



UNIVERSIDAD DE CARABOBO  
FACULTAD DE INGENIERIA  
ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS



## **PROGRAMA PARA EL CÁLCULO DE PROPIEDADES DINÁMICAS DE ESTRUCTURAS UTILIZANDO MÉTODOS NUMÉRICOS**

**Tutor:**

Ing. Fernando Villalobos

**Elaborado por:**

Br. Di Benedetto, Gabriela

Br. Segovia, Vanessa

**VALENCIA, 2011**



UNIVERSIDAD DE CARABOBO  
FACULTAD DE INGENIERIA  
ESCUELA DE INGENIERIA CIVIL  
DEPARTAMENTO DE ESTRUCTURAS



## **PROGRAMA PARA EL CÁLCULO DE PROPIEDADES DINÁMICAS DE ESTRUCTURAS UTILIZANDO MÉTODOS NUMÉRICOS**

*Trabajo especial de grado presentado ante la ilustre Universidad de Carabobo para  
optar al Título de Ingeniero Civil*

**Tutor:**

Ing. Fernando Villalobos

**Elaborado por:**

Br. Di Benedetto, Gabriela

Br. Segovia, Vanessa

**VALENCIA, 2011**

**Universidad de Carabobo**  
**Facultad de Ingeniería**  
**Escuela de Civil**  
**Departamento de Estructuras**

## **CERTIFICADO DE APROBACION**

Nosotros los abajo firmantes, miembros del jurado seleccionado para la evaluación del trabajo especial de grado titulado: "PROGRAMA PARA EL CALCULO DE PROPIEDADES DINAMICAS UTILIZANDO METODOS NUMERICOS", realizada por las bachilleres Gabriela Di Benedetto y Vanessa Segovia, para optar al título de Ingeniero Civil, estimamos que el mismo reúne los requisitos para ser considerado aprobado.

---

Ing. Fernando Villalobos

---

Ing. Eduardo Nuñez

---

Ing. José Quintana

## **AGRADECIMIENTOS**

Primeramente a Dios, por ser el guía de nuestro camino e iluminarnos en todo momento, dándonos serenidad y fortaleza para continuar adelante.

A nuestros familiares, que en todo momento estuvieron a nuestro lado proporcionándonos ánimo, ayuda, compartiendo opiniones, teniendo interés y aportando todo aquello necesario para llegar a esta etapa.

A todos nuestros profesores y facilitadores del aprendizaje a lo largo de la carrera, los cuales pusieron en nuestras manos todas las herramientas necesarias para hacer posible la realización de este trabajo especial de grado. En especial a nuestro tutor, Fernando Villalobos, el cual nos ha impartido muchas enseñanzas, dedicando tiempo y conocimientos en nosotras.

A aquellos amigos, compañeros y futuros colegas, que con su esfuerzo y sacrificio conjunto hicieron posible superar todas las vicisitudes y lograr las metas trazadas en el sendero que hoy nos trajo hasta aquí.

Por último queremos agradecer a todas aquellas personas que de una forma u otra sin esperar nada a cambio participaron en nuestra formación y realización de este sueño que duro cinco años para lograr convertirse en realidad.

## DEDICATORIAS

Primordialmente a Dios Todopoderoso, que fue mi guía en todo momento dándome salud y fortaleza para lograr esta meta.

A mi padre, el hombre modelo de mi vida, que gracias a sus enseñanzas a lo largo de mi existir ha hecho posible ser la mujer que soy hoy en día, y el cual es mi inspiración para hacer posible este sueño.

Para la mujer más importante de mi vida y que tanto amo, mi madre, que ha pasado tantas noches en vela estando pendiente de todo lo referente a mi desarrollo personal y profesional.

A mi segunda madre, mi abuela, una mujer que ha marcado mi vida y que con su personalidad tan particular me enseñó a ser una persona humanitaria, fuerte, aguerrida e independiente.

Neya y Franchy, mis hermanas, que con su cariño y nobleza me dieron mucha fortaleza e inspiración para seguir adelante.

Mi compañera, Vanessa Segovia, la cual ha sido amiga en todo momento y principal ayudante de mis estudios a lo largo de la carrera, pasando a mi lado días, tardes, noches y madrugadas realizando un arduo trabajo para lograr llegar a este momento.

A Salvador Ligas, amigo, compañero y futuro colega, que desde el principio de mis estudios ha estado a mi lado ayudándome en todo momento dando lo mejor de sí.

José Alberto Quintana, profesor y amigo, el cual ha marcado mis estudios por dar siempre de sí lo mejor sin importar nada, así como también por preocuparse tanto por mi crecimiento profesional y personal.

Atentamente, Gabriela Di Benedetto

## DEDICATORIAS

A mi padre, por su apoyo incondicional a lo largo de mi vida y de estos años de estudio, por impulsarme y exigir de mí siempre dar lo mejor.

A mi madre, por estar siempre presente e impulsarme a alcanzar esta meta.

A mi tía Marisol, por ser como una segunda madre brindándome su apoyo en todo momento.

A mi abuela Haydee, por apoyarme y brindarme su ayuda en los momentos que la necesite.

A mis hermanos, para quienes quiero que este logro sea un ejemplo de dedicación y constancia para alcanzar sus objetivos.

A Carlos, por su paciencia y compañía en los momentos en los que más lo necesite.

A Salvador, por ofrecerme siempre su ayuda en los momentos más difíciles de nuestra carrera.

A mi compañera de tesis, Gabriela, por el esfuerzo que juntas logramos plasmar en este y muchos trabajos a lo largo de nuestra carrera.

Atentamente, Vanessa Segovia

**Universidad de Carabobo**  
**Facultad de Ingeniería**  
**Escuela de Ingeniería Civil**  
**Departamento de Estructuras**

## **Programa para el cálculo de propiedades dinámicas utilizando métodos numéricos**

Elaborado por: Gabriela Di Benedetto

Vanessa Segovia

Tutor: Ing. Fernando Villalobos.

Fecha: Julio 2011

### **RESUMEN**

El presente trabajo especial de grado tiene como objetivo crear una herramienta de cálculo que sea capaz de hallar las propiedades dinámicas de una estructura usando métodos numéricos. Estas propiedades son los valores de desplazamiento, velocidad y aceleración que presentan una estructura a lo largo del tiempo sometido a una fuerza dinámica.

Esta herramienta se desarrolló bajo el lenguaje de programación de MATLAB y permite realizar los cálculos mediante los métodos numéricos: Diferencias Centrales, Newmark Constante, Newmark Lineal, Wilson  $\theta$  y Houbolt. Así como también, dentro del presente trabajo se desarrolla paso a paso el procedimiento necesario para hacer uso de los mencionados métodos utilizando el programa creado. Para poder ser utilizada es necesario conocer las matrices de rigidez, masa y amortiguación que presente el sistema que se desea estudiar, así como también la fuerza a la cual se someterá pudiendo ser esta un sismo o una fuerza dinámica cualquiera.

Finalmente, esta herramienta es de fácil uso, no es necesario tener conocimientos avanzados de computación para ser manipulada y fue desarrollada para ser usada por estudiantes y profesionales afines a la Ingeniería Civil que se desarrollen dentro del área de estudio del comportamiento dinámico de estructuras.

*Palabras Claves:* historia-tiempo, dinámica, programa, métodos numéricos.

## INDICE GENERAL

| <b>CONTENIDO</b>                   | <b>Pág.</b> |
|------------------------------------|-------------|
| <b>AGRADECIMIENTOS</b>             | iv          |
| <b>DEDICATORIAS</b>                | v           |
| <b>RESUMEN</b>                     | vii         |
| <b>INDICE GENERAL</b>              | viii        |
| <b>INDICE DE FIGURAS</b>           | xi          |
| <b>INDICE DE TABLAS</b>            | xvi         |
| <b>INTRODUCCION</b>                | xviii       |
| <b>1. CAPITULO I El Problema</b>   | 20          |
| 1.1. Planteamiento del problema    | 20          |
| 1.2. Formulación del problema      | 22          |
| 1.3. Objetivos de la investigación | 23          |
| 1.3.1 Objetivo General             | 23          |
| 1.3.2 Objetivos Específicos        | 23          |
| 1.4. Justificación                 | 23          |
| 1.5. Alcance y limitaciones        | 25          |

|  |           |
|--|-----------|
| <b>2. CAPITULO II Marco Teórico</b>  | <b>26</b> |
| 2.1.    Antecedentes   | 26        |
| 2.2.    Bases Teóricas   | 28        |
| 2.2.1.    Fundamentos del análisis dinámico  | 28        |
| 2.2.2.    Solución a la ecuación de equilibrio dinámico  | 40        |
| 2.2.3.    Fundamentos matemáticos de los métodos numéricos   | 45        |
| 2.2.4.    Caracterización de los métodos numéricos aplicados a la<br>solución del problema dinámico. | 48        |
| 2.2.5.    Métodos de integración directa   | 52        |
| 2.2.6.    Método de las diferencias centrales  | 53        |
| 2.2.7.    Método de Newmark  | 56        |
| 2.2.8.    Método de Wilson $\theta$  | 64        |
| 2.2.9.    Método de Houbolt  | 68        |
| <b>3. CAPITULO III Marco Metodológico</b>  | <b>73</b> |
| 3.1. Tipo de Investigación   | 73        |
| 3.2. Diseño de Investigación   | 74        |
| 3.3. Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos   | 75        |
| 3.4. Procedimiento Metodológico  | 76        |
| 3.5. Desarrollo del programa   | 78        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 3.5.1.    | Descripción del programa  | 78         |
| 3.5.2.    | Algoritmo de trabajo  | 79         |
| 3.5.3.    | Instalación del programa  | 84         |
| 3.5.4.    | Ejecución del Programa  | 85         |
| 3.6.      | Validación del programa   | 94         |
| 3.6.1.    | Caso 1. Calculo manual de las propiedades dinámicas haciendo uso de métodos numéricos.  | 94         |
| 3.6.2.    | Caso 2. Calculo de las propiedades dinámicas de un sistema estructural plano haciendo uso de SAP 2000.  | 142        |
| <b>4.</b> | <b>CAPITULO IV Resultados y análisis de resultados</b>  | <b>152</b> |
| 4.1.      | Resultados  | 152        |
| 4.1.1.    | Caso 1 Cálculo manual de la respuesta dinámica de un sistema estructural plano donde se evalúa su comportamiento bajo una acción sísmica utilizando cada uno de los métodos de estudio. | 152        |
| 4.1.2.    | Caso 2 Cálculo de las propiedades dinámicas de un sistema estructural plano haciendo uso de SAP 2000.   | 155        |
|           | <b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>   | <b>172</b> |
|           | <b>BIBLIOGRAFIA</b>   | <b>175</b> |

## INDICE DE FIGURAS

| CONTENIDO  | Pág. |
|--|------|
| <b>FIGURA 1.</b> Grados de libertad en sistemas estructurales.   | 29   |
| <b>FIGURA 2.</b> Grados de libertad dinámicos en sistemas estructurales.   | 30   |
| <b>FIGURA 3.</b> Sistema estructural plano de 1 GLD.   | 33   |
| <b>FIGURA 4.</b> Modelo idealizado de un sistema de un grado de libertad.  | 33   |
| <b>FIGURA 5.</b> Influencia de una excitación en la base en un sistema de un grado de libertad.  | 35   |
| <b>FIGURA 6.</b> Sistema en el plano de varios Grados de Libertad.   | 37   |
| <b>FIGURA 7.</b> Respuesta de un sistema en vibración libre sin amortiguación.   | 42   |
| <b>FIGURA 8.</b> Aproximación por el método de Euler.  | 50   |
| <b>FIGURA 9.</b> Representación gráfica del método de diferencias centrales.   | 54   |
| <b>FIGURA 10.</b> Comportamiento basado en la variación lineal de la aceleración.  | 58   |
| <b>FIGURA 11.</b> Comportamiento basado en aceleración promedio constante.   | 59   |
| <b>FIGURA. 12.</b> Representación gráfica del Método de Wilson $\theta$ .  | 64   |
| <b>FIGURA 13.</b> Representación gráfica del método de Houbolt en $t=0$  | 71   |
| <b>FIGURA 14.</b> Ventana principal del programa para el cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos. | 84   |
| <b>FIGURA 15.</b> Esquema de ejecución del programa.   | 85   |
| <b>FIGURA 16.</b> Organización de archivo de datos.  | 86   |
| <b>FIGURA 17.</b> Organización de archivo de datos de la información del sistema.  | 87   |
| <b>FIGURA 18.</b> Gráfica del Acelerograma registrado en el sismo de Centro, California.   | 88   |
| <b>FIGURA 19.</b> Gráfica del Acelerograma registrado en el sismo de Kobe, Japón.  | 89   |

