Leibniz también vuelve a tomar el innatismo; para él todas las ideas, a fin de cuentas, son innatas, incluso las representaciones sensibles; pero el innatismo es solamente virtual, y el espíritu actualiza las ideas que lleva en sí por una espontaneidad que es el fondo de su naturaleza (p. 55).

Ciertamente, uno de los representantes máximos de esta corriente epistemológica será Inmanuel Kant, a quien haremos un apartado especial más adelante. Pero volviendo a la problemática en cuestión, el racionalismo puede comprenderse como una metodología de la deducción o un estrategia que permite analizar la realidad con una sistematicidad, periodicidad y en especial argumentaciones acordes a la racionalidad requerida para llegar a la certeza, no apunta a una ontología de la verdad, se perfila hacia la eficiencia de la certeza y es este aspecto el elemento de la Matemática se convierte en los rieles fundamentales para alcanzar la realidad y dar explicaciones acertadas sobre el mundo físico, en este sentido: *La ciencia consiste en juicios necesarios y universales, ya que no se limita a examinar los hechos, sino que enuncia leyes* (Verneaux, 1989).

Por otra parte, frente al pensamiento en cuanto tal, según Hessen (2000):

> El pensamiento impera con absoluta independencia de toda experiencia, siguiendo sólo sus propias leyes. Todos los juicios que formula se distinguen, además por las notas de la necesidad lógica y la validez universal (p. 41).

Dos elementos se distinguen inmediatamente en la referencia, el primero es la independencia del pensamiento, lo cual nos lleva a los previos de Parménides, pensar es significativamente fundamental, la ciencia se montará en un pensar y escudriñar para encontrar explicaciones del comportamiento de la realidad, no desde lo ontológico, si se quiere desde lo fenomenológico. Por ello el principio de causalidad también es superado en cuanto para la ciencia cada causa tiene como consecuencia un efecto. Si se logran determinar y esclarecer las causas, los efectos serán controlados. Este fue el gran descubrimiento y, al mismo tiempo, el sueño más ideal del mundo moderno, llegar a las causas para establecer los efectos.

Sin embargo, es claro que el mundo físico es permanente cambio y fluir, el pensamiento garantiza la permanencia, por ello lo lógico es válido independientemente de la experiencia, un caso fundamental ha sido el desarrollo de la Matemática contemporánea, en muchos casos se ha iniciado como elucubración de…, luego la historia ha fijado sus aplicaciones; sin lugar a dudas, si una idea no tiene aplicación inmediata ello no significa su inutilidad. Caso particular el de los soñadores como Julio Verne, hoy nadie cuestiona que sus ilusiones en algunos aspectos eran válidas. Por ello para el racionalista la única fuente del conocimiento seguirá siendo el pensamiento y por ello se contrapone a la corriente experiencial del empirismo. Como lo plantea De Alejandro (1969):

> El empirismo jamás nos dará una verdad necesaria y eterna; es una suma de casos y ejemplos que, bien puede proporcionarnos "verdades de hecho", pero jamás "verdad de razón", diríamos, la verdad "verdadera". Las verdades eternas y universales sólo nos pueden venir matemáticamente por las "verdades de razón"; por eso una prueba auténtica sólo se puede alcanzar por intuiciones racionales de principios internos (p. 222).

Este planteamiento inmediatamente nos lleva al siguiente punto, pues parte del principio de inmanencia y es donde del racionalismo se llega al idealismo. Sin embargo, como elemento de reflexión, el racionalismo advierte el problema del conocimiento sensitivo, la pregunta es cuestionar la posibilidad de una Matemática que parte de la experiencia y es admitida en el intelecto.

Por tanto es posible plantear el ideal del racionalismo como lo define García Morente (1983):

> El ideal racionalista, consiste, pues en que el conocimiento humano llegue a estructurarse del mismo modo como lo está la matemática, como lo está la geometría, el álgebra, el cálculo diferencia y el cálculo integral. Este es el momento más sublime de la física matemática; es éste el instante en que todas las esperanzas están permitidas al hombre y en que esas esperanzas parecen tener, de un momento, ya, un cumplimiento tan extraordinario que se toca, por así decirlo, el momento en que el hombre va a poder alcanzar una fórmula matemática que comprenda en brevedad de sus términos el conjunto íntegro de la naturaleza (p. 181).

El punto es clave y determinante, pero el problema es cómo se advierten los objetos matemáticos, he aquí la gran pregunta, ¿son deducidos por la razón o son evidencia a priori? En este sentido como lo afirmó al inicio Hessen es una postura epistemológica que permite admitir el origen del conocimiento fundamentado en la *razón*, incluso haciendo referentes a Sto. Tomás de Aquino, no cualquier razón sino la *recta ratio,* una especie de norma a priori generadora de lo que algunos determinan como *sentido común*, al mismo tiempo da fundamento ontológico a los juicios. En este sentido el racionalismo se ajusta a un pensar lógico deductivo-inductivo desde un principio a priori llamado *sentido,* el cual no permite la desviación o descarrilamiento de la concatenación con la cual se determina una verdad, una certeza, o se desarrolla una demostración. Ahora bien, el modelo a empeñar es el de la Matemática como soporte de cualquier otra ciencia, sin embargo al referirnos a los entes u objetos matemáticos, no son mas que realidades de la razón, generadas y admitidas casi por deducción lógicas gracias al principio fundamental del sentido común o la recta ratio escolática.

El ser de los entes matemáticos son principios ideales asumidos racionalmente a priori, sin embargo no pertenecen a un mundo de las ideas como en Platón, pertenecen al mundo de la razón y su existencia es consecuencia de la necesidad lógica necesaria para el desarrollo del pensamiento y la generación de la Matemática. De esta forma, como aspecto epistemológico, hay una admisión fenomenológica de la realidad Matemática, hay una manifestación de la razón y hay una exigencia lógica de esa existencialidad; aún más, hay una aplicación en el mundo científico de dichos entes. Son tan reales pues le dan fundamento a la ciencia y en especial a la física, no existe física sin Matemática, la alquimia generó la química cuando la Matemática la fundamentó. Ir contra la razón y la Matemática sería una vuelta al oscurantismo mítico, pues la energía, la transformación y la argumentación científica tendrán siempre una arista Matemática como riel fundamental para considerarse Ciencia.

Es posible concluir: la razón en su inmanencia construye los entes de la Matemática por exigencia lógica. La realidad Matemática es la construcción del yo como consecuencia de la necesidad lógica desarrollada por la razón.

EL IDEALISMO, IDEAS Y OBJETOS MATEMÁTICOS

Ahora bien, aunque cuando se habla de idealismo, el realismo ingenuo de Platón salta a la palestra, no menos idealistas son las propuestas de la modernidad en pleno como el caso de René Descartes:

> Me complacían, sobre todo las matemáticas, a causa de la evidencia y certezas de sus razones, pero no advertía todavía su verdadero uso, y, pensando que no servían más que para las artes mecánicas, me admiraba de que siendo tan firmes y sólidos sus fundamentos, no se hubiese edificado sobre ellos nada más elevado (1983, p. 48).

La referencia no es otra que la afección positiva de Descartes en su obra magna, el Discurso del Método, acerca de los asuntos de la Matemática. Inclusive, habla de los fundamentos. Sin embargo, cuando al estudio se dirige, dicho autor, no establece fundamentos de la misma, por el contrario las envía a la *res cogitans,* el problema es que de ser así, son ideas claras y distintas pero innatas. De esta forma es posible establecer un análisis sobre los alcances del idealismo y las ideas matemáticas implícitas en ello.

Desde la perspectiva de Hessen (2000) hay varias posturas:

> La palabra idealismo se utiliza en sentidos muy diversos. Hemos de distinguir principalmente entre idealismo en sentido *metafísico* y en sentido *epistemológico*. Llamamos idealismo en sentido metafísico a la convicción de que la realidad tiene por fondo fuerzas espirituales, potencias ideales… El idealismo epistemológico. Éste sustenta la tesis de que no hay cosas reales independiente de la conciencia… sólo quedan dos clases de objetos, los de la conciencia (las representaciones, los sentimientos, etc.) y los ideales (objetos de la lógica y la matemática) (p. 66).

La situación apunta al segundo aspecto, es decir, lo referido por el autor como idealismo epistemológico y cuyo contenido son los objetos de las dos ciencias antes consideradas, la existencia autónoma e independiente pero, en nuestra conciencia de realidades que al mismo tiempo dependen del principio de inmanencia, va más allá de lo psicológico por cuanto la conciencia es objetiva y lógica. En ese particular ya Baruch Espinosa se adelantaba: *una razón clara es infalible*[19]. Lo importante de este asunto es que desde la razón construyen la ciencia, por eso seguidamente Leibniz proclama la existencia de dos tipos de verdades: las verdades de hecho las cuales se deducen del mundo físico y que son relativas por cuanto son variables en el sentido de no una certeza absoluta y las verdades de carácter lógico matemático llamadas verdades de razón. En referencia a estos plantea Fatone (1969):

> Ese mundo de la razón, que hace posible la ciencia, no proviene de los sentidos. La fórmula según la cual "nada hay en el entendimiento que antes no haya estado en los sentidos", debe ser completada así: "Nada hay en el entendimiento que antes no haya estado en los sentidos, menos el entendimiento mismo. La certeza de las *verdades de razón,* universales y eternas es independiente de los sentidos (p. 133).

La ciencia de la experiencia se hace posible en cuanto a las verdades de razón lo exigen. Si algo tiene la ciencia moderna como fundamento es el aspecto matemático, como lo establece Aubert (1987) la *matematización* de la naturaleza. Podemos inferir que Newton fue la cúspide, independientemente de Leibniz, para su *Principia de Philosophía Naturalis,* era necesaria una Matemática más allá de Copérnico, Kepler y Galileo. El paso trascendental de Descartes en darle ubicuidad en el plano de espacio y tiempo a las cosas con la geometría que iba más allá de regla y compás para una demostración permitiendo un álgebra de ecuaciones y funciones en un plano interpretado de una manera distinta. Lo importante del asunto fue la capacidad de Newton en generar una Matemática que respondiese, en ese momento trascendental, a sus necesidades. En este aspecto el cálculo diferencial planteado fue una manera de explicar el movimiento, la existencia de un diferencial no es más que la explicación del desplazamiento de una partícula a en un tiempo establecido, si el movimiento es acelerado entonces aparece la descripción de una curva parabólica. En ese sentido la Matemática surge de la necesidad humana de dar explicaciones a la realidad. El problema está en de dónde surgieron los pensamientos de Newton, fue

[19] FATONE Vicente (1969). *Lógica e introducción a la filosofía*. Editorial Kapelusz. Buenos Aires.

una creación de su propia inmanencia, fue una abstracción de la realidad como lo plantearía Aristóteles o simplemente una idea del mundo platónico.

Desde esta perspectiva uno de los fundamentos del idealismo es claramente el principio de inmanencia, definamos entonces su significado. En este sentido Verneaux (1989) establece lo siguiente para el fundamento del idealismo:

> Los sistemas son muchos y diversos, pero los argumentos empleados para fundamentar el idealismo de estos sistemas son siempre los mismos y casi idénticamente formulados…
> En el fondo, no hay más que un argumento, y esa especie de intuición o de evidencia primera que se llama en nuestros días el *principio de inmanencia.* Se explica en dos principios anexos el principio del *fenomenismo* y el principio de *relatividad* (p. 72).

El asunto es realmente controversial y dialéctico, sin embargo, siguiendo a lo tradicional con la famosa sospecha contra el empirismo argumentando que "*nada hay en el intelecto que antes no haya estado en los sentidos que el conocimiento mismo"*. Volviendo a la antigüedad con Parménides cuyo principio es: *el ser es pensamiento*, aquí se inicia el problema del idealismo. Además dando prioridad al fenómeno y la intuición no conocemos la cosa en sí, sino simplemente su manifestación, por tanto el problema está en esa actitud de intuición sensible donde el conocimiento como lo establece claramente Kant, comienza por los sentidos pero no se reduce a ello. Sin embargo la referencia planteada nuevamente por Verneaux (1989) indica con respecto a Kant que:

> Es evidente que no podemos sentir fuera de nosotros. Nunca tenemos relación más que con nuestras representaciones. En cuanto a saber lo que pueden ser las cosas en sí, está indudablemente fuera de nuestro conocimiento (p. 63).

Por tanto el centro fundamental del idealismo es el entenderse con las representaciones ideadas por mí de la realidad externa. Mi inmanencia es prominente frente a cualquier perspectiva externa, la cosa existe porque yo la he "formalizado",

---

Argentina.

es decir la he conocido y generado de ella una idea o representación. El problema inmediato va a la situación de Descartes por cuanto dichas ideas son innatas, es decir ya están presentes en el entendimiento humano como parte propia del ser, es una especie de herencia, sin embargo el problema no está en tanto que ideas, sino como se configuran las ideas de la Matemática y sus objetos. En este particular la Matemática es la razón fundamental de la ciencia como lo plantea Fichte (citado por Verneaux): *"la labor de la filosofía es un análisis reflexivo del espíritu. La ciencia encerrando los fenómenos en una red de relaciones matemáticas, construye y define el mundo verdadero, el objetivo y real* (p. 71). La referencia lleva a dos situaciones, la primera es apuntar directamente al mundo del espíritu con toda la racionalidad y categoría existencial, para estos autores llamados del clasicismo alemán, el mundo del espíritu y las ciencias del espíritu son en verdad punto centrales de su pensamiento como lo establece el camino desde Kant hasta Heidegger y Gadamer, no se trata de cualquier tradición, es, si se quiere con mucho respeto la tradición, más poderosa centrada en la razón como culmen del pensamiento humano a partir del siglo XVII, esto no quiere decir que no hubo pensamiento en otras latitudes, simplemente aducimos a la centreidad de dicho pensamiento en la razón como principio básico y fundamental. En ese sentido el asunto nuevamente apunta al campo ontológico, con la autonomía de la existencia independiente del mundo físico.

El segundo aspecto es la categorización de ciencia de lo físico a partir de elementos metafísicos. La concreción de un mundo físico determinado por los entes ideales, por tanto la realidad en tanto que realidad científica estará determinada por razones metafísicas o entes de razón.

Desde esta perspectiva se establecen elementos interesantes como los universales, lo universal surge como característica fundamental del conocimiento desde el idealismo, las verdades de razón tienen un carácter universal, en el caso particular de la Matemática esto es garantía. Por otra parte cabe destacar la dualidad del pensamiento idealista, por un lado la existencia de una postura psicologista o subjetivista:

> Las cosas no son nada más que contenidos de la conciencia. Todo su ser consiste en ser percibidos por nosotros, en ser contenidos de nuestra conciencia. Tan pronto como dejan de ser percibidas por nosotros, dejan también de existir…
> El representante clásico de esta posición es el filósofo inglés Berkeley. El ha acuñado la fórmula exacta para esta posición: esse = percipi, el ser de las cosas consiste en ser percibidas (Hessen, 2000, p. 68).

Inmediatamente se hace la siguiente acotación, la percepción de la que se habla no tiene que ver con el empirismo, no es sensación como lo haría el colega escocés Hume, esta percepción es a la conciencia, no hay un filtro llamado sentido mediante el cuál las cosas son sentidas y llevadas al intelecto, en este caso no. Las cosas son inmediatas a la conciencia quien desde sí las advierte en el conocimiento y les da el sentido necesario de existencia ante el yo pensante y creador. Nada existe sin que la conciencia lo determine, esto corrobora lo antes determinado por Verneaux (1989) sobre el principio de inmanencia, el yo no requiere salir al encuentro con el objeto exterior, lo intuye desde sí mismo, pero pasemos a la segunda vertiente del idealismo y que va muy emparentada con el racionalismo, el idealismo objetivo o lógico y diferente del idealismo subjetivista:

> El idealismo objetivo o lógico es esencialmente distinto del subjetivo o psicológico… El punto de partida es la conciencia objetiva de la ciencia. El contenido de esta conciencia no es un complejo de procesos psicológicos, sino una suma de pensamientos, de juicios. Con otras palabras: no es nada psicológicamente real sino lógicamente ideal; es un sistema de juicio…
> No reduce las cosas al ser percibidas, distingue lo dado en la percepción de la percepción misma… Considera como el problema del conocimiento definir lógicamente lo dado en la percepción y convertirlo de este modo en objeto de conocimiento…
> El idealismo lógico es llamado *panlogismo*, puesto que reduce la realidad a algo lógico… "El ser no descansa en sí mismo; el pensamiento es quien lo hace surgir" (Hessen, 2000, p. 67 – 68).

Como puede observarse si algo es lógicamente pensable, definible y conceptualizable es la Matemática, por ello lo importante del racionalismo al establecer su realidad como entes de razón. Por ello nuevamente referimos a Hessen (2000):

> La idea de un objeto independiente del pensamiento, no encierra, pues, ninguna contradicción, porque el pensamiento, el ser pensado, se refiere al contenido; mientras la independencia con respecto del pensamiento, el no ser pensado al objeto (p. 70).

Esto se da cuando hay referencia y representación de un objeto ante la conciencia que lo deduce lógicamente, por ello la Matemática brota como lo más objetivo, es establecida como consecuencia lógica del pensamiento, esta no requiere de ser representación de la realidad sensible, es autónoma, una esencia pura y natural, desde esta perspectiva es innata, no existe como realidad platónica, no hay un mundo etéreo, es una realidad objetiva creada por la razón humana. Esto se explica en razón del principio de inmanencia. No obstante, se hace a continuación una revisión más exhaustiva de algunos pensadores catalogados de idealistas como son Descartes, Ficthe y Hegel.

FILÓSOFOS REPRESENTANTES DEL RACIONALISMO – IDEALISMO Y SU CONCEPCIÓN DE LOS OBJETOS Y ENTES DE LA MATEMÁTICA

RENÉ DESCARTES.

Dentro del mundo de la Matemática hay filósofos destacados, su aporte muchas veces no es da manera directa a la ciencia en cuanto ciencia sino a la episteme científica. Por otra parte, hay elementos en los que autores coinciden en enmarcar a un connotado filósofo en una corriente en particular, sin embargo es muy difícil enmarcar en una única corriente a un autor en específico como el caso de René Descartes.

En Descartes hay características importantes, muy particularmente su postura frente a la concepción del mundo, *res cogitans* y *res extensa*. Además de su trascendental aporte en cuanto a la geometría analítica y desde el punto de vista de la nueva era histórica llamada modernidad, lo importante es el cambio paradigmático originado con Descartes y algunos precursores como el caso de Galileo, Kepler y otros tanto que desafiaron al pensamiento escolático sin dejar de serlo. Por otra parte la necesidad fundamental de un pensar distinto, como lo establece Cassirer (1986):

> Si intentamos descubrir y señalar el rasgo fundamental común que se acusa en las múltiples corrientes y tendencias del pensamiento que contribuyen a la formación de la filosofía moderna, lo primero que nos ofrece como nota característica es la actitud que toman todos ellos de la lógica profesado en la Edad Media. En la recusación del silogismo como método fundamental del conocimiento (p. 447).

Cabe claramente la pregunta por las corrientes del racionalismo e idealismo, la respuesta es inmediata, una nueva manera de hacer ciencia centrada en un método, sin embargo la seguridad de la ciencia no estará en la silogística aristotélica, dará un giro hacia la Matemática, en especial la búsqueda de una Matemática universal, planteando para el racionalismo los entes de razón. Como continúa la referencia de Cassirer (1989): *cierto es que la lógica escolástica, con sus definiciones y silogismos, nos enseña más bien a explicar lo conocido que a descubrir lo desconocido* (p. 453).

Cabe destacar, como se referenció anteriormente, que el planteamiento de la lógica es aristotélico; sin embargo lo importante del asunto es el giro de sentido y empleo de la misma, ésta en cuanto tal mantiene una la vigencia, pues apunta es al logos como principio rector. El problema aquí es para la comprensión del mundo (una perspectiva externa), por lo que tiene un carácter metodológico con su soporte de explicación a través de las ciencias mediante la Matemática. En este sentido queda establecido el aspecto trascendental que desde este momento en adelante seguirán los elementos aportados por la Matemática y en especial ella misma en cuanto tal. Cabe recordar el aspecto trascendental de considerar todo aquello que pueda generar pensamientos claros y distintos que no pudieran dar lugar a la duda. La tarea vuelve a apuntar al soporte de una ciencia que no establezca como punto importante la esencia, el cambio moderno del pensamiento va en la búsqueda de certeza y seguridad pero, con un soporte establecido y accesible a la razón. En este particular destaca Descartes (1983):

> Me complacían, sobre todo, las matemáticas, a causa de su certeza y evidencia de sus razones, pero no advertía todavía su verdadero uso, y pensando que no servían más que para las artes mecánicas, me admiraba que, siendo tan firmes y sólidos sus fundamentos, no hubiesen edificado sobre ellos nada más elevado. Como, por el contrario, comparaba los escritos de los antiguos paganos sobre la costumbres a palacios muy soberbios y magníficos edificados sobre arena y barro: elevan muy alto las virtudes y hacen aparecer como más estimables que todas las cosas del mundo, pero no enseñan a conocerlas suficientemente, y con frecuencia lo que designan con tan bello nombre no es más que insensibilidad, orgullo desesperación y parricidio (p. 48).

El aspecto importante desarrollado por Descartes en este pensamiento es que visualiza, en primera instancia, al exquisito planteamiento de la certeza de la Matemática, es indudable y se ha venido estableciendo la importancia de ella como soporte fundamental de la ciencia; ello lo advierte al establecer la diferencia entre su utilidad en las ciencias mecánicas como lo establecerá Newton, pero lo más importante es el qué se puede desarrollar más allá. Este pensamiento es clave, advierte una visión más allá de lo utilitario, la Matemática pertenece a las ideas claras y distintas, pero el problema fundamental es que este tipo de idea es innato.

Haciendo un recuento de la teoría del conocimiento en Descartes, lo clave del asunto está en el camino escéptico por donde transita y en el cual la duda metodológica es quien establece los rieles de tránsito. Parte, en primera instancia, de la problemática del engaño sufrido por los sentidos: *lo que alguna vez nos ha engañado, por lo general tiende a volvernos a engañar*, Descartes vuelve al principio de Parménides, el pensamiento como fuente inagotable y sustento racional de la realidad. Sin embargo, para este autor, el pensamiento no es una especie de *nous*, las ideas no son un todo emanado de un principio según el planteamiento de Plotino. Aun cuando cabe destacar la tendencia mística y creyente de Descartes como egresado de un colegio católico jesuita y que sus ideas sean, para algunos, tan racionales que alejarían todo tipo de fe, este autor por el contrario al final recurre a Dios como elemento lógico y de soporte de la realidad, por cuanto de lo contrario no sería auténticamente Dios, Descartes mantiene cierto espíritu escolástico por ser fruto de ello.

Por otra parte, desde el escepticismo metodológico centrado en el pensamiento como fuente que advierte las ideas claras, se plantea nuevamente, y superando la óptica escolástica, las perspectivas de la Matemática. En primer lugar reenfoca la lógica con otro sentido, cabe recordar que la lógica en cuanto a la escolástica cambia en sentido y metodología de la aplicación, sin embargo permanece como riel de deducción racional, en la actualidad sigue siendo la lógica aristotélica revestida y ampliada de un simbolismo pera la esencia de uso no ya a partir del *género* sino de otros aspectos particulares le siguen haciendo válida para el razonamiento. Por tanto se plantea una nueva perspectiva de la lógica:

> Al exigir *una lógica general de las relaciones* que antecede a toda consideración de los *objetos particulares*, Descartes no hace más que extraer el resultado filosófico… Desde su primera formulación del problema, cumple ya el postulado que a sí mismo se traza: ofrecer una lógica, no de la descripción y la exposición de los hechos, sino del

descubrimiento y la investigación (Cassirer, 1986, p. 457).

Es planteamiento de reenfoque es clave, ahora apunta al establecimiento de modo concordante de investigación, no se trata de establecer una lógica de la substancia y derivada de ella una conclusión de explicación de lo conocido pues, se reinvierte el sentido como riel de razonamiento lógico centrado en relaciones, no se deshecha la deducción, ahora se incorporará para justificar una nueva visión del pensamiento, no solamente deductivo sino inductivo.

No obstante, el problema no solamente era de la lógica, también tenemos el caso de la geometría, en algunos autores hay un pensamiento interesante sobre la Matemática en Descartes como el caso de Lluberes (2006):

> Referirse a la "concepción de la Matemática" en Descartes podría inducir de partida hacia asociaciones particularmente engañosas, en especial si se piensa en términos de un dominio bien definido con características específicas y perfectamente demarcables el cual estaría cubierto bajo el apelativo de "Matemática". Basta tan solo con recordar la simple distinción sustentada por Descartes entre una Matemática "vulgar" y una "vera" Matemática (p. 433).

No simplemente se plantea el problema de trascender a la lógica escolástica como se ha venido refiriendo, sino la problemática de la geometría y luego la distinción entre el álgebra. Pero, lo que nos interesa no es tanto el problema interno de la Matemática entre vulgo y culta, se trata del por qué y cómo se conciben y sustentan las ideas de una Matemática en tanto que Matemática. Entonce procedamos de la lógica a la geometría, insistimos en el elemento epistemológico de la lógica en el proceder de la geometría:

> Lo primero que hace el geómetra, como es sabido, cuando se propone construir una figura que responda a determinadas condiciones, es considerar estas condiciones como ya cumplidas, representarse la figura ya acabada en su intuición, como las cualidades exigidas. Partiendo de aquí e investigando la *conexión* entre las diferentes características concretas de la figura de que se trata, descubre el nexo entre los predicados que busca y otras determinaciones "más simples", hasta que logra por último descubrir una relación por medio del cual se

> encuentra con lo "buscado" como función unívoca de ciertos elementos conocidos y "dados" (Cassirer, 1986, p. 458).

Aquí el autor enseguida plantea el problema desarrollado por Platón entre Sócrates y Menón, sobre la búsqueda de lo conocido y la imposibilidad de buscar lo desconocido, cuando establece algunas condiciones a priori como ya cumplidas, inmediatamente hace la suposición de ser verdad para, asumiendo lo supuesto, deducir y desencadenar la conclusión. Al parecer el proceso es simplemente tautológico y por ello algunos plantean que en Descartes se da un álgebra, si se parte estableciendo la definición cualquier operación es cerrado porque de lo contrario los elementos no coincidirían con el principio de identidad, esto corrobora toda la visión platónica de la Matemática, en su esencia no son más que ideas claras y distintas intuidas en mi interior por ser innatas y colocadas allí por Dios. Por eso para desarrollar el conocimiento Descartes (1983) plantea el primer paso:

> Era el primero, no aceptar cosa alguna como verdadera que no la conociese evidentemente como tal, es decir, evitar cuidadosamente la precipitación y la prevención y no admitir en mis juicios nada más que lo que se presentase a mi espíritu tan clara y distintamente, que no tuviese ocasión alguna de ponerlo en duda (p. 58).

En este sentido qué es lo que puede presentarse ante mí de manera tan clara y distinta que no pueda dudar, Cassirer (1986) establece un punto clave de aclaratoria para dicha propuesta cartesiana:

> La idea central sobre la que descansa el "método" consiste precisamente en sostener que el conocimiento representa una unidad sustantiva y autárquica; es decir que encierra en sí misma las premisas generales y suficientes para llegar a resolver los problemas que con razón se plantea, sin necesidad de invocar ninguna instancia externa o trascendente (p. 459).

El desarrollo de la referencia no es más que el primer principio del idealismo, su centreidad en el principio de inmanencia y de la razón como camino iluminador para descubrir verdades o ideas innatas puestas en el entendimiento, por tanto la idea de la Matemática ya está presente al entendimiento, la tarea es deductiva y expositiva por cuanto los fundamentos está cartesianamente al admitir que soy una sustancia (cosa) que piensa. Por ser pensante puedo razonar y la concatenación de los razonamientos me llevan a desarrollar juicios, en este sentido hay juicios imposible de dudar por se han construido sobre principios universales y es aquí donde pueden "descubrirse" los orígenes de la Matemática para Descartes, por ser una realidad propia del pensar humano y siendo una idea clara y distinta. *Las "verdades eternas" de la geometría y la lógica sólo son valederas porque Dios le ha conferido este valor y esta sensación. Son el producto de su libre albedrío, no limitado por nada* (Cassirer, 1986, p. 505).

En pocas palabras en Descartes las ideas de la Matemáticas, si son claras y distintas no puede proceder de la experiencia, ni siquiera de la formalización de la extensión como el caso de la geometría, su valor capital es ser clara y distinta, por tanto son innatas. En cierto sentido se mantiene el pensamiento de Platón.

GOTTFRIED LEIBNIZ.

Siguiendo por las sendas del racionalismo – idealismo, a continuación destacamos otro de los grandes filósofos y matemáticos ubicado históricamente entre 1646 a 1716, de pensamiento amplio, su aporte más significativo en el campo de la Matemática es el Cálculo Infinitesimal. Es muy importante destacar cierta confrontación histórica en advertir quién desarrolló estos avances en la Matemática, por cuanto, a Isaac Newton (1642 – 1727), contemporáneo de Leibniz, también se le considera el creador de dicha disciplina de la Matemática. Sin embargo, son puntos de vista diferentes, lo anecdótico es que para la ciencia no se trata de quién fue el primero en plantear el problema del cálculo infinitesimal, tal vez pudiéramos volver nuevamente a la controversia metodológica pues, ambos personeros son hombres dedicados a la ciencia pero la metodología de aproximación a la realidad es muy distinta. Newton estableció los principios de la física mecánica y la leyes que rigen el movimiento, fruto de ello no puede ser otro que una Matemática que permitiera cálculos especiales para determinar leyes del desplazamiento, un diferencial, una relación de una posición con respecto a otra, si la materia se desplaza genera un movimiento, energía y todo lo que de ahí en adelante la física puede establecer, pero ello dependerá de una nueva óptica de medición, es aquí como la necesidad suscita en Newton una nueva explicación con referentes matemáticos más acordes con la explicación de lo observado.

Por otra parte, aunque Leibniz también incursionó en el mundo de la ciencia, no fue tan connotado (al parecer) como su contemporáneo; sin embargo, esto no minimiza su extraordinario y amplio pensamiento. A pesar de ello también hace objeciones a los planteamientos del movimiento en su momento como lo establece Fraile (1966): *la fuerza no es el producto de la masa por la velocidad (m.v); sino la masa por el cuadrado de la velocidad ($m.v^2$)* (p. 669), al respecto de esta aclaratoria Morales (1997) advierte que: establece una diferencia entre lo que actualmente se llama cantidad de movimiento y energía, es más, hoy día la ecuación de la energía es ½ ($m.v^2$) (p. 49). Esta sencilla aclaratoria muestra pistas de lo amplio y grandioso del pensamiento de Leibniz. Por otra parte está el problema de la extensión cuyo camino será al final distinto al cartesiano, aunque en un principio haya colindado con el pensamiento del mismo por cuanto la pasividad de la materia no es causal suficiente para explicar el choque entre los cuerpos. Según García Morente (1983):

> Esas nociones de fuerza, de esfuerzo, de dirección, eran confusas y oscuras para Descartes porque éste no tenía todavía forjado el instrumento matemático capaz de hacer presa de esas nociones y de barajarlas, manejarlas con claridad y precisión matemáticas. Por eso Leibniz, inmediatamente después de sus primeros ensayos de definición mecánica del "conatus", se pone en busca de esos instrumentos matemáticos capaces de definir lo infinitamente pequeño (p. 169).

Eso es uno de los elementos que llevará al desarrollo del cálculo infinitesimal, pero nuevamente aclaramos desde una perspectiva diferente a la que establece su contemporáneo Newton, su postura es desde la filosofía y con características de metafísica, nuevamente García Morente (1983) aclara esta situación estableciendo que el problema para Leibniz no era tanto el movimiento y la trayectoria sino resolver a las preguntas:

> ¿Qué es lo que hay en la esencia más íntima del punto en que el movimiento, que lo hace recorrer ésta mejor que aquella otra trayectoria?... ¿Qué es lo que hay dentro de ese punto, en el interior del punto, primeramente que lo hace moverse y segundo que lo hace moverse como recta, en trayectoria rectilínea o en trayectoria circular? (p. 168 – 169).

Por tanto el cuestionamiento apunta a un carácter más filosófico que, si se quiere, a lo físico. Sin embargo, el elemento fundamental de la doctrina es la búsqueda de lo universal, de un lenguaje común y unidad en la ciencia no reinventando la ciencia ni buscando puntos de partida distintos; por el contrario, Leibniz partirá de lo clásico para generar lo nuevo desde la tradición por ello Fazio y Gamarra (2002) plantean acertadamente lo siguiente:

> Entre las grandes líneas de su pensamiento se puede poner de relieve, en primer lugar, la búsqueda de una ciencia universal que pudiera ser una especie de lógica o lenguaje básico, común para todas las ciencias. Esta ciencia que Leibniz denomina *ars combinatoria,* tendrá también un carácter de método universal (p. 122).

De este modo, el autor es de los primeros en retomar el aspecto de universalidad de la Matemática como "lenguaje" de la ciencia, ya el gran Galileo Galilei había establecido a "La Matemática como el lenguaje de la Naturaleza". Es así como hay una constante de pensamiento que apunta a la Matemática como el locus fundamental donde se puede construir el edificio de la ciencia. Sin embargo, y para el punto en desarrollo, la discusión se plantea entonces no como carácter epistemológico sino, a manera de ver del investigador, como establecimiento metodológico. Según Desiato (2006):

> Leibniz comienza su investigación en el terreno lógico – matemático, con el fin de encontrar un instrumento que permite identificar y establecer ese orden en todas las diversas áreas del saber (p. 180).

Es clave que los elementos de la Matemática no caerán en un aspecto místico como los pitagóricos, en ello se diferencia el pensamiento de Leibniz; no obstante sí hay un cierto aspecto platónico como entes ideales, así lo establece Negrete (2000) en cuanto al pensamiento del connotado autor: *Leibniz ofrece las bases para diferenciar lo matemático de lo metafísico.* Esta perspectiva es interesante, por cuanto el sustento de este pensamiento es la razón, por ello se ha admitido el racionalismo como corriente epistemológica del conocimiento, que no es otra cosa que la construcción del pensamiento a partir de la razón. De ello se deriva que el conocimiento es una exigencia, surge a partir de una construcción lógica de la razón y desde esta perspectiva "aparentemente" es real y no metafísico, en ese sentido pueden explicarse la Matemática como ente de razón real y no como entes de carácter etéreo o metafísicos ajenos a la realidad o perteneciente a una dualidad como el caso del pensamiento cartesiano por ello afirma Negrete (2000):

> Para Leibniz la idea es realidad, vis representativa y no simple constructo de alguna facultad cognoscitiva. Esto es en un nivel originario el problema de oposición entre lo lógico y lo material (p. 95).

El camino de Leibniz es de explicación del orden lógico preestablecido en el desorden, justificado por Dios, tal vez es ahora cuando el asunto al no ser de carácter epistemológico como se hizo referencia anterior adquiere un aspecto hermenéutico, el de partir con los elementos que se tiene a la mano y organizarlos de tal forma, para permitir con los mismos elementos comprender la realidad circundante, llegando a la posibilidad de trascender y no reducirse a lo inmanente al respecto Desiato (2006) aclara:

> Leibniz conocía muy bien la lógica aristotélica y sabía que esta también tenía un carácter formal. Pero, en su opinión, se trataba de un formalismo insuficiente y, por consiguiente, no apto para captar el rigor de las argumentaciones matemáticas. La verdadera lógica formal, a juicio de Leibniz, debe tender a descomponer las nociones racionales en últimos elementos. Al hacerlo reducirá también todas las proposiciones demostrables a los principios fundamentales de identidad y de la contradicción, lo cual, en otros términos, significaría dejar en claro su carácter analítico, probando que en dichas proposiciones el predicado se encuentra implícito en el sujeto (p. 181).

El texto referenciado es realmente denso para la investigación sobre Leibniz y la caracterización de la realidad Matemática. Ciertamente el inicio de conocer bien la lógica aristotélica remonta al carácter de la misma y las explicaciones antes descritas en cuanto que dicha lógica no puede ser negada tampoco está carente de validez. Por el contrario, es muy válida; sin embargo su objetivo frente al mundo moderno es otro, es consistente pero no parte de lo conocido a lo desconocido, tiene un fundamento hipotético deductivo, por tanto las conclusiones van de premisas claras y distintas, a consideraciones deductivamente precisas con la misma claridad, es lo llamado por algunos como tautología. Importante, por cuanto ello no implica la carencia de validez. Pues, si algo ha dejado mucha influencia en el mundo occidental es el razonamiento donde uno de los sustento sigue siendo la silogística aristotélica.

Por otra, parte hay una especie de adelanto en la perspectiva de Desiato con respecto a Leibniz y a Kant, los juicios analíticos[20] estos son parte importante de las consideraciones del lenguaje y de la misma lógica que dicho autor desarrolla. Sin embargo, en continuidad con lo expresado en la referencia se apertura la posibilidad de incardinar a Leibniz en la corriente posterior llamada el *Logicismo*; de algo se puede conjeturar con mucha certeza, aun cuando se de cualquier elucubración en contra de la lógica y la racionalidad para intentar construir cualquier edificio matemático distinto al que tenemos, al final hay principios que no puede ser rechazados por ser los axiomas primigenios para llegar a un común acuerdo, como bien están en la referencia: el principio de identidad y el de contradicción. Sin estas dos bases, si se quiere a priori, la construcción del edificio matemático sería irracional, fuera de un sentido común.

Para Negrete (2000) el problema fundamental entre Newton y Leibniz parte del tronco común de la sustancia extensa cartesiana y es donde hay la diferencia entre los planteamientos de los dos grandes autores:

[20] Esta temática será desarrollada en su momento al estudiar a Inmanuel Kant.

> Bajo la noción de sustancia extensa, la realidad se manifiesta en forma corpórea. Esta realidad puede comprenderse totalmente observándola desde fuera; lo corpóreo es regido por una legalidad que tiene su fundamento externo. En Newton esta racionalidad permite el desarrollo de una estructura lógica completa, apoyada en un sistema de referencia absoluto que, como en Descartes, se articula con la divinidad; la sustancia extensa tiene así como cualidades la corporeidad y el movimiento. La inercia expresa entonces, en esta perspectiva, dicha racionalidad, y constituye el primer principio de las leyes del movimiento…
> El modelo construido por Descartes permite fundar la matemática Newtoniana que es, esencialmente, una matemática exterior, esto es a partir de la extensión (p. 95 – 96).

De acuerdo, a lo que se ha venido planteando, se llega al punto de diferenciación entre los planteamientos de los dos grandes estudiosos, el problema que establece Negrete, es fundamental para desarrollar las distintas perspectivas pues, si el problema es de la extensión lo observado es el movimiento de la materia y ello ha dado origen a la Física Mecánica (Física Clásica), la lógica planteada para el cálculo debe ser en función a la exterioridad, lo interesante del aspecto se da al dejar de lado, momentáneamente, a la geometría. Sin embargo, la nueva herramienta de estudio implica el uso y soporte de lo geométrico. El cálculo permite conjeturar dos acciones en común, el espacio y el tiempo. Pero lo fundamental del asunto es su aplicabilidad, si algo ha dado perspectivas de plena amplitud y uso en todas las ciencias es el cálculo, ya no interesando sus fundamentos sino su aplicabilidad como lo manifiesta la referencia de González (1995) Eves y Newson:

> Embriagados por el poder y la aplicabilidad de la nueva herramienta, dejaron de considerar suficientemente la solidez de la base sobre la cual se fundamenta el cálculo, de modo que, en lugar de proporcionar demostraciones para justificar los resultados obtenidos, estos fueron para justificar las demostraciones. Con el paso del tiempo surgieron paradojas y contradicciones (p. 27).

Tal vez por esto a Newton se le ha querido dar toda la relevancia que se merece sin embargo, y en honor a la verdad, Leibniz tiene participación aunque desde otra perspectiva; cabe recordar que la simbología utilizada en la actualidad es originaria de Leibniz por lo complicado de la de Newton. Lo controversial de este asunto es la pragmática asumida por los seguidores, dejando de lado el qué y por qué de la Matemática en tanto que Matemática y dirigirse a su aplicabilidad. Los hallazgos de la aplicabilidad de la nueva disciplina generaban un mundo nuevo de explicaciones del comportamiento de la materia, especialmente del movimiento que llevado al campo de la ingeniería reformaría toda la episteme establecida para ese momento, su aplicación en la guerra será de vital importancia. En este sentido hay una marcada diferencia entre el uso o el para qué del cálculo. Como bien lo establece Negrete (2000) la perspectiva del cálculo desde la óptica de newtoniana es de una Matemática externa que da explicación al comportamiento de la sustancia reducida a materia y su desenvolvimiento con la nueva ciencia en expansión llamada Física. Por otra parte, Morales (2007) establece que el problema ontológico es lo primordial en Leibniz, la visión metafísica y ontológica en ella conjuga la unidad como mónada, el problema del infinito y la substancia. Es decir, siguiendo el interesante planteamiento de Negrete (2000) aquí no se apunta a una Matemática de lo externo, del movimiento, el tiempo y la velocidad ya que según este autor Newton asume el modelo construido por Descartes. Pero según Fraile (1966):

> Hasta 1670 acepta (Leibniz) la noción cartesiana de sustancia material como idéntica a la extensión. Pero, después reacciona contra el mecanicismo cartesiano, que reducía todo el mundo físico a la extensión, figura y movimiento, y afirma que hay en el mundo muchas cosas que rebasan el concepto de extensión (p. 668).

Desde aquí comienza si se quiere el camino metodológico distinto entre uno y otro autor, quedando como establece Negrete (2000): Esta matemática exterior queda, ciertamente, desprendida de cualquier fundamento metafísico (p. 97). En realidad no puede verse ni asumirse como una controversia de quién fue el primero o el segundo en desarrollar la nueva disciplina, la situación es de carácter metodológico en el sentido de la elección distinta de un punto de partida. Desde esta consideración puede ser referido específicamente Leibniz: *La Mónada de la que hablaremos aquí, no es otra cosa que una substancia simple, que forma parte de compuestos; simples,* *es decir sin partes* (Orbis, 1983, p. 21). No se trata entonces de una sustancia con elementos fundamentales de la extensión y por ello no apuntará ni al espacio, ni al tiempo pues ya hay controversias en cuanto a las explicaciones de uno y otro, cabe destacar el aspecto diferencial entre *sustancia* que apunta a la res extensa y al mundo de la física y la *substancia* en referida al aspecto metafísico – ontológico.

Para continuar con la exposición sobre este gran matemático es necesario hacer una referencia a Pascal, quien en alguna forma preside a Leibniz. Cabe recordar el famoso triángulo de Pascal o Tartaglia centrado en la teoría combinatoria también estudiada por Newton.

La exigencia del estudio con una metodología distinta y que luego forman una única teoría del cálculo infinitesimal es desarrollada por Leibniz bajo perspectivas realmente diferentes como lo establece Negrete (2000):

> Las tesis fundamentales de esta Matemática son la armonía preestablecida y el movimiento de la sustancia como modo representativo de la realidad…
> Los principios innatos son la clave para la comprensión de la dinámica interna de la mónada. Lo nuevo de este planteamiento está en la construcción lógica que hace a partir de ideas y conceptos considerados innatos y que exigen un análisis infinitesimal desde el inicio, análisis esencialmente dinámico. El punto de partida es la idea de totalidad como sujeto… (p.137).

De manera muy interesante se plantea un lógica, una argumentación muy distinta o en otro sentido, nuevamente insistimos en que no son contradictorias las posturas de Newton y Leibniz sino de principios fundamentalmente distintos y por ello en particular la interpretación de una Matemática Interior para el autor en estudio y una Matemática Exterior para Newton, Negrete (2000) sustenta la tesis en los planteamientos del estagirita haciendo la división si se quiere metodológica, pues parten de principios diferentes:

> La tesis aristotélica de potencia y acto permiten caracterizar el origen de esta diferencia. Expone Aristóteles "… la sustancia se dice… según la

> potencia y el acto… la potencia y el acto, se extiende más allá de las cosas que sólo se enuncian según el movimiento" "… en cuanto a la unidad natural, ningún ser padece la acción de sí mismo, ya que es uno solo y no otros". "Por consiguiente…, está claro que la potencia y acto son dos cosas diferentes…" (p. 142).

Las referencias desarrolladas de Negrete sobre Aristóteles nos llevan a uno de los elementos más interesantes de la filosofía aristotélica, la dialéctica potencia – acto, es claro que no son dos perspectivas separadas pero el asunto apunta en Leibniz a la sustancia, la mónada y no solamente la extensión o su desarrollo. Cabe recordar que en Newton: *La teoría infinitesimal obedece a un conjunto de relaciones que no aparecen involucradas en los procesos de transición de lo continuo a lo discreto* (Negrete, 2000, p. 142). Es aquí donde se establece la diferencia de principios, por cuanto desde esta perspectiva respondería simplemente al principio de inercia. Esta es la perspectiva exterior, Leibniz apunta a referencias internas en las cuales es posible integrar desde la totalidad lo particular, en este aspecto recordemos las cualidades de las mónadas que son las que permiten diferenciar los argumentos de Leibniz:

a- Unidad. Toda substancia es una.
b- Simplicidad.
c- Inextensión… siendo simples las mónadas, no pueden tener partes, y por tanto no pueden ser extensas, pues la extensión implica distinción de partes.
d- Indivisible "cada porción de materia no sólo es divisible hasta el infinito, sino divisible hasta el fin".
e- Inmaterialidad… formas cuyas esencias es la fuerza y actividad.
f- Ingenerables e incorruptibles… no comenzar naturalmente. Tampoco es de temer la disolución… no perecer naturalmente.
g- Incomunicabilidad. Cada mónada no se percibe más que así misma, y a la representación de ella en el universo. Todas son independientes entre sí, pero todas está en comunicación directa con Dios (Fraile, 1966, p. 672).

Con estas particularidades inicia Leibniz su planteamiento matemático distinto a los estudiados por su contraparte inglesa, apuntando al interno de la substancia, no se establece la lógica de causa – efecto, si se establece un principio lógico, ya que sigue siendo una manera de pensar desde esta perspectiva Negrete

(2000) esboza en seis puntos los fundamentos de lo que ha llamado Matemática Interna como contraposición a la Matemática Externa desarrollada por Newton, a continuación se establecen las conjeturas plateadas:

> *Primero*, la derivación y análisis detallado acerca de la estructura de la proposición, en el cual se examina con cuidado la naturaleza del sujeto y del predicado, la idea de inclusión de un concepto en el otro y la articulación del concepto con las cosas.
> *Segundo*, el principio de razón suficiente, que señala la vía de expresión, en forma numérica (aritmética) de todas las relaciones desplegadas en el desarrollo de la sustancia.
> *Tercero,* la continuidad de la metafísica de lo corpóreo… la sustancia, en su despliegue inicial, permite una representación aritmética, confluyendo en su organización series que aumentan en número de manera ilimitada. Al crecer este número de tal manera, las series se acercan entre sí… se produce entonces la articulación de serie de series pasando la geometría a sustituir la aritmética en la representación (de lo discreto a lo continuo).
> *Cuarto*, la descripción completa de esta legalidad toma la forma de infinitos que pueden darse aislados, son categorías que no aparecen solas. Leibniz lo llama sinkategoramáticos. Ellos son el resultado de combinaciones de infinitésimos dentro de una racionalidad.
> *Quinto,* la matemática interior rechaza la tesis de los cuerpos rígidos.
> *Sexto,* la naturaleza de los procesos de articulación continua de varios cosmos plurales en un cosmos unitario, excluye la posibilidad de un sistema de referencia absoluto, convirtiendo el concepto de tiempo en una nota característica de la dimensión dinámica de la sustancia en su despliegue racional (p. 143 – 145).

A manera de conclusión, Leibniz plantea una Matemática desde la idealidad, como exigencia de la razón misma y buscando la integración de lo continuo con lo discreto. Ello adelanta mucho el pensamiento moderno sobre dicha ciencia. En la actualidad las dos vertientes se centran no en contradecirse ni negarse, el mundo de la Matemática es posible comprenderlo en la integración permanente entre lo continuo y lo discreto, en este autor no hay ninguna discrepancia. En este sentido podemos asegura es el aspecto dialéctico pues la Matemática es una única realidad con dos perspectivas que se complementan entre sí. Tal vez por ello el equívoco de los matemáticos posteriores es el intentar construir una Matemática asumiendo únicamente la aritmética, en especial el problema de la cardinalidad como principio para la construcción de cualquier estructura. Por otro lado, como buen filósofo y lógico la Matemática es un ente racional de carácter a priori, ello queda configurado en su manera de interpretar la realidad a partir de las mónadas.

INMANUEL KANT

Si alguna persona ha sido clave en la historia del pensamiento, es Kant por ello, nos parece importante asumir los planteamientos de su "crítica" para abordar los aspectos de la fundamentación de la realidad Matemática, en ese sentido podemos advertir y destacar su pensamiento hacia el conocimiento matemático y sobre todo a la famosa consideración con la pregunta: ¿Cómo es posible una Matemática Pura? Sin embargo, el problema no se reduce a la posibilidad de la ciencia, sino advierte la problemática muy significativa del conocimiento matemático siempre estableciendo como medio a la razón, por lo cual establece Kant:

> Lo esencial del conocimiento *matemático* puro, y lo que lo distingue de otro conocimiento *a priori*, es que aquél no debe proceder nunca *a partir de conceptos*, sino siempre sólo por la construcción de conceptos. Pues este conocimiento debe, en sus proposiciones, salir del concepto para dirigirse a aquello que contiene la intuición que le corresponde al concepto: por tanto, sus proposiciones no pueden ni deben surgir nunca por descomposición de los conceptos, esto es analíticamente, y por tanto son todas sintéticas (traducción Caimi, 1999, p. 57).

La referencia apertura una situación compleja, aun cuando enfoca el planteamiento desde el asunto fundamental sobre la pregunta ¿qué es el conocimiento?, inmediatamente apunta al problema de la ciencia en tanto que ciencia; por otra parte, la referencia es sobre la obra de toda Metafísica que aspire a ser ciencia, esto es primordial por cuanto al ubicar el problema de la Matemática como ciencia pura y a priori, no solamente dependiendo de juicios sintéticos a priori sino da evidencias de ser algo previo a todo, no es una construcción, aparentemente se plantea como una asunción de algo real e ideal que ya viene preestablecido. El medio para accesar a esta realidad como lo plantea Colomer (2006) es la razón, como un método mediante el cual es posible advertir el conocimiento:

> La *disciplina* de la razón pura se refiere no a los contenidos del conocimiento, sino únicamente "al método del conocimiento nacido de la razón". Kant hace hincapié en la diferencia entre la filosofía y matemáticas y estudia el uso legítimo que en la filosofía hay que hacer definiciones, axiomas y demostraciones (p. 191).

Frente al problema del conocimiento y cómo puede ser, en especial el conocimiento de la Matemática como asunto que nos atañe, Kant plantea que la razón es la vía para de justificación, por tanto se está claro que en filosofía y otras disciplinas se necesitarán procedimientos para aproximarse a describir y conceptualizar el conocimiento de los entes que conforman dicha ciencia, es evidente que cartesianamente la razón establecida en cuanto tal es la garantía de la certeza de cualquier demostración inminente, la razón es planteada como episteme de la certeza. Sin embargo hay una especie de preocupación en Kant, entre la dualidad del "a priori", versus el "a posteriori", ¿es la razón y fundamentalmente la intuición la que permite aproximarse a la realidad ciencia o conocimiento de alguna disciplina en particular?..

Hay una especie de conflicto:

> Kant se formó en el racionalismo de Wolff, pero —según sus propias palabras— despertó de su "sueño dogmático" al leer a Hume. El empirista inglés lo hizo caer en la cuenta de que las afirmaciones y reflexiones de su metafísica racionalista carecían de fundamento sólido. Conceptos centrales como los de "substancia" y "causalidad" quedaban, luego de la crítica a la que los sometía Hume, reducidos a mera costumbre[21].

Evidentemente, Kant toma como punto de partida la corriente filosófica denominada "racionalismo", según Hessen (2000), dicha corriente de pensamiento es

[21] http://www.luventicus.org/articulos/02A036/kant.html

una respuesta epistemológica al problema del conocimiento, es vista desde la perspectiva de cómo se origina el conocimiento; sin embargo, y muy a pesar de las controversias y críticas, a esta postura epistemológica posiblemente vuelva a él; por otra parte, no se deshecha la visión empirista en su proceder, asume la imposibilidad del innatismo, no hay ideas innatas en el entendimiento, esto se aclara siempre. Por tanto, puede distinguirse el innatismo del racionalismo, en este caso se plantea el uso de la razón mediante la cual se deduce de unos principios matemáticos, pero con la salvedad de no fundamentarse en ideas innatas, esta es una diferencia fundamental, puede mantenerse la razón como principio de deducción, sin partir de ideas innatas, este es el camino Kantiano. Asúmase el carácter de ciencia y rigurosidad, en especial de carácter matemático.

> Ya hemos visto que la filosofía kantiana entra dentro del proyecto ilustrado de una crítica a la misma razón. Kant pretende establecer cuáles son los límites y las posibilidades de nuestro conocimiento, único medio por el que el hombre podrá alcanzar su mayoría de edad, librándose de todas las tutelas, oscurantismos y supersticiones[22].

Insistiendo en lo anterior, en Kant se puede afirmar que el pensamiento moderno es consolidado, este punto es clave, el camino iniciado por Descartes y Newton, quienes obtienen en este autor su más alto representante por cuanto es el intento de dar explicaciones desde la fundamentación física - matemática a los elementos ontológicos y metafísicos, sin embargo como lo plantea Negrete (2000) Kant sigue las postura de una Matemática externa; a pesar de ello en él la filosofía encuentra una atalaya que marcará casi cualquier perspectiva futura, no solamente sobre el pensar humano en cuanto tal; sino también, en cuanto al punto interesado por la investigación como es el tema del conocimiento y fundamentalmente sobre el conocimiento científico y la ciencia.