|   |     |
|---|-----|
| <b>FIGURA 20.</b> Gráfica del Acelerograma registrado en el sismo de Northridge.  | 90  |
| <b>FIGURA 21.</b> Organización de archivo de datos para fuerza definida por un registro sísmico.  | 91  |
| <b>FIGURA 22.</b> Organización de archivo de datos para fuerza dinámica general.  | 92  |
| <b>FIGURA 23.</b> Organización de archivos de datos para definir las condiciones iniciales.   | 92  |
| <b>FIGURA 24.</b> Modelo de pórtico plano de 2 niveles de altura .  | 94  |
| <b>FIGURA 25.</b> Sistema de Coordenadas.   | 96  |
| <b>FIGURA 26.</b> Deformada y desplazamiento de las juntas para la coordenada generalizada 1.   | 97  |
| <b>FIGURA 27.</b> Gráfica del acelerograma del sismo ocurrido en Kocaeli, Turquía el 17 de Agosto de 1999.  | 104 |
| <b>FIGURA 28.</b> Ventana de entrada de datos del programa para el cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos para el caso de estudio 1.  | 133 |
| <b>FIGURA 29.</b> Ventana para indicar la fuerza dinámica definida por usuario del programa para el cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos en el caso de estudio 1.   | 134 |
| <b>FIGURA 30.</b> Ventana para la selección de los métodos numéricos a ejecutar en el programa para el cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos para el caso de estudio 1.  | 135 |
| <b>FIGURA 31.</b> Ventana durante la ejecución de los métodos seleccionados en el programa para cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos para el caso de estudio 1.   | 136 |
| <b>FIGURA 32.</b> Ventana de resultados en el análisis individual del método de Newmark lineal para el grado de libertad 1, en el programa para cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos para el caso de estudio 1. | 137 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>FIGURA 33.</b> Ventana de resultados en el análisis comparativo entre el método de Newmark lineal, Newmark constante y Wilson para el grado de libertad dinámico 1, en el programa para cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos para el caso de estudio 1. | 138 |
| <b>FIGURA 34.</b> Ventana donde se indica como generar el archivo de resultados en el programa para cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos para el caso de estudio 1.  | 139 |
| <b>FIGURA 35.</b> Ventana de graficas de resultados para análisis individual en el programa para cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos para el caso de estudio 1.   | 140 |
| <b>FIGURA 36.</b> Ventana de graficas de resultados para análisis comparativo en el programa para cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos para el caso de estudio 1.  | 141 |
| <b>FIGURA 37.</b> Sistema estructural en el plano de 3 niveles de altura para el caso de estudio 2.  | 142 |
| <b>FIGURA 38.</b> Modelado del sistema estructural en el plano de 3 niveles de altura para el caso de estudio 2 en el programa SAP 2000.   | 145 |
| <b>FIGURA 39.</b> Definición del acelerograma seleccionado en el programa SAP 2000.  | 146 |
| <b>FIGURA 40.</b> Selección desde archivo del acelerograma en el programa SAP 2000.  | 146 |
| <b>FIGURA 41.</b> Definición del acelerograma en el programa SAP 2000.   | 147 |
| <b>FIGURA 42.</b> Definición del caso de análisis para evaluar el acelerograma en el programa SAP 2000.  | 148 |
| <b>FIGURA 43.</b> Definición del caso de análisis para evaluar el acelerograma en el programa SAP 2000.  | 149 |
| <b>FIGURA 44.</b> Definición del caso de análisis para evaluar el acelerograma en el programa SAP 2000.  | 149 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>FIGURA 45.</b> Ejecución del caso de análisis definido para el acelerograma   | 150 |
| <b>FIGURA 46.</b> Resultados de caso de análisis definido para el acelerograma.  | 151 |
| <b>FIGURA 47.</b> Definición de graficas de resultados en el programa SAP 2000.  | 151 |
| <b>FIGURA 48.</b> Gráfica del desplazamiento en el análisis Historia –Tiempo para la coordenada generalizada 1 en el caso de estudio 2.              | 156 |
| <b>FIGURA 49.</b> Gráfica desplazamiento vs tiempo para la coordenada generalizada 1 de los resultados obtenidos de SAP 2000.                        | 156 |
| <b>FIGURA 50.</b> Gráfica desplazamiento vs tiempo para la coordenada generalizada 1 de los resultados obtenidos del programa elaborado.             | 157 |
| <b>FIGURA 51.</b> Gráfica desplazamiento vs tiempo para la coordenada generalizada 2 de los resultados obtenidos de SAP 2000.                        | 157 |
| <b>FIGURA 52.</b> Gráfica desplazamiento vs tiempo para la coordenada generalizada 2 de los resultados obtenidos del programa elaborado.             | 158 |
| <b>FIGURA 53.</b> Gráfica desplazamiento vs tiempo para la coordenada generalizada 3 de los resultados obtenidos de SAP 2000.                        | 158 |
| <b>FIGURA 54.</b> Gráfica desplazamiento vs tiempo para la coordenada generalizada 3 de los resultados obtenidos del programa elaborado.             | 159 |
| <b>FIGURA 55.</b> Gráfica desplazamiento vs tiempo para la coordenada generalizada 1 de los resultados obtenidos debidos al cálculo manual.          | 160 |
| <b>FIGURA 56.</b> Gráfica desplazamiento vs tiempo para la coordenada generalizada 2 de los resultados obtenidos debidos al cálculo manual.          | 161 |
| <b>FIGURA 57.</b> Gráfica desplazamiento vs tiempo para la coordenada generalizada 1 de los resultados obtenidos debidos al cálculo con el programa. | 162 |
| <b>FIGURA 58.</b> Gráfica desplazamiento vs tiempo para la coordenada generalizada 2 de los resultados obtenidos debidos al cálculo con el programa. | 163 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>FIGURA 59.</b> Gráfica de desplazamiento vs. Tiempo en vibración libre del sistema estructural de la coordenada generalizada 1 para el caso 1.                             | 165 |
| <b>FIGURA 60.</b> Gráfica desplazamiento vs tiempo para ambas coordenadas generalizadas obtenidos debidos al cálculo con el programa para el método de Diferencias Centrales. | 166 |
| <b>FIGURA 61.</b> Gráfica desplazamiento vs tiempo para ambas coordenadas generalizadas obtenidos debidos al cálculo con el programa para el método de Newmark Constante.     | 167 |
| <b>FIGURA 62.</b> Gráfica desplazamiento vs tiempo para ambas coordenadas generalizadas obtenidos debidos al cálculo con el programa para el método de Newmark Lineal.        | 168 |
| <b>FIGURA 63.</b> Gráfica desplazamiento vs tiempo para ambas coordenadas generalizadas obtenidos debidos al cálculo con el programa para el método de Wilson $\theta$ .      | 169 |
| <b>FIGURA 64.</b> Errores máximos por método numérico.  | 170 |

## INDICE DE TABLAS

| CONTENIDO   | Pág. |
|---|------|
| <b>TABLA 1.</b> Métodos para la solución de la ecuación de equilibrio dinámico en sistemas de 1 GLD   | 44   |
| <b>TABLA 2.</b> Datos de la fuerza dinámica para la aplicación de los métodos de numéricos en el caso de estudio 1.   | 103  |
| <b>TABLA 3.</b> Tramos de estudio para la aplicación del método de diferencias centrales para un sistema estructural plano de dos niveles.  | 105  |
| <b>TABLA 4.</b> Resumen de los valores obtenidos aplicando el método de diferencias centrales para un sistema estructural plano de dos niveles.   | 110  |
| <b>TABLA 5.</b> Resumen de los valores obtenidos aplicando el método de Newmark suponiendo comportamiento de la aceleración constante para un sistema estructural plano de dos niveles. | 115  |
| <b>TABLA 6.</b> Resumen de los valores obtenidos aplicando el método de Newmark suponiendo comportamiento de la aceleración lineal para un sistema estructural plano de dos niveles.    | 119  |
| <b>TABLA 7.</b> Tramos de estudio para la aplicación del método de Wilson $\theta$ para el caso de estudio de un sistema estructural plano de dos niveles.                              | 121  |
| <b>TABLA 8.</b> Resumen de los valores obtenidos aplicando el método de Wilson $\theta$ para un sistema estructural plano de dos niveles.   | 126  |
| <b>TABLA 9.</b> Resumen de los valores obtenidos aplicando el método de Houbolt para un sistema estructural plano de dos niveles.   | 132  |
| <b>TABLA 10.</b> Resumen de los resultados obtenidos mediante el cálculo manual y el programa creado.   | 153  |

|   |     |
|---|-----|
| <b>TABLA 11.</b> Resultados de los valores máximos obtenidos mediante la ejecución del programa de cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos y el software SAP 2000. | 155 |
| <b>TABLA 12.</b> Comparación entre resultados obtenidos entre el programa y SAP 2000.   | 171 |

## INTRODUCCION

Uno de los temas que más preocupa a los especialistas estructurales es el diseño de estructuras que sean vulnerables a cargas dinámicas. Estas cargas pueden ser de muchos tipos, siendo el sismo la carga dinámica más importante que puede actuar sobre un sistema estructural y sobre la cual no se tiene control, debido a que ocurre de forma inesperada y durante un tiempo desconocido.

Para el desarrollo de la ingeniería civil existen diversos programas de cálculo estructural, todos estos permiten que los ingenieros plasmen sus ideas en ellos mediante la introducción de un modelo representativo de la realidad, de modo que puedan obtener un correcto diseño. Sin embargo, el uso de estos programas se encuentra limitado a ciertos profesionales y se requieren de conocimientos especiales para ser utilizados. En función a lo anterior, la presente investigación propone la elaboración de un programa de cálculo de propiedades dinámicas de estructuras de fácil uso y acceso a los usuarios.

El objetivo del análisis dinámico de estructuras es intentar predecir de manera aproximada el comportamiento que estas puedan tener en el tiempo, la presente investigación plantea la utilización de métodos numéricos como alternativa de cálculo, de manera tal que la aproximación de este comportamiento sea la más exacta posible.

Se busca que los estudiantes, profesionales con poca, mediana y alta experiencia puedan contar con una herramienta que sea de poca complejidad, didáctica y que proporcione la misma información dinámica que aportan otros programas más avanzados.

La investigación está estructurada por cinco capítulos los cuales se estructuran de la siguiente forma:

El Capítulo I, contiene: Planteamiento del Problema, Formulación del Problema, Objetivos de la investigación, Justificación y Alcances y limitaciones.

En el Capítulo II, se plantea el Marco Teórico como base documental para la realización de la investigación; en este capítulo también se incluyen los antecedentes relacionados con el tema de estudio.

En el Capítulo III se encuentra el Marco Metodológico, el cual comprende el tipo y diseño de investigación, técnica y recolección de datos, procedimiento metodológico, desarrollo del programa, algoritmo de trabajo, instalación del programa, ejecución del programa y validación del programa.

El Capítulo IV está compuesto por los resultados y análisis de resultados, para dar respuesta a los objetivos planteados en esta investigación.

Posteriormente se plantearon las conclusiones y recomendaciones que arrojó el trabajo. Adicionalmente se presentan las referencias bibliográficas consultadas para la realización de la investigación.

## **CAPITULO I**

### **EL PROBLEMA**

#### **1.1. Planteamiento del problema**

Una carga dinámica es aquella que varía su magnitud o dirección con el tiempo. Entre los tipos de cargas o acciones dinámicas que actúan sobre las estructuras se encuentra las originadas por la acción de equipos o maquinarias rotativas, explosiones, la acción del viento y el movimiento sísmico. (Alonso, 2007).

Cuando se somete a una estructura a una carga dinámica, esta presenta un comportamiento dinámico; en el cual se incluye el estudio de fuerzas que son dependientes del tiempo cuando se realiza el análisis y diseño de sistemas que presentan este tipo de cargas.

Por lo general, la respuesta estructural a cualquier carga dinámica es expresada en términos de desplazamiento, velocidad y aceleración de la estructura. A partir de la respuesta estructural se obtienen otras variables como son fuerzas externas y fuerzas internas, necesarias para un adecuado diseño estructural.

De lo anterior, se infiere que la solución al problema dinámico de una estructura se centra en generar modelos cuya solución permita obtener la respuesta estructural del sistema.

Las ecuaciones que definen el movimiento dinámico de una estructura son llamadas ecuaciones de equilibrio dinámico (Wilson, 2002) y relacionan las diferentes fuerzas involucradas en el problema dinámico, por lo que la solución a estas ecuaciones permite obtener la respuesta del sistema. La formulación de estas ecuaciones se obtiene generando modelos matemáticos donde se evidencien las fuerzas que intervienen en el sistema.

El hecho de que la carga y la respuesta del sistema varíen en el tiempo, implica que el problema dinámico no tenga una única solución sino una sucesión de soluciones que corresponden al tiempo en el que se desea conocer la respuesta. Esto hace, que el análisis dinámico sea complejo debido a que las ecuaciones de equilibrio dinámico que dan solución a la respuesta del sistema quedan expresadas en función del tiempo a través de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior. Según la complejidad del sistema estructural que se estudie, la solución a estas ecuaciones puede llegar a ser un complejo problema matemático. Por ello, la solución numérica del problema dinámico ha sido materia de investigación en los últimos años generándose métodos especializados para su solución.

En la actualidad, existen numerosos métodos que dan respuesta al problema dinámico con el uso de complejas técnicas matemáticas. Alguno de estos métodos son: métodos de análisis paso a paso, método de análisis de frecuencia, método de análisis modal, entre otros.

Con el avance creciente de los computadores, el análisis dinámico de estructuras se ha automatizado ampliamente y ha sido posible generar soluciones al problema dinámico a través de métodos cada vez más aproximados y con soluciones más exactas de la respuesta estructural.

Algunos programas actuales de análisis estructural incorporan varios de estos métodos para la realización de análisis dinámico. La mayoría de estos programas realizan los cálculos y reportan la solución sin que se pueda observar los procedimientos y aproximaciones que se incorporan en el mismo.

En atención a lo expuesto, surge la necesidad de elaborar un programa en el cual se puedan aplicar los conocimientos de análisis dinámico, se dé solución a las ecuaciones de equilibrio de forma más didáctica y en el cual el usuario pueda visualizar los cálculos que son realizados en el interior del programa. Para lo cual se plantea la aplicación de los métodos de análisis paso a paso como una alternativa para el estudio de la respuesta de la estructura; y a través de ellos realizar el análisis y solución de las ecuaciones de equilibrio dinámico de sistemas estructurales mediante formulación numérica ajustable a lenguaje de programación.

## **1.2. Formulación del problema**

En base al planteamiento antes descrito surge la siguiente interrogante: ¿Cómo realizar un programa de cálculo que aplique métodos numéricos con el fin de obtener la respuesta de sistemas estructurales en cada instante de tiempo; y por ende la obtención de sus propiedades dinámicas?

### **1.3. Objetivos de la investigación**

#### **1.3.1. Objetivo General**

Diseñar un programa para el cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos.

#### **1.3.2. Objetivos Específicos**

- Identificar los métodos numéricos aplicados al análisis dinámico de estructuras.
- Definir los métodos numéricos a ser utilizados en el diseño del programa de cálculo.
- Desarrollar el programa de cálculo de las propiedades dinámicas de estructuras mediante el uso de métodos numéricos.

### **1.4. Justificación**

El análisis estructural tiene como finalidad estimar el comportamiento de la estructura, previo a su construcción, para garantizar que esta sea capaz de resistir las acciones o cargas a las que va a ser sometida. El comportamiento de la estructura bajo cargas estáticas está ampliamente estudiado, sin embargo el estudio con cargas dinámicas es de gran complejidad y poco manejado por los profesionales en el campo de análisis y diseño estructural. Por tanto, es necesario establecer métodos y herramientas que permitan predecir el comportamiento de una estructura sometida a cargas dinámicas.

Existe una variedad de cargas dinámicas que pueden actuar sobre la estructura; siendo el movimiento sísmico una de las más estudiadas y de más relevancia para el análisis estructural. Para predecir el comportamiento de una estructura ante una acción sísmica el análisis dinámico es de vital importancia. Sin embargo cabe destacar que la acción sísmica no constituye la única carga dinámica a la que puede ser sometida una estructura, es de igual importancia estudiar el comportamiento de esta sometido a una carga dinámica cualquiera. En ambos casos, el estudio del comportamiento de la estructura conlleva a la realización de un análisis dinámico.

El avance tecnológico de los últimos años en programas de cálculo estructural ha permitido resolver el problema dinámico, pero existe la necesidad de reforzar los conocimientos teóricos y conocer como el programa realiza estos análisis, es decir, cual es el método que aplican, cuales son las aproximaciones que realizan, las limitaciones que presentan y los criterios que adopta el programa.

Considerando lo expuesto; el presente trabajo pretende diseñar un programa que permita calcular la respuesta en el tiempo de una estructura sometida a una carga dinámica cualquiera. Este programa constituye una herramienta que será de gran aporte al campo de estudio, debido a que dará principalmente una visión más clara del análisis dinámico de estructuras; además de proporcionar una herramienta moderna e interactiva, de fácil uso tanto para estudiantes como para profesionales en el área.

### **1.5. Alcance y limitaciones**

El presente trabajo consiste en la elaboración de un programa para el cálculo de propiedades dinámicas de estructuras bajo comportamiento elástico basado en los métodos de análisis paso a paso, utilizando la herramienta GUIDE disponible en el lenguaje de programación MATriz LABORatory (MATLAB). Considerando que este es un lenguaje de alto rendimiento para cálculos relacionados con el manejo de matrices y vectores, y que posee herramientas de cálculo numérico aplicables a la solución de las ecuaciones de equilibrio dinámico.

Se considerara como variables de entrada del programa que se conocen las condiciones geométricas del sistema, condiciones de apoyo, matriz de rigidez, matriz de amortiguación, matriz de masas y todas aquellas variables necesarias para la solución de las ecuaciones de equilibrio dinámico. De esta forma el uso del programa estará limitado a la solución de las ecuaciones de equilibrio dinámico y a la representación gráfica de la solución obtenida, por lo que no constituye un programa completo de análisis dinámico sino más bien una herramienta para estudios posteriores.

## CAPITULO II

### MARCO TEORICO

#### 2.1. Antecedentes

En el área relacionada con los algoritmos de cálculo en análisis dinámico existen algunas investigaciones realizadas en años anteriores que sirven como base para este trabajo:

- Wilson, E. (2008) realizó un programa educacional denominado **Computer Assisted Learning of Structural Analysis Procedures (CAL-SAP)** con la finalidad de ayudar a sus alumnos a comprender los métodos tradicionales de análisis estructural y fomentar la aplicación de estos mediante algoritmos de cálculo. Dicho programa consta de un lenguaje de comandos para el manejo y realización de operaciones con matrices, que permiten generar algoritmos para el análisis estático y dinámico de estructuras mediante un enfoque de análisis matricial. La relación con el presente trabajo de grado resulta obvia, pues el programa mencionado presenta un importante material de apoyo para el enfoque computacional a los métodos de análisis dinámico.

- El profesor Ing. Fernando Villalobos (2003) en su trabajo de ascenso titulado **“Análisis dinámico de estructuras. Formulación de los métodos de análisis y su aplicación al computador”** desarrolla la teoría y metodología necesaria para el estudio del problema de análisis dinámico, enfocando su estudio a la aplicación en el computador. Este trabajo antes expuesto resultó ser la fuente de inspiración para la realización del presente trabajo de grado, debido a que en él se encuentra una presentación simplificada de los métodos numéricos más comunes y la esquematización de su formulación matemática; sin embargo, no presenta la formulación en un lenguaje de programación específico con la que se pueda aplicar los métodos.
- En el artículo presentado por Jazni, J; Nieto, M. y Salomone, E. (2002) titulado **Metodología para el cálculo dinámico de estructuras** en la Revista Mecánica Computacional. Vol. XX; se plantea una metodología desarrollada utilizando la Transformada de Laplace y como herramienta de cálculo MATLAB, permite encontrar las amplitudes de oscilación de los distintos niveles en estructuras con múltiples grados de libertad, teniendo en cuenta su amortiguamiento estructural, cuando es solicitada sinusoidalmente desde su fundación. Este trabajo de grado también pretende utilizar como herramienta de cálculo MATLAB; sin embargo, se plantea una metodología para el cálculo dinámico mediante un método matemático diferente al utilizado en el artículo mencionado.

## **2.2. Bases Teóricas**

### **2.2.1. Fundamentos del análisis dinámico**

El análisis dinámico se define como el estudio de las características y el comportamiento de las estructuras sometidas a cargas dinámicas. Una carga dinámica puede definirse como cualquier carga que varía de magnitud o dirección en el tiempo, por ejemplo cargas externas aplicadas en los miembros de la estructura como el viento, vibraciones por explosiones, cimentación de máquinas y cargas externas aplicadas en su base como los sismos; siendo esta última la excitación dinámica más estudiada por su importancia en el diseño sismoresistentes de estructuras.

Las ecuaciones que definen el movimiento dinámico de una estructura son llamadas ecuaciones de equilibrio dinámico o ecuaciones de movimiento y relacionan las diferentes fuerzas involucradas en el problema dinámico, por lo que la solución a estas ecuaciones permite obtener la respuesta del sistema, objeto de estudio principal del análisis dinámico.

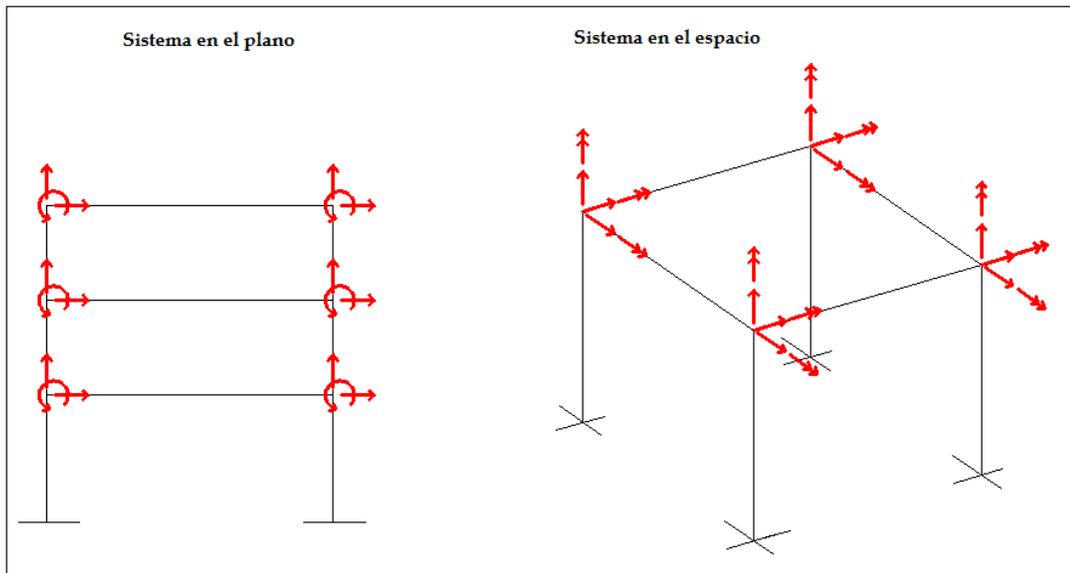
Antes de plantear las ecuaciones de equilibrio dinámico es importante conocer algunos conceptos básicos, los cuales se presentan a continuación:

#### Grados de libertad dinámicos

Los grados de libertad (GL) de una estructura se definen como el número mínimo de coordenadas necesarias para describir la configuración deformada de la estructura. Estos pueden ser ciertos desplazamientos y rotaciones en diversos puntos preseleccionados de la estructura denominados juntas o nodos. Una estructura puede tener infinitos grados de libertad pero se considera que estos se concentran en las juntas y es a través de estas que se puede conocer la posición de

la estructura deformada, de esta forma se obtiene un número discreto de grados de libertad.

La Fig.1 muestra los grados de libertad de sistemas estructurales planos y espaciales en los que los elementos se interconectan en sus extremos; como se puede observar en un sistema plano cada junta posee 3 GL y un sistema en el espacio cada junta posee 6 GL.



**Fig. 1. Grados de libertad en sistemas estructurales.**

*Fuente:* Di Benedetto y Segovia.

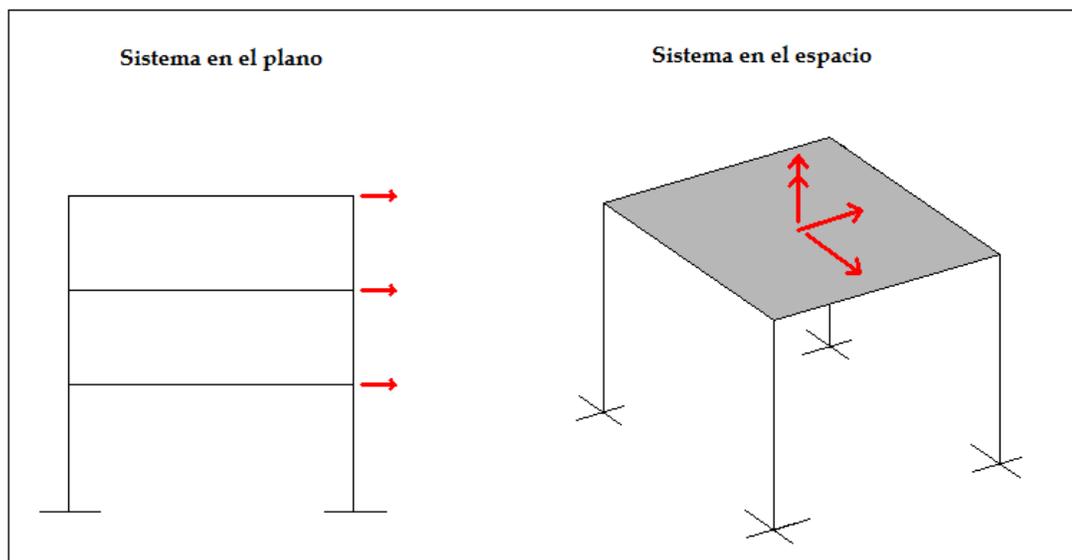
Ahora bien, desde el punto de vista dinámico interesan los grados de libertad dinámicos (GLD), estos son los grados de libertad en los que se generan las fuerzas de inercia, es decir fuerzas iguales a masa por aceleración.

Existen diferentes enfoques de cómo definir los grados de libertad dinámicos de una estructura y se basan principalmente en ciertas suposiciones sobre las

posibilidades de deformación de la estructura. Un enfoque comúnmente usado es considerar las siguientes hipótesis:

- La masa de la estructura está concentrada en los sistemas de piso, por lo que se desprecia la masa de las columnas que unen los pisos y otros elementos.
- Las vigas en los pisos son infinitamente rígidas en comparación con las columnas.
- Las deformaciones de los pisos en su plano son despreciables.

Mediante este enfoque se obtienen sistemas planos con 1 GLD por piso y sistemas espaciales con 3 GLD por piso. En la Fig.2 se presenta los sistemas estructurales de la Fig.1 representando sus respectivos GLD de acuerdo al enfoque planteado.



**Fig.2 Grados de libertad dinámicos en sistemas estructurales.**

*Fuente:* Di Benedetto y Segovia.

La escogencia de los grados de libertad de la estructura influye altamente en la forma de las ecuaciones de equilibrio dinámico, ya que de acuerdo a estos

quedará determinado el tamaño de las matrices de rigidez, masa y amortiguamiento del sistema.