Según Desiato (2006):

[22] http://www.cibernous.com/autores/kant/teoria/conocimiento/indice.html

> Kant, cuyo criticismo se define como la tarea fundamental y más urgente de la filosofía. Para evitar un saber falso se requiere de la razón en tanto esta sobre sí la más difícil de las tareas, esto es el conocimiento de sí misma. La razón, en esta dirección, debe intuir un tribunal que tutele en sus justas pretensiones, pero que sea capaz, a la vez, de eliminar aquellas pretensiones sin fundamentos, y esto no de manera arbitraria, sino con bases en las leyes eternas e inmutables que la razón encuentra en sí misma. Este tribunal no es sino la crítica de la razón pura… Como Kant lo entiende, ver lo que la razón puede conocer y lo que no puede conocer (p. 207).

El punto clave está en qué entiende Kant por la razón pues, más allá del significado de la misma hay un planteamiento epistémico de la misma, es importante recordar que el problema de la ciencia en este autor puede ser centrado en la especificidad de los *Juicios*, cuando se establece la ciencia en su razón de ser viene dada en función de los juicios y de los principios que la rige. Por ello, en Kant siempre hay un debate entre el caso de la Matemática como ciencia pura y cualquier metafísica futura que intente accesar a esta categoría disciplinar y con ello hace una distinción contra Hume, que simplemente pretendía reducir las mismas al principio de causalidad, estableciendo que excluyó irreflexivamente a la Matemática pura de ser un conocimiento enteramente a priori, en este sentido Kant, muy a pesar de admitir que fue este filósofo quien le despertó de su seño dogmático ahora le cuestiona por la imposibilidad.

Lo importante del planteamiento anterior en Kant, es la posibilidad de ordenar y estructurar los principios en adecuación con la realidad para dar sus explicaciones. Por ello, en concordancia con Desiato, la razón y todas las conjeturas en torno a ella serán el árbitro y juez de los fundamentos del conocimiento. Es claro pensar el sentido racionalista de Kant le lleve fundamentalmente al establecimiento de principios que le permitan regir y normar los rieles por los cuales ha de transitar todo aquello interesado en establecerse como conocimiento, fundamentalmente en principios de carácter lógicos y respetando una postura "intermedia" entre el dogmatismo impuesto a priori y el escepticismo, Desiato (2006) lo referencia de la siguiente manera:

> Kant asume una postura intermedia entre dogmatismo y escepticismo; por un lado recupera la importancia de la experiencia en lo relativo a la ampliación del conocimiento, en contra de las pretensiones del dogmatismo, que creía poder reducir todo el conocimiento a los procesos analíticos-deductivos; pero por otra parte ataca al empirismo cuando este pretende reducir todo a la mera experiencia, negando la posibilidad de deducir la realidad a partir de los procesos lógico (p. 208).

Es evidentemente clara la situación de intento de síntesis, si se quiere, planteada por Kant frente a la distinción de dos corrientes totalmente opuestas en torno a al conocimiento y su fundamento; pues, el escepticismo negará la posibilidad del conocimiento y el dogmatismo hace incuestionable el conocimiento, la salida kanteana es realmente controversial por cuanto no intenta rechazar ninguna y las convierte en punto de encuentro. La clave del asunto planteado se resume en la frase siguiente establecida por Kant: *el conocimiento humano se inicia en los sentidos, pero no se reduce a ello.* A esto se le suma la prioridad y exigencia de establecer fundamentos, el conocimiento científico ha de ser universal, en especial la aproximación a la ciencia.

Buscando el punto de partida, afirma Kant (Traducción Del Perojo, 1938)[23]:

> Sea cual fuere el modo cómo un conocimiento se relacione con los objetos, aquel en que la relación es inmediata y para el que todo pensamiento sirve de medio, se llama *intuición*[24].
> Pero esta intuición sólo tiene lugar en tanto que el objeto nos es dado, lo cual sólo es posible, al menos para nosotros los hombres, cuando el espíritu es afectado por él de cierto modo. Se llama *Sensibilidad* la capacidad (receptividad) de recibir la representación según la manera como los objetos nos afectan. Los objetos nos son dados mediante la sensibilidad, y ella únicamente es la que nos ofrece las intuiciones; pero sólo el entendimiento los concibe y forma los conceptos…

[23] Kant, Crítica de la Razón Pura, traducción de Del Perojo, 1938. Editorial Lozada. Buenos Aires. Argentina

[24] Intuición, es la representación inmediata que de un objeto me hago, nota de Del Perojo.

> Consiste la *Sensación* en el efecto de un objeto sobre nuestra facultad representativa al ser afectado por él. Se llama *empírica* la intuición que se relaciona con el objeto por medio de la sensación. El objeto indeterminado de una intuición empírica se llama *fenómeno*.
> Llamo *Materia* del fenómeno aquello que en él se corresponde a la sensación, y Forma del mismo, a lo que hace que lo que hay en él de diverso pueda ser ordenado en ciertas relaciones…
> Llamo representación pura (en sentido trascendental) aquella en la cual no se halla nada de lo que pertenece a la sensación. *De aquí se deduce que las formas puras de las intuiciones sensibles en general, en la que es percibida toda la diversidad de los fenómenos bajo ciertas relaciones, se encuentran "a priori" en el espíritu, como una forma pura de la sensibilidad aun sin un objeto real de los sentidos o sensación*[25].
> Así cuando yo abstraigo de la representación de un cuerpo, lo que el entendimiento piensa, como sustancia, fuerza, divisibilidad, etcétera, lo que pertenece a la sensación como impenetrabilidad, dureza color, etc, réstame siempre algo de esta impresión empírica a saber: extensión y figura. Estas pertenecen a la intuición pura de la sensibilidad aún sin un objeto real de los sentidos o sensación (p. 172 – 173).

Respetando la postura y la referencia del autor en cuanto al conocimiento y la tensionalidad dinámica establecida en la conjetura, es posible ahora encaminarse un poco más allá de la forma, no se trate ahora del riel de la razón por la cual ha de transitar el conocimiento para ser aprehendido por el sujeto o para ser construido por el mismo en función de los sentidos y la razón, ahondemos en el planteamiento de los entes de la ciencia, en especial de la Matemática. ¿Cómo es posible hacer Matemática, o cómo es posible entender los entes de la Matemática?

La respuestas a los interrogantes viene plateada en lo que establece Kant como juicios, la capacidad humana que mediante la razón es posible establecer veredictos sobre una realidad, pero el problema está en que en el sujeto se da el juicio pero parte de una intuición, sin embargo reitera la no existencia de conocimientos previos, el intelecto está vacío. Es contradictoria la situación de Kant, frente al

[25] El cambio de letras en llamativos es realizado por el investigador para llamar la atención del lector..

intelecto que no posee nada, la intuición que es trascendente sale para formalizar el fenómeno emanado por el objeto, claro está la preponderancia del asunto lo posee el sujeto que conoce, sin embargo hay una gran tensionalidad en el asunto como lo planea Fatone (1969):

> En el criticismo de Kant intenta resolver la larga polémica entre innatistas y empiristas aceptando que todo conocimiento comienza en la experiencia, pero negando que todo conocimiento derive de ella.
> Para que haya conocimiento es necesario que haya experiencias; no hay, pues, conocimientos innatos; pero aunque no hay conocimientos innatos, para que haya experiencia es necesario que el espíritu intervenga en ella. El empirismo resolvía este último problema de la intervención del espíritu hablando vagamente de la "capacidad" que ese espíritu tenía de aprehender las cosas y operar luego con ellas, descomponiéndolas, asociándolas (p. 139) .

En este sentido vuelve a estar la escena montada y la búsqueda de una vía no disociada como se ha venido estableciendo, por el contrario, integradora de ambas posturas en otrora antagónicas. Cabe destacar que para la época, en absoluto había alguna referencia al pensamiento complejo del que tanto hoy se habla y se dan opiniones. Muy a pesar de, Kant se deslinda de uno y otro puntos de vistas intentando, desde la razón, dar los fundamentos necesarios. En realidad, como lo plantea Fatone (1969): *El conocimiento es un hecho; pero hay que averiguar cómo es posible ese hecho. No aceptarlo como hecho, sino proceder a investigarlo* (p. 139). Nuevamente surge la postura de que no se trata el cuestionamiento del conocimiento sino de su formalidad en cuanto es posible asumirlo.

Según Fatone (1969) intenta establecer al estilo aristotélico pero planeando desde la realidad fenoménica kantiana:

> En todo conocimiento podemos distinguir una materia, o contenido, y una forma. La materia procede del objeto conocido; la forma es impuesta por el sujeto. La intuición nos permite aprehender el objeto, representárnoslo; el concepto nos permite, a través de esa representación. La capacidad de intuir los objetos… se llama sensibilidad y la capacidad de relacionarlos se llama entendimiento (p. 140).

Esta es una muy buena interpretación del pensamiento kantiano, por cuanto establece los principios involucrados en el proceso de conocimiento, aun cuando mantiene planteamientos aristotélicos de la materia y la forma, lo importante es la acción del sujeto imponiendo la forma, no es una acción receptiva ni es una abstracción como lo establece Aristóteles, en la intuición que es al mismo tiempo un acto trascendental por cuanto no es inmanente sino que el sujeto sale de su inmanencia, debe salir al encuentro que es intuición y que va a imponer formas. Teniendo presente que:

> Ni en la sensibilidad ni en el entendimiento hay ideas innatas; pero sin esa sensibilidad y ese entendimiento, no hay experiencias posible. La sensibilidad y el entendimiento hacen posible la experiencia porque tanto la una como la otra consisten en modos, maneras, o moldes, a los que tienen que adaptarse la materia del conocimiento. A los "moldes" de la sensibilidad se les llama *formas;* a los "moldes" del entendimiento llamará categorías (Fatone, 1969, 140)

En este sentido aclara nuevamente: ni las formas, ni las categorías derivan de la experiencia, Kant lo establece como "a prioris", pues son las llamadas condiciones de posibilidad para que el conocimiento se realice, de manera tal que, el sujeto es quien ejecuta y realiza la acción de conocer, el objeto propicia la materia, pero no es la materia en tanto que materia, sino lo emanado fenoménicamente es lo que el objeto manifiesta.

Frente a este problema se vuelve a insistir, aun cuando Kant, no niega para nada al objeto, desarrolla una visión desde lo fenoménico. El objeto manifiesta una realidad, la cual es intuida por la sensibilidad, es decir lo manifiesto, lo epifánico, sin embargo la cosa en sí misma se oculta, por tanto es en la intuición sensible como se hace posible la captación de lo manifiesto, que según Urdanoz (1975): *Este pensamiento ya anticipadamente en su línea general toda la respuesta kantiana, es decir su idealismo* (p. 23).

Los planteamientos anteriores sirven finalmente para establecer el problema en cuestión sobre la Matemática, por cuanto el centro del asunto está en los *juicios*, ahora no se trata de un objeto en cuanto objeto, la ciencia pura como lo establece Kant va a depender de los juicios, el asunto se remite a las exigencias planteadas al momento del conocimiento, en la formalidad que impondrá el sujeto a la realidad es donde, de manera a priori, se encuentran las estructuras que sirven de condiciones de posibilidad para que el sujeto conozca, la intuición no es en el aire, ella lleva consigo la estructura mediante la cual la realidad queda encuadrada en ella, las llamadas formas a priori de: Espacio y el Tiempo.

El Espacio:

> El espacio no es un concepto empírico derivado de la experiencia.
> El espacio es una representación necesaria a priori, que sirve de fundamento a todas las intuiciones externas.
> No es un concepto discursivo, sino una intuición pura. El Espacio es esencialmente uno; la variedad que en él hallamos, y, por consiguiente, el concepto Universal de Espacio en General, se fundamenta únicamente en limitaciones.
> El Espacio es representado como un "quántum", infinito dado (Kant, traducción Del Perojo, 1974, p. 176 – 177).

De esta forma, se puede establecer que todas las cosas vienen dadas en un espacio, es interesante recordar el problema entre Sócrates y Menón en cuanto la figura, donde finaliza Sócrates estableciendo el espacio deducido de la finitud del sólido. Ahora bien, el problema de Kant, no es tanto definirlo porque no puede, es un a priori, es connatural y es uno. Corroborado por Fatone (1969): "*El espacio no es, un concepto, sino una intuición, ya que la intuición es la representación de ésta dada por un solo objeto. No deriva de la experiencia sino que le precede*" (p. 141). Él es uno de los con qué sale al encuentro del objeto amorfo y manifiesto el sujeto cognoscente, son las herramientas para poder filtrar y "adquirir" el conocimiento con las que puede contar el sujeto, "*es la "capacidad" formal que el sujeto tiene de ser afectado por los objetos y recibir de ellos una representación*" (Fatone, 1969, p.

141). Aclarando lo de representación, no es la cosa en sí, es una especie de extensión de la cosa manifiesta en el fenómeno.

La segunda forma planteada es el Tiempo, Kant lo define:

> El Tiempo es una condición a priori de todos los fenómenos en general; es condición inmediata de nuestros fenómenos interiores (de nuestra alma) y la condición mediata de los fenómenos externos. Si puedo decir a priori: todos los fenómenos están en el Espacio y son determinados a priori según las relaciones del Espacio, puedo afirmar también en un sentido amplio y partiendo del principio de sentido interno: todos los fenómenos en general, es decir, todos los objetos de los sentidos están en el Tiempo, y están necesariamente sujetos a las relaciones de Tiempo.
> El Tiempo es un pensamiento vacío (nada)…. Tiempo tiene un valor objetivo solamente en relación a los fenómenos, porque estas son cosas que consideramos como objetos de nuestros sentidos… El Tiempo, que es únicamente una condición subjetiva de nuestra intuición humana, …, considerada en sí misma y fuera de los objetos no es nada (Traducción Del Perojo, 1974, p. 186 – 187).

Por tanto, el tiempo en cuanto tiempo para Kant es solamente otra forma a priori de sensibilidad, mediante la cual los elementos racionales e internos del sujeto pueden ser objetos de sensibilidad, este es un aporte característico de este autor, el mundo interior y del yo, del pensamiento y la razón pueden ser objetos, en el sentido de objetividad, de la ciencia en cuanto ciencia, a ello le dedicará la metafísica. Caso característico de este asunto son los estudios de geometría y matemática, de los juicios sintéticos y a priori.

Nuevamente recurrimos a Fatone (1969) para esclarecer a Kant:

> Tampoco la representación del tiempo deriva de la experiencia. Para que yo me represente las cosas como simultáneas o sucesivas, necesito ya la representación del tiempo; el tiempo es otra forma en que aprehendo las cosas. El tiempo – como el espacio – no es un concepto general, es una intuición, pues los tiempos diferentes son simplemente partes del mismo tiempo. El tiempo se da, en la intuición, como ilimitado, pues ninguna parte del tiempo puede ser representada como parte entre partes, de la misma manera

> que un parte del espacio no puede ser representada como parte entre partes (p. 141).

Estos son los dos elementos o filtros recurridos por la sensibilidad para captar el fenómeno de las cosas, el entendimiento consta entonces de estos dos principios para filtrar-formalizar el conocimiento manifiesto por el objeto. Incluso, para algunos autores pueden actuar independientes uno del otro o en conjunto. Sin embargo son los elementos fundamentales que hacen posible el conocimiento y en este sentido crean la posibilidad de una ciencia, en especial de una ciencia pura.

El problema de la ciencia pura, Kant lo enfoca en la razón, especialmente en las áreas donde ha tenido éxito, superar el problema metafísico, por cuanto es inasequible a la razón; por el contrario, afinar sus planteamientos hacia campos en los cuales la razón se mantiene como elemento trascendental y soporte de la ciencia como el caso de la física newtoniana, la lógica y muy en particular la Matemática. Desde esta perspectiva desarrolla Kant la Crítica de la Razón Pura, como un estudio de las condiciones del cocimiento, de la lógica mantiene los juicios, como lo afirma Fatone (1969):

> La lógica estudia las estructuras del pensamiento. Esas estructuras son tres: el concepto, el juicio y el razonamiento. El concepto es el pensamiento del conjunto de notas esenciales de un objeto; el concepto es el elemento de juicio. El juicio es una relación enunciativa entre conceptos, todo juicio es necesariamente verdadero o falso. El razonamiento es una relación entre juicios; no es ni verdadero ni falso: es correcto o incorrecto (p. 48).
>
> Esta referencia es complementada por Sanguineti (1989):
>
> *El juicio (en lógica, proposición) es la operación de la mente por la que componemos conceptos atribuyendo una propiedad a un sujeto mediante el verbo "ser".* Juzgar consiste en reunir al menos dos términos, o en separarlos, para expresar la posesión en acto y efectiva de una propiedad, por parte de un sujeto, o para excluir positivamente esa posesión (p. 97).

Manteniéndose con toda la rigurosidad ya conocida y que le ha dado renombre, la posibilidad de una ciencia pura está en la capacidad de esgrimir juicios en torno a los “objetos” puros de los que comporta dicha ciencia en cuestión. Hacer disertaciones de manera adecuadas y soportadas por la razón permitiendo entonces el constructo de la temática como es el caso de la Matemática, en este sentido él desarolla los distintos juicios establecidos para poder elaborar los constructos de la razón para esgrimir un conocimiento puro e infalible.

> El juicio es analítico, es decir, solamente explicativo, cuando el sujeto contiene el predicado, y por lo mismo, lo que se dice en el predicado no extiende nuestro conocimiento del sujeto….
> *Cuando el juicio es sintético, que extiende nuestro conocimiento del sujeto (la mesa es redonda, del simple sujeto no podemos saber si ella es redonda, cuadrada o rectangular, en este caso el predicado aporta algo nuevo que no se encontraba implícito en el sujeto…*
> … Los analíticos, sin excepción alguna, a priori, no necesitan de la experiencia para ser confirmados, universales y necesarios… (Desiato, 2006, p. 209).

Ahora bien, Kant define el intelecto como la facultad de los juicios (Desiato, 2006), y llamaremos entendimiento, según Urdanoz (1975):

> A la facultad de producir nosotros mismos representaciones, o la espontaneidad del conocimiento…. El entendimiento es la facultad de pensar el objeto de la intuición sensible, es decir, hacer inteligible las intuiciones sometiéndolas a conceptos y de la relaciones entre los conceptos formará juicios…
> Podemos reducir a juicios todas las acciones del entendimiento, de suerte que el entendimiento puede ser representado por la capacidad de juzgar…
> Si podemos establecer formas originarias de los juicios, tendremos funciones originarias del entendimiento y, mediante ellas conceptos originales… (p.42 – 44).

Dependiendo de lo establecido acerca de los juicios, en ese sentido dependerá el ser de la Matemática, ya se ha conjeturado sobre dos tipos como son los juicios analíticos y los sintéticos; sin embargo, cada uno de estos se hacen insuficientes para lograr fundamentar la ciencia en cuanto tal, para ello Kant recurre a una categoría superior, los juicios *sintéticos a priori*. Kant parte anunciando que todos los juicios del conocimiento Matemático son sintéticos pero no solamente tienen este fundamento, por otra parte no vienen de la experiencia, son de necesidad y de logicidad y ello evade a la experiencia, como lo referiría su colega Leibniz son entes de razón en palabras de Kant:

> Debe notarse, ante todo, que las proposiciones propiamente matemáticas son siempre juicios a prioris y no juicios empíricos, porque implican necesidad, la que no puede abstenerse de la experiencia. Más, si no se quiere conceder esto, limito mi proposición a las matemáticas puras, cuyo concepto trae consigo el no contener el conocimiento empírico, sino solamente a priori (Traducción de Del Perojo, 1976, p. 157).

El problema plantea establecer la no participación de la experiencia en el desarrollo de la ciencia de la Matemática, en concatenación con lo anteriormente enunciado, la intuición se encargaba de "captar" e imponer formas al desorden emanado de objeto llamado fenómeno, la pregunta ahora es si la Matemática Pura, como lo refiere el presente autor es manifestación de qué objetos, por cuanto en el entendimiento no hay nada, se forman a partir de la intuición. La situación es crítica por cuanto la Matemática debería ser una representación de algo, si este algo fuese algo concreto; sin embargo sería una especie de consecuencia lógica y necesaria que se da en la razón, a esto sale Kant estableciendo:

> He aquí, pues, un conocimiento grande y comprobado, que ya ahora alcanza una extensión admirable y promete, para el porvenir, una ampliación ilimitada; un conocimiento que lleva en sí certeza perfectamente apodíctica, esto es necesidad absoluta, y que por tanto no se apoya en ningún fundamento empírico; que es por consiguiente un producto puro de la razón, pero además completamente sintético (Prolegómenos, 1999, p. 79).

El asunto es claro, la Matemática es un constructo de la Razón, es de carácter puro en el sentido de no partir de la experiencia, al no partir de la experiencia es lo que le da el carácter de a priori, no es que sea la representación de algo que existan ideas previas de la misma como en el caso de Platón, en este sentido Kant no es un

Idealista sino racionalista, el conocimiento es deducido por la razón. La Matemática es una realidad creada a priori por el mismo objeto propio de la razón, los juicios y esto es ilimitado como lo establece nuevamente Kant:

> En la matemática y en la ciencia de la naturaleza la razón humana reconoce ciertamente limitaciones, pero no límites; esto es, reconoce ciertamente que hay algo fuera de ella, a lo cual ella nunca puede llegar, pero no reconoce que ella misma vaya a estar nunca acabada en ningún punto de su desarrollo interno. La ampliación de los conocimientos en matemática y la posibilidad de invenciones siempre nuevas llegan hasta el infinito… (Prolegómenos, p. 225).

Con ello la razón sale adelante en el sentido de no innatismo y sí creación permanente, los entes de la Matemática no son ideas al estilo de Platón, ni las ideas existen en independencia de la razón pues, son fruto de ellas; por ello se destacan los juicios sintéticos a priori, es decir están en la capacidad de la razón de advertir. Cabría la pregunta: ¿qué es lo que advierte? La respuesta pudiera ser la siguiente, al pasar a las categorías del entendimiento, es decir, cuando Kant establece que en el entendimiento no hay ideas, sino unas estructuras formales mediante las cuales, se les da "formalidad" en la intuición del lo emanado por el fenómeno, siendo esto lo que permite emitir juicios, rápidamente se encuentra como categoría primera la cantidad. Teniendo presente que estas se soportan de manera fundamental en el espacio y tiempo:

> Espacio y tiempo son las intuiciones que la matemática pura pone por fundamento de todos los conocimientos y juicios suyos que se presentan a la vez como apodícticos y necesarios; pues la matemática tiene que representar, esto es, construir todos sus conceptos primeramente en la intuición y la matemática pura debe hacerlo en la intuición pura, sin la cual no le es posible ni dar un paso… La geometría toma por fundamento la intuición pura del espacio. La aritmética construye ella misma sus conceptos de números mediante la adición sucesivas de las unidades en el tiempo… (Prolegómenos, p. 85).

De lo anterior se deducen dos elementos, el asunto es intuir en construcción pues la participación del sujeto es evidente, sin embargo es una intuición pura y el otro elemento importante esta en el juicio, uno de los más esbozado son los de cantidad. Pero estos son fruto de intuiciones puras manifiestas en el lenguaje de manera sintética, lo que permite generar la posibilidad de una Matemática reducida a la Lógica como surgirá más adelante en la historia. Si la Matemática viene establecida por juicios sintéticos a priori centrados en A = A, se puede advertir un marcado logicismo y un aspecto constructivo por parte de la razón.

GEORG W. F. HEGEL

El pensamiento alemán llega a una cúspide con Hegel, en especial la corriente llamada Idealismo y de los grandes sistemas metafísicos, el fundamento es la conciencia absoluta, las cosas existen en la medida en que la conciencia las conoce, existir depende entonces de la conciencia. Por otra parte, dicho autor no es un destacado matemático, lo importante es su pensamiento ontológico referido a la dialéctica de la cantidad como discreta y continua, además Morales (1997) establece que en: *Hegel se plantean dos estudios relevantes, el primero referido a su doctrina (doctrina del ser), el segundo el método* (p. 76). Desde el problema del ser es donde se hace posible plantear el asunto sobre la Matemática porque además de la cantidad, como se ha mencionado, está el concepto de número. Cabe recordar que la segunda obra monumental La Ciencia de la Lógica en la cual plantea el problema del método con una nueva perspectiva, no en sentido aristotélico de verdadero y falso, pues parte del establecimiento de la dialéctica creando una racionalidad distinta.

> Objeto de la lógica es, el pensamiento puro con leyes y determinaciones que se da a sí mismo. Ser y pensar en Hegel son uno y lo mismo. Su lógica es, pues, también una ontología, *logos* del *on.* No una lógica formal y abstracta, sino una lógica real que coincide con la metafísica y es “la ciencia de las realidades comprendidas por el pensamiento que, por lo mismo expresa la esencia de las cosas”… La lógica de Hegel pretende ofrecernos la verdad en sí misma, desnuda de todo ropaje cósmico-material… (Colomer, 2006, p. 330).

Por ello, la Matemática como ciencia no es un punto clave en su filosofía, aparece como elemento mental que puede ser reducido a la lógica y lo establece como razonamiento mecanicista en este sentido plantea Colomer (2006):

> Hegel no siente excesivo entusiasmo hacia las matemáticas, que representan, en su opinión, la extrema exteriorización del pensamiento. Si interesaron tanto a los pitagóricos hasta llevarles a expresar en números las relaciones racionales, fue porque eran mentes pueriles que acababan de elevarse de los sentidos al pensamiento. Platón acertó, pues, al situar los objetos matemáticos a medio camino entre los de los sentidos y la inteligencia. El razonamiento matemático es además tan mecánico, que podría ser realizado por una máquina. Por ello, los que dan a la matemática el puesto superior en la educación promueven la más completa mecanización de la mente (p. 337)

La referencia es clara y determinante del pensamiento hegeliano sobre dicha ciencia, de manera especial al dar la afirmación sobre "la exteriorización del pensamiento", evidentemente si la razón esgrime planteamientos dialécticos, elementos como la aritmética quedan reducidos, según el Hegel, al simple pensamiento mecánico y por ello una máquina podría realizarlo. En este sentido es posible darle la razón en parte, si se reduce a solamente algunos elementos muy mínimos de lo que significa Matemática. Pero, dirigiremos ahora nuestros cuestionamientos hacia los aportes indirectos y filosóficos que dicho autor hace sobre la dualidad cantidad y número.

Sin embargo, se imperativo la discusión sobre el ser, puesto que la metodología o la lógica desarrollada por Hegel no quiere ser otro aspecto sino la aproximación a la realidad; de esta forma, debe tomarse muy seriamente en consideración todo lo mencionado sobre el idealismo y su esencia del conocimiento. Por ello Hegel afirma:

> Ser, puro Ser –en su indeterminación es sólo sí mismo, y tampoco es desigual frente a otro, no tiene ninguna diferencia, ni en su interior, ni hacia lo exterior. Por vía de alguna determinación o contenido, que se diferencia en él, o por cuyo medio fuese puesto como diferente a otro, no sería conservado es su pureza.
> Es la pura indeterminación y el puro vacío. No hay "nada", que uno no pueda intuir; o bien él es sólo este puro, vacío intuir en sí mismo.
> Tampoco hay nada en él que uno pueda pensar, o bien éste es igualmente sólo un pensar vacío. El ser, lo inmediato, es en realidad la

> “nada”, ni más ni menos que la nada (Ciencia de la Lógica, 1948, p. 107).