### Matriz de masa

La matriz de masa de la estructura se puede obtener mediante dos métodos: método de masa concentrada y método de masa consistente. El método de masa concentrada en su enfoque más general consiste en distribuir la masa de cada elemento a los nodos. El método de masa consistente propone un procedimiento más complejo en el que se toma en cuenta la distribución de la masa a lo largo de los elementos.

Cualquiera que sea el método empleado para su obtención la matriz de masa será de orden  $N \times N$ , siendo  $N$  el número de grados de libertad definidos.

El procedimiento de los métodos aplicados para la obtención de la matriz de masa no es objeto de estudio del presente trabajo de grado y para efectos del diseño del programa se considera que ha sido obtenida previamente por cualquiera de ellos.

### Matriz de rigidez

Respecto la matriz de rigidez Alonso (2007) menciona lo siguiente:

La matriz de rigidez total de la estructura es una matriz de orden  $N \times N$ , siendo  $N$  el número de grados de libertad de la estructura. En ella el coeficiente  $k_{ij}$  representa la fuerza generada según la dirección de la coordenada generalizada  $i$  cuando se le imparte al sistema un desplazamiento unitario según la dirección de la coordenada generalizada  $o$  grado de libertad  $j$  y el resto de los desplazamientos es igual a cero.

El tamaño de la matriz de rigidez depende de las limitaciones de desplazabilidad del sistema. Para el caso de análisis dinámico la matriz de rigidez

tendrá un tamaño relacionado con los grados de libertad dinámicos. Esta se puede obtener considerando todos los grados de libertad posibles y luego mediante condensación estática se reduce su tamaño de acuerdo a los grados de libertad dinámicos; o por el contrario se puede deducir considerando desde un inicio las hipótesis de deformación de los miembros de la estructura.

### Matriz de amortiguamiento

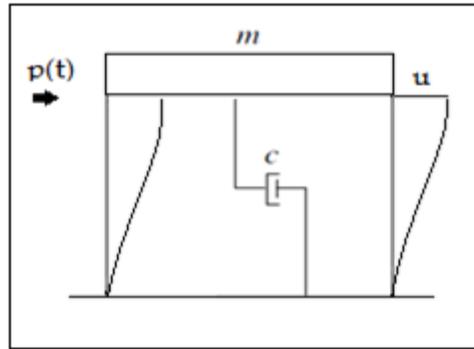
Sobre la matriz de amortiguamiento (Paz, 1992) establece lo siguiente:

Los elementos de la matriz de amortiguamiento son definidos de forma similar a los elementos de la matriz de rigidez y masa, de tal forma, el elemento  $C_{ij}$  de la matriz, se define como la fuerza en la coordenada del nodo  $i$ , debida una velocidad de valor uno en la coordenada  $j$ . La amortiguación es generalmente expresada mediante razones de amortiguación, que se obtienen experimentalmente y no mediante un cálculo directo de cada elemento en donde se tome en cuenta la variación de la amortiguación a lo largo de los miembros de la estructura.

Una vez establecido estos conceptos básicos se procede entonces a plantear las ecuaciones equilibrio dinámico, para lo cual en primer lugar se formulan para un sistema lineal de un grado de libertad y luego en base a esto para un sistema lineal de varios grados de libertad.

### Sistema lineal de un grado de libertad

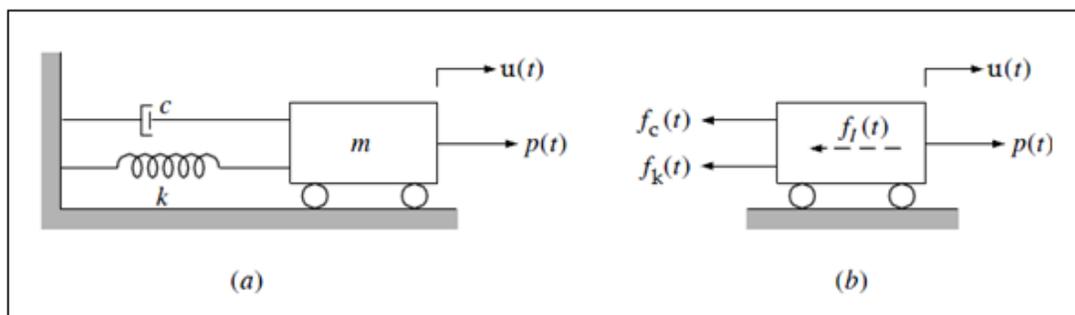
Consideremos un sistema estructural plano como el que se muestra en la Fig.3, constituido por una masa concentrada en un piso que se encuentra ligada al terreno mediante dos columnas elásticas y un amortiguador; y que se encuentra sometida a una fuerza dinámica  $p(t)$ .



**Fig. 3 Sistema estructural plano de 1 GLD.**

*Fuente:* Di Benedetto y Segovia (2011).

Este sistema de un grado de libertad; definido por el desplazamiento  $u$ , puede ser representado mediante un modelo clásico de mecánica de partículas como se presenta en la Fig.4a. La ecuación de movimiento o de equilibrio dinámico para este modelo considerando las fuerzas actuantes mostradas en la Fig.4b es fácilmente formulada expresando directamente el equilibrio de todas las fuerzas actuantes sobre la masa usando el principio D'Alembert.



**Fig. 4 Modelo idealizado de un sistema de un grado de libertad.**

**(a) Idealización del sistema (b) Fuerzas actuantes.**

*Fuente:* Adaptado de Clough y Penzien (2003).

Como se observa en la Fig.4b las fuerzas actuando en la dirección del grado de libertad son la carga  $p(t)$  aplicada y las tres fuerzas resistentes producidas por el movimiento; estas son las fuerzas inerciales  $f_i(t)$ , las fuerzas de amortiguamiento  $f_c(t)$  y las fuerzas de restitución o elásticas  $f_k(t)$ . La ecuación de movimiento se obtiene entonces como el equilibrio de estas fuerzas mediante la siguiente expresión:

$$f_i(t) + f_c(t) + f_k(t) = p(t)$$

Ec. 2-1

De acuerdo al principio D'Alembert la fuerza inercial es el producto de la masa por la aceleración:

$$f_i(t) = m * \ddot{u}(t)$$

Ec. 2-2

Asumiendo un amortiguamiento viscoso, la fuerza de amortiguación es el producto del coeficiente de amortiguación por la velocidad:

$$f_c(t) = c * \dot{u}(t)$$

Ec. 2-3

Finalmente, la fuerza elástica es el producto de la rigidez por el desplazamiento:

$$f_k(t) = k * u(t)$$

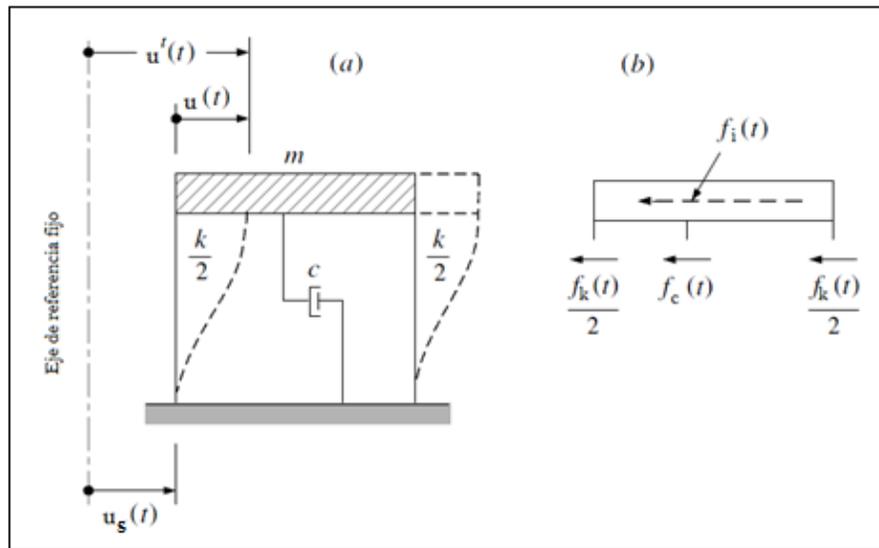
Ec.2-4

Al sustituir los valores de cada fuerza en la Ec.2-1 la ecuación de movimiento del sistema lineal de un grado de libertad queda de la siguiente forma:

$$m * \ddot{u}(t) + c * \dot{u}(t) + k * u(t) = p(t)$$

Ec.2-5

La ecuación de equilibrio dinámico previamente obtenida se dedujo considerando una fuerza externa dinámica aplicada en el piso donde se encontraba la masa concentrada, pero las solicitaciones en una estructura también pueden ser inducidas por un movimiento de su base; este movimiento puede ser producido por un sismo. En la Fig.5 se muestra el mismo sistema estructural antes estudiado pero sometido a una excitación dinámica en su base, en el cual el movimiento horizontal del suelo producido por el sismo se encuentra representado por el desplazamiento  $u_s(t)$  relativo a un eje fijo de referencia de la base de la estructura.



**Fig. 5 Influencia de una excitación en la base en un sistema de un grado de libertad.**

**(a) Sistema estructural con movimiento en la base (b) Fuerzas actuantes.**

*Fuente:* Adaptado de Clough y Penzien (2003).

Las fuerzas que actúan en el sistema pueden ser expresadas por una modificación de la Ec.2-1 igualándola a cero, quedando la siguiente expresión:

$$f_i(t) + f_c(t) + f_k(t) = 0$$

Ec. 2-6

La fuerza elástica y de amortiguamiento se expresan de la misma forma que se mencionó anteriormente, sin embargo la fuerza de inercial en este caso viene dada por:

$$f_i(t) = m * \ddot{u}^t(t)$$

Ec.2-7

Donde  $u^t(t)$  representa el desplazamiento total de la masa desde el eje fijo de referencia. Sustituyendo cada una de las fuerzas en la Ec.1-6 resulta:

$$m * \ddot{u}^t(t) + c * \dot{u}(t) + k * u(t) = 0$$

Ec. 2-8

Para poder resolver esta ecuación, todas las fuerzas deben estar expresadas en términos de una sola variable, lo cual se puede lograr expresando el desplazamiento total de la base como la suma del movimiento producido en la base más el producido por la distorsión de la columna:

$$u^t(t) = u(t) + u_s(t)$$

Ec. 2-9

Expresando la fuerza de inercia en función de las dos componentes de aceleración que se pueden obtener por una doble diferenciación de la Ec.2-9 y sustituyéndola en la Ec.2-8:

$$m * \ddot{u}(t) + m * \ddot{u}_s(t) + c * \dot{u}(t) + k * u(t) = 0$$

Ec. 2-10

Como la aceleración del suelo representa la carga dinámica impuesta a la estructura, la misma ecuación de movimiento puede ser escrita como:

$$m * \ddot{u}(t) + c * \dot{u}(t) + k * u(t) = -m * \ddot{u}_s(t)$$

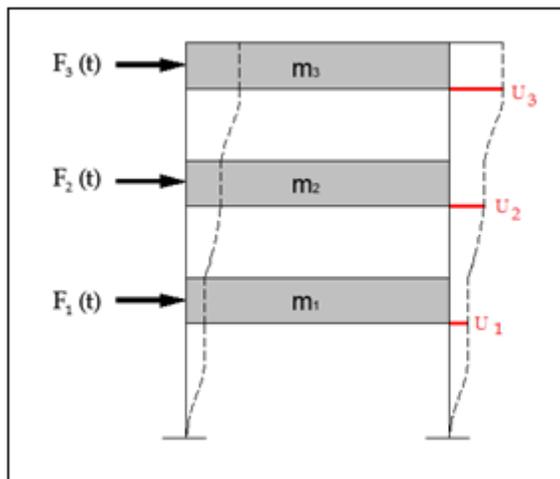
Ec. 2-11

Se puede observar que las deformaciones que se generan en la estructura debido a un movimiento de su base es equivalente a la producida por una fuerza externa  $p(t)$  igual a  $-m \cdot \ddot{u}_s(t)$ .

La respuesta del sistema se podrá obtener con la resolución de la ecuación de movimiento mediante diferentes métodos de acuerdo a la naturaleza de la carga aplicada, sobre esto se profundizará más adelante.

### Sistema lineal de varios grados de libertad

Para la formulación de la ecuación de movimiento o equilibrio dinámico de un sistema lineal de varios grados de libertad nos referiremos al sistema mostrado en la Fig.6.



*Figura. 6 Sistema en el plano de varios Grados de Libertad.*

Fuente: Di Benedetto y Segovia.

En este sistema se tiene un grado de libertad por piso representado por  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$ .

Para cada grado de libertad se puede definir la ecuación de movimiento de igual manera como se definió para un sistema de 1 GL, realizando esto se tiene:

$$\begin{aligned} fi_1(t) + fc_1(t) + fk_1(t) &= p_1(t) \\ fi_2(t) + fc_2(t) + fk_2(t) &= p_2(t) \\ fi_3(t) + fc_3(t) + fk_3(t) &= p_1(t) \end{aligned}$$

Ec.2-12

Las ecuaciones anteriores pueden ser escritas en forma vectorial según la siguiente expresión simplificada:

$$\{F_i(t)\} + \{F_c(t)\} + \{F_k(t)\} = \{P(t)\}$$

Ec.2-13

Cada uno de los vectores de fuerzas resistentes se expresa en base a las definiciones realizadas para un sistema de 1 grado de libertad, sin embargo los parámetros de masa, rigidez y amortiguación no son únicos sino un conjunto valores que se relacionan con cada uno de los grados de libertad. Para ilustrar esto tomemos por ejemplo la fuerza elástica para el grado de libertad 1:

$$fk_1 = k_{11} * u_1 + k_{12} * u_2 + k_{13} * u_3$$

Ec.2-14

De forma similar la fuerza elástica para el grado de libertad 2:

$$fk_2 = k_{21} * u_1 + k_{22} * u_2 + k_{23} * u_3$$

Ec.2-15

En forma general:

$$fk_i = k_{i1} * u_1 + k_{i2} * u_2 + k_{i3} * u_3$$

Ec.2-16

Luego el vector de fuerzas elásticas se expresa como:

$$F_k = \begin{Bmatrix} Fk_1 \\ Fk_2 \\ Fk_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Ec.2-17

Donde cada  $k_{ij}$  representa un elemento de la matriz de rigidez de la estructura definida anteriormente y se denominan coeficientes de rigidez.

Análogamente, el vector de fuerzas de amortiguación puede ser expresado como:

$$F_c = \begin{Bmatrix} Fc_1 \\ Fc_2 \\ Fc_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Ec.2-18

Donde cada  $c_{ij}$  representa un elemento de la matriz de amortiguación de la estructura definida anteriormente y se denominan coeficientes de amortiguación.

De forma similar, el vector de fuerzas inerciales se expresa de la siguiente forma:

$$F_i = \begin{Bmatrix} Fi_1 \\ Fi_2 \\ Fi_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix}$$

Ec.2-19

Donde cada  $m_{ij}$  representa un elemento de la matriz de masa de la estructura definida anteriormente y se denominan coeficientes de masa.

Por último, el vector de fuerzas aplicadas:

$$P(t) = \begin{Bmatrix} p(t)_1 \\ p(t)_2 \\ p(t)_3 \end{Bmatrix}$$

Ec.2-20

Sustituyendo la expresión de cada uno de los vectores de fuerzas en la Ec.2-13 queda:

$$[M] * \{\ddot{u}(t)\} + [C] * \{\dot{u}(t)\} + [K] * \{u(t)\} = \{P(t)\}$$

Ec.2-21

La Ec.2-21 representa la ecuación de movimiento de un sistema de varios grados de libertad, donde [M] es la matriz de masa de la estructura, [C] es la matriz de amortiguamiento de la estructura y [K] la matriz de rigidez de la estructura de acuerdo a los grados de libertad dinámicos definidos.

Cabe destacar que al considerar una estructura tridimensional las ecuaciones de movimiento tienen esencialmente la misma forma de la Ec.2 -21, sin embargo las matrices de masas, rigideces y amortiguamiento contienen muchos más elementos que las de un sistema plano; el tamaño de las mismas estará relacionado con los grados de libertad dinámicos definidos en la estructura.

### 2.2.2. Solución a la ecuación de equilibrio dinámico

La ecuación de movimiento para un sistema de 1 GLD consiste en una ecuación diferencial cuya resolución permite obtener el desplazamiento  $u(t)$ ; a través del cual mediante diferenciación de la expresión obtenida se puede obtener la velocidad y la aceleración del sistema. Cualquiera de estos tres parámetros corresponde a la respuesta dinámica del sistema en el tiempo. Al estudiar esta ecuación se observa que corresponde a una ecuación diferencial lineal de orden

superior cuya solución puede ser obtenida por teoría de ecuaciones diferenciales. La solución de esta ecuación depende de las características de las condiciones en las que se encuentre el sistema.

Por ejemplo, considerando el sistema de 1 GLD sin la acción de la fuerza externa y sin amortiguación, condición que se conoce como vibración libre, la ecuación de movimiento queda expresada de la siguiente forma:

$$m * \ddot{u}(t) + k * u(t) = 0$$

Ec.2-22

La ecuación obtenida es caracterizada como una ecuación diferencial homogénea cuya solución puede expresarse mediante la Ec.2 -23; esta ecuación describe el movimiento del sistema en el tiempo.

$$u(t) = u_o * \text{Cos}(\omega t) + \frac{\dot{u}_o}{\omega} * \text{Sen}(\omega t)$$

Ec.2-23

$$\omega = \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Ec.2-24

Donde  $\omega$  se conoce como la frecuencia circular o angular del sistema y a partir de esta se obtiene dos propiedades dinámicas muy importantes de un sistema estructural, las cuales son periodo y frecuencia. Conviene entonces definir que representa el periodo y frecuencia de un sistema.

### Periodo

El movimiento definido por la Ec.2-23 es un movimiento armónico, todo movimiento de este tipo presenta un periodo, el cual no es más que el tiempo que debe transcurrir para que el sistema cumpla un ciclo. El periodo del movimiento del

sistema, expresado en segundos, se puede obtener a través de la frecuencia angular  $\omega$  de la siguiente forma:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Ec.2-25

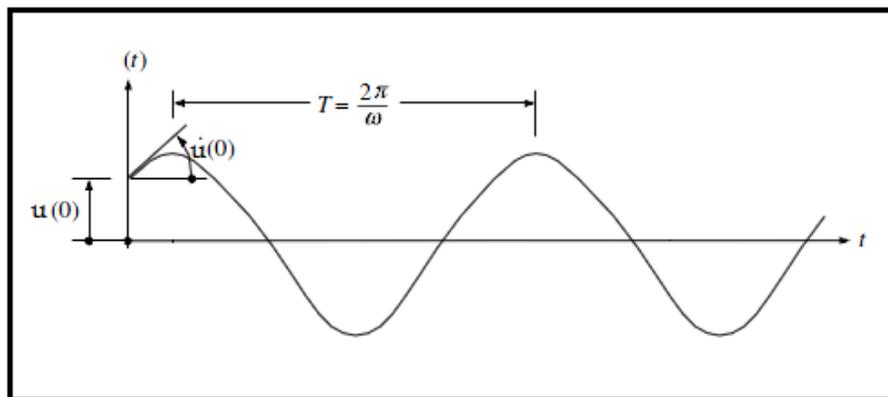
### Frecuencia

La frecuencia del sistema corresponde al número de ciclos completados en una unidad de tiempo. Se obtiene como el inverso del periodo y se expresa en ciclos por segundo.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Ec.2-26

La respuesta del sistema estudiado puede representarse gráficamente según la Fig.7:



**Figura. 7** Respuesta de un sistema en vibración libre sin amortiguación

*Fuente:* Adaptado de Clough y Penzien (2003).

De manera similar, se puede obtener la solución a la ecuación de movimiento de un sistema de un 1 GLD aplicando teoría de ecuaciones diferenciales a sistemas con diferentes condiciones como vibración libre con amortiguamiento, vibración forzada sin amortiguamiento y vibración forzada con amortiguamiento.

En vibración forzada, cuando el sistema es sometido a una carga dinámica, de acuerdo a la naturaleza de la carga ya sea armónica, periódica o impulsiva existen diferentes métodos que permiten facilitar el cálculo de la respuesta, pero en general consisten en resolver la ecuación diferencial aplicando el enfoque previamente planteado. La solución en vibraciones forzadas se obtiene en general mediante la siguiente expresión:

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t)$$

Ec.2 -27

Donde:

$u_c(t)$  : corresponde a la solución complementaria; se obtiene de la solución ecuación diferencial homogénea en vibración libre.

$u_p(t)$ : Corresponde a la solución particular de la ecuación diferencial y está directamente relacionada con la naturaleza de la carga aplicada.

La tabla 1 ilustra algunos métodos comúnmente utilizados en la solución de la ecuación de movimiento según la condición del sistema.

**Tabla 1***Métodos para la solución de la ecuación de equilibrio dinámico en sistemas de 1 GLD*

| <b>Tipo de Vibración</b> | <b>Condición del sistema</b>                          | <b>Método</b>   |
|--------------------------|---|---|
| Vibración Libre          | Sistema sin amortiguación                             | Teoría clásica de ecuaciones diferenciales.   |
|                          | Sistema Sub-amortiguado                               | Teoría clásica de ecuaciones diferenciales.   |
|                          | Sistema Sobre amortiguado                             | Teoría clásica de ecuaciones diferenciales.   |
|                          | Sistema críticamente amortiguado                      | Teoría clásica de ecuaciones diferenciales.   |
| Vibración Forzada        | Carga Armónica<br>Sist. Amortiguado y no amortiguado. | Teoría clásica de ecuaciones diferenciales. La solución complementaria depende de la condición de amortiguación. La solución particular se obtiene mediante una solución que cumpla con la naturaleza de la carga.  |
|                          | Carga Periódica<br>Sist. Amortiguado y no amortiguado | Teoría clásica de ecuaciones diferenciales, transformando la carga en armónica mediante Series de Fourier.  |
|                          | Carga Impulsiva<br>Constante Rectangular, Triangular  | Teoría clásica de ecuaciones diferenciales. La solución complementaria depende de la condición de amortiguación. La solución particular se obtiene mediante una solución que cumpla con la naturaleza de la carga.  |
|                          | Carga Dinámica General                                | Análisis a través del dominio del tiempo. Se aplica la integral de Duhamel. La respuesta en el tiempo se obtiene por integración de la fuerza aplicada. Una carga impulsiva puede ser considerada una carga dinámica general y su solución se puede obtener por la integral de Duhamel. |

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

En el caso de cargas que no presenten expresiones analíticas se hace necesario resolver la ecuación para diferentes instantes de tiempo, y la respuesta del sistema se obtiene como una sucesión de soluciones que pueden ser representadas en una gráfica Respuesta vs Tiempo.

Cuando se trata de sistemas con varios grados de libertad resolver la ecuación de ecuación de equilibrio dinámico aplicando el enfoque antes planteado para sistemas de 1 GLD constituye un procedimiento complejo y laborioso, ya que

obtener la respuesta del sistema se transforma en la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales; que en el caso de cargas sin expresión analítica se deben resolver para diferentes instantes de tiempo. Se requiere por lo tanto la aplicación de otros métodos que permitan obtener de manera óptima la solución de los sistemas de ecuaciones diferenciales que se generan en el análisis dinámico.

Existen numerosos métodos que facilitan la solución a sistemas de ecuaciones diferenciales para sistemas de varios grados de libertad dinámicos algunos de ellos son:

- Métodos de integración directa.
- Método de Newmark.
- Método de Wilson  $\theta$ .
- Método de Houbolt.
- Método de superposición modal.

Los primeros 4 métodos mencionados se caracterizan por obtener la respuesta del sistema manteniendo las ecuaciones de movimiento acopladas, por el contrario el método de superposición modal obtiene la respuesta del sistema desacoplando las ecuaciones de movimiento que luego son combinadas para obtener la respuesta en el tiempo.

### **2.2.3. Fundamentos matemáticos de los métodos numéricos**

Para la resolución matemática de la mayoría de los problemas de la ingeniería es necesario establecer un modelo matemático que permita obtener ecuaciones que describan el comportamiento físico de la situación que se desea estudiar para luego establecer métodos matemáticos que permitan obtener una

solución numérica del problema. Un enfoque para obtener esta solución es la utilización de métodos numéricos.

Al respecto Izar (1998) establece que los métodos numéricos son procedimientos para calcular incógnitas o variables dependientes que resultan de aplicar las teorías de la ingeniería y las matemáticas a casos prácticos y que en ocasiones no pueden obtenerse por métodos basados en técnicas analíticas exclusivamente.

Un procedimiento esencial de los métodos numéricos consiste en reducir el problema matemático a uno de dimensión finita, es decir, discretizar el problema desde un principio en un número finito de puntos de estudio; de esta forma a cada uno de los puntos se le aplican un conjunto de operaciones algebraicas y lógicas que permiten resolver el problema planteado; a este conjunto de operaciones se le conocen como algoritmo de cálculo.

Por consiguiente, al discretizar el problema se obtiene una sucesión de valores como aproximación de la solución real, donde cada valor representa un punto de estudio. Se requiere por tanto establecer la forma en cómo se va a predecir la solución en cada punto de estudio. De manera general, se busca aplicar procedimientos que permitan partir de un punto de estudio inicial para predecir un punto de estudio posterior, y así sucesivamente obtener el conjunto de valores de la solución. La distancia entre cada punto define el tamaño del intervalo de estudio.

Los procedimientos y técnicas matemáticas que se aplican en los métodos numéricos son numerosos, pero en general el enfoque para obtener la solución se puede clasificar en explícito e implícito. El primero no necesita información del punto de estudio posterior para predecir su comportamiento, en el segundo se utiliza información del punto de estudio posterior para predecir su comportamiento, por lo que para obtener la solución se deben realizar iteraciones.

Puesto que la que la solución que se obtiene es aproximada se introducen ciertos errores numéricos, estos son:

- Errores de método o errores de truncamiento: Son errores causados por las limitaciones de los algoritmos de cálculo del método. El error por truncamiento se produce en cada intervalo de estudio y se puede reducir utilizando intervalos de estudio más pequeños.
- Errores por redondeo: Este error se introduce a la solución cuando se realizan redondeos para trabajar con un límite de dígitos en los números. El error por redondeo aumenta cuando se realizan operaciones con valores muy parecidos entre si, por lo que cuando se utilizan tamaños muy pequeños de intervalos de estudio este aumenta considerablemente.

Además de los errores numéricos, la utilización de un procedimiento aproximado conlleva a tomar en cuenta otros factores para conocer la calidad del método. El primero de estos factores corresponde a la estabilidad numérica del método y el segundo es la convergencia del método.