Mediante un lenguaje sumamente complicado, Hegel hace la definición u aproximación al ser, evidentemente uno de los problemas más serios de la filosofía es el problema ontológico y ¿cómo aproximarnos al ser?, desde aquí está lo controversial del asunto, al referirse a su indeterminación pero centrado en la identidad siendo éste otro de los máximos principios. El problema establecido es la dualidad en identidad conjeturada en el ser. Como se ha venido refiriendo, el asunto gira alrededor de la dialéctica, por tanto no puede permitirse una sola de las caras de la dualidad, en esta forma inmediatamente Hegel contesta acerca de la nada:

> Nada, “la pura nada”, es la simple igualdad consigo misma, el vacío perfecto, la ausencia de determinación y contenido, la indistinción en sí misma – en cuanto puede hablarse aquí de intuir y pensar, vale como una diferencia el que pueda ser intuido o pensado o “nada”. Intuir o pensar la nada tienen, pues, un significado; los dos son distintos, y así la “nada” (existe) en nuestro intuir y pensar vacíos mismos, y el mismo vacío intuir o pensar que es el puro ser – la nada es, por tanto la misma determinación o más bien ausencia de determinación, y con este es en general la misma cosa que es el puro ser (Hegel, 1948, p. 107 – 108).

El lenguaje sigue siendo complicado generando dudas y controversias, por cuanto al final la precisión de la nada apunta al ser y viceversa, cuando se aproxima al ser, éste se traspasa a la nada. Esta es la tónica de Hegel, manteniendo la igualdad entre los contrarios, es decir la bipolaridad entre el ser y la nada, desde la Matemática esto no genera una situación controversial por cuanto siempre su realidad ha estado envuelta en controversias y paradojas, caso particular la disputa entre el punto y la recta, el primero es la intersección de dos rectas y la recta es una secuencia de puntos, por tanto la realidad de la Matemática es de aspecto controversial y dialéctico. En términos hegelianos, la recta en tanto que recta se convierte en punto y, de igual forma, el punto en tanto que punto depende de la intersección de dos rectas. Lo importante de Hegel es ese movimiento, el cual será aplicado a la cantidad y al número.

En tal sentido, el principio se refiere al uno de manera ontológica:

> El-ser-para-sí es en primer lugar un existente para-sí, un “UNO”. En segundo lugar el “UNO” traspasa en la “multiplicidad de los unos” – lo cual es “repulsión”, y este ser otro de lo uno se elimina en la idealidad del mismo – lo cual es abstracción (Hegel, 1948, p. 2001).

Lo establecido es la situación de la unidad en tanto que unidad, el problema de los números es la discusión se dada en la representación con los símbolos, como se establecerá en Russell, la clase de los tres, pero el 3 (tres) en sí mismo es una Unidad, de manera sintética el *agregatum* de uno, mas otro, mas otro me genera una unidad, un trío que es al mismo tiempo uno. Por supuesto, es una idealidad porque en la realidad hay tres elementos que se configuran en uno solo. Entonces Hegel refiere a la Unidad como el principio del ser:

> El ser-para-sí es la simple unidad de sí mismo y de su momento. Está presente solo una determinación, la referencia-a-sí-mismo del eliminarse… El ser-para-sí de esta manera es un existente para-sí, y en cuanto esta inmediación desaparece su significado interior, es el término totalmente abstracto de sí mismo, lo “UNO” (Hegel, 1948, p. 209).

Nuevamente el “duro” lenguaje en el sentido de realmente abstracto quiere definir e incluso conceptualizar el principio fundamental de los Números Naturales sustentándolo en el principio de Unidad, Hegel se refiere al ser en cuanto principio; sin embargo desde la Matemática es advertido como un generador, el cual es, si se quiere “a priori” y lógicamente necesario, se impone fenomenológicamente como evidencia clara y distinta, por tanto no queda otra alternativa que la de ser asumido en tanto que principio, el punto de partida es entonces la Unidad como Idealidad. A ello insiste el autor:

> Lo uno es la simple referencia del ser-para-sí a sí mismo, en la cual sus momentos han recaído dentro de sí y por lo tanto él tiene la forma de inmediación y sus momentos, por ende se vuelven ahora existentes…
> El ser-para-sí constituye “en lo uno la puerta” unidad del ser y de un ser determinado, como absoluta unificación de la relación hacia otro y la relación hacia sí…
> Lo uno… es el grado que entre los antiguos se presentó como

> principio atomístico, según el principio de las cosas consiste en átomos y el vacío… el ser-es-para-sí, el sumo ser-dentro-de-sí cualitativo, caído en completa exterioridad, inmediación o ser en el ser de lo uno, por ser esta la negación de todo ser-otro, se halla puesta, para no ser determinable ni mudable (Hegel, 1948, p. 210 – 212).

Aun cuando no desea ser pitagórico, en el comienzo de la temática, Hegel niega el elemento ontológico de la Matemática reduciéndola a un cálculo mecánico; por otra parte, las consideraciones sobre la unidad en la idea absoluta que manifiesta en la lógica como son las referencias antes nombradas, da pie para esa ontología, pues el principio generador es el Uno, punto de partida. Este uno es "negado" dialécticamente para volver a ser lo mismo, la unidad. Dichas consideraciones, en la actualidad siguen siendo palpables en Matemática, por ejemplo: 1 + 1 = 2, este dos es nuevamente una unidad, el uno ha agregado otro que se ha vuelto sobre sí conformando el 2, este es otra unidad pues es un 2 (dos). De esta forma, se inician los naturales en la dialéctica del ser, lo importante es este movimiento dialéctico, de esta forma establece luego la cantidad o magnitud:

> Es la determinación que se ha vuelto indiferente al ser; es un término que al mismo tiempo no es tal, es el ser-para-sí que es en absoluto idéntico al ser para otro – es la repulsión de muchos unos, que inmediato es no repulsión y continuidad de ellos (Hegel, 1948, p. 237).

La cantidad surge como el traspasar del ser originario que al mismo tiempo se vuelve hacia lo otro, Morales (2007) le determina como la cantidad pura frente a la determinada, en su determinación se hace variación de más grande o menos grande. Por otra parte la cantidad en Hegel se caracteriza por ser abstracta como se ha planteado y además superficialmente (aspecto que apunta a la continuidad) sin embargo todo referido como pensamiento.

> La cantidad se concibe por nosotros de dos maneras, vale decir, abstracta y superficialmente, en tanto precisamente lo imaginamos; o bien como sustancia, lo cuál se efectúa sólo por el intelecto. Si atendemos a la imaginación… la encontramos finita, divisible y constituida por partes; pero si la atendemos a ella en tanto se halla en el intelecto y la concebimos en cuanto es sustancia… la encontramos infinita, única e indivisible (Hegel, 1948, p. 224).

Nuevamente vuelve a tocar principios ontológicos de la Matemática como el infinito, la divisibilidad y por su puesto la unidad. Es posible advertir dos características del infinito, lo conmensurable y lo inconmensurable. Es posible que en Matemática se estudie el infinito como imposible de alcanzar, sin embargo, no se trata de un alcanzar para hacerlo propio, el infinito es una realidad dialéctica que puede comprenderse e incluso limitarse como el caso de los números transfinitos desarrollados por Cantor. Pero volviendo a Hegel, el problema del infinito y del ser se conjugan como ideas absolutas y pertenecientes al intelecto, de esta forma es solamente una idea. Pero además la cantidad desarrolla una dualidad, lo continuo y lo discreto:

> La cantidad contiene los dos momentos de la continuidad y discontinuidad. Tiene que ser puesta en ambos como en sus determinaciones. Es enseguida inmediata unidad de ellos, vale decir que se halla ante todo puesta principalmente sólo en una de sus determinaciones, en la continuidad, y es así magnitud continua (Hegel, 1948, p. 257).

Hoy nos referimos al planteamiento en término de lo continuo y lo discreto, como puntos clave para el pensamiento de la Matemática, aquí está el centro de la ontología Matemática y sus consideraciones sobre el ser de la misma, por cuanto definida la cantidad como principio y sus vertientes es posible hacer la especificación de la cantidad de las cantidades, es decir el número, en tanto que número.

> El número debido a su principio, que es el uno, es en general una colección exterior, una figura absolutamente analítica, que no contiene ninguna conexión interior. Puesto que se halla engendrado así sólo de modo extrínseco, todo compuesto representa una producción de números, un NUMERAR o manera determinada de un CO-NUMERAR (Ciencia de la Lógica, 1948, p. 226).

En primera instancia, asume el autor la existencia a priori de un principio, en un momento pareciera que centrarse en algo analítico pero exterior, es decir como algo aparte de la conciencia y como tal en su independencia todo genera número, es decir se refiere a la realidad como exterioridad del yo, sin embargo vuelve a los pitagóricos y le da un sentido puesto que para él, el número es un objeto de carácter espiritual, es decir aunque la reflexión lo lleve a la exterioridad por tratarse, aparentemente, de un simple cálculo, el problema no está en el cálculos sino en los principios que rigen dicho cálculo y esto se da en la conciencia absoluta y originaria que es el yo.

> El número constituye el último grado de imperfección, que concibe lo universal, afectado por lo sensible… El número está entre los sensible y el pensamiento en tanto tienen al mismo tiempo (el carácter) de aquel, de ser en sí lo múltiple, lo recíprocamente extrínseco… Lo sensible acogido en el pensamiento (Hegel, 1948, p. 277).

La imperfección a la que se refiere el autor es a la concreción del objeto, en ese particular es la afección por lo sentido, lo concreto y si se quiere lo material, es la disolución de la idea en la res extensa que se separa de sí misma de la conciencia (idea) hacia lo más exterior, lo concreto. Es una manifestación del espíritu en la exterioridad del ser, sin embargo no deja de ver con la idealidad, la abstracción y fundamentalmente sería el polo dialéctico en oposición al pensamiento. Sin embargo, por ser dialéctico no puede quedarse en la concreción de la exterioridad, debe volver al en sí, a la cantidad y sostener el agregatum:

> El número queda como un uno que ha vuelto a sí-mismo y es indiferente a otros…
> Esta indiferencia del número frente a otros es una determinación esencia en él, y constituye su ser-determinado-en-sí, pero a la vez su propia exterioridad – El número es así un uno numérico como absolutamente determinado, que tiene al mismo tiempo la forma de simple inmediación, para el cuál la relación hacia otro es completamente extrínseca. Como uno que es número… tiene además determinación… como sus momentos en él mismo, en su distinción entre la unidad y monto, vale decir (lo número) es en sí esta absoluta extrinsequedad (Hegel, 1948, p. 264).

Esta referencia no es más que la confirmación de la dialéctica entre lo uno y lo múltiple, entre el uno concreto de la cantidad y su principio generado por el Uno ontológico como principio. La cantidad concreta no es más que la determinación de la cosa en tanto que cosa, es decir, la cualidad a la que se refiere el matemático cuando determina un conjunto, su extensionalidad o el número determinado por la clase. Sin embargo, para Hegel quien solamente manejaba, al parecer la aritmética, esta exterioridad es la manifestación del principio del espíritu quien concibe la Unidad. Volviendo a lo planteado en la introducción y corroborando la corriente idealista, la Matemática vuelve a ser *un pensamiento.*

LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMÁTICA DESDE LOS MATEMÁTICOS

La investigación desde este momento da un giro sobre los fundamentos de la Matemática pero planteado desde los matemáticos aunque, en alguna manera, se ha venido desarrollando mediante algunos autores considerados por la opinión como filósofos. Es interesante, por otra parte, establecer al respecto la contraparte de los llamados matemáticos; en este sentido, centraremos la visión fundamentalmente en el siglo XIX y la parte de silgo XX. Es claro, las controversias sobre los fundamentos de la Matemática no se han resuelto, por el contrario, en algunos casos se agudiza dándose un giro pragmático por cuanto la falta de fundamento no disminuye para nada la aplicabilidad de la misma. Sin embargo, todavía hay consideraciones frente a tres corrientes reconocidas en la Matemática como filosofías de la Matemática, siendo estas: Formalismo, Logicismo e Intuicionismo. Algunos de reciente data hablan del Constructivismo como otra fuente de inspiración para el pensamiento matemático. Por otra parte hay una influencia permanente del platonismo o del idealismo como elemento fundante del quehacer matemático.

Ciertamente ya lo advierten los filósofos, para aproximarse a los cimientos de la Matemática se requiere se analicen los objetos que la configuran, en este caso vuelve la situación de la cantidad representada por el número como discontinuidad y la extensión o continuidad esbozada en las distintas geometrías, además hay el permanente roce con la temática siempre comprometedora del infinito.

Para Bell (1985) establece cuatro períodos críticos:

> Al primer período se asocia un comienzo de la moderna aritmética abstracta y del álgebra, al usar Gauss (1801) una relación particular de equivalencia, que él llamó congruencia, para ordenar una clase infinita de enteros en una subclase finita…
> En la década de 1830 – 1840 los algebristas ingleses reconocieron claramente el carácter abstracto y formal del álgebra…

> En la década de 1870 – 1880 se concibió la manera moderna de abordar los números reales, en la obra de Cantor, Dedekind, Méry y Weierstras. El resultado fue que a finales del siglo XIX se aritmetizó el análisis y se inició el movimiento crítico…
> Del tercer período se pasó al cuarto hacia 1897 con la aparición de las modernas paradojas del infinito. A éstas se debió en gran parte el súbito desarrollo de la lógica matemática que ahora ha actuado con mucha fuerza sobre toda la Matemática y en particular sobre el concepto de número (p. 177 – 178).

Si algo tiene de importante nuevamente sobre dónde se fundamenta la Matemática, ciertamente la aritmética tiene sentido de plenitud, pero al mismo tiempo el entronque para todo está en la concepción de número como elemento más destacado, lo importante es plantear lo significativo y los distintos puntos de los autores, incluso la aceptación dogmática de algunos en lo más profundos sentimiento pitagóricos como lo refiere nuevamente Bell (1985) sobre Kronecker:

> El foco de las últimas dificultades serias se vió inesperadamente que estaba en las espaciosamente inocuos números naturales 1, 2, 3,… que desde los días de Pitágoras habían sido con avidez aceptados por los matemáticos para ganar el cielo. Incluso Kronecker (alemán, 1823 – 1821), pitagórico empedernido y uno de los algebristas y aritméticos más eminente del siglo XIX, afirmó confiado que "Dios hizo los enteros, lo demás lo ha hecho el hombre" (p. 180)[26].

En correspondencia con lo planteado y su perspectiva realmente platónica, si se quiere ya cristianizada por San Agustín, quien reivindicó a Platón, los números naturales N gozaban de gran fortaleza "a priori", es decir son tan evidentes que no necesitaban ni demostración y por ser naturales son propios de la realidad humana, de ahí el término de naturales, en ese aspecto Gabba (1975) aclara que lo manifiesto por Kronecker fue: "Dios creó a los números Naturales, lo demás es obra del hombre", ciertamente la distinción es clara por cuanto el 0 (cero) como entero es siguiente de -1 (menos uno), entendiendo que los naturales N se corresponden a los enteros positivos Z+, para los que recurre a tres conceptos primitivos y cinco axiomas.

[26] Hay una controversia entre autores por cuanto para algunos el planteamiento de Kronecker no es que Dios creó los enteros sino los naturales y este tiene mejor connotación…

Conceptos primitivos

a. *Un conjunto:* N cuyos elementos se llaman "números naturales".
b. *Un objeto matemático:* 0 llamado cero.
c. *Una relación:* sg llamada "siguiente de" o sucesor

Cinco axiomas

1. 0ε N: cero es un número natural.
2. a ε N $\rightarrow$ (*sg a*) ε N: si a pertenece a N, su siguiente pertenece a N.
3. a ε N $\rightarrow$ *sg a* $\neq 0$: Cero no es siguiente de ningún natural.
4. (a,b) ε N, *sg a* = *sg a* $\rightarrow$ a = b: si dos números tienen el mismo siguiente de o sucesor, entonces son iguales.
5. (A $\subset$ N, 0 ε A, a ε A $\rightarrow$ *sg a* ε A) $\rightarrow$ A = N. Si A es un conjunto tal de números naturales tales que:
   0 ε A y a ε A implica que el siguiente de a pertenece a A, axioma de recurrencia o de inducción completa. (Gabba, 1975, 258).

Lo importante de este asunto es el inicio de una axiomática, su punto de partida como lo establece el autor son tres conceptos primitivos, si se trata de una perspectiva lingüística el asunto es controversial, pues el concepto no es algo realmente abstracto, como se ha visto en los inicios de la investigación y en referencia a los grandes maestros como Platón y Aristóteles el concepto es la equivalencia a la concreción de una idea, se por la vía de la intuición o sea por la vía de la deducción, el concepto es realmente abstracto pero al mismo tiempo es una forma de concreción ideal, es por ello que, como se ha venido aclarando a lo largo de la investigación: no debe haber lugar a la duda, la Matemática es una creación de la mente humana. Por otra parte volvemos a una especie de platonismo en cuanto a las ideas pero fundamentadas en un racionalismo, no se trata de un idealismo absoluto de ideas independientes del pensar humano como una especie de realismo ingenuo, se trata de deducciones e inducciones sumamente lógicas y necesarias como lo establecería Leibniz. La Matemática es un esfuerzo producido por la razón humana.

Por otra parte, Peano fue uno de los primeros; sin embargo paralelamente a su constructo aritmético, cabe destacar otro de los grandes y preocupados por fundamentar la Matemática como lo plantea Ghyka (1998):

> Paralelamente a la Axiomática de Peano para la Aritmética tenemos la de Hilbert, todavía más impresionante que aquella puesto que se sirve de convenciones *a priori* arbitrarias con respecto a entidades abstractas, no definidas, para elaborar toda la Geometría, campo aparentemente concreto. Hilbert aparta primeramente las ideas, definiciones o imágenes que asociamos a las entidades geométricas y “piensa” tres clases diferentes de objetos… (p. 181).

El problema del formalismo iniciado por Hilbert vuelve el sentido nuevamente a mundo de Platón y de las ideas, la fundamentación de la matemática obtiene nuevamente su razón de ser desde la realidad de un mundo estructurado si se quiere a priori, incluso desarrollará unos veinte axiomas constituidos como piedras angulares para la construcción, el otro elemento significativo es el soporte de una lógica estructurada y ampliada que inicia con una deducción pero que al mismo tiempo desarrolla la inducción. Los entes de la Matemática al parecer son confirmados como realidades a priori del pensar humano.

Por otra parte, asumir el reto de fundamentar la Matemática sin tomar en consideraciones los números que son dados y manifiestos llevará a una búsqueda de un punto de partida concreto, como los conjuntos y otro punto importante es sobre el infinito. Sin embargo para Bell (1985) establece seis episodios importantes en el fortalecimiento de la Aritmética:

> La definición por Gauss, Kummer (alemán, 1810 – 1893) y Dedekind de los enteros algebráicos; la restricción del teorema fundamental de la aritmética a los campos de números algebraicos debida a la introducción de los números ideales por Dedekind; la obra definitiva de Galois sobre la solución de las ecuaciones algebráicas por medio de radicales y la teoría de los campos que siguieron; la aplicación parcial de los conceptos aritméticos aplicados a ciertas álgebras lineales por Lipschitz (alemán, 1831 – 1903)…
> El quinto episodio de gran importancia, que lógicamente parecería preludio necesario para otros… hasta los últimos del siglo XIX nadie se preocupó por los naturales 1, 2, 3,… Todos los matemáticos desde Fermat y otros habían aceptado los números como dados…
> El último es la aplicación de la aritmética al cálculo diferencial (p. 229 – 230).

El resumen extraordinario de Bell sobre lo que él considera son los eventos que marcaron un hito en la conformación de la búsqueda de los fundamentos de la Matemática, explican por qué Kronecker establecía como un acto de fe la aceptación dogmática de la existencia de los números. Ciertamente la aritmética frente al avasallamiento del cálculo quedaba de segunda mano. Esto coloca nuevamente sobre el escenario el problema del fundamento y cómo reestructurar, lógicamente no se podía iniciar la resolución del problema sin comenzar por lo más primigenio, el concepto de número, la consecuencia fue apuntando al menor de los conjuntos como es el conjunto de los números naturales, aun cuando en la actualidad Courant y Robbins (2002) afirman al respecto:

> Creados por la mente humana para contar los objetos en diversas colecciones, los números no hace referencia alguna a las características individuales de los objetos contados. El número seis es una abstracción de todas las colecciones reales de seis cosas… (p. 23).

Esto no está lejos de la axiomática de Peano y por el contrario reafirma su planteamiento cundo nuevamente los autores antes mencionados vuelven a establecer el siguiente planteamiento:

> Afortunadamente, el matemático como tal no necesita ocuparse de la naturaleza filosófica de la transición de colecciones de objetos concretos al concepto abstracto de número. Por tanto aceptaremos a los números naturales como dados, junto con las operaciones fundamentales, adición y multiplicación, mediante las cuales pueden combinarse (Courant y Robbins, 2002, p. 23).

Una salida importante fue entonces la búsqueda de elementos con características semejante o con algo en común, como una propiedad o comportamiento que pudiera reunirlos, no importa se la colección era finita o infinita, con el desenvolvimiento de la lógica y su capacidad de razonar y definir fue posible desarrollar la teoría de conjunto.

> Uno de los conceptos fundamentales es el de una *clase* o un *conjunto* de objetos. Un conjunto se define como una propiedad o atributo cualquiera de *U* que cada objeto considerado debe tener o no tener; aquellos objetos que poseen la propiedad forman un conjunto

> correspondiente A…
> El estudio matemático de los conjuntos se basa en que estos pueden combinarse mediante la adición y multiplicación para formar otros números… (Courant – Robibins, 2002, p. 138).

En este sentido Kant puede servir de fundamento por cuanto, sea la colección de objetos que se antepongan al sujeto, no son más que objetos los cuáles serán determinados por las formas aprioris de sensibilidad y será el sujeto quién determinará el ser de la realidad mediante dichas formas. No importa cuál es la colección, lo importante es la forma a priori que le da sentido al imponerle condiciones, lógicamente y racionalmente si cumple con las condiciones entonces todo elemento que cumpla con dichas características impuestas formarán parte de dicha colección.

Asumiendo el racionalismo kantiano, para los matemáticos no importará luego el elemento en concreto, casa, árbol o número en particular. Cada objeto deberá ser tratado en función de la imposición de una condición por el sujeto cognoscente. Lo importante será la relacionalidad que puede haber entre uno u otro elemento según sus características. En este sentido Russell (1988) asumiendo la propuesta de Frege lo hace en función de conjunto: "*Número es todo lo que caracteriza a los números, del mismo modo que hombre es todo lo que caracteriza a los hombre"* (p. 19). A primera vista parecería simplemente un juego de palabras, la interpretación es quizá de carácter a priori en el sentido de corresponder a clases determinadas, el conjunto determinado por la característica de número, no importando que tipo de número es simplemente el es; de esta manera se transforma en la parte importante homeomórficamente, como todo principio que caracteriza al ser humano que determina colecciones por igualdad o por diferencia, en ambos casos busca un principio para reunir cosas, pero él es quien determina en función a intereses. De este modo vuelve a conjeturar: *"El número 3 es algo común a todos los tríos y que los distingue de otras colecciones, concretamente las que tengan ese número"* (p. 19). Nuevamente se hace la reflexión de imposición a priori por parte de la mente humana, utiliza como fundamento una capacidad de discernir y agrupar la colección o la reunión de elementos puestos ante sí con una formalidad mediante la cual podrá esgrimir cualquier otro tipo de relación. Por ello establece nuevamente el autor: *"Es evidente que un número es una forma de agrupar determinada colecciones, concretamente las que tienen un número dado de elementos…"* (p. 21). Lo que está en evidencia es la simple aceptación de los números naturales N, es decir: sea cualquier grupo de cosas o elementos, en especial de carácter finito, inmediatamente es posible incardinarlos dentro de una propiedad que responda a una particularidad, a esto se le llamará Clase.

Concretado el significado de Clase, inmediatamente surgen los axiomas derivados de los llamados conceptos primitivos y primigenios. Comenzando con la "comparación" de equivalencia de clases:

> Se dice que dos clases son "similares" cuando existe una relación uno a uno que hace corresponder a cada uno de los términos de una clase un término de otra clase, tal como la relación del matrimonio hace corresponder a los maridos con las mujeres…
> *Se dice que una clases es "similar" a otra cuando existe una relación uno a uno (o biunívoca) de la cual una clase es el dominio y la otra es el dominio inverso…* (Russell, 1998, p. 22 - 23).

La aventura del autor está en puntualizar un principio filosófico, asume una postura realista de carácter materialista. En primer orden, su trabajo consiste en determinar la forma y manera de cómo establecer principios de colección o reunión para los elementos que están frente a él de manera caótica, es decir: teniendo propiedades similares y propiedades distintas. El punto central es la posibilidad de establecer un principio lógico de agrupación; dicho principio es a priori y fundamentado en la famosa perspectiva del conocimiento como adecuación entre lo pensado y la realidad. Desde el punto de vista de la lógica, si lo pensado coincide con lo real es una verdad, la adecuación surge entonces como una condición fundamental para poder relacionar las cosas entre sí. Una vez establecida la relación y planteada la regla a seguir, inmediatamente se deducen las operaciones y funciones que determinarán el juego de composición. Desde esta perspectiva, la filosofía invade nuevamente el campo de la Matemática con el estructuralismo cuyo planteamiento es el siguiente:

> Tratando de eliminar los objetos de la matemática en el sentido de que el matemático no maneja los mismos sino básicamente estructuras, y partiendo de una pretendida praxis matemática en la cual lo que se maneja son teorías o sistemas plenamente clausurados, surge una corriente que pretende dar una fundamentación al hacer matemático, la estructuralista (Lorenzo, 2005, p.19).

Estos elementos hacen resaltar lo conflictivo en torno a las disquisiciones de los entes matemáticos. Esto tiene que ver con las puestas en boga de las distintas corrientes de pensamiento. El ser humano busca maneras de interpretar y comprender la realidad, por tanto, es imposible que no haya incursiones del pensamiento humano sobre la ciencia. De igual manera, como las ciencias influyen en el pensamiento social y en su aplicabilidad en ese sentido las ciencias se ven influidas por las corrientes del pensamiento humano.

Ciertamente es posible aglutinar las tres perspectivas de la Matemática como tres corrientes en la cual se pueden adscribir cualquier número de pensadores sobre los fundamentos de la Matemática, en este sentido se plantean desde la fundamentación inicial elaborado por Peano las tres corrientes manifiestas en torno a la Matemática que intentan dar explicaciones de sus fundamentos: Formalismo, logicismo e intuicionismo.

EL FORMALISMO

Hallar puntos para iniciar las discusiones sobre esta corriente filosófica de la Matemática es interesante, muchos plantean sus inicios en determinadas temporalidades ya había un debate entre Newton, Leibniz y Berkeley sobre las mejores formalidades para estructurar el cálculo originado por los dos primeros por cuanto la metodología para desarrollo era confusa y muy complicada, cabe destacar que la formalidad reinante fue la de Leibniz, hoy el cálculo infinitesimal utiliza su eminente simbología, también es clara su participación en el desarrollo de la lógica. En este sentido Bell (1995) establece una bella introducción al planteamiento del formalismo en Matemática:

> Uno de los misterios más inexplicables de las matemáticas es la capitulación de Euler (1707 – 1783) a las seducciones del formalismo. Como Newton, Euler se daba cuenta de que "en general" las series para que sean útiles en la práctica, como para la astronomía, han de ser convergentes; pero al contrario que Newton, no pudo contenerse en este absurdo aspecto. Al parecer Euler creía que las fórmulas no pueden hacer ningún mal y que continúen proporcionándole a su creador variaciones nuevas y más prolíficas de sí mismas, merecían crecer y multiplicarse, confiando sin duda en que algún día todos sus vástagos quedarían legitimados (p. 300).

La Historia de la Matemática siempre ha referido el surgimiento al azar de los entes matemáticos; aunque el idealismo, por un lado ha marcado cierta pauta. Los problemas de fundamento siempre han sido complicados y, en muchos casos, surgen de la necesidad. Podemos conjeturar que tanto elementos, como conjuntos, al mismo tiempo muchas veces contradictorios unos con otros, en algunos casos, exigen necesariamente la globalidad para configurar el *corpus* ideal de una ciencia en particular; por otro lado, la exigencia de un método en particular que aglutine las diversas perspectivas que a veces genera preocupaciones al momento de plantear tanta disparidad. En ese sentido, es posible advertir cómo la demostración geométrica poco a poco determina un modo concreto para demostrar partiendo de axiomas y postulados. Estos al mismo tiempo permiten la tan deseada unidad entre los principios necesarios para la demostración. Por lo que continúa Bell (1995):

> Para Euler, una función es un conjunto de representaciones formales transformables una en otra mediante ingeniosos artificios que utilizaban desde el álgebra elemental hasta el cálculo (p. 301).

Cabría destacar esta perspectiva como punto de referencia y exigencia para el desarrollo de una perspectiva formalista. Es decir, surge entonces la necesidad de darle un sentido formal a la Matemática permitiéndole unificarse y de manera general buscar no un método sino establecer una metódica, por cuanto la dispersión era evidente.

En este sentido siempre habrá conjeturas sobre la necesidad de formalidad de la Matemática, esto uniría tanta variedad de perspectivas y corrientes, a veces iguales y otras diferentes.

Por otra parte, volviendo al centro del asunto, es decir, el formalismo como corriente filosófica, su clave puede referirse según Gabba (1975), a los estudios de Galois (1811 – 1822):

> Sobre de la teoría de grupos, geniales investigaciones para resolver el problema de hallar las raíces de las ecuaciones de grado superior al cuarto (las de 2do y 3er grado habían tenido solución general en el siglo XVI) fue la apertura hacia la moderna concepción del Álgebra abstracta. En ésta las operaciones se definen únicamente por axiomas que desean que cumplan de tal modo, que de acuerdo con ellos, quede determinada una cierta estructura (p. 440).

El asunto consiste en intentar establecer, en términos kantianos, condiciones de posibilidad configuradas de manera a priori, lo cual permite determinar reglas de juego impuestas a una realidad para conjeturar y desarrollar procesos como una especie de juego, parecería muy cercano al ajedrez pero de carácter matemático. En este caso tendremos luego la influencia de Wittgenstein sobre los juegos del habla, el llamado atomismo lógico.

Se ha estado conjeturando sobre Galois y además Abel, como los primeros en intentar darle formalidad a la Matemática desde el punto de vista del álgebra ya que mucho antes Euclides lo planteaba desde la geometría. El problema apunta, como se dijo anteriormente, al problema de las raíces de los polinomios de grado superior al cuarto. Lo sorprendente del asunto es que al intentar buscar los elementos originarios de Galois y de esta forma nos encontramos con toda una estructura generalizada, lo cual no permite establecer qué fue lo propuesto por esta gran genialidad. De esta forma, simplemente nos queda en original el elemento histórico; en este sentido, sólo se pueden plantear dos consideraciones trascendentales. La primera es: se ha desarrollado a lo largo del siglo XX toda una estructura algebraica iniciada por relaciones internas en un conjunto A de finido y estableciendo dicha relación de A x A como par ordenado y luego con la construcción a partir de pares (G, *) o Grupos definidos por alguna relación, hasta la construcción de estructuras realmente complejas y con propiedades características determinadas a priori como el caso de los Espacios Vectoriales como lo define Anton (1994):

> Sea *V* un conjunto arbitrario sobre los cuales se definen dos operaciones, la adición y la multiplicación por escalares (números reales). Por adición se entiende de una regla para asociar, con cada pareja de objetos *u* y *v* en *V*, un elemento *u* + *v*, llamado suma de *u* y *v*; por multiplicación escalar se entiende una regla para asociar, con escalar k y cada objeto *u* en *V,* un elemento k*u,* llamado múltiplo escalar de *u* por k… Satisfaciendo los siguientes axiomas[27](p. 157).

Lo controversial del asunto epistémico es la manera cómo en Matemática, aparentemente, se esgrimen las ideas y luego se les fundamenta. En ese sentido citando como ejemplo al Texto de Fraileigh (1987) sobre el mismo tema de álgebra abstracta el cual termina exactamente con la Teoría de Galois, en la cual afirma cosas interesantes:

> Quizás este capítulo sea el clímax de la elegancia del tema tratado en este libro. La teoría de Galois da una bella interrelación entre la teoría de grupos y la teoría de campos… (p. 415).

Pareciera que la historia se inicia por el final o nuevamente estamos frente al más ferviente platonismo, no intentamos para nada, negar lo grandioso de Galois. Sin embargo, de aceptar la perspectiva platónica sería más grandioso todavía por cuanto estableceríamos que toda el álgebra ha sido una determinación deducida de sus principios y todo el desarrolla fue para explicar la idea a priori del mismo. Cerremos el asunto de la siguiente forma:

> El teorema principal de la teoría de Galois afirma que para una extensión normal finita *K* de una campo *F*, existe una correspondencia

[27] Son lo axiomas necesarios para la configurar un Espacio Vectorial, ver p. 157 de Howard Anton.

> uno a uno entre los subgrupos G(*K/F)* y los campos intermedios *E,* donde $F \leq E \leq K$. Esta correspondencia asocia a cada campo intermedio *E,* el subgrupo G(*K/E*)… (Fraleigh, 1987, 417).

Lo importante del planteamiento de Galois fue el establecer elementos característicos y categoriales a priori para darle limitación a propiedades del comportamiento de los polinomios de raíces superiores. Por tanto, la controversia sigue abierta y el apriorismo reinante, lo cuál indica que el formalismo será simplemente dar explicaciones y hacer deducciones de los elementos de carácter a priori antes mencionados. Por ello Bell (1985) cierra acertadamente este planteamiento:

> De todas las influencias hay dos que están particularmente emparentadas: el desarrollo del álgebra lineal y la infiltración de las ideas de Abel y Galois en el conjunto del álgebra. Tanto Dedekind como Kronecker reconocieron que se habían inspirado en la teoría de las ecuaciones de Galois para a su manera propia, en general semiaritmética de abordar el álgebra. Dos de los conceptos básicos de la teoría de Galois: los dominios de racionalidad o campos, y grupos, fueron el punto de partida (p. 223).

Lo cual corrobora lo antes planteado aunque perfeccionado en el transcurso del tiempo, ahora es todo un edifico bien plantado; sin embargo, con muchas debilidades que no salen del mundo de la Matemática. Puede ser que, en cuanto a la aplicación, en otros campos como la física, en especial la *física de las partículas,* la asunción a priori de la formalización sin entrar en detalles de los puntos ciegos los avances a priori de la Matemática tengan resultados extraordinarios que el físico no detecta, ello no le preocupa si no se es matemático aunque la inconsistencia sea al interno de la Matemática.

LA AXIOMÁTICA DE HILBERT

La entrada en juego de Hilbert sobre los fundamentos de la Matemática se tomo como referencia el Congreso Internacional de 1900, en el cual manifiesta su programa, el formalismo en contraposición a las otras dos corrientes paralelas como son el intuicionismo y el logicismo como lo establece Bourbaki (1976):

> Presentaba un nuevo principio que tendría gran resonancia: mientras que en la lógica tradicional la no contradicción de un concepto lo hacía "posible", para Hilbert equivale (al menos en lo que refiere a los conceptos matemáticos definidos axiomáticamente) a la *existencia* de dicho concepto. Esto suponía en apariencia la necesidad de demostrar a *priori* la no contradicción de una teoría matemática (p. 63).

Por tratarse de un congreso de connotaciones filosóficas era de esperarse inmediatamente objeciones, en este sentido, la historia refiere a una carta escrita por el gran matemático galo Henri Poincaré, incluso se establece que Hilbert no contestó de inmediato, las respuestas la realizó mucho tiempo después.

Hilbert intenta contrariar al logicismo o reducción de la Matemática a la lógica y por otra parte al intuicionismo representado por Brouwer. Por ello comentan algunos que intentan establecer un sistema al estilo kantiano, pero la parte importante es el "reduccionismo" a partir de la razón para establecer puntualmente los elementos que configuran la Matemática:

> "...algo que se presupone al proceder a inferencias lógicas y en la ejecución de operaciones lógicas está ya dado en la representación (vorstellung), esto es, ciertos objetos concretos extralógicos, que están intuitivamente presentes en forma de experiencia inmediata y se hayan en la base de todo pensamiento. Si el pensamiento lógico ha de estar seguro, estos objetos han de ser susceptibles de examinarse a fondo, en sus componentes, y la exhibición, la distinción, el orden de sus partes y la disposición de éstos en el espacio, han de estar dados en los objetos mismos, como algo que no puede reducirse a nada más ni necesita por lo demás en modo alguno semejante reducción." (Hilbert, D. en Körner, S.: Introducción a la filosofía de la matemática, p. 88)[28].

Ciertamente, la oposición es contraria a la argumentación de una Matemática reducida a una conjetura de la lógica, como lo establece Hilbert, si la lógica reduce a un simbolismo como representación, ya el símbolo por sí mismo debe ser codificado y aclarado por cuanto al ser representante del argumento debería apuntar al ser de lo que representa. Como siempre el asunto va al terreno más controversial y como

[28] http://www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Parte7/Cap26/Parte03_26.htm

fundamento del edifico matemático en el caso particular de la aritmética y especialmente de los números en tanto que números. Lo importante en el asunto es la distinción que empieza a evidenciarse sobre objetos matemáticos, interesantemente se empieza ha elaborar una discusión al interno de la Matemática, la construcción de una filosofía elaborado sobre los aspectos de no contradicción interna, en especial la Aritmética como lo desarrolla Bourbaki (1976):

> A partir de 1904, en una conferencia en el Congreso Internacional. Hilbert se plantea el problema de la no contradicción de la aritmética. Empieza por la imposibilidad de demostrarla recurriendo a un modelo, e indica a grandes rasgos la base de otro método: propone la consideración de las proposiciones verdaderas de la aritmética formalizada como agrupaciones de signos desprovistos de significación, demostrando que mediante el empleo de las reglas que rigen la formación y el encadenamiento de estas agrupaciones de signos no puede nunca obtenerse una que sea una proposición verdadera y cuya negación sea también proposición verdadera (p. 64).

Con la influencia kantiana y con la metodicidad preconcebida es fácil advertir la necesidad de intentar desarrollar desde una perspectiva finita una simplificación; estableciendo así el cómo formular algunos principios fundamentales para la construcción del edificio matemático. Por otra parte, es importante aclarar que ya hay dos corrientes alternativas en conflicto con esta perspectiva, claramente se ve la necesidad de un método y fundamentalmente una metódica, el primero sería la generalidad pero la metódica es el cómo se aproxima a cada problema en particular para que con unos referentes sea posible solucionarlo. El asunto del prestigioso matemático es el establecimiento de un fundamento a partir de reglas aparentemente claras que conducirán a la construcción del edificio matemático, en este sentido se hace referencia a un compendio del mismo Hilbert, intentando dilucidar el de dónde surgen los problemas matemáticos, en carta del congreso de 1900:

> Examinaremos a continuación, someramente, las exigencias y las condiciones generales que debemos considerar para resolver un problema matemático. Primero que nada, debería ser posible establecer la exactitud de la solución por medio de un número finito de pasos basados sobre un número finito de hipótesis, las cuales están

> implicadas en el enunciado del problema y deben ser formuladas con precisión. Esta exigencia de deducción lógica por medio de un número finito de procesos, constituye, simplemente, la exigencia necesaria de rigor. En efecto, el rigor en la demostración, condición que hoy en día es de importancia proverbial para la matemática, corresponde a una necesidad filosófica general de nuestro entendimiento; por otra parte, sólo satisfaciendo esta exigencia, el pensamiento y la sugestividad del problema alcanzan su máxima fecundidad. Un nuevo problema, especialmente cuando proviene del mundo exterior de la experiencia, es como una joven rama, que órese y nos da frutos sólo cuando ha sido cuidadosamente injertada, de acuerdo con las estrictas reglas de la horticultura, sobre el viejo tronco, los logros establecidos de la ciencia matemática[29].

Del discurso planteado lo importante es la simplificación, el uso prominente en un número finito de entes para resolver la situación teniendo muy en cuenta que la realidad tarde o temprano volverá a generar nuevas expectativas. Sin embargo, la clave del formalismo está ahí, el operar con un número finito de axiomas, signos, postulados, como lo habría establecido Dedekind al ubicar las cortaduras y luego el problema del axioma de elección, es decir asumir para poder construir, punto importante es la vivencia de una crisis en la Matemática y la necesidad de buscar fundamentos, algunos incluso llegan a cuestionar los puntos de partida estableciendo que no se trata de teología. Es claro que al asumir una referencia o un principio generador, muchas veces en Matemática cuando se asume se hace un salto de fe y dicho principio se convierte en dogma; incluso, una de las críticas a las ciencias como la física es su conducción paulatina a la asunción de posturas dogmáticas.

La pregunta fundamental es cuáles son los planteamientos del programa de Hilbert, al respecto Torres de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de México en el XI Congreso Nacional de Filosofía plantea los siguientes presupuestos:

> i.- La matemática clásica comprende dos tipos de nociones: descriptivas e ideales. *Grosso modo* las primeras correspondes a

[29] Conferencia de Hilbert del Congreso de 1900, Traducción de ORTÍZ José. http://personales.ya.com/casanchi/ref/pfuturos01.htm

> objetos y construcciones de la experiencia sensible y tienen como base la intuición del signo. Por el contrario las nociones ideales de razón que van más allá del ámbito de la percepción e incluso de toda experiencia; su función es complementar las teorías matemáticas en sentido de una totalidad.
> ii.- En la matemática clásica presenta dos tipos de ideales; por una parte, ciertas leyes cuya función es conservar las leyes de la lógica aristotélica en su simplicidad original; por la otra, ciertas nociones imaginarias (v. gr. el infinito actual) que sirven como una extensión de las nociones descriptivas. Asociadas a estas nociones ideales se encuentran ciertos principios demostrativos y ciertos *enunciados ideales* que no son susceptibles de verificación empírica, pero que forman parte integrante de la teoría. Por ejemplo el axioma de elección[30].

Frente al primer punto de vista, la idealidad es la clave del asunto, la debilidad es lo anteriormente comentado y cuestionado: la postura kantiana; por tanto, de una forma sensible a priori no puede aceptarse un mundo donde el materialismo y el positivismo se han establecido en la cima del pensamiento, de hecho la transición del siglo XIX al XX está marcada por el auge impresionante de la ciencia positiva. Desde esta realidad es fácil advertir la acusación de ser una teología y no un planteamiento racional, el reconocimiento del platonismo después de todo el crecimiento y desarrollo de la razón, en especial el auge de una racionalidad científica le daba un duro golpe a la Matemática, reconocer un a priori era volver al oscurantismo y, para algunos, retroceso del pensamiento. Por otro lado, el segundo punto se centra en la temática de la totalidad y el infinito. El infinito ha sido el amigo y enemigo silencioso de la Matemática. Una de las idealidades en Matemática sigue siendo este acompañante de viaje al que quisiéramos determinar de una vez por todas y siempre se sale con la suya. Pensar en una totalidad y poder puntualizar no ha podido ser posible, sólo se han establecido referencias y mantiene una situación, al interno de la Matemática, de constante crisis; inclusive, alguno lo dan por descontado y desarrollan sus investigaciones con el supuesto de haber resuelto el problema del

---

[30] Torres Carlos, Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de México. Congreso Nacional de Filosofía 2002.

infinito y el problema se mantiene en dos direcciones: el infinito de lo potencialmente pequeño como la cantidad de números racionales establecida entre dos racionales en un intervalo (0,1) desde la siguiente ilustración {0,…1/8,… 1/4,…1/2,… 1} o entre dos números reales en el mismo intervalo determinado {0,.. 0,5…0,6…0,7….0,9…..0,99….0,999…. 1} esto supone evadir un infinito que es muy pequeño. Estas son consideraciones interesantes por cuanto a la cantidad acumulada de elementos por un lado y, por otro parte la infinitud determinada. Ello nos llevaría a replantear el problema dialogado por Sócrates y Teetetos sobre el significado de ciencia y las posturas de razón en torno a la mensurabilidad, co–mensurabilidad e inconmensurabilidad. Es decir, el problema de la medida desde la perspectiva racional. Sin embargo, el problema se amplía por cuanto Cantor desarrolla un conjunto de números que toma como punto interesante a la determinación de un infinito asumido, desarrollando los números transfinitos, estos están más allá del infinito lo transgreden y se asume el infinito como un punto cualquiera de referencia.

Volviendo a Hilbert, su intención radica en darle consolidación a la Matemática clásica. Es por ello que, asume la argumentación geométrica y en especial los elementos formales planteados por Euclides, es claro, evidente y comprensible pues, muy a pesar del axioma de las paralelas o quinto postulado que puede desarrollarse con distintas interpretaciones, aun así mantiene la geometría una estructura formidable y estable como referente principal de organización y estructuración en el pensamiento matemático. Además el programa agrega dos puntos más como lo establece Torres:

> iii.- La incorporación de nociones ideales a la matemática constructiva está sujeta a una única condición: la de no dar lugar a contradicciones. Tal es el caso, por ejemplo, de la noción de número real en la aritmética ordinaria.
> iv.- La única manera de sistematizar una teoría que comprende nociones descriptivas e ideales es reconstruyéndola como una teoría

axiomática abstracta[31].

Nuevamente el problema vuelve al punto de vista de la concepción de la razón y fundamentalmente al problema del logos como lenguaje y logos como elemento de sustento a la razón. Pero lo controversial es la intelección o el intelecto creador, por ello la tilde de construcción a partir de la razón de un ente llamado idea. Es bueno conjeturar algo muy interesante: para el momento histórico de Hilbert, el concepto de idea es el de imagen, el de una cámara fotográfica o una especie de copia demiúrgica de la realidad. Por ello es evidente que, en términos de Morín, la autopoiesis no se comprende por ser la creación mental de una realidad abstracta concebida como reflejo de la realidad física, en este caso el formalismo desentona pues asume la idea en la plenitud del sentido platónico. Entendiendo desde otra perspectiva Hilbert desde la formalidad puede ser comprendido porque es el momento histórico y maneja las herramientas de su tiempo. Sin embargo, con la aparición de los ordenadores la captación de la realidad es muy distinta, ya no se trata de cámaras fotográficas que copian las cosas y la plasman en un sistema fotográfico plano. La realidad ahora es traducida en códigos y píxeles que detallan cada haz de luz y forma de la realidad física y la transforman en algo metafísico (códigos). Por ello, esa idealidad cuestionada ahora genera sospechas de verdades desde la autocreación del pensamiento sobre otro pensamiento, es decir el pensamiento autopoiético, el conocimiento del conocimiento como lo refleja Morín en uno de los libros sobre el método.

Volviendo a la historicidad y el momento epocal donde se desenvuelve Hilbert su intencionalidad es la de llevar a un mínimo conjunto de símbolos y axiomas para poder fundamentar, si se quiere, una Matemática finita. Cabe destacar que luego se dará un giro lingüístico en filosofía generando gran cantidad de discusiones sobre el lenguaje, en especial un movimiento encabezado por

[31] Torres Carlos, Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de México. Congreso Nacional de Filosofía 2002.

Wittgenstein y los positivistas lógicos sobre los juegos y usos del lenguaje.

El formalismo ha sido cuestionado y en algunos casos con razones muy evidentes como la inconsistencia, el axioma de elección; sin embargo, el proyecto de Hilbert no quedó agotado y se puede considerar algunos de sus seguidores como Zermelo y otros…

EL LOGICISMO

Otra de las perspectivas filosóficas de la Matemática es la corriente logicista, como su nombre indica: hace el intento de reducir los planteamientos matemáticos a una formalización lógica.

Desde la antigüedad el problema de la lógica ha estado siempre presente, como lo refiere Bourbaki (1976):

> La impresión que parece desprenderse de los textos (muy fragmentarios) del pensamiento filosófico griego del siglo V que poseemos, es la de estar dominado por un esfuerzo cada vez más consistente para extender a todo el campo del pensamiento humano procedimientos de articulación del discurso con tanto éxito empleados por la retórica y matemática contemporánea (p. 13).

El problema de la lógica aristotélica se plantea no solamente desde el lenguaje sino como procedimiento fundamental para demostrar y conjeturar la verdad; en este sentido corrobora los señalamientos acerca de la construcción del *logos*, no siendo un simple formalismo sino una manera de aproximación a la verdad, superando la retórica y logrando mantenerse, en algunos aspectos, hasta la actualidad. Es bueno recordar que todos los principios de la Matemática en sentido clásico necesitan de la lógica para poder desarrollar sus lineamientos.

González (1995), en referencia a algunos autores, plantea sobre la perspectiva filosófica del logicismo matemático lo siguiente:

> Los logicistas sostienen que toda la Matemática es reductible a la

lógica; es decir, los conceptos matemáticos se pueden definir mediante nociones lógicas simples. El programa logicista russelliano, dice Ortiz: "*pretende reconstruir toda la Matemática clásica a partir de una base puramente lógica de modo que todas las definiciones Matemáticas y todas las reglas de inferencia y sustitución puedan ser reducidas a sus contrapartes lógicas*". La tesis logicista, afirman Eves y Newson es la "*la Matemática es una parte de la Lógica. En vez de ser sólo una herramienta de la Matemática, la Lógica se convierte en progenitora de la Matemática. Todos los conceptos matemáticos tienen que ser formulados en términos de conceptos lógicos, y todos los teoremas matemáticos tienen que ser desarrollados como teoremas de la Lógica; la distinción entre Matemática y Lógica es sólo cuestión de conveniencia práctica"* (p. 38).

La extraordinaria síntesis planteada por González acerca de los distintos autores referenciados, abre una discusión interesante sobre la génesis de las dos ciencias formales en cuestión. Es muy interesante porque para autores pertenecientes a determinadas posturas epistemológicas manifiestan abiertamente la dualidad de las ciencias como formales, de objeto y método distinto al estilo cartesiano por lo que hacen en distinción cada una con lo que les propio. El objeto de la Lógica sería la estructura del razonamiento y la verdad de los juicios, mientras que la Matemática apuntaría fundamentalmente a los números, axiomas, postulados. En ese sentido serían complementarios pues los razonamientos matemáticos requieren de principios y deducciones lógicos y, al mismo tiempo, la deducción lógica requiere de estructuras sólidas axiomatizadas que le permitan una deducción con toda la rigurosidad necesaria. Sin embargo, hay las distintas consideraciones y la que se desarrolla apunta a la perspectiva reduccionista.

PRINCIPIOS DE LA MATEMÁTICA, RUSSELL, WHITEHEAD Y FREGE.

El acuse de recibo sobre la corriente logicista de la Matemática es debido a los estudios realizados por estos dos grandes estudiosos de la filosofía y de la Matemática. Según Russell (1988):

> Históricamente, la matemática y la lógica han sido estudios totalmente separados. La matemática ha sido asociada a ciencia y la lógica a los

> griegos. Pero en los tiempos modernos ambas han evolucionado y la lógica se ha vuelto más matemática y la matemática más lógica. Como consecuencia de ello, actualmente es del todo imposible divisoria entre ambas; de hecho, son una sola cosa. Entre ellas media la misma diferencia que separa a un muchacho de un hombre: la lógica es la juventud de la matemática y la matemática es la madurez de la lógica (p. 171).

La salida de Russell, vista desde la actualidad, es más filosófica y comprometedora que antes, pues fusiona, en alguna manera, lo que a finales del siglo XIX, principios y mediados del siglo XX marcó la controversia ahora vuelta a sacar a la luz por la presente investigación y otras. En este sentido vuelve nuevamente Russell a buscar una definición en base a las consideraciones que aluden al número como punto referencial para la definición de la Matemática con lo que se establece:

> La afirmación de que la matemática es la ciencia del número no se ajustaría a la verdad en dos sentidos. Por una parte, existen otras ramas reconocidas de la matemática que nada tienen que ver con el número, toda la geometría que no hace uso de coordenadas ni medidas… Por otra la noción de cardinalidad… (Russell, 1988, p. 172).

Ciertamente hasta ahora en la investigación no se ha desarrollado el problema fundamental de la Matemática contemporánea como la *Teoría de Conjuntos*, donde se plantea los conceptos y nociones de Cardinalidad y Ordinalidad. Sin embargo, como se mencionó anteriormente el aspecto de la madurez hace pensar en la transición y el encuentro de una con la otra. Por otra parte, es conveniente volver a los principios y la pregunta sobre los fundamentos de cada una por separado e intentar la discusión que permita ir develando las bases sobre las cuales se erige el edificio de la Ciencia Matemática, al respecto vuelve el planteamiento de Russell (1988):

> Para empezar, esta parcela del conocimiento no se ocupa de objetos o propiedades concretas, sino que examina formalmente qué puede decirse de *cualquier* objeto o *cualquier* propiedad. Estamos en condiciones de decir que uno mas uno son dos, pero no que Sócrates y Platón son dos (p. 173).

La situación se puede aclarar preguntando, en primera instancia: *¿qué es la lógica?* pues, como se ha planteado una fusión y no se ha determinado con la certeza conveniente qué es la Matemática, búsquese entonces las consideraciones sobre la Lógica, en tanto que Lógica. Pues, a diferencia de la Matemática que se debate entre la dialéctica de lo discreto y lo continuo, para la Lógica hay mucha precisión en torno a la concepción que se tiene de ella, uno de los casos particulares, entre tantos, es la definición al respecto enunciada por Sanguinetti (1989):

> En primer caso tenemos a la Lógica como *arte*, y en segundo como *ciencia.* La lógica es una y otra cosa a la vez: como arte tiene un fin práctico, que es el de servir de instrumento para conocer rectamente, para lo cual se constituye como saber normativo; como ciencia tiene un fin especulativo, pues intenta describir y desentrañar la manera de pensar del hombre… (p. 18).