Estabilidad numérica: Se refiere a la forma en cómo se propagan los errores a través del algoritmo de cálculo. Si los errores no crecen o crecen poco, entonces el algoritmo es estable; de lo contrario si estos aumentan con cada intervalo de estudio el método es inestable y produce soluciones que no son muy aproximadas a la real. Cabe considerar que los métodos implícitos pueden ser incondicionalmente estables o condicionalmente estables, y su estabilidad depende del tamaño del intervalo de estudio. Por otro lado, los métodos explícitos son condicionalmente estables, lo cual implica que el tamaño del intervalo de estudio está limitado, y debe ser menor a un tamaño crítico de lo contrario la solución se torna inestable.

Convergencia: Se refiere a como la solución numérica converge hacia la solución exacta a medida que se calculan mas intervalos de estudio. Esta característica depende de la estabilidad del método y de los errores por aproximación, y afecta directamente la calidad de la solución numérica a obtener.

#### **2.2.4. Caracterización de los métodos numéricos aplicados a la solución del problema dinámico.**

En el caso del problema dinámico de estructuras, las ecuaciones que representan su movimiento vienen dadas por ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden superior (EDO). En sistemas de un grado de libertad el movimiento es representado por una única ecuación diferencial y en sistemas de más de un grado de libertad dinámico, se demostró que la solución al problema viene dado por la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales, sin embargo el conjunto de ecuaciones que lo conforman tienen iguales características a las de un grado de libertad dinámico, es por esto que se la formulación para su solución se plantea inicialmente considerando solucionar la ecuación de movimiento para un grado de libertad dinámico.

La ecuación diferencial que representa el movimiento de un sistema dinámico es ordinaria pues depende de una sola variable, la cual es el tiempo. Dicha ecuación se considera que es lineal porque la variable dependiente y sus derivadas aparecen en combinaciones aditivas de sus potencias, además es de orden superior porque presenta derivadas de orden mayor a uno. La ecuación que se plantea resolver es la siguiente:

$$m * \ddot{u}(t) + c * \dot{u}(t) + k * u(t) = p(t)$$

Ec.2-28

La solución a esta ecuación viene dada por una expresión que cumple las siguientes condiciones:

$$\frac{d u}{d t} = f(t, u)$$

Ec.2-29

Además se considera que se conocen las condiciones iniciales del sistema, escrito como:

$$u(t_0) = u_0$$

Ec.2 -30

Un problema con estas características se conoce como problema del valor inicial, y consiste en resolver la ecuación diferencial que satisface la condición inicial dada. Debido a la complejidad de la ecuación diferencial inicial que se desea resolver, los métodos analíticos comúnmente utilizados en la teoría de ecuaciones diferenciales no son óptimos para su solución, es por esto que se plantea el uso de métodos numéricos.

Los métodos numéricos utilizados para obtener la solución del problema dinámico son métodos de integración numérica, donde lo que se busca es establecer procedimientos que permitan obtener mediante este tipo de integración la solución ecuación diferencial.

Uno de los métodos para la solución del problema del valor inicial es el método de Euler, este establece un procedimiento mediante el cual se obtienen aproximaciones a la solución del problema del valor inicial. El método consiste en lo siguiente:

1. Se parte de un punto inicial  $(t_0, u_0)$ .
2. Se sigue una línea recta con pendiente  $f(t_0, u_0)$ , hasta una cierta distancia  $(t_1, u_1)$ . La distancia existente entre estos punto se conoce como tamaño del paso ( $\Delta t$ ), por lo general se define igual durante todo el procedimiento.
3. Se cambia el valor de la pendiente por el valor  $f(t_1, u_1)$  y se sigue con la recta hasta  $(t_2, u_2)$ , y así sucesivamente.

El procedimiento se puede resumir mediante las siguientes fórmulas:

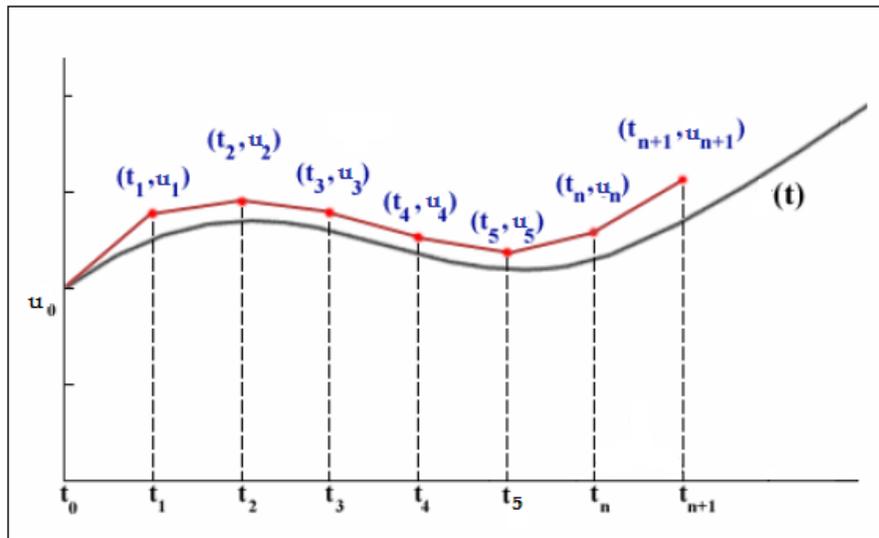
$$t_{n+1} = t_n + \Delta t$$

Ec.2-31

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t * f(t_n, u_n)$$

Ec.2-32

Gráficamente se puede observar el procedimiento en la Fig.8:



**Fig. 8 Aproximación por el método de Euler.**

*Fuente: Undurraga y Venegas (2006).*

De esta forma se construye aproximaciones poligonales de la solución. Al tomar espacios de intervalos menores se espera obtener soluciones más aproximadas a la verdadera. Este método es uno de los más sencillos debido a su poca complejidad, sin embargo, presenta grandes errores por redondeo.

Otro método utilizado para resolver el problema del valor inicial es el método de Taylor. El método se basa principalmente en el uso de la serie de Taylor, para esto se plantea  $u(t)$  como la solución exacta del problema y se desarrolla la serie de Taylor en torno al instante de tiempo  $t_n$ .

$$u(t_n + \Delta t) = u(t_n) + \Delta t * \dot{u}(t_n) + \frac{\Delta t^2}{2!} * \ddot{u}(t_n) + \frac{\Delta t^3}{3!} * \dddot{u}(t_n) + \dots + \frac{\Delta t^p}{p!} * u^{(p)}(t_n)$$

Ec.2-33

En función de la Ec. 2-33 se puede reescribir la expresión de la serie de Taylor de la siguiente forma:

$$u(t_n + \Delta t) = u(t_n) + \Delta t * f(t_n, u_n) + \frac{\Delta t^2}{2!} * f_2(t_n, u_n) + \dots + \frac{\Delta t^p}{p!} * f_p(t_n, u_n)$$

Ec.2-34

A través de la Ec.2-34 se puede obtener una solución aproximada de la respuesta del sistema  $u(t)$ , pero es necesario para su solución plantear algún tipo de cálculo para la función de aproximación  $f$  y sus correspondientes derivadas.

Se observa entonces que en ambos métodos, Euler y Taylor, es necesario establecer una función de aproximación  $f$  que defina el comportamiento que se desea asumir para su solución. En consecuencia, el objetivo de los métodos numéricos para la solución del problema dinámico es establecer el comportamiento con el que se va a aproximar la solución.

En resumen, los métodos numéricos que se utilizan para la solución del problema dinámico tienen como característica común dividir la respuesta en una secuencia de intervalos. La respuesta del sistema es calculada en cada intervalo de tiempo en función de las condiciones iniciales para ese intervalo. De esta forma, se obtiene la respuesta del sistema en el tiempo como la contribución de la respuesta calculada para cada intervalo de tiempo.

### 2.2.5. Métodos de integración directa

El enfoque de los métodos de integración directa es obtener los valores de respuesta directamente de las ecuaciones de movimiento sin realizar ninguna transformación previa. Cabe destacar que el parámetro para la respuesta que se desea calcular principalmente es el desplazamiento, ya que a través de este se puede obtener los valores de velocidad y de aceleración.

El cálculo se basa en evaluar la ecuación de equilibrio dinámico para varios grados de libertad en el instante de tiempo  $t_0$ :

$$[M] * \{\ddot{u}_{t_0}\} + [C] * \{\dot{u}_{t_0}\} + [K] * \{u_{t_0}\} = \{P_{t_0}\}$$

Ec.2-35

Despejando la aceleración:

$$[M] * \{\ddot{u}_{t_0}\} = \{P_{t_0}\} - \{[C] * \{\dot{u}_{t_0}\} + [K] * \{u_{t_0}\}\}$$

Ec.2-36

Luego para formular el procedimiento numérico se busca establecer expresiones que permitan relacionar la condición en el instante de tiempo  $t_0$  con las

condiciones al final de un intervalo de tiempo  $\Delta t$ . La forma como se establezcan las expresiones que relacionen estas variables define el método de integración.

### 2.2.6. Método de las diferencias centrales

Un método por diferencias finitas busca expresar los valores de una variable en función de un valor inicial y un valor final. El método por diferencias centrales plantea obtener la aceleración despejada en la Ec.2 -36 mediante diferencias finitas, en la que la aproximación se realiza por la media de las diferencias anteriores y posteriores.

Para expresar la aceleración, se establece una relación con la velocidad en la que la aceleración representa la variación de la velocidad en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Para esto se considera que la aceleración en  $t_o$  se encuentra en el centro del intervalo  $\Delta t$ , quedando lo siguiente:

$$\{\ddot{u}_{t_o}\} = \frac{\left\{\dot{u}_{t_o+\frac{\Delta t}{2}}\right\} - \left\{\dot{u}_{t_o-\frac{\Delta t}{2}}\right\}}{\Delta t}$$

Ec.2-37

Las expresiones de velocidad en los instantes de tiempo  $t_o + \frac{\Delta t}{2}$  y  $t_o - \frac{\Delta t}{2}$  se obtienen de igual manera por diferencia central, estableciendo que la velocidad es la variación del desplazamiento en un intervalo de tiempo.

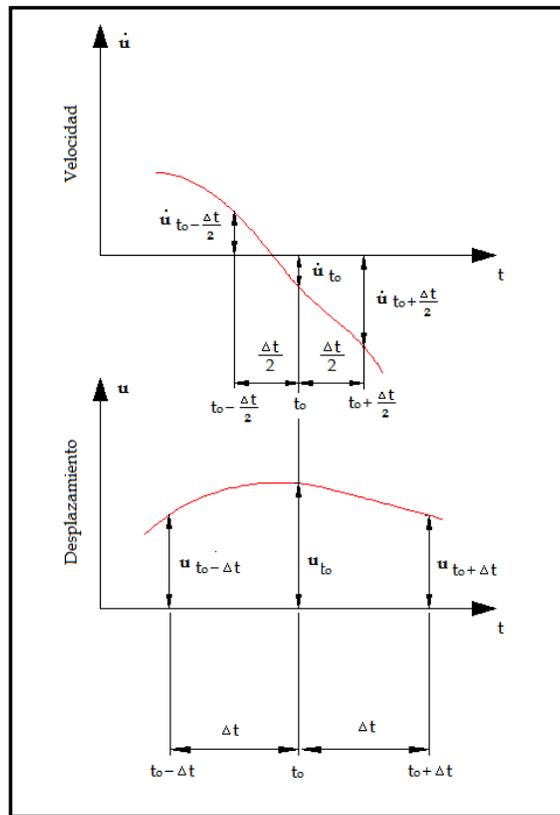
$$\left\{\dot{u}_{t_o+\frac{\Delta t}{2}}\right\} = \frac{\{u_{t_o}\} - \{u_{t_o-\Delta t}\}}{\Delta t}$$

Ec.2-38

$$\left\{\dot{u}_{t_o-\frac{\Delta t}{2}}\right\} = \frac{\{u_{t_o+\Delta t}\} - \{u_{t_o}\}}{\Delta t}$$

Ec.2-39

Estas relaciones se pueden observar gráficamente en la Fig. 9:



**Fig. 9 Representación gráfica del método de diferencias centrales.**

*Fuente:* Adaptado de Clough y Penzien (2003).

Luego se sustituye la Ec.2-38 y la Ec. 2-39 en la Ec.2-37 para obtener la expresión de aceleración:

$$\{\ddot{u}_{t_0}\} = \frac{1}{\Delta t^2} (\{u_{t_0+\Delta t}\} - 2\{u_{t_0}\} + \{u_{t_0-\Delta t}\})$$

Ec.2-40

El valor de desplazamiento en el instante de tiempo  $t_0 - \Delta t$  no se conoce por lo que entonces es necesario expresarlo como la diferencia finita de la siguiente expresión:

$$\{u_{t_0-\Delta t}\} = \{u_{t_0}\} - \Delta t * \{\dot{u}_{t_0}\} + \frac{\Delta t^2}{2} * \{\ddot{u}_{t_0}\}$$

Ec.2-41

Sustituyendo la Ec.2-41 en la Ec.2-40 se obtiene:

$$\{\ddot{u}_{t_0}\} = \frac{1}{\Delta t^2} (\{u_{t_0+\Delta t}\} - \{u_{t_0}\} + \Delta t * \{\dot{u}_{t_0}\} + \frac{\Delta t^2}{2} * \{\ddot{u}_{t_0}\})$$

Ec.2-42

Para las velocidades se emplea la siguiente expresión:

$$\{\dot{u}_{t_0}\} = \frac{1}{2 * \Delta t} * [\{u_{t_0+\Delta t}\} - \{u_{t_0-\Delta t}\}]$$

Ec.2-43

Al sustituir las expresiones de aceleracion (Ec.2-42) y (Ec.2-43) en la Ec.2-36, y despejando el desplazamiento para el instante  $t_0 + \Delta t$  queda:

$$\{M\}^{Eff} * \{u_{t_0+\Delta t}\} = \{F\}^{eff}$$

Ec.2-44

Donde:

$$\{M\}^{Eff} = \frac{1}{\Delta t^2} * [M] + \frac{1}{2\Delta t} * [C]$$

Ec.2-45

$$\{P\}^{Eff} = P_{t_0} - \left( [K] - \frac{2}{\Delta t^2} * [M] \right) * \{u_{t_0}\} - \left( \frac{1}{\Delta t^2} * [M] - \frac{1}{2\Delta t} [C] \right) * \{u_{t_0-\Delta t}\}$$

Ec.2-46

Debido a que la solución se plantea para un sistema de varios de grados de libertad expresado en forma matricial, la solución a la Ec.2-44 viene dada por la resolución de un sistema de ecuaciones lineales; en el cual la incógnita es el vector de desplazamiento  $\{u_{t_0+\Delta t}\}$ . El instante de tiempo  $t_0 + \Delta t$  representa cualquier instante de tiempo  $t$  en el que se desee obtener la respuesta del sistema. La aceleración y la velocidad para el instante de tiempo  $t_0 + \Delta t$  se pueden obtener de la Ec.2-40 y Ec.2-43, respectivamente.

### 2.2.7. Método de Newmark

En 1959 Newmark propuso un método para dar solución al problema dinámico de estructuras mediante la integración numérica. El método se puede utilizar para cualquier tipo de carga dinámica. Se parte de la ecuación de movimiento evaluada en el instante de tiempo  $t$  cualquiera:

$$[M] * \{\ddot{u}_t\} + [C] * \{\dot{u}_t\} + [K] * \{u_t\} = \{P_t\}$$

Ec.2 -47

Newmark propuso el uso de la serie de Taylor para obtener una expresión de la velocidad  $\dot{u}_t$  y el desplazamiento  $u_t$ , aplicable a cada uno de los elementos de estos vectores:

$$u_t = u_{t-\Delta t} + \Delta t \dot{u}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{u}_{t-\Delta t} + \dots$$

Ec.2-48

$$\dot{u}_t = \dot{u}_{t-\Delta t} + \Delta t \ddot{u}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{2} \dddot{u}_{t-\Delta t} + \dots$$

Ec.2-49

Newmark redujo estas ecuaciones y las expresó de la siguiente forma:

$$u_t = u_{t-\Delta t} + \Delta t \dot{u}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_{t-\Delta t} + \beta \Delta t^3 \dddot{u}_{t-\Delta t}$$

Ec.2-50

$$\dot{u}_t = \dot{u}_{t-\Delta t} + \Delta t \ddot{u}_{t-\Delta t} + \gamma \Delta t^2 \dddot{u}_{t-\Delta t}$$

Ec.2-51

Para la solución de estas ecuaciones es necesario entonces asumir un comportamiento para la respuesta  $u(t)$  en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  con el fin de aproximar las derivadas superiores. Para esto se plantean dos enfoques:

#### Comportamiento basado en aceleración lineal:

Se asume que el cambio de la aceleración en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es lineal, en consecuencia la velocidad tiene un comportamiento cuadrático y la respuesta  $u(t)$  un comportamiento cúbico. Esto se puede observar gráficamente en la Fig. 10:

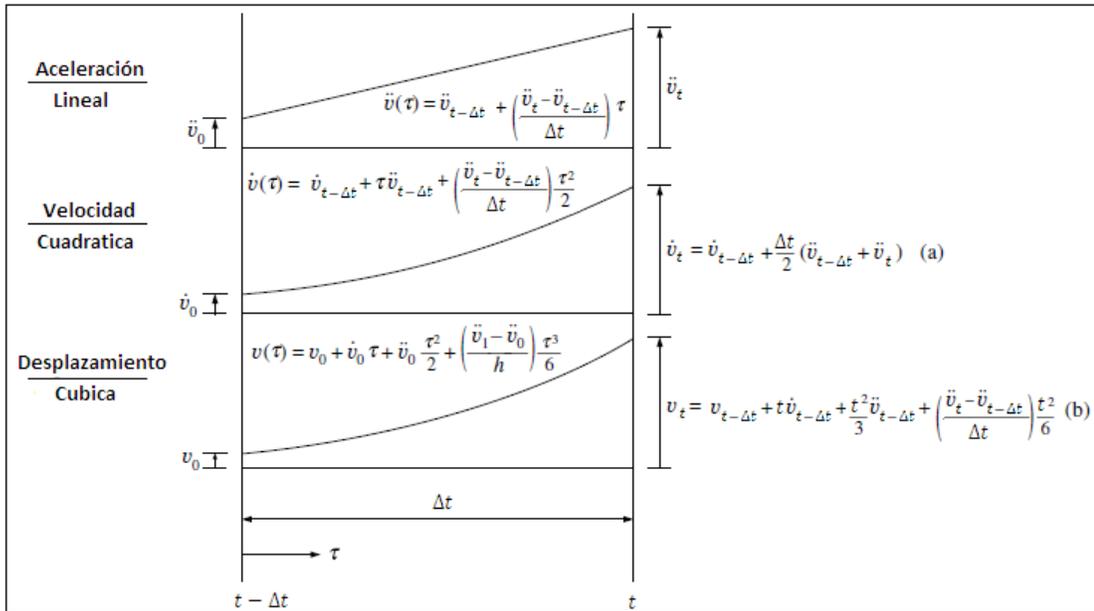


Figura 10. Comportamiento basado en la variación lineal de la aceleración.

Fuente: Adaptado Clough-Penzien (2003).

En base a lo anterior, la derivada superior a la aceleración se puede expresar como:

$$\ddot{u} = \frac{\dot{u}_t - \dot{u}_{t-\Delta t}}{\Delta t}$$

Ec.2- 52

Al sustituir la Ec.2-52 en la Ec.2-51 y Ec.2-50:

$$u_t = u_{t-\Delta t} + \Delta t \dot{u}_{t-\Delta t} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{u}_{t-\Delta t} + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_t$$

Ec.2- 53

$$\dot{u}_t = \dot{u}_{t-\Delta t} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{u}_{t-\Delta t} + \gamma \Delta t \ddot{u}_t$$

Ec.2-54

La Ec.2-53 y Ec.2-54 se conocen como las ecuaciones generales de Newmark (Wilson, 2002).

Para que la Ec.2-3 y Ec.2-4 cumplan con las relaciones y expresiones representadas en la figura 10 es necesario que  $\beta = 1/6$  y  $\gamma = 1/2$ .

De lo anterior se infiere que  $\beta$  es el factor encargado de establecer el tipo de variación que se asume para la aceleración. El factor  $\gamma$  tiene un efecto sobre la velocidad y se ve reflejado en los términos de amortiguamiento del sistema.

Comportamiento basado en aceleración promedio constante:

Se asume que el cambio de la aceleración en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es constante, en consecuencia la velocidad tiene un comportamiento lineal y la respuesta  $u(t)$  un comportamiento cuadrático. Esto se puede observar gráficamente en la Fig. 11:

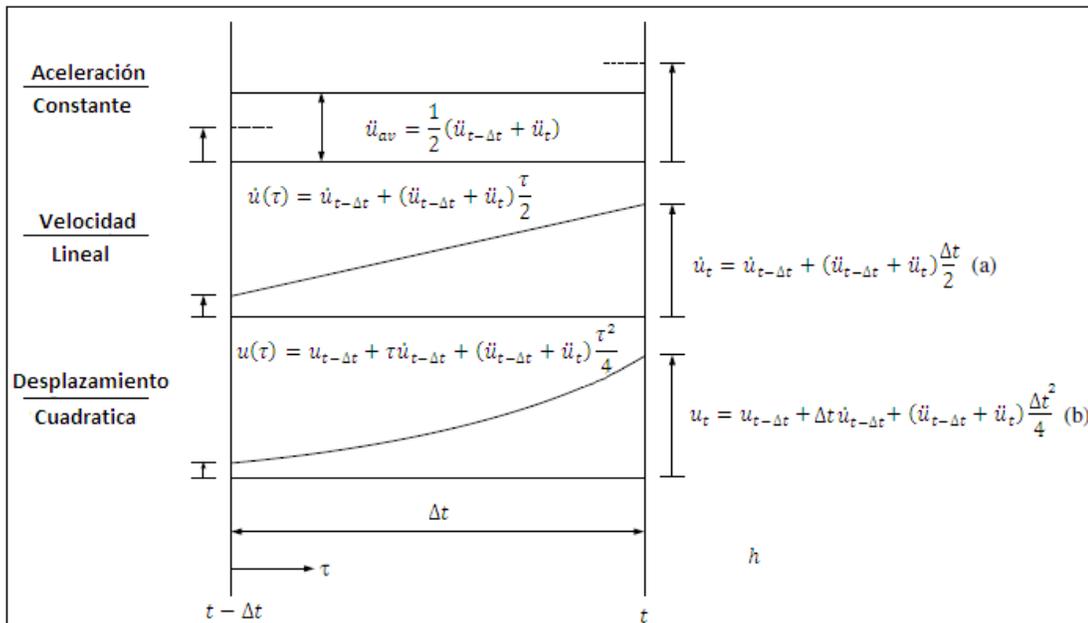


Figura 11 .Comportamiento basado en aceleración promedio constante.

Fuente: Adaptado Clough-Penzien (2003).

En base a lo anterior, la derivada superior a la aceleración se expresa como:

$$\ddot{u} = 0$$

Ec.2- 55

Al sustituir en la Ec.2-55 en la Ec.2-50 y Ec.2-51:

$$u_t = u_{t-\Delta t} + \Delta t \dot{u}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{4} \ddot{u}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{4} \ddot{u}_t$$

Ec.2-56

$$\dot{u}_t = \dot{u}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_{t-\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_t$$

Ec.2-57

La Ec.2-56 y Ec.2-57 se pueden obtener de las ecuaciones generales de Newmark si se asumen valores de  $\beta = 1/4$  y  $\gamma = 1/2$ .

Las ecuaciones generales de Newmark son ecuaciones implícitas, que dan solución al problema realizando una gran cantidad de iteraciones, razón por la cual se debe invertir mucho tiempo para hallar la solución. Es por ello que surge la necesidad de llevar estas ecuaciones a una forma explícita de modo que se obtengan las soluciones sin hacer uso de iteraciones.

El objetivo de la conversión a forma explícita es hallar expresiones despejadas de los parámetros, las cuales dependan únicamente de condiciones iniciales. Esta conversión se realiza partiendo del tipo de aceleración asumida; dicho proceso se explica a continuación:

### Conversión para aceleración constante

Partiendo de la ecuación (b) de la Fig. 10, y despejando la aceleración se obtiene:

$$\ddot{u}_t = \frac{4}{\Delta t^2}(u_t - u_{t-\Delta t}) - \frac{4}{\Delta t}\dot{u}_{t-\Delta t} - \ddot{u}_{t-\Delta t}$$

Ec.2-58

Sustituyendo la Ec. 2-58 en la ecuación (a) de la Fig. 10 se tiene:

$$\dot{u}_t = \frac{2}{\Delta t}(u_t - u_{t-\Delta t}) - \dot{u}_{t-\Delta t}$$

Ec.2-59

Al sustituir la Ec. 2-58 y Ec. 2-59 en la Ec. 2-47, se obtiene una ecuación donde solo el desplazamiento en el tiempo  $t$  es desconocido. Realizando una agrupación de términos, se puede reescribir la Ec. 2-47 en forma matricial como:

$$[K_c] * \{u_t\} = [p_c]$$

Ec. 2-60

El termino  $[K_c]$  se denomina matriz de amortiguamiento efectivo y es igual a:

$$[K_c] = [K] + \frac{2}{\Delta t}[C] + \frac{4}{\Delta t^2}[M]$$

Ec. 2-61

El término  $[p_c]$  se denomina matriz de carga efectiva y es igual a:

$$[p_c] = \{p_t\} + [C] * \left( \frac{2}{\Delta t}\{u_{t-\Delta t}\} + \{\dot{u}_{t-\Delta t}\} \right) + [M] * \left( \frac{4}{\Delta t^2}\{u_{t-\Delta t}\} + \frac{4}{\Delta t}\{\dot{u}_{t-\Delta t}\} + \{\ddot{u}_{t-\Delta t}\} \right)$$

Ec.2-62

A través de la Ec.2-60 se resuelve un sistema de ecuaciones lineales que permiten obtener el vector de desplazamiento  $\{u_t\}$  para cualquier instante de tiempo. Luego este vector puede ser utilizado en la Ec. 2-59 para obtener el vector de velocidades  $\{\dot{u}_t\}$  en cualquier instante de tiempo.