El sentido desarrollado por la definición de Sanguinetti proviene de consideraciones de Santo Tomás de Aquino, en este sentido se asume el planteamiento aristotélico y de los griegos, en especial la dualidad entre arte y técnica, por ello Sanguinetti (1989) establece nuevamente:

> *Arte,* para los antiguos, es sinónimo de lo que hoy entendemos por *habilidad* personal para realizar un tipo de actividades, como puede ser el hablar, conducir un automóvil, o ejecutar un oficio.
> Santo Tomás define a la lógica como *el arte por el que se dirigen los actos de la razón, para proceder en el conocimiento de la verdad ordenadamente, con facilidad y sin error…*

Esto concuerda con la concepción aristotélica de ser humano como animal racional, de uso de la razón como fundamento de las acciones y como perfeccionamiento de su obrar en cualquier campo. Como característica humana en sentido de arte es perfectible, el hombre en su desarrollo, crecimiento y madurez perfecciona el manejo de la técnica y desarrolla el arte del razonamiento. Pero la otra cara de la moneda es su utilidad en las ciencias, el elemento normativo y estructural.

> Como arte, *la lógica es un instrumento de las ciencias.* Los escolásticos la llamaban *ars artium,* arte de las artes, pues interviene en cualquier otra ciencia o tarea práctica del hombre. Pero como todo instrumento, debe usarse en función de un fin, sin rigideces o abusos que obstaculizan el curso espontáneo del pensar. Para razonar bien no siempre es preciso formular explícitamente todos los pasos lógicos que se están dando (Sanguinetti, 1989, p. 19).

La contraparte en la utilidad es la de ser planteado como ciencia, esta sería la connotación trascendental que corresponde al momento de increparla en atención a la fundamentación de la Matemática. La Lógica como ciencia en sí, ciencia formal, con su objeto propio y ubicación en la determinación y categorización del término ciencia. La precisión viene dada como ciencia formal, con un ámbito propio y objeto de estudio definido:

> En una primera aproximación, digamos que la lógica se ocupa del complejo mundo de nuestras ideas, juicios, razonamientos, procesos de distinguir, abstraer, concretar, relacionar, etc… en la medida en que con esas operaciones conocemos las cosas o nos acercamos a su conocimiento.
> *… El objeto de la lógica son los actos del pensamiento en cuanto éste se ordena a conocer la realidad…* (Sanguinetti, 1986, p. 19).

Desde esta perspectiva la lógica acompañaría a la gnoseología como carrilera estructurada para que transite de la manera más adecuada el razonamiento y pensamiento humano en post de la verdad. Cómo se establece este objeto de la Lógica, cuáles son las bases para adherirse a dichos planteamientos sobre esta ciencia en particular y cuál sería lo teleológico, las respuestas nuevamente las establece Sanguinetti (1989):

> La Lógica se propone, pues, profundizar en el conjunto de relaciones que se producen en nuestro pensamiento al conocer las cosas: relaciones entre los conceptos o con la misma realidad. Se pueden decir en pocas palabras que su objeto son las *propiedades* o *relaciones lógicas.*
> *Las propiedades o relaciones son de un tipo de entes de razón.* Entes de razón son las elaboraciones de la mente que sólo pueden existir en la inteligencia humana…
> *El método de la lógica es reflexivo.* Nadie empieza conociendo las ideas, y más tarde alcanza la realidad. Al revés, el primer movimiento de la inteligencia es directo, tendiendo a las cosas mismas, y sólo en un segundo movimiento de orden reflexivo podemos explorar los propios actos de conocer, para conocer cómo conocemos.
> *La lógica realiza un análisis del lenguaje.* Como nuestro conocimiento se expresa en el lenguaje, el método más eficaz de la reflexión lógica es observar las estructuras del hablar del hombre, determinar sus elementos y funciones, el modo en que tales elementos se

relacionan… (p. 20 – 21).

Observaciones de gran amplitud y profundidad crítica pueden conjeturarse en torno al hermoso resumen del significado y acción teleológica de la ciencia de la Lógica. *A grosso modo*, inmediatamente se establecen los elementos sobre los cuales se ha venido comentando a lo largo de la investigación y que nuevamente nos llevan al plano de la filosofía, la operatividad de la lógica está centrada en lo advertido como razón humana o principio de pensamiento, la carrilera por donde transita el pensamiento. Pero lo principal del asunto es la reflexión como arte, la lógica gira alrededor del pensamiento y estudia las relaciones de los *entes de razón*, como pudieran ser los conceptos, las ideas y abstracciones de la realidad. Para estas relaciones la lógica establece principios y axiomas como si fuesen estructuras de carácter algebraico, relacionándolas y correlacionándolas no importando el contenido de la cosa en tanto que cosa, sino estableciendo un medio o una propiedad que las iguala o las diferencia, este elemento será fundamental para el establecimiento de la Teoría de Conjunto y la clave del fundamento de la Matemática a partir del Logicismo dado en las distintas posibilidades de relacionar internamente los elementos de un conjunto a partir de la Lógica como son los conceptos de Clase. Este es uno de los grandes aportes de la Lógica a la Matemática, la teoría de Clase.

Continuando con el estudio del ser de la Lógica, analicemos una de sus aristas de mayor grado de complejidad. Este tema es uno no resuelto y siempre novedoso cuando se llega al punto central de la lógica y el simbolismo porque las reflexiones pueden ser amplias y comprometedoras, los axiomas pueden ser discordantes y en especial, la característica más resaltante del lenguaje es la polisemia. En la lógica, especialmente la moderna, se trata de evitar el problema polisémico del lenguaje, es decir buscar la forma y manera de que el significado de un término en una oración o proposición no de lugar a otra interpretación que no sea la prevista por el autor. En este sentido la reducción a un simbolismo generalizado y estructurado ha jugado un papel importante por cuanto se ha podido establecer principios de unidad frente a la formalidad de un hecho y el establecimiento de normas lógicas. Teniendo presente que la finalidad es el conocimiento.

Volviendo al problema de la Matemática como expresión de la Lógica, reiniciemos con la referencia a Russell (1948) en su obra magna:

> Matemática pura es la clase de todas las proposiciones de la forma "p implica q", donde p y q son proposiciones que contienen una o más variables, las mismas en ambas proposiciones, y ni p ni q contienen constante alguna excepto las constantes lógicas. Y las constantes lógicas son definibles en función de lo siguiente: Implicación, la relación de un término a una clase de la que es miembro, la noción de *tal que*, la noción de relación, y otras nociones tales que puedan hallarse involucradas en la noción general de proposiciones de la forma anterior. Además de ella, la *Matemática* usa una noción que no forma parte de las proposiciones que considera, la noción de verdad (p. 29).

Lo controversial del asunto es la conjetura planteada por el mismo autor del texto cuando afirma: *La definición anterior de Matemática pura es algo rara* (Russell, 1948, p. 29). Es decir, el autor, quien es además filósofo y logicista establece por su mismo pensamiento lo raro de la definición promulgada por él. Hay un esfuerzo en intentar reducir la Matemática a proposiciones de un tipo definidas y estructuradas que se determinan a priori de acuerdo a una relación axiomática. Como puede establecer si esta relación es de carácter lógico el centro del asunto girará en torno a la implicación.

Continúa el autor estableciendo características de fundamentación de la Matemática a partir de la Lógica:

> En Matemática se acostumbra a considerar nuestras variables como restringidas a ciertas clases: en Aritmética por ejemplo, se suponen que representan números. Pero esto sólo significa que *sí*, representan números, satisfacen alguna fórmula, es decir, la hipótesis de que son números implica una fórmula. Es esto entonces lo que en realidad se afirma, y en nuestra proposición ya que no es más necesario que nuestras variables sean números: la implicación vale igualmente cuando no lo son…. Así en cualquier proposición de

la matemática pura, una vez establecida completamente, las variables tienen un campo absolutamente no restringido: cualquier entidad concebible puede sustituir a cualquiera de nuestras variables sin alterar la verdad de nuestra proposición (Russell, 1948, p. 33).

La realidad establecida viene dada en la posibilidad de poder definir en la forma más clara y precisa la variable, cuando esto se ha logrado, las mismas pueden admitir cualquier valor porque el pensamiento sería el mismo, por ejemplo $p \rightarrow q$, con su respectiva composición de verdad, ahora bien, no importará el contenido de quién es, ni a quién representa. El problema es mantener la estructura formal como lo establece la tabla y el valor de equivalencia, pues el resultado lógico será siempre el mismo.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

El ejemplo de Russell es "x e y son números implica $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$" vale igualmente si se sustituye a x, y por Platón o Sócrates. La correspondencia no está en el contenido, sino en la formalidad del pensamiento debido a la definición previa que se hace de los objetos, pues no importando el contenido de la proposición la estructura lógica permanece y el valor de verdad depende de la estructura.

Entonces el problema de la Matemática pura como lo plantea Russell, se torna en un problema de claridad en lo referente al lenguaje, pues de ello depende la concreción del término a emplear para poder construir la proposición, en este sentido tendrá la dualidad pues, será verdadera V ó falsa F, en atención a esos dos valores se hará el constructo pero, no puede haber punto no definido claramente:

Así la matemática pura no debe contener indefinibles, excepto las

> constantes lógicas, y en consecuencia ni premisas ni proposiciones indemostrables salvo las que refieran exclusivamente a las constantes lógicas y a las variables. Es precisamente lo que distingue las matemáticas puras a las aplicadas. En matemática aplicada los resultados, respecto a una variable que la matemática pura demostrara se deducen de alguna hipótesis, se afirman realmente de cierta constante que satisface la hipótesis en cuestión (Russell, 1948, p.35).

El trabajo del autor en estudio, a manera de ver del investigador, es construir desde algunos elementos para él claros y especificados por lo definible para, de esta forma, desarrollar cual juego de ajedrez una combinación que vaya ampliando la estructura, pero siempre con la pretensión de mantener el juego dentro de un conjunto de normas estructuradas a partir de la axiomática lógica. Lo que esté fuera de los lineamientos no pueden considerarse, el juego es únicamente válido para lo que anteriormente fue definido, en consecuencia continúa Russell (1948):

> La conexión de la matemática con la lógica, de acuerdo a lo dicho anteriormente, es exclusivamente estrecha. El hecho de que todas las constantes matemáticas son constantes lógicas, y de que todas las premisas de la matemática se hallan relacionado con ellas, da, creo, la formulación precisa de lo que los filósofos querían decir al asegurar que la matemática es *a priori* (p. 35).

El salto realizado es realmente comprometedor, el *a priori* no está distinguido si se plantea en términos de Platón o en los de Kant, lo comprometido es su connotación de: *antes de la experiencia*. Desde la consideración de Platón hay un existencialidad autónoma y previa independientemente del pensar humano y su punto sería la reminiscencia, un recuerdo del mundo antes vivido lo cual ahora sería imposible, sin embargo vale en el sentido de “antes de” y la aceptación como punto de partida para la deducción partiendo de dichos principios. Por otra parte si se trata de una intencionalidad kantiana, el a priori tiene otras connotaciones pues en alguna manera es lo que se refiere al imponer formas con características implícitas permitiendo así darle la estructuración debida y es por ello que la tarea se apunta a la imposición de las formas a prior de la llamada Lógica Simbólica.

Volviendo nuevamente al planteamiento de Russell (1948) que concluye el tema con el siguiente discurso:

> La distinción entre lógica y matemática es muy arbitraria, pero si se desea una diferencia, debe formularse del modo siguiente. La lógica está formada por premisas de la matemática, junto con todas las proposiciones que se refieren exclusivamente a las constantes lógicas y a las variables pero que no cumplen con la definición anteriormente descrita. La matemática consiste de todas las consecuencias de las premisas anteriores que afirman implicaciones formales que contienen variables, junto a aquellas de las premisas mismas que presentan estos rasgos. Así, algunas de las premisas de la matemática, por ejemplo el principio del silogismo, "si p implica q y q, implica r, entonces p implica r", pertenece a la matemática, mientras que otras, tales como "la implicación es una relación" pertenecen a la lógica pero no a la matemática. Pero con el fin de adherirnos al uso común debemos identificar la matemática con la lógica, y definir ambas como la clase de las proposiciones que contienen solamente variables y proposiciones lógicas; pero el respeto a la tradición me impulsa más bien a adherirme a la distinción anterior, aunque reconociendo que ciertas proposiciones pertenecen a ambas ciencias (p. 36).

Toda la discusión parece una historia sin fin o un *eterno retorno*[32], sin embargo el autor acepta la división y autonomía de cada ciencia aun luego insiste en que su obra es un intento por demostrar la posibilidad de reducción de la Matemática a la Lógica Simbólica:

> De lo dicho hasta ahora el lector podrá apreciar que el trabajo debe cumplir con dos objetos, demostrar que toda la matemática se deduce de la lógica simbólica, y segundo, descubrir, mientras ello sea posible, cuáles son los principios de la lógica misma (p. 36).

La tarea es compleja, aunque insiste fundamentalmente en la simplificación a puntos concretos y elementales, cabe destacar la influencia para el momento de los grandes aportes a la lógica con las publicaciones de Boole, en este sentido advierte Russell (1948) su postura ante la Lógica Simbólica:

> Lo que la lógica simbólica investiga son las reglas generales por las que se formulan las inferencias, y sólo requiere una clasificación de las

[32] En el sentido de Nietzsche.

> relaciones o proposiciones mientras estas reglas generales introducen nociones particulares. Las nociones particulares que aparecen en las proposiciones de la lógica simbólica, y todas las otras definibles en función de estas nociones, son las constantes lógicas (p. 38).

Es decir el trabajo fundamental está en estudiar cómo se desarrollan los constructos que permiten relacionar y adecuar las condiciones de posibilidad para establecer un enunciado de manera que pueda ser expresado mediante un símbolo al cual se somete a una serie de reglas. El problema pareciera una tela de araña, si es posible definir claramente y encuadrar dentro de una proposición con estructura dada por la lógica entonces es posible simbolizarla y desarrollarla dentro de un proceso de implicación o construcción lógica. Por ello, Russell (1948) establece cuáles son los elementos de la lógica y, en este sentido, a cuáles formas elementales pueden reducirse los enunciados para ser representados mediante símbolos:

> El sujeto de la Lógica Simbólica está formado por tres partes, el cálculo de proposiciones, el cálculo de clases y el cálculo de relaciones. Entre los dos primeros existe, dentro de ciertos límites, un cierto paralelismo, que se presenta del modo siguiente: En cualquier expresión simbólica las letras pueden interpretarse como clases o como proposiciones, y la relación de inclusión en un caso puede ser reemplazada por la implicación formal de otro… (p. 39).

El esfuerzo desarrollado por Russell (1948) y Whitehead, es digno de admiración, aun cuando se establecen bemoles y disonancias frente a los argumentos y posibles adecuaciones restrictivas del pensamiento matemático y de la Matemática como ciencia, no necesariamente todo es negativo pues, en realidad, hay varias constantes que tienden a ser mayores cada vez, por ejemplo la rigurosidad mediante la cual se abordan los problemas y ejercicios matemáticos, segundo la necesidad de establecer principios y conceptos de carácter "primigenios" como puntos de partida necesarios para la construcción y elaboración del edificio matemático. Por otra parte, la Matemática requiere no solamente de una Lógica junto con simbolismo pues, también de un *Logos*, como principio fundamental de la razón humana y es aquí donde no puede diferenciarse una de la otra. Sin embargo, seguirán hermanadas y una necesita de la otra para poder ser lo que son: Lógica en tanto que Lógica y

Matemática en tanto que Matemática.

INTUICIONISMO EN MATEMÁTICA.

Si los dos planteamientos anteriores han generado controversias y puntos de desencuentro entre los distintos pensadores del quehacer matemático, plantear una corriente filosófica centrada en la *intuición* generará mayor dificultad frente a la búsqueda de unos elementos dónde poder establecer los fundamentos de la Matemática.

El intuicionismo como filosofía de la Matemática es atribuido a dos personajes muy destacados y controversiales. A diferencia del pensamiento estructurado y deductivo que, en alguna manera, son coincidentes entre la formalización y logicidad de la Matemática, estos rompen con el hilo que mantiene, en apariencia, unidas a las corrientes; al respecto González (1995) sintetiza los planteamientos en resumen de Eves y Newson:

> Para los intuicionistas la existencia Matemática significa constructividad; es decir, para probar la existencia de una entidad Matemática no es suficiente que la suposición de la no-existencia de la entidad conduce a una contradicción, sino que se debe mostrar que tal entidad es construible en un número finito de pasos (p. 39 – 40).

La referencia de González en atención a los autores genera ruido, por cuanto desde el punto de vista de la filosofía, construir no necesariamente es intuir. Cabria la distinción que para intuir es necesario aclarar la sempiterna discusión entre lo inmanente y lo trascendente, intuir es una actividad mediante el cual el pensamiento sale y se apropia o negocia con otra entidad pero sin que la experiencia se su fundamento, es lo que se llama el *a priori,* a ello Kant le dedica un gran especio en su obra fundamental: Crítica de la Razón Pura. Además lo que se intuye está ya elaborado, como el caso de las esencias o del mundo de las esencias al que se refiere Husserl. En tal sentido, cuando se habla de intuición desde el punto de vista del conocimiento como lo plantea De Alejandro (1969):

> *Conocer es entender;* entender de *intel-ligere, indus- legere,* que equivale a *leer el interior* o, también, como robar la interioridad del objeto de conocimiento;
> *conocer es inutir,* intuir de *indus-ire,* como *entrar de rondón* del entendimiento en lo más secreto del objeto;
> *conocer es intencionalidad* de la mente, sin la que ni el conocimiento es concebible, pero intencionalidad de *intentio,* de *in-tendere, tendere-in*, es como una atracción del entendimiento por parte del objeto, por la que el objeto queda gnoseológicamente polarizado en el objeto;
> *conocer es concebir;* es concepto, es concepción… (p. 69).

La diferenciación del término entre De Alejando desde el punto de vista de la intuición ante lo que refiere González como intuicionismo, es distinta. Es bueno aclarar que intuir no simplemente significa crear, intuir es captar a priori percibir una realidad de manera "cuántica", además en términos de Kant la intuición es sensible y es formalización, inclusive Zubiri establece que conocer es darle formalidad cuando plantea el problema de *inteligencia sentiente*. Tal vez, de lo que se trata es de una traducción no muy correcta, el sentido al cual se refiere la corriente y como la desarrolla el mismo González (1995) al asumir los planteamientos de Ortiz, estos connotan un constructivismo más que un intuicionismo.

> 1. Existir en Matemática significa *ser construido*, cualquier definición o prueba existencia que no especifique los métodos de construcción es metafísica y debe ser excluida de la Matemática.
> 2. Una proposición Matemática afirma el hecho de que cierta construcción Matemática ha sido efectuada. *La Matemática es el estudio de las construcciones mentales*. Para los intuicionistas, dice Barker: las entidades Matemáticas son construidas por la mente".
> 3. La Lógica no es el fundamento de la Matemática. Una construcción Matemática debe ser tan inmediata a la mente y su resultado tan claro, que no requiere ninguna fundamentación.
> 4. Los teoremas de la Lógica no son otra cosa que teoremas matemáticos extremadamente generalizados. *La Lógica es una parte de la Matemática.*
> 5. La Lógica es inadecuada para el estudio de las construcciones Matemáticas. Barker dice que como para los intuicionistas "toda verdad o falsedad matemáticas deben ser 'construibles', entonces rechazaron la ley tradicional del tercero excluido porque pueden haber proposiciones sensatas que no sean ni verdaderas ni falsas.
> 6. La Matemática intuicionista, es decir, el pensamiento constructivo

matemático, determina por sí solo las suposiciones básicas del inicio, por tanto, no es necesario recurrir a suposiciones arbitrarias o convencionales.
7. Una parte completada de la Matemática puede ser formalizada. El sistema formal debe ser considerado como la expresión lingüística del pensamiento matemático.
8. La noción elemental de número natural, común a toda criatura pensante, es fundamental para la Matemática intuicionista.
9. Un teorema matemático expresa un hecho empírico.
10. La Matemática es un fenómeno de la vida, una actividad natural del hombre. La Matemática desde el punto de vista intuicionista, es el estudio de ciertas funciones de la mente humana y por esto está emparentada con la filosofía, la historia y las ciencias sociales[33].

Por respeto al gran esfuerzo por sintetizar los planteamientos se ha dejado tal cual la referencia para no perder el hilo conductor de los pensamientos. Desde el punto de vista del investigador, siendo este un respetuoso del pensamiento de Henri Poincaré, hay muchos elementos que por definición no concuerdan con los planteamientos intuicionistas. Es claro que una cosa es construir y otra intuir, ciertamente, es posible intuir una construcción, no se está claro si se trata del proceso mediante el cual se desarrolla la construcción del ente matemático o si por el contrario se trata de la intuición directa del ente en cuanto ente. Una tercera vía pudiese ser la intuición del proceso constructivo con su toque final del ente construido.

De acuerdo a lo anterior no se desea negar la corriente intuicionista, epistemológicamente son procesos que no encierran conceptualidades iguales. Ello tampoco lo reduce a un conjunto empírico de actos, una formalización para demostrar un apartado matemático es una construcción. Si algo tiene importante es que las construcciones, sean o no mentales, son desarrollos con puntos de partida y de llegada. De esta forma, se analizarán algunos puntos de los enunciados anteriores que

[33] Referencia tomada por González de:
ORTIZ J. R. (1988). *Matemática y Ciencia.* Universidad Nacional Abierta (UNA). Caracas. Venezuela.

sospechamos son de carácter intuicionista.

Algunos refieren la influencia del intuicionismo kantiano, el problema de Kant apunta a un formalismo por parte del sujeto "estructurador" de la realidad, pero lo importante es la intuición como manera de accesar a la realidad. Una intuición que va por parte del sujeto, *intus-ire,* movimiento intelectual por parte del sujeto cognoscente que en su inmanencia trasciende, esto es lo controversial del pensamiento matemático en Kant.

> Para los intuicioncitas (como en Kant) era necesario recurrir a una intuición, pero esta vez no podía ser espacio-temporal. Éstos decidieron reducirla a una exclusivamente temporal. Para estos es el movimiento que en la mente hace pasar del 1 al 2 lo que determina las matemáticas. Si existe una evidencia, está en la intuición (las proposiciones matemáticas se consideran entonces sintéticas a priori). Éstos responden a las paradojas de una manera tajante: se trata de abusos y extralimitaciones de la lógica y el lenguaje. Cuando la lógica y el lenguaje han dejado de corresponder con la verdadera matemática es que se suceden las paradojas[34].

Ciertamente el aspecto de intuición sensible a priori demarca la existencialidad de la realidad Matemática como temporal y no como espacio, pero al mismo tiempo la condición de posibilidad depende de lo trascendental de la intuición como capacidad de "ir al encuentro con", pues si se genera desde sí misma y no sale al encuentro con el fenómeno manifiesto, sería un idealismo puro. Intuir es captar lo que ya está manifiesto en el fenómeno y es lo trascendente del sujeto. Como se ha establecido previamente es un acto de trascendencia pero en la inmanencia del sujeto ya que vuelve nuevamente sobre sí.

> No se trata para el intuicionismo de probar la consistencia de la matemática sino de hacer matemática verdadera, apegada a esa intuición introspectiva. Esta matemática así determinada filosóficamente establece, según Brouwer, un programa práctico centrado en la noción de constructividad. Es esto lo que en el fondo determina las reglas usadas, a saber: el lenguaje y la lógica. Dependerá

[34] http://www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Parte7/Cap26/Parte02_26.htm

> de ella también el tratamiento de las nociones infinitas. La verdad y la existencia en matemáticas aparecen fundidas en la construcción. Aunque las ideas constructivistas se pueden rastrear desde hace siglos, en el siglo XIX y XX se pueden ver en Krönecker y Poincaré, por ejemplo. Señala Poincaré:
>
> "Una demostración matemática no es una simple yuxtaposición de silogismos; son silogismos colocados en un cierto orden, y el orden en el cual están colocados estos elementos es mucho más importante que ellos mismos. Si tengo el sentimiento, la intuición de este orden, de manera que me pueda dar cuenta rápidamente del conjunto del razonamiento, no debo temer más olvidarme de uno de los elementos, cada uno de ellos vendrá a colocarse en el cuadro que le he preparado, sin que haya hecho ningún esfuerzo de memoria"[35].

La referencia a Poincaré, aclara el significado de constructividad pues en la medida que se hace necesario surgen los elementos requeridos y se va creando:

> Es el acto mediante el cual el espíritu humano prescinde más del mundo exterior, en el que no obra más que por él mismo, de manera que estudiando los procesos del pensamiento geométrico, podemos tener esperanzas de alcanzar lo más esencial de él (p. 39).

Sin embargo, plantea un momento sublime de intuición. La creación no es una deducción lógica que se viene dando, o que se va construyendo como si fuese una estructura bien amalgamada y estrictamente medida y organizada, para Poincaré existe el acto poiético de "eureka" mediante el cual en un determinado momento surge lo tan preciadamente buscado y ello se impone: *"en el momento en que ponía el pie en el estribo la idea me vino sin que nada en mis pensamientos anteriores me hubiera preparar para ella"* (Poincaré, 1962, p. 44). Esta referencia es importante, aunque tiene elementos anterior que deben ser considerados, la creación, ciertamente como la plantea tan insigne matemático no es que llega por llegar, es obligatoria tener estructuras previas que generen ese torrente, debe haber algo anterior cual volcán que se prepara para hacer erupción, pues de lo contrario todos tendrían dichas intuiciones de la nada. Lo importante de la genialidad del autor es permitir esos momentos de

[35] http://www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Parte7/Cap26/Parte02_26.htm

erudición en lo cuales como al azar el pensamiento humano trasciende y genera una estructura superior no como consecuencia lógica de algo sino como manifestación trascendente del propio ser humano permitiéndole el supremo acto de entender y comprender la realidad a la cual apuntaba. Es hacer propio aquello a lo cual el entendimiento no poseía manera de acceso y ahora mediante el supremo acto de intuición lo hace suyo. Y de esta forma concluir con sus afirmaciones: *"en Matemática la palabra existir no puede tener más que un significado: significa excento de contradicción"* (Poincaré, 1962, p. 117).

EN TORNO A LA TEORÍA DE CONJUNTO

Si alguna noción ha generado controversia, más allá, de las distintas filosofías en las cuáles se desea dar fundamento a la Matemática, es la teoría de conjunto; pues ella se convierte en el centro del asunto al intentar reunir como principio los elementos que la configuran, en ese sentido logicistas, formalistas e intuicionistas determinan las características y propiedades de sus elementos para generar el marco básico de trabajo. Es evidente que cada uno defenderá su postura sobre qué es un conjunto, cuáles son sus características y propiedades. En este sentido encontraremos nuevamente principios y conjeturas sobre las distintas corrientes de la Matemática.

DESDE LA PERSPECTIVA DE RUSSELL.

Para Lavine (2005), hay todo un entretejido, Russell aceptó lo que Cantor rechazó, hay dos perspectivas pero había elementos de coincidencia al cual se refiere como Principio de comprensión desarrollado por Peano. Desde el formalismo Russell acota las consideraciones necesarias en su obra Principios de la Matemática de 1903: *"una clase puede ser definida como la totalidad de los términos que satisfacen alguna función proposicional" "Todas las clases están compuestas de términos"* (p. 78). Este es el principio fundamental de la estructura básica de la Matemática, con este enunciado se pretende "encerrar", encarrilar o generar las condiciones de posibilidad para fundamentar la Matemática. Es un principio generador, es la phisis de la Matemática, en este sentido Frege plantea su definición de número en los principios de la Aritmética de 1884: *Número es todo aquello que es Número de una Clase,* dicha definición la particulariza Russell (1988): *Número es lo que caracteriza a los números, como hombre es lo que caracteriza a los hombres. Una pluralidad no es un ejemplo de número sino un número concreto* (p. 19). Lo fundamental no es tanto el planteamiento que se da sobre la definición de número que, aun cuando es controversial, ha estado en Matemática por más de un siglo y, posiblemente, seguirá. El carácter intuitivo y a priori para establecer un principio es lo llamativo del asunto, aunque se trate de un presupuesto lógico pues, según Lavine (2005)

> Frege quería que todos los objetos de su sistema fueran lógicos, así que simplemente estipuló arbitrariamente que el objeto que es la extensión del concepto "*x* es lo verdadero", es lo verdadero, *no* la clase de verdades y, de manera similar, que el objeto que es la extensión de otro concepto es lo falso. Esto no hubiera sido posible si hubiese utilizado la noción de Peano – Russell de una clase compuesta de elementos (p. 79).

Al parecer el problema de fundamento de la Matemática moderna debe recurrir a dos conceptos fundamentales: el de Conjunto y el de los elementos de un conjunto, pero estos parten del significado de Clase y el de proposición. Comenzando por el segundo término manifiesta Russell (1988):

> Por "proposición" entenderemos ante todo una forma verbal que expresa lo que es verdadero o falso. Y decimos "ante todo" para no excluir otros símbolos no verbales incluso los meros pensamientos cuando tengan un carácter simbólico. Pero, a mi entender, la palabra "proposición" debe limitarse a los que, en algún sentido, pueden llamarse "símbolos" y, entre éstos, a los que son expresión de la verdad o falsedad. Así, "dos y dos son cuatro" y "dos y dos son cinco" serán proposiciones, como también los serán "Sócrates es un hombre" y "Sócrates no es un hombre" (p. 137).

Con estos términos Russell quiere determinar de manera precisa lo concerniente a las expresiones lingüísticas, y en esta forma poder establecer conceptos claros y distintos; de tal manera que sirvan de ladrillos en la construcción del edificio matemático y como puntos clave de las estructuras. Pero el problema se inicia con la delimitación del término proposición pues inmediatamente se amplía a "función proposicional":

> En general, lo primero se supone tácitamente en el enunciado de las fórmulas matemáticas, que de ese modo se convierten en proposiciones; pero de no incluirse un supuesto de ese tipo, estas serían "funciones preposicionales". Una "función proposicional" es, de hecho, una expresión que contiene uno o más componentes indeterminados tales que, al asignárseles valores, la expresión se convierte en una proposición (Russell, 1988, p. 137).

Nuevamente está el esfuerzo del gran filósofo matemático en intentar dar claridad al concepto de forma que sea posible reunir todos los elementos establecidos por la definición, desde allí podrá definir conjunto. Es decir calificando las propiedades o comportamiento de un grupo de objetos o cosas y desde allí generar la colección o las categorías de reunión que poseen en común o no dichos elementos:

> La única forma de expresar en términos generales una propiedad común es decir que una propiedad común de una serie de objetos es una función proposicional que se convierte en verdadera cuando se toma uno de estos objetos como valor de la variable (Russell, 1988, p. 139).

La terminología planteada por Russell no es del todo clara, al parecer, el querer esclarecer mediante el lenguaje el significado y compromiso de una proposición lo hace mediante un juego de palabras que no aclaran o suenan redundantes, comenzando por el principio asumido de Frege del concepto de número y ahora pareciera que la estructura determinada lingüísticamente advirtiera una intuición, lo que si mantiene muy evidente es las dos realidades que pueden ser asumidas por una proposición: verdadera o falsa, pero no ambas al mismo tiempo. Es decir, si se afirma que es verdadera, al mismo tiempo no puede ser falsa porque el principio rector de este tipo de lógica es el de no contradicción don una proposición p no puede ser p y ~ p al mismo tiempo. Volviendo al problema de la definición de número como principio ya que como afirma Lavine (2005):

> Frege y Russell encararon un problema común: evidentemente las

> matemáticas tratan con objetos (números, etc); sin embargo, el supuesto de que existen objetos de una clase u otra evidentemente va más allá de la lógica pura (p. 80).

Es decir, no es posible hacer una reducción con la simplicidad lógica por ello utilizó las clases como objetos y la función de pertenencia también (Lavine, 2005), de esta manera determinaba con la clase al objeto en función de la pertenencia o no al conjunto definido en base a la clase, al principio que fundamenta esta postura se le llamó Principio de Comprehensión:

> El principio de comprensión era lo que proporcionaba los objetos matemáticos en la temprana explicación lógica de las matemáticas de Russell, desempeñaba un papel central pero también era la fuente de las paradojas… Russell tenía dos opciones: restringir únicamente las funciones preposicionales a las que se aplica este principio o restringir las funciones preposicionales en general, de manera que el principio se mantuviera íntegro (Lavine, 2005, 81).

El trabajo de Russell estaba centrado en poder describir y dar por determinado a los objetos que alcanzasen su definición, el problema era creencia del giro lingüístico mediante el cuál era posible determinar con la palabra la realidad, es decir, había la creencia de poder describir, de manera precisa, la realidad en tanto que realidad. Es bueno recordar el positivismo lógico y todo el grupo de pensadores como Wittgenstein y otros de los trabajos sobre los juegos del lenguaje y el habla. La concreción que puede haber mediante el concepto de una realidad. El problema es la posibilidad permanente de paradojas como la referencia famosa al barbero de Sevilla: *el barbero de Sevilla afeita (corta el cabello) a todos los sevillanos, entonces quien afeita al barbero.* En este caso, surgen otras paradojas de carácter popular en el sentido filosófico: *Pedro es un mentiroso, pero ha sucedido algo y Pedro ahora dice la verdad, es decir qué sucede cuando un mentiroso dice la verdad.* Son los elementos que desarrollaron conjeturas e inconsistencias lógicas en la construcción de la teoría de Russell. Incluso el problema se acrecentaba en función de la extensionalidad, de los alcances. En este sentido nuevamente Lavine (2005) refiere:

> En su teoría de los tipos de 1908, Russell consideraba a los individuos y a las proposiciones como básico, y analizar los enunciados que

> mencionan funciones proposicionales y clases como si sólo incluyera entidades básicas. En este sentido, la teoría es una teoría sin clases – las funciones proposicionales y las clases son consideradas como "parte del mobiliario fundamental del mundo" (p. 81).

Definir el objeto y darle todo el peso ontológico de la realidad, no significa su existencialidad, el trabajo de encierro cual corral de un grupo de elementos con patrones diseñados para coleccionarlos como imposición a priori, posiblemente genere en algún momento paradojas, el lenguaje no es tan preciso, cerrado y determinante como los logicistas desearían, a ello Poincaré llama círculo vicioso (Lavine, 2005), es decir la concepción de una definición como manera de cierre a una colección de elementos mediante una *restricción* genera la posibilidad de ir puntualizando y gestando los principios necesarios para agrupar una colección de objetos dados, eliminando incluso las incoherencias sin embargo, siempre está abierto a nuevas paradojas, aun cuando Russell plantea la simplificación mediante el uso de símbolos latinos generando la teoría ramificada.

Sin embargo, la posibilidad permanente de paradojas es lo realmente controversial. El esfuerzo de Russell es muy connotado pues el haber intentado demarcar unos conceptos primigenios de soporte a todo el edificio de la Matemática es algo realmente sorprendente, sin embargo hay siempre una especie de círculo vicioso, el problema siempre está cuando se piensa en determinar x propiedades y asignarles y acciones, al final no todo es categórico, hay elementos que escapan a la racionalidad y, en este sentido, no es posible negar a la razón, que hay un grupo perteneciente a dichos planteamiento cumpliendo con lo establecido en la norma. Por ello como lo plantea Lavine (2005):

> Pero la restricción, además de ser suficiente para bloquear las paradojas, permite retener el aire de perfecta generalidad: la eliminación del uso de proposiciones incoherentes, aun cuando es la restricción que se requiere, no afecta a la lógica, y cuando comenzamos con el nuevo sistema de representación no necesitamos presentarla como restricción (p. 83).

Si deseáramos comparar la aplicación de la teoría de Russell, las aplicaciones tendrían una validez comparable metafóricamente a la teoría de la relatividad general y la teoría de la relatividad restringida, es imposible encerrar el total o el todo de un conjunto en una teoría como la de Russell, sin embargo el principio de la comprensión es el que permite desarrollar los alcances de las determinaciones planteadas. La posibilidad de restringir y aplicar los planteamientos desarrollados es válida, la generalización en la totalidad creará siempre paradojas como la de querer establecer el *número de todos los número*…

No obstante Badiou (2002) desarrolla, a manera de pensar del investigador, una perspectiva interesante sobre el logicismo que demarca la distinción y controversia entre la Lógica y la Matemática que le asigna el nombre *Teoría de los Topoi* a la que determina de la siguiente manera:

> Lo que nos propone la teoría de los *topoi* de los universos matemáticos posibles. Su método es la definición y el esquema, la mostración geométrica de recursos. Es como una inspección del entendimiento del Dios de Leibniz: un recorrido categorial de los mundos concebibles, de sus especies, de sus rangos distintivos. Establece que estos universos han de llevar consigo su lógica interna. Establece correlaciones generales entre algunos de los rasgos ontológicos de estos universos y la caracterización de su lógica. Pero no decide ningún universo. Nosotros no tenemos a diferencia del Dios de Leibniz, ninguna razón para considerar tal universo como el mejor de los universos posibles (p. 115).

Al parecer el autor referenciado plantea el famoso dicho: *cada cabeza es un mundo*. Anteriormente esbozamos la referencia metafórica de la necesidad de restricciones como la plantea Russell y la imposibilidad de una totalidad en cuanto totalidad, desde esta perspectiva el planteamiento de los distintos “lugares” o universos matemáticos lo vienen a confirmar, la realidad dependerá de cómo sea lo que lo define. En este sentido nos remitimos al planteamiento de Russell desarrollada en la introducción del *Tractatus Lógico-philosophicus*, desarrollado por Wittgenstein (1973):

> El mundo se compone de hechos: hechos que estrictamente hablando no podemos definir, pero podemos explicar lo que queremos decir admitiendo que los hechos son los que hacen a las proposiciones verdaderas o falsas (p. 16).

Sin embargo, Russell (1983) establece su postura ante lo que significa un hecho:

> "Hecho" tal como entiendo el término, sólo puede ser definido ostensivamente. Llamo "hecho" a todo lo que hay en el mundo. El sol es un hecho; el cruce del Rubicón por César fue un hecho; si tengo un dolo de muelas, mi dolor de muelas es un hecho. Si hago una afirmación, el que yo la haga es un hecho, y si es verdadera, hay un hecho adicional en virtud de la cual es verdadera… (p. 155).

En fin la teoría de los *topoi* o distintos mundos matemáticos son un hecho y en sentido lógico son realidades que pueden ser estudiadas. Al presentarse de esta forma tienen una preeminencia ontológica pues permite estudiar "alguna" propiedad, en este caso sería la de ser, un lugar es un mundo, y ese mundo tiene sus características particulares avaladas además por una consistencia lógica, por ello la relación onto-lógica por lo que Badiou (2002) conjetura:

> La matemática real no es una inspección matematizada de los universos matemáticos posibles. La matemática real decide un universo. Por consiguiente, la relación entre lógica y matemática es la que existe entre una investigación general de los recursos lógicos de una ontología y una decisión ontológica que conlleve sus propias consecuencias lógicas. Esto quiere decir también que la lógica es definicional, mientras que la matemática real es axiomática (p. 116).

Si la definición de hecho tiene que ver con la categorización de un mundo, la pregunta sobre el asunto sería: ¿qué otros tipos de Matemática hay? Pues si mencionamos una que es real entonces habrá otros tipos de matemáticas. Además, ella decide o determina el universo pues su construcción es a partir de axiomas, la lógica determinaría las definiciones y establecería la posibilidad de consistencia. Cabe destacar que con la amplitud de las distintas lógicas existentes en la actualidad es posible desarrollar elementos discordantes entre un universo y otro. Un caso particular sería la diferencia entre los distintos universos creados a partir de las diferencias existentes entre las distintas geometrías. Si la suma de los ángulos internos a un triángulo es igual a 180 grados se puede construir un universo; si la suma de los ángulos internos es mayor de 180 grados tendremos un universo distinto y, lo mismo ocurriría si la suma es menor. Pero esto es solamente una parte, entendemos que internamente en la construcción de dicho universo existe una lógica, un *logos.* Por otra parte, también es cierto de la existencia de otras lógicas como la de los conjuntos borrosos que se sustentan ya no en los valores de verdad o falsedad, pues estos no son suficientes para desarrollar los principios que mantienen unidos y continuos los diferentes universos en su interior. Es posible que un universo requiera de una lógica distinta para poder comprender su realidad interior.

Para dar fundamento a lo anterior Badiou (2002) establece los siguientes principios intentando demarcar la Matemática de la Lógica:

> 1.- La lógica no es una formalización, una sintaxis, una prótesis lingüística. Es una descripción matematizada de los universos matemáticos posibles sometida al concepto genérico de *topos*. Un universo matemático, un *topos*, localiza su propia lógica.
> 2.- Un universo matemático posible fija correlaciones constrictivas entre ciertas características ontológicas y ciertas características de su lógica inmanente. El estudio de esas correlaciones constituye el contenido fundamental de la propia lógica. La lógica piensa de este modo su propia subordinación a la ontología. Es justamente por el hecho de pensar esta subordinación por lo que puede ser matematizada, puesto que la matemática es la propia ontología.
> 3.- La matemática se cumple en virtud de decisiones axiomáticas que disponen en lo real un universo posible. De ello se deducen varias constricciones lógicas. Las constricciones son lógicamente pensadas por la lógica de los universos posibles. La matemática real las practica, pero no las piensa.
> 4.- Por consiguiente, la diferencia irreductible entre la lógica y la matemática depende del punto ciego de una decisión pensante, que consiste en que toda decisión de ese tipo instala una lógica que se practica como necesaria, cuando en realidad es una consecuencia de una decisión…
> La paradoja que aparece en esta tesis estriba en el hecho de que la palabra "lógica" realiza un doble cometido. Se llama "lógica",

> simultáneamente, a lo que se encuentra localizado como tal en un universo posible, con sus figuras singulares: lo verdadero, lo falso, la negación, lo cuantificadores, etcétera, y al pensamiento matematizado de las correlaciones constrictivas entre la ontología del universo y esa localización lógica…
> … Habrá una definición local de lógica: una maquinaria particular, que puede ubicarse en los topos y que se encuentra articulada en torno a la noción de un clasificador de sub-objetos… (p. 116 – 117).

Nuevamente se discute entre lo total y lo particular, en este sentido inminentemente surgirá nuevamente la discusión acerca de las paradojas, por ello el autor inmediatamente postula un quinto enunciado donde libera de su *obligación sintáctica y lingüística* a la lógica, esa era una de las grandes ataduras por las que transitó la lógica durante el periodo llamado del giro lingüístico de la filosofía, entendido como la filosofía analítica. De esta forma se plantea un camino, si se quiere distinto, para replantear la posibilidad de encontrar algunos fundamentos de la Matemática sin quedar enredados en paradojas controversiales. El autor sugiere:

> a. Ruptura del predominio lingüístico.
> b. Confrontar esas rupturas con las tradiciones filosóficas del siglo XX, especialmente de los aporte de Nietzsche a Bergson.
> c. Examinar a la lógica desde el punto de vista, esta vez, de la propia decisión ontológica.
> d. Restaurar y reformar, a partir de allí, la categoría de verdad.
> e. Hay que establecer que existen en toda verdad algo impensado (Badiou, 2002, p. 118).

Lo que realmente llama la atención de lo desarrollado por el autor en estos principios es que genera lineamientos no categorizados en el sentido de que ya están determinados, la perspectivas de Nietzsche a Bergson son muy interesantes pues frente al lenguaje Nietzsche mantiene una perspectiva muy interesante, por otra parte no es simplemente con los planteamiento de Bergson sino que es posible añadir la perspectiva de Heidegger. En fin, si de algo se trata es que desde una nueva perspectivas cabe la posibilidad de repensar la Matemática con nuevas expectativas lógicas y conjeturas de nuestra nueva visión paradigmática del mundo.

LA TEORÍA DE CANTOR.

Cuando se habla de la Matemática y sus fundamentos, las referencias obligan a tratar las propuestas y planteamientos desarrollados por Georg Cantor, como se ha advertido el programa logicista fue cuestionado por las dificultades encontradas en torno a las paradojas y círculos aplicables a una porción y no a la totalidad. El trabajo de Cantor tiene como característica fundamental el estudio sobre el Infinito, si algo ha dado que pensar a la ciencia de la Matemática es su punto controversial sobre las enormes cantidades de carácter infinito y de igual manera el infinito número de puntos contenidos en un determinado espacio.

Las perspectivas de Cantor difieren a las de Russell, especialmente cuando se tratan de paradojas y como punto referencial lo concerniente a la ordinalidad, por ello Cantor va más allá como lo refiere Lavine (2005):

> Cantor replica con un análisis sobre la "dificultad" que Russell había descrito y que consistía en que éste había extendido libremente la demostración de que $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ para demostrar que $2^n > n$ cuando n es la *cardinalidad* de cualquier conjunto *M*... (p. 91).

La tarea de este gran matemático es la fundamentación de una aritmética en principios que solidificasen a la matemática, ciertamente ya se puede referir dicho problema a la Conjetura de Goldbach quien escribió a Euler en 1742 los siguiente: *"Todo número par positivo, mayor que dos, se puede escribir como la suma de dos números par positivos"*[36] o dicho de manera más popular: es todo número que solamente puede ser dividido por sí mismo y la unidad este conjunto sería {2, 3, 5,…, 17, 19…} , sin embargo el problema de conjetura en tanto que matemática tiene un significado determinante, pues es algo que no se ha demostrado, ni negado. Siendo esta una de las más famosas conjeturas. Sin embargo se está recurriendo a la concepción de *cardinalidad* para determinar la *oridnalidad.*

[36] Conjetura de Golbach.

El problema de Cantor apunta entonces a dos conceptos de números: los ordinales y los cardinales. Ahora bien, Gibilisco (1991) desarrolla el significado de los primeros estableciendo la noción de conjunto:

> En matemáticas, todo puede reducirse a conjuntos. En efecto, la Matemática puede verse como una especialidad en el campo más amplio de la teoría de conjuntos… Todos los números se pueden mirar como conjuntos. Los enteros de "contar" se ven a veces definidos como conjunto tal que cada número natural está contenido en (es un miembro de) un conjunto equivalente a n +1(p. 69). De hecho, podemos decir $m < n$, siendo m y n números naturales, si m está contenido en n. Y sin $m = n$, los conjuntos son idénticos. Esta propiedad de los números naturales se conoce como *buena ordenación* (p. 69).

El asunto viene planteado en términos de la definición ya sea de Peano, por cuanto exige las propiedades y en segundo término de los planteamientos de Frege, número es todo aquello que es número de una clase, mediante estos elementos de números naturales se establece la problemática para poder esgrimir el conjunto. En este sentido comienzan las caracterizaciones de los distintos autores intentando cuestionar los planteamientos de unos y otros. El problema se manifiesta cuando se asume, de alguna manera, que la Matemática puede plantearse en términos simplemente de *conjunto*; sin embargo, es posible si se hace la definición previa de número natural, por ello las distintas controversias como lo plantea Lavine (2005):

> Russell decía que Cantor concebía al conjunto como una colección "definida por la enumeración de sus términos". Yo, por mi parte me referiré a esto como la *noción combinatoria de colección…*
> Los valores de una colección están determinados por una regla, va de la mano con la noción de una función determinada por regla o una expresión analítica y si sólo si su gráfica está dada por una regla correspondiente y la gráfica es por tanto una colección lógica (p. 92).

Al asunto se llega al intentar establecer una correspondencia de números naturales {0, 1, 2,…., n..} con cualquier otra colección de elementos definidas por una cantidad establecida en combinatoria de 2^n, habrá correspondencia y se puede definir propiedades. Ello indica que si tengo una colección de elementos cualesquiera { *, 3, ¥} y existe una definición previa con una condición que les agrupa, la cantidad de elementos que posee la colección es 3 (tres) por tanto las distintas combinaciones de clases serían de 2^3 que equivale a 2 x 2 x 2 = 8, las combinaciones de elementos son ocho, el caso interesante es la inclusión de {ø} como parte del conjunto de clases. Como puede observarse la aplicación del $2^n > n$ es simplemente una trivialidad, no requiere de mucho esfuerzo para su comprensión, el problema está en su demostración, aunque muchos los pueden acariciar, en especial, por reducción al absurdo o inclusive por vía de la inducción intentando calcular para un $n = k$, luego para $k + 1$, pero lo fundamental en el asunto es su referencia a número natural, dicho concepto no es definido sino asumido como tal. Ahora bien, donde radica la importancia de Cantor, primeramente en que supera las contradicciones y paradojas que Russell no pudo superar.

Establecida la cardinalidad como el número de elementos de un conjunto, el problema se traslada a otro término, el concepto de orden.

Cuáles serían los postulados para el desarrollo de los ordinales establecidos por Cantor, siguiendo las premisas de Peano establece:

> 1.- Cero (0) es un ordinal.
> 2.- Si a es un ordinal entonces a + 1, el sucesor de a es ordinal.
> 3.- Si se tiene una sucesión de ordinales {a} entonces existe un último ordinal lim {a} el cual es mayor que todo ε {a}[37].

Gibilisco (1991) da una explicación menos axiomática, más no menos importante:

> Empecemos definiendo el cero como conjunto vacío, sin elementos denotado por ø. Entonces, uno es el conjunto que contiene al conjunto vacío, denotado por {ø} o {{}}, dos el conjunto que contiene a cero y a uno, escrito {ø, {ø}}. Tres es el conjunto que contiene a cero, uno y dos. En general *n* es el conjunto que contiene los elementos desde cero hasta $n - 1$, previamente definidos. Los primeros *m* elementos que representa el número *n*, donde $m < n$, es simplemente el número *m*

[37] Revista digital Matemática.
http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/infinito/node5.html

por definición. Llamamos *I*(*m*) al segmento inicial del conjunto que representa un número *n* mayor que *m.*
Definimos *w* como un número *ordinal* si *w* admite *buena ordenación,* de modo que para todo elemento *v* de *w* el segmento inicial I(*n*) es igual a *n*. Es obvio que todos los números naturales son números ordinales. El conjunto de los números naturales o enteros positivos (éste último no incluye a cero), en su orden natural es un número ordinal… (p. 69).

La densidad filosófica ahora es acompañada por la densidad matemática, establecer principios es siempre comprometedor, el formalismo y la búsqueda de claridad y precisión es algo comprometedor al querer establecer fundamentos de una ciencia de carácter formal, pues se piensa en que la definición plantea la realidad existencial del ente abstracto en estudios.

Expongamos los Axiomas de Cantor (Lavine, 2005, p. 95 – 97).

Axioma 1: Los números ordinales están ordenados linealmente por $<$.
Axioma 2: Existe un número ordinal mínimo, 0.
Axioma 3: Todo número ordinal α tiene un inmediato sucesor $\alpha + 1$.
Axioma 4: Existe un número ordinal ω tal que $0 < \omega$. Para todo número ordinal α, si $\alpha < \omega$, entonces $(\alpha + 1) < \omega$ y para cada número ordinal distinto de cero $\alpha < \omega$ hay un número ordinal $\alpha = \beta + 1$.
Definición: Un *conjunto* es el rango de una función uno a uno que tiene como dominio un segmento inicial propio de los números ordinales.
Axioma 5 ***(Extensionalidad)***: Los conjuntos que tienen los mismos elementos son iguales.
Axioma 6: Todo conjunto de ordinales tiene una cota mínima superior.
Axioma 7: Para todo ordinal α hay un conjunto asociado (α) – la clase numérica de α – tal que β está en (α), si y sólo si β es un número ordinal y el conjunto de predecesores de α es rango de una función que tiene como dominio los predecesores de β.
Axioma 8: Para todo número ordinal α, hay un número ordinal $\beta > \alpha$ tal que el conjunto de los predecesores de β no es igual al dominio de la función uno a uno con dominio α.
Axioma 9: Sea S un conjunto de conjuntos, sea *F* una función que tiene como dominio los predecesores de algún número ordinal α que atestigua que S es un conjunto, de tal manera que todo miembro de S sea $F(\gamma)$ para alguna $\gamma < \alpha$. Entonces hay una función binaria *H* tal que, para todo $\gamma < \alpha$, la función "unaria" $H(\gamma,*)$ que pertenece después

> de que γ es introducida en *H* tiene como dominio el conjunto de los predecesores de un número ordinal inicial y atestigua que $F(\gamma)$ es un conjunto.

Algunos pueden establecer que hay ciertas referencias plasmadas por Peano en su axiomática de los números naturales, esto es cierto, a un siglo y algo más, muy a pesar de los avances de las computadoras y la era digital, la Matemática necesitar recurrir a los axiomas iniciales, por ser axiomas, no requieren de aparente demostración, son "verdades" tan elementales que se imponen no necesitando ser demostradas para ser aceptadas, en términos kantianos son intuiciones a priori de la razón y el entendimiento.

Bien, lo interesante no es la negativa de la formalidad de Cantor al desarrollar unos aspectos que superan las conjeturas dejadas por Russell en referente a la totalidad del conjunto cuando se discute sobre el tema de: *"la clase de todas las clases"* o el total, ciertamente la finitud y la infinitud están tras bastidores, como lo refiere Gibilisco (1991):

> El término *ordinal transfinito* surge del hecho de que existen varios niveles de infinitud, no uno sólo, y que todos ellos son menores que el inalcanzable *infinito absoluto* (p. 69).

Nuevamente nos encontramos con paradojas y reflexiones que exigen siempre cierto compromiso ontológico, es decir la admisión de un enunciado generalmente tiene que ver con una parcialidad, dicha parcialidad nos refiere al connotado planteamiento de la discusión entre Sócrates y Menón, nadie busca lo que no sabe; en términos de Heidegger: la pregunta condiciona la respuesta. Es decir, al referirse a una escala de *infinitos*, prácticamente está asumiendo una postura determinante pues cuál sería este infinito absoluto. Cuál sería un infinito medio, cómo se puede establecer un siguiente del infinito cuando n el último de los naturales equivale a infinito, entonce n + 1, equivale a infinito. Existe toda una gama de operaciones con los ordinales los que tomando en consideración algunos teoremas se puede desarrollar constructos, sin embargo el problema del infinito sigue tal cual.

Retomando el problema de la fundamentación de la Matemática a través de la teoría de conjuntos, Cantor plantea otra clase de número necesario para desarrollar dicha construcción, los números *Cardinales*.

Para Gibilisco (1991):

> Un número *cardinal*, como los ordinales o cualquier otro número, es reducible a conjuntos. Los números *cardinales* están relacionados con los tamaños de los conjuntos. Así el conjunto vacío tiene el cardinalidad cero y el conjunto que conste de un elemento tiene cardinalidad uno. El conjunto de los números naturales tiene cardinalidad infinita, al igual que el de los racionales, el de los irracionales, el de los reales y el de los complejos. El conjunto de los puntos de una recta tiene cardinalidad infinita (p. 83).

La cardinalidad al parecer tiene que ver con el total de elementos que componen un conjunto, pero ¿qué es un cardinal, en qué se diferencia de un número *ordinal*?

Según Gibilisco (2001):

> Todo número cardinal es a la vez ordinal, y la suma y el producto de los números cardinales es un nuevo número cardinal. Definimos específicamente un número cardinal como un *ordinal inicial.* Eso significa que es el primer número de alguna clase de números (p.83).

Se ha estado planteando el significado de cardinalidad y como paradoja se recurre a lo ordinal, sin embargo este establecimiento apunta nuevamente a lo establecido por Frege y Russell: *número es todo aquello que es número de una clase.* Es decir se fundamenta en el concepto de clase o de la determinación del quantum establecido en una clase.

Como puede observarse el asunto se convierte en controversia, Gibilisco intentando asumir y aclarar las perspectivas de Cantor se ve envuelto en la perspectiva intuitiva asumir definiciones aportadas por el logicismo, por tanto con mucha humildad hay que reconocer los elementos de verdad aportados por esta perspectiva filosófica fundamentada en un concepto platónico, las clases están determinadas y a priori tienen un número de elementos que la determinan.

Retomando a Cantor posiblemente hay dos elementos fundamentales que pueden deducirse además de lo connotado de su esfuerzo por establecer bases para la teoría de conjunto: el término y principio de conjunto bien ordenado y, por segundo, el principio de extensionalidad. Aunque Lavine (2005) plantea:

> El axioma de extensionalidad, considerado como constitutivo de la noción de conjunto, curiosamente es difícil localizarla en la teoría de Cantor. La extensionalidad está presente en la idea de que un conjunto es un dominio de elementos definidos (p. 101).

De esta forma, el estar presente aunque no sea por escrito significa estar, es de carácter *intuitivo*. El problema que caracteriza a los conjuntos está en la determinación a priori de los elementos que se regirán por las definiciones y axiomas pre dispuestas para dar cumplimiento e imponérsele a los elementos reunidos para tal fin. Sin embargo, el fundamento fue el de *conjunto bien ordenado,* según Lavine (2005), el término es debido a Moore.

EL AXIOMA DE ELECCIÓN.

Otro de los aspectos importantes en los intentos por fundamentar la Matemática fue el Axioma de Elección, dicho planteamiento es desarrollado por Ernest Zermelo en connotación con la teoría de conjunto de Cantor, según Hans (1995)[38]:

> En la demostración de que $\aleph_0$ es el cardinal transfinito más pequeño, tanto como en la prueba de que cada cardinal transfinito se encuentra en la serie aleph, una hipótesis que también se usa en otras demostraciones matemáticas sin ser explícitamente probada. Esta hipótesis, que, como parece, no puede ser derivada de otro principio de la lógica, se conoce como el postulado o axioma de elección y puede

[38] NEWMAN James (1985). El Mundo de las Matemáticas Tomo IV, Serie Sigma. Editorial Grijalbo. Barcelona España.

> expresarse de la manera siguiente: *Dado un sistema de M conjuntos, en que dos de los cuales no tienen elemento común, entonces hay un conjunto que tiene exactamente un elemento común con cada uno de los M conjuntos* (p. 390).

Según Lavine (2005):

> Para todo conjunto de conjuntos no vacíos hay una función que va de cada uno de los conjuntos no vacíos a uno de sus elementos, y utilizó este supuesto para demostrar el buen orden (p. 120).

Saludamos con respeto este y otros puntos cuyo interés no es otro que darle fundamento a la teoría de conjuntos caminando a superar paradojas y ha desarrollar categorías de estructuras cada vez más complejas y de orden superior, incluso un debate sobre la finitud y la infinitud. El problema fundamental es la reducción de la Matemática a un principio, el de colección y el de clases. En este sentido, muy por el contrario no se simplificó, iniciaron nuevamente una expansión de realidades que se compenetraban y asumían el comportamiento de lo definido, sin embargo no lograron precisar los principios fundamentales como el número o las colecciones en base a principios que, en alguna forma, no estaban del todo blindados.

Muy a pesar de las críticas realizadas a los grandes pensadores que se aventuraron a iniciar un proceso de cuestionamiento y fundamentación de la realidad Matemático esto no pudo ser, por más que se cuestionó muchas veces las contraposiciones eran peor de las posturas primeras. En fin, cada quién intentó darle consistencia, desde su perspectiva, a los pensamientos sobre los cuales fundamentaba los entes de la Matemática.

LA MATEMÁTICA SE QUEDA SIN FUNDAMENTOS…

Como se ha venido estudiando, el final del siglo XIX y el principio del XX fue tiempo de controversias, los matemáticos se vieron separados por tres grupos, al menos, donde al final quienes siguieron un camino impresionante fueron los formalistas encabezados por Hilbert, realmente ha sido un intento magno por querer darle fundamento a la Matemática, incluso hasta Husserl, padre de la fenomenología moderna, desarrolló un tratado sobre los fundamentos de la aritmética. De esta forma, los movimientos se entrecruzaron y cada uno fue asumiendo partes de otros. El caso evidente fue la definición logicista de número establecida por Frege. Por otro lado, toda esta aventura es iniciada por Peano con su aproximación a los números naturales mediante axiomas. Gödel inicia un trabajo donde desarrolla críticas a los volúmenes publicados por Russell y Whitehead sobre los principios de la Matemática que reducían ésta a la lógica. Pero además se incluye el método axiomático, según Nagel y Newman (1979):

> El método axiomático consiste en aceptar sin prueba ciertas proposiciones o postulados, y en derivar luego de esos axiomas todas las demás proposiciones del sistema, en calidad ya de teoremas. Los axiomas constituyes los "cimientos" del sistema; los teoremas son la "superestructura", y se obtienen a partir de los axiomas sirviéndose, exclusivamente, de los principios de la lógica (p. 18 – 19).

Aun cuando en la investigación no se profundizado en el apartado matemático de la Geometría, Gödel toma como referencia dicha disciplina, es que el método axiomático en ella le genera una fortaleza admirable, la axiomática en Matemática ha sido un sinónimo de regularización y de normatividad tal, que permite orden y demás elementos deducidos de ella con la finalidad de mantener un edificio estable. Las estructuras se solidifican para dar profundidad y al mismo tiempo altura, belleza; en este sentido la Matemática puede estudiarse desde una estética a partir de la rigurosidad y pulcritud de sus principios:

> El desarrollo axiomático de la geometría, produjo una poderosa impresión en los pensadores de todos lo tiempos, ya que el relativamente pequeño número de axiomas, soporta el peso de infinitamente numerosas proposiciones que de ellos podían derivarse. Además, si se puede demostrar de alguna manera la verdad de los axiomas – y en efecto, durante cerca de dos mil años los estudiosos han creído sin discusión que son absolutamente ciertos -, quedan automáticamente garantizados tanto la verdad como la consistencia mutua de todos los teoremas (Nagel y Newman, 1979, 19).

Desde este punto de vista hubo una ilusión, se fue profundizando cada vez más que no solamente la geometría mostraba esta consistencia en su accionar, su devenir histórico permitía ver la posibilidad de puntualizar las realidades matemáticas a partir de los axiomas, incluso el logicismo profesaba axiomas para determinar las realidades que se ajustarían a dichas determinaciones es así como:

> … Nació un estado de opinión en el que se admitía tácitamente que todos los sectores del pensamiento matemático podían ser dotados de un conjunto de axiomas susceptibles de desarrollar sistemáticamente la infinita totalidad proposiciones verdaderas suscitadas en el campo sujeto de investigación.
> El trabajo de Gödel demostró que esta suposición es insostenible. Puso al frente de los matemáticos la asombrosa y melancólica conclusión de que el método axiomático posee ciertas limitaciones intrínsecas que excluyen la posibilidad de que ni siquiera la aritmética ordinaria de números enteros puede llegar a ser axiomatizada. Y además demostró que es imposible establecer la consistencia lógica interna de una amplia gama de sistemas deductivos (Nagel y Newman, 1979, p. 20).

La referencia es demoledora, los fundamentos de la Matemática hicieron aguas cual Titanic, prácticamente la lucha por la supremacía y encuentro de una piedra angular quedaba destrozada, y aquello pensado sobre la ciencia donde las demás se referencian quedó en el aire.

Lo minucioso y acucioso del desarrollo de Gödel es haber llegado a los fundamentos más profundos, partiendo de Peano con su referencia a Kronecker donde: Dios creó el cero, este acto de fe fue realmente derrumbado. Cómo probar esto, es por aquí donde Gödel determina su principio basado en la *imposibilidad de demostrar*. La correspondencia viene elaborada desde la geometría y el famoso postulado de las paralelas, por tanto la determinación de inconsistencia parte además de la función del matemático *"cuya tarea es deducir teoremas a partir de hipótesis postuladas, y que, en cuanto tal matemático, no le atañen la cuestión de decidir si los axiomas que aceptas son verdaderos"* (Nagel y Newman, 1979, p. 26). La tarea es asumir el principio y desde este desarrollar consecuentemente entes con los que se operará en el sistema. De esta forma, se admite la idealidad de la Matemática, son más abstractas de lo que se pensaba y su carácter formal, no obstante el asunto parte de una intuición por ello establece Nagel y Newman (1979):

> Las afirmaciones matemáticas pueden estar hechas en principio sobre cualquier objeto sin estar esencialmente circunscritas a un determinado conjunto de objetos o propiedades de objeto, y más formal, porque la validez de las demostraciones matemáticas se asienta en la estructura de las afirmaciones que en la naturaleza especial de su contenido. Los postulados de cualquier rama de la matemática demostrativa nunca versan intrínsecamente sobre el espacio, la cantidad, manzanas, ángulos o presupuestos financieros; y ningún significado especial que pueda asociarse con los términos (o predicados descriptivos) contenidos en los postulados que desempeñan papel esencial alguno en el proceso de deducir teoremas (p. 27).

Ciertamente asumir un principio como punto de partida parece comprometerse con cierto idealismo y, al mismo, tiempo intuicionismo; tal vez, quien mejor se aproxime a dicha realidad sea Kant, y esto se ha venido conjeturando a lo largo de la investigación. El determinar un postulado no significa hacerlo simplemente al azar, generalmente surge para darle formalidad a algo previamente intuido. El formalismo se basa en establecer formalidad a una serie de aplicaciones intuidas en principio. Por ello la imposibilidad de referencia a elementos concretos o entes espaciales al momento de enunciar hipótesis o cualquier otra determinación. En este sentido el intuicionismo constructivo también forma parte importante pues lo intuido debe ser formalizado y para ello requiere se construido, por tanto la inconsistencia parte del principio y las tres corrientes filosóficas poseen su talón de Aquiles, es aquí donde Gödel logró desmontar el edificio matemático. Al final, no hay consistencia en la aritmética ni cualquier otra rama de la Matemática que parta de una axiomática.

CONCLUSIONES

El largo camino transitado a lo largo de este excurso por el ámbito de los fundamentos de la Matemática plantea los siguientes apartados, el primero es asumir una actitud distinta frente a la realidad de la Matemática. No se trata de ubicarse dentro una postura ni mística ni realista ingenua. No es que la Matemática se convertiría en un mito, pues no se puede negar la formalidad y racionalidad implicadas en el hacer matemático. No se trata de un juego de la gallina ciega, en Matemática se requiere de ojos bien abiertos. El Factum matemático implica un hacer de razón más que de corazón. Es decir la inconsistencia de fundamento no quita para nada su aplicación. Por tanto, un infante de primera y segunda etapa puede continuar utilizando la Matemática para calcular desde una suma elemental hasta cualquier adulto dedicado a la Matemática desarrollar cualquier cálculo superior, sin verse afectado por la falta de consistencia en los fundamentos de la Matemática.

Otro elemento es que su metodología deductiva - inductiva, permanece invariable, aunque se parta de lo particular intentado generalizar o viceversa, esto no le resta importancia a la generalidad de la Matemática, ella seguirá dando los resultados en función de las premisas asumidas y en atención a una demarcación lógica permanente.

Un elemento filosófico novedoso es intentar aproximarse a la Matemática con una actitud de Husserl, de colocarla entre paréntesis y plantear una epojé, es decir volver a las cosas mismas, suspender todo prejuicios y enfrentar la realidad cara a cara. Tal vez, uno de los elementos que oscurecen la fundamentación es ello, la cantidad de prejuicios a favor y en contra de qué es la Matemática. Además lo que plantea Badiou (2005) en el entendido de nos ser ni física ni metafísica. Lo importante es que es "real", forma parte de la realidad humana. Entendiendo sus objetos como entes de razón, significa que depende enteramente del intelecto humano, es este quien la desarrolla amplia y finalmente la aplica. Esa es la real ontología tras bastidores, ontología a la que se ha accedido de una manera negativa, pues el principio de acceso ha sido la demostración. Tal ves el error metodológico cometido al intentar aproximarnos a los fundamentos de la Matemática has sido una postura epistémica de demostración, se ha intentado demostrar por todas las vías posibles: formalismo, intuicionismo y logicismo. Sin embargo, la actitud comprensiva brindada por la hermenéutica pudiera superar los obstáculos. Se ha querido, a manera de pensar del investigador, que la Matemática requiere de piedras angulares establecidas según los principios cartesianos de ideas claras y distintas, aparentemente esto no es posible, la actitud demostrativa ha llevada a paradojas, confundiendo más y aclarando menos.

La Matemática es fruto de la autopoiesis del ser humano, la mente humana posee la capacidad de crear y recrearse, de trascender en su inmanencia, de evolucionar ir del mito al logos, y el fruto de *logificación* o estructuración del pensamiento racional humano es la Matemática. Por ello su sentido permanente de abstracción, de coleccionar y escudriñar condiciones, características y categorías para reunir por semejanzas o diferencias. Además, nuevamente es lo que la hace construida y terminada por otro pero en permanente construcción. La Matemática es una ciencia hecha, completa pero por hacerse.

Otra conclusión importante es la comparación antes realizada entre la Relatividad General y la Relatividad Restringida, cuando hace un punto de inicio o de partida para desarrollar cualquier ámbito matemática debe establecerse los alcances que posee pero al mismo tiempo las limitaciones. Este ha sido uno de los grandes conflictos desarrollados de las distintas perspectivas al intentar definir o reducir a una entidad en particular el ser de la Matemática. Cada teoría, de eso se trata, tiene un alcance relevante pero dialécticamente posee una limitación; en este sentido se requiere de una actitud dialógica entre ambos extremos para reconocer las bondades que la otra parte pueda aportar. Es clave que el límite no significa negación, pues hace falta el principio de humildad para llegar y admitir el hasta dónde puede ser válida su teoría.

Si algo es oscuro y apenas nos muestra vestigios de iluminación es el lenguaje, la Matemática como fruto del pensamiento humano puede ser explicada desde una perspectiva lingüística, ya Galileo afirmaba ser el lenguaje de las ciencias. Bien, no creo que las ciencias se manifiesten por sí mismas, además son productos de la invención humana, cada ciencia es ciencia porque comporta un conocimiento que ha sido estructurado por el intelecto humano, en ese sentido la Matemática refleja el mismo pensamiento humano, no se trata de una simbología vacía, por el contrario es muy rica y además posee significados muchas veces de compromiso ontológico.

BIBLIOGRAFÍA

ANTON Howard (1994). *Introducción al Álgebra Abstracta*. Editorial Limusa. México. México.

ARISTÓTELES. *Metafísica.* Traducción De AZCÁRATE Patricio (2006). Editorial Espasa Calpe. Madrid. España.

ARISTÓTELES (1992). *Tratados de Lógica. El organon.* Ediciones Universales. Bogotá. Colombia.

ARISTÓTELES. *La Poética.* Traducción CAPELLETI Ángel (1991). Monte Ávila Editores. Caracas. Venezuela.

AUBERT Jean-Marie (1987). *Filosofía de la Naturaleza.* Editorial Herder. Barcelona España.

BACHELARD Gaston (1974). *La Formación del Espíritu Científico*. Siglo XXI Editores. Buenos Aires. Argentina.

BADIOU Alan (2002). *Breve Tratado de Ontología Transitoria.* Editorial Gedisa. Barcelona. España.

BAUTISTA Raymundo y Otros (2004). *Las matemáticas y su entorno. Siglo XXI Editores.* Buenos Aires. Argentina.

BELL E. T. (1985). *Historia de las Matemáticas.* Fondo de la Cultura Económica. México. Mexico.

BOFF Leonardo (2002). *Tiempo de Trascendencia.* Editorial Sal Térrea. Santander. España.

BERNAYS, Paul (1982). *El Platonismo en Matemáticas.* Ediciones de la Biblioteca. Universidad Central de Venezuela. Caracas. Venezuela.

BOURBAKI Nicolás (1976). *Elementos de Historia de las Matemáticas.* Alianza Editorial. Madrid. España.

BUNGE Mario (1981). *La Ciencia, su Método y su Filosofía.* Ediciones Siglo Veinte. Buenos Aires. Argentina.

CASSIRER Ernst (1986). *El problema del conocimiento en la Filosofía y en las* *ciencias Modernas. El Renacer del problema del conocimiento, el descubrimiento del concepto de la naturaleza, los fundamentos del Idealismo.* Fondo de la Cultura Económica. México. México.

COLOMER Eusebi (2006). *El pensamiento alemán de Kant a Heidegger.* Tomo II. Editorial Herder. Barcelona. España.

COURANT Richard - ROBBINS Herbert (2002). *¿Qué son las Matemáticas? Conceptos y Métodos Fundamentales.* Editorial Fondo de la Cultura Económica. México. México.

DE ALEJANDRO José (1969). *Gnoseología*. Biblioteca de Autores Cristianos. Madrid. España.

DE LORENZO Javier (2005). *Filosofía de la Matemática: de Fundamentaciones y construcciones en Filosofía de las ciencias naturales, sociales y matemáticas.* Editorial Trotta. Madrid. España.

DESCARTES René (1983). *Discurso del Método, Reglas para la Dirección de la Mente.* Editorial Orbis. Barcelona. España.

DESIATO Massimo- SALAZAR María – BOCHÉNSKI I.M. (2006). *Introducción a la Filosofía.* Compilación por la Universidad Experimental Libertador y el Instituto de Mejoramiento Profesional del Magisterio. Caracas. Venezuela.

FATONE Vicente (1969). *Lógica e introducción a la Filosofía.* Editorial Kapelusz. Buenos Aires. Argentina.

FAZIO Mariano – GAMARRA Daniel (2002). *Historia de la Filosofía III. Filosofía Moderna.* Ediciones Palabra. Madrid. España.

FERNÁNDEZ Ángel (2000). *Verdad y Límites de la Ciencia.* Revista RELEA Nro. 11. Universidad Central de Venezuela. Caracas. Venezuela.

FRAILE Guillermo (1956). *Historia de la Filosofía I, II y III*. Ediciones Biblioteca de Autores Cristianos. Madrid. España.

FRALEIGH John (1987). *Álgebra Abstracta*. Editorial Addison – Wesley Iberoamericana. Massachusetts. Estados Unidos.

GABBA Pablo (1975). *Matemática para Maestros.* Ediciones Marymar. Buenos Aires Argentina.

GADAMER Hans-Georg (1999). *¿Quién soy yo y quién eres Tú?* Editorial Herder. Barcelona. España.

GARCÍA BACCA Juan D. (1985). *Ciencia, Técnica, Historia y Filosofía, en la atmósfera cultural de nuestro tiempo*. Ediciones Biblioteca Universidad Central de Venezuela. Caracas. Venezuela.

GARCÍA BACCA Juan D. (1980). *Diálogos Socráticos. El Teetetos o sobre la ciencia.* Ediciones Biblioteca Universidad Central de Venezuela. Caracas. Venezuela.

GARCÍA BACCA Juan D. (1967). *Elementos de Filosofía de las Ciencias.* Manuales Universitarios Universidad Central de Venezuela. Caracas. Venezuela

GARCÍA MORENTE Manuel (1983). *Lecciones preliminares de Filosofía.* Editores Mexicanos Unidos. México. México.

GIBILISCO Stan (1991). *En busca del Infinito. Rompecabezas, paradojas y enigmas.* McGraw – Hill. Madrid. España.

GHYKA Matila (1998). *Filosofía y Mística del Número.* Ediciones Apóstrofe. Barcelona. España.

GONZÁLEZ Fredy (1995). *La Matemática. Una excursión hacia su objeto y su método.* Maracay. Venezuela.

GOÑI Carlos (2002). *Historia de la Filosofía Antigua.* Ediciones Palabra. Madrid. España.

HEIDEGGER Martín (1998). *Ser y Tiempo.* Traducción de Rivera Eduardo. Editorial Universitaria. Santiago de Chile. Chile.

HEGEL Federico. *Ciencia de la Lógica.* Traducción de Mondolfo (1948). Editorial Hachette. Buenos Aires. Argentina.

HESSEN Johanes (1997). *Teoría del Conocimiento.* Editorial Lozada. Buenos Aires Argentina.

KANT Inmanuel. *Crítica de la Razón Pura I y II*. Traducción de DEL PEROJO, José (1974 – 1976). Editorial Lozada. Buenos Aires. Argentina.

KANT Inmanuel. *Prolegómenos a toda metafísica futura que haya de poder presentarse como ciencia.* Traducción Caimi (1999). Ediciones Istmos. Madrid. España.

LANZ Rigoberto y otros (2000). *La Ciencia: sin método ni filosofía.* Revista

Latinoamericana de Estudios Avanzados (RELEA). Ediciones CIPOST. Caracas. Venezuela.

LAVINE Shaughan (2005). *Comprendiendo el Infinito.* Editorial Fondo de la Cultura Económica. México. México.

LEIBNIZ Gottfriet. *Monadología. Discurso Metafísico.* Traducción Ediciones Orbis. Barcelona. España.

LLUBERES Pedro (2006). *Unidad, Método y Matematización de la Naturaleza.* Comisión de Estudios de Posgrado Facultad de Humanidades y Educación – Universidad Central de Venezuela. Caracas. Venezuela.

MARTÍNEZ Miguel (2000). *El proceso de nuestro conocer postula un nuevo Paradigma Epistémico.* Revista Latinoamericana de Estudios Avanzados (RELEA). Ediciones Cipost. Caracas. Venezuela.

MIRES Fernando (1996). *La Revolución que Nadie Soñó o la Otra Posmodernidad.* Editorial Nueva Sociedad. Caracas. Venezuela.

MONDIN Bautista (1999). *Lógica, Semántica y Gnoseología.* Edicione Studio Domenicano. Bologna. Italia.

MORALES José Tadeo (2008). *Lecciones de Teoría del Conocimiento.* Trabajo de Ascenso a profesor Agregado. Presentado en la Universidad de Carabobo. Venezuela.

MORALES José Tadeo (1977). *Hacia una probable Gnoseología de la Matemática a partir del concepto de Número.* Tesis de Maestría presentada en la Universidad de Carabobo. Valencia. Venezuela.

MORENO Alejandro (2007). *Y salimos a matar gente.* Universidad del Zulia Ediciones del Vice Rectorado Académico. Venezuela.

MORLES Víctor (1991). Sobre la Relación Entre la Estructura de la Ciencia y los Grados Académicos. Postgrado. Revista de Resúmenes Postgraduate. Valencia. Venezuela.

NAGEL Ernest y NEWMAN James (1979). *El Teorema de Gödel.* Editorial Tecnos. Madrid. España.

NASAR Sylvia (2002). *Una Mente Prodigiosa.* Ediciones Círculo de Lectores. Barcelona. España.

NEGRETE Plinio (2000). *La Mónada. De la filosofía natural a la metafísica.* Universidad de los Andes. Consejo de Publicaciones. Consejo de Estudios de Postgrado. Mérida. Venezuela.

NEWMAN James (1985). El Mundo de las Matemáticas Tomo IV, Serie Sigma. Editorial Grijalbo. Barcelona España.

POINCARÉ Henri (1963). *Ciencia y Método.* Espasa – Calpe. Madrid. España.

REYES Y OTROS (1973). *Los Clásicos. Diálogos Socráticos.* Ediciones W.M. Jackson, INC. México. México.

RUSSELL Bertrand (1988). *Introducción a la Filosofía de la Matemática.* Editorial Paidos. Barcelona. España.

RUSSELL Bertrand (1983). *El Conocimiento Humano.* Editorial Orbis. Barcelona. España.

RUSSELL Bertrand (1948). *Los Principios de la Matemática..* Editorial Espasa-Calpe. Buenos Aires. Argentina.

SÁEZ R. Luis (2003). *Movimientos filosóficos actuales.* Editorial Trotta. Madrid. España.

SANGUINETI Juan (2005). *El Conocimiento Humano. Una perspectiva filosófica.* Ediciones Palabras. Madrid. España.

SANGUINETI Juan (1989). *Lógica.* Ediciones Universidad de Navarra (EUNSA). Pamplona. España.

TRÍAS Eugenio (2000). *Ética y Condición Humana.* Editorial Península. Barcelona. España.

URDANOZ Teófilo (1975). *Historia de la Filosofía IV, Siglo XIX: Kant, idealismo y espiritualismo.* Biblioteca de Autores Cristianos. Madrid. España.

WEISSMAHR Béla (1986). *Ontología*. *Curso fundamental de filosofía.* Editorial Herder. Barcelona. España.

VERNEAUX Roger (1966). *Epistemología General o Crítica del Conocimiento.* Editorial Herder. Barcelona. España.

WITTGENSTEIN Ludwig (1973). *Tractatus logico – philosophicus.* Alianza Editorial. Madrid. España.

Páginas de Referencia de Internet.

http://www.cibernous.com/autores/aristoteles/diccionario/cadaletra.html/tf.html

http://www.luventicus.org/articulos/03U012/aristoteles.html

http://www.luventicus.org/articulos/02A036/hume.html

http://www.luventicus.org/articulos/03U012/hume.html

http://www.luventicus.org/articulos/02A036/kant.html

http://www.cibernous.com/autores/kant/teoria/conocimiento/indice.html

http://www.wordreference.com/es/en/frames.asp?es=epistemología

http://www.cimm.ucr.ac.cr/aruiz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Parte7/Cap26/Parte02_26.htm

http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/infinito/node5.html

http://www.virtualum.edu.co/hexa/nro54/aristoteles.pdf

http://personales.ya.com/casanchi/ref/pfuturos01.htm