Finalmente, la aceleración para ese instante se despeja de la Ec. 2-47 y se obtiene:

$$[M] * \{\ddot{u}_t\} = \{p_t\} - [C] * \{\dot{u}_t\} - [K] * \{u_t\}$$

Ec.2-63

#### Conversión para aceleración lineal

Partiendo de la ecuación (b) de la Fig.12, y despejando la aceleración se obtiene:

$$\ddot{u}_t = \frac{6}{\Delta t^2} (u_t - u_{t-\Delta t} - \Delta t \dot{u}_{t-\Delta t}) - 2\ddot{u}_{t-\Delta t}$$

Ec.2-64

Sustituyendo la Ec. 1-64 en la ecuación (a) de la Fig. 11 se tiene:

$$\dot{u}_t = -2\dot{u}_{t-\Delta t} + \frac{3}{\Delta t} (u_t - u_{t-\Delta t}) - \frac{\Delta t}{2} \ddot{u}_{t-\Delta t}$$

Ec.2-65

Después de sustituir la Ec.2-64 y Ec.2-65 en la Ec.2-47, se obtiene una ecuación donde solo el desplazamiento en el tiempo  $t$  es desconocido. Realizando una agrupación de términos, se puede reescribir la Ec.2-47 como:

$$[K_l] * \{u_t\} = [p_l]$$

Ec. 2-66

El término  $[k_l]$  se denomina amortiguamiento efectivo y es igual a:

$$[K_l] = [K] + \frac{3}{\Delta t}[C] + \frac{6}{\Delta t^2}[M]$$

Ec. 2-67

El término  $[p_l]$  se denomina matriz de carga efectiva y es igual a:

$$[p_l] = \{p_t\} + [C] * \left( \frac{3}{\Delta t} \{u_{t-\Delta t}\} + 2 \{\dot{u}_{t-\Delta t}\} + \frac{\Delta t}{2} \{\ddot{u}_{t-\Delta t}\} \right) + \dots$$

$$[M] \left( \frac{6}{\Delta t^2} \{u_{t-\Delta t}\} + \frac{6}{\Delta t} \{\dot{u}_{t-\Delta t}\} + 2 \{\ddot{u}_{t-\Delta t}\} \right)$$

Ec. 2-68

Finalmente, la expresión que permite calcular la aceleración en el instante  $t$  se despeja de la Ec. 2-47, quedando:

$$\{\ddot{u}_t\} * [M] = \{p_t\} - [C] * \{\dot{u}_t\} - [K] * \{u_t\}$$

Ec.2-69

Por último, cabe destacar que por estar en presencia de un método explícito, el método es condicionalmente estable.

Con respecto a la exactitud del método Wilson (2002) establece que al asumir un comportamiento lineal para la aceleración se obtienen resultados más aproximados que asumiendo aceleración constante, por tanto se recomienda asumir este comportamiento para la solución de la ecuación de equilibrio dinámico.

### 2.2.8. Método de Wilson $\theta$

En 1962, nace este método fundamentado en el método de Newmark, para el caso de aceleración lineal. Este método surge con la finalidad de convertir el método de Newmark incondicionalmente estable.

La esencia de este método no es más que una modificación del intervalo de tiempo seleccionado para así lograr la estabilidad en todo momento, esto se logra mediante la introducción del factor  $\theta$ , el cual controla la estabilidad numérica.

Se muestra a continuación una representación gráfica (Fig.12) donde se observa la modificación producida por el factor  $\theta$  y el intervalo de estudio a considerar en la deducción del método.

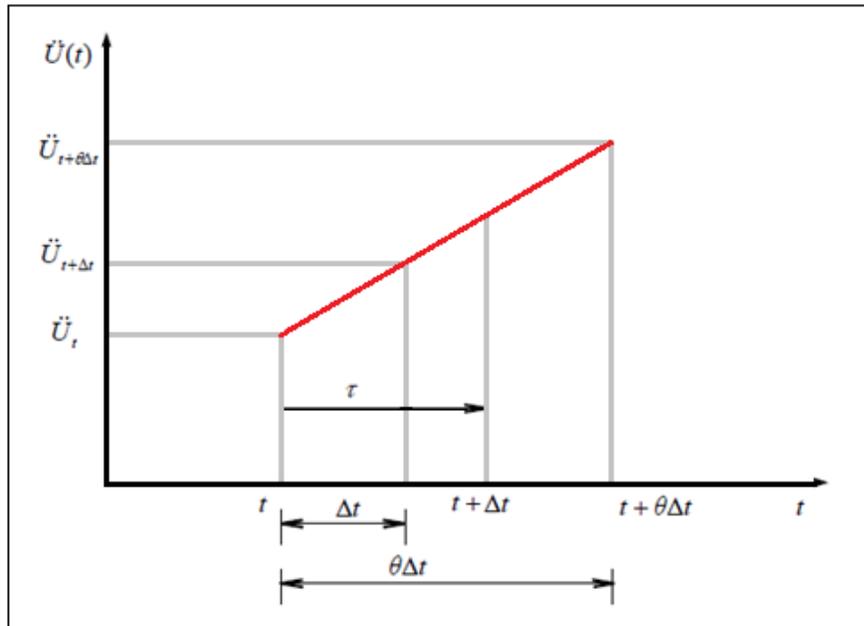


Fig. 12. Representación gráfica del Método de Wilson  $\theta$

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

Se inicia el procedimiento del método aproximando la aceleración en un intervalo de tiempo  $0 < \tau < \theta t$ , con  $\theta > 1$ . El intervalo parte de las condiciones iniciales en el instante de tiempo  $t$ , para luego obtener de manera aproximada la expresión de aceleración en el instante de tiempo  $t + \theta \Delta t$  posterior.

En base a lo anterior, se plantea la expresión de aceleración del método:

$$\ddot{u}_{t+\tau}(\tau) = \ddot{u}_t + \frac{\tau}{\theta \Delta t} (\ddot{u}_{t+\theta \Delta t} - \ddot{u}_t)$$

Ec.2-70

Al integrar la Ec.2-70 se obtiene la velocidad expresada como:

$$\dot{u}_{t+\tau}(\tau) = \dot{u}_t + \tau \ddot{u}_t + \frac{\tau^2}{2\theta \Delta t} (\ddot{u}_{t+\theta \Delta t} - \ddot{u}_t)$$

Ec. 2-71

Una vez obtenida la velocidad, se calcula el desplazamiento integrando la Ec. 2-71, la cual queda expresada de la siguiente forma:

$$u_{t+\tau}(\tau) = u_t + \tau \dot{u}_t + \frac{\tau^2}{2} \ddot{u}_t + \frac{\tau^3}{6\theta \Delta t} (\ddot{u}_{t+\theta \Delta t} - \ddot{u}_t)$$

Ec. 2-72

Si  $\tau = \theta \Delta t$ , entonces la Ec. 1-71 se reescribe como:

$$\dot{u}_{t+\theta \Delta t} = \dot{u}_t + \frac{\theta \Delta t}{2} (\ddot{u}_{t+\theta \Delta t} + \ddot{u}_t)$$

Ec. 2-73

Bajo la misma consideración, la Ec. 2-72 se reescribe como:

$$u_{t+\theta \Delta t} = u_t + \theta \Delta t \dot{u}_t + \frac{\theta^2 \Delta t^2}{6} (\ddot{u}_{t+\theta \Delta t} + 2\ddot{u}_t)$$

Ec. 2-74

Al despejar  $\ddot{u}_{t+\theta\Delta t}$  de la Ec.2-74 y sustituir en la expresión dada en la Ec.2-73 se obtiene:

$$\dot{u}_{t+\theta\Delta t} = \frac{3}{\theta\Delta t} (u_{t+\theta\Delta t} - u_t) - 2\dot{u}_t - \frac{\theta\Delta t}{2} \ddot{u}_t$$

Ec. 2-75

Expresando la ecuación de equilibrio dinámico evaluada en  $t + \theta\Delta t$ , se tiene:

$$[M] * \{\ddot{u}_{t+\theta\Delta t}\} + [C] * \{\dot{u}_{t+\theta\Delta t}\} + [K] * \{u_{t+\theta\Delta t}\} = \{\hat{P}_{t+\theta\Delta t}\}$$

Ec. 2-76

Donde los elementos del vector  $\{\hat{P}_{t+\theta\Delta t}\}$  se calculan como:

$$\hat{P}_{t+\theta\Delta t} = \theta P_{t+\theta\Delta t} + (1 - \theta)P_t$$

Ec. 2-77

Despejando la aceleración  $\ddot{u}_{t+\theta\Delta t}$  de la Ec.2-74 y sustituyéndola en la Ec.2-76, así como también sustituyendo la expresión de velocidad  $\dot{u}_{t+\theta\Delta t}$  dada por la Ec.2-75 se obtiene la siguiente expresión simplificada:

$$[K]^{eff} * \{u_{t+\theta\Delta t}\} = [P]^{eff}$$

Ec. 2-78

Donde:

$$[K]^{eff} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2} [M] + \frac{3}{\theta\Delta t} [C] + [K]$$

Ec. 2-79

$$[P]^{eff} = \theta * \{P_{t+\theta\Delta t}\} + (1 - \theta) * \{P_t\} + \left( \frac{6}{\theta^2\Delta t^2} * [M] + \frac{3}{\theta\Delta t} * [C] \right) * \{u_t\} + \dots$$

$$\left(\frac{6}{\theta\Delta t} * [M] + 2 * [C]\right) * \{\dot{u}_t\} + \left(2 * [M] + \frac{\theta\Delta t}{2} * [C]\right) * \{\ddot{u}_t\}$$

Ec. 2-80

La segunda parte del método consiste en hallar las expresiones de desplazamiento, velocidad y aceleración en el instante de tiempo  $t + \Delta t$ , tomando en cuenta la aproximación calculada en  $t + \theta\Delta t$ . De este modo el método incorpora información de las condiciones iniciales en  $t$ , así como también considera las contribuciones aportadas por las aproximaciones calculadas en  $t + \theta\Delta t$ .

Luego de la resolución del sistema de ecuaciones establecidos en la Ec.2-78 se obtiene el vector de desplazamiento  $\{u_{t+\theta\Delta t}\}$ , a través del cual se plantea finalmente obtener las expresiones de desplazamiento, velocidad y aceleración en el instante de tiempo  $t + \Delta t$ .

Para la aceleración se expresa la Ec. 2-70 con  $\tau = \Delta t$ , quedando lo siguiente:

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = \ddot{u}_t + \frac{1}{\theta} (\ddot{u}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{u}_t)$$

Ec.2-81

Al despejar  $\ddot{u}_{t+\theta\Delta t}$  de la Ec. 2-74 y sustituirla en la Ec.2-81 se obtiene la expresión de aceleración buscada:

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = \frac{6}{\theta^3\Delta t^2} (u_{t+\theta\Delta t} - u_t) - \frac{6}{\theta^2\Delta t} \dot{u}_t + \left(1 - \frac{3}{\theta}\right) \ddot{u}_t$$

Ec. 2-82

Para la velocidad, se parte de la Ec.2-71 con  $\tau = \Delta t$ , quedando lo siguiente:

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + \Delta t \ddot{u}_t + \frac{\Delta t}{2\theta} (\ddot{u}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{u}_t)$$

Ec. 1-83

Despejando el término  $\ddot{u}_{t+\theta\Delta t} - \ddot{u}_t$  de la Ec. 2-81 y sustituyéndolo en la Ec.2-83 se obtiene la expresión de velocidad buscada:

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_{t+\Delta t} + \ddot{u}_t)$$

Ec. 2-84

Finalmente, para la expresión de desplazamiento se utiliza la Ec.2-72 con  $\tau = \Delta t$ :

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \Delta t \dot{u}_t + \frac{\Delta t^2}{6} (\ddot{u}_{t+\Delta t} + 2\ddot{u}_t)$$

Ec. 2-85

Por último, debe señalarse que el factor  $\theta$  debe cumplir con  $1 \leq \theta < 1.34$ . Cuando  $\theta = 1$  el método es igual al método de Newmark para aceleración lineal y cuando  $\theta > 1.34$  el método se torna condicionalmente estable, pudiéndose modificar la calidad de sus resultados.

### 2.2.9. Método de Houbolt

El método de Houbolt consiste en aproximar el desplazamiento mediante una función cubica en el tiempo, en un intervalo de estudio comprendido de  $t - 2\Delta t$  hasta  $t + \Delta t$ . La función de aproximación es la siguiente:

$$u_{t+\tau}(\tau) = a * \tau^3 + b * \tau^2 + c * \tau + d$$

Ec.2-86

Donde los coeficientes a, b, c y d son dados por las siguientes expresiones:

$$a = \frac{1}{6 \Delta t^3} [-u_{t-2\Delta t} + 3 u_{t-\Delta t} - 3 u_t + u_{t+\Delta t}] \quad \text{Ec.2-87}$$

$$b = \frac{1}{2 \Delta t^2} [u_{t-\Delta t} - 2 u_t + u_{t+\Delta t}] \quad \text{Ec.2-88}$$

$$c = \frac{1}{6 \Delta t} [u_{t-2\Delta t} - 6 u_{t-\Delta t} + 3 u_t + 2 u_{t+\Delta t}] \quad \text{Ec.2-89}$$

$$d = u_t \quad \text{Ec.2-90}$$

Derivando la Ec.1-86 se obtienen la expresión de velocidad y aceleración:

$$\dot{u}_{t+\tau}(\tau) = 3 * a * \tau^2 + 2 * b * \tau + c \quad \text{Ec.2-91}$$

$$\ddot{u}_{t+\tau}(\tau) = 6 * a * \tau + 2 * b \quad \text{Ec.2-92}$$

Haciendo  $\tau = \Delta t$  y reemplazando los valores de a, b, c y d en cada una de las expresiones anteriores y se obtiene lo siguiente:

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \frac{1}{6 \Delta t} [11 u_{t+\Delta t} - 18 u_t + 9 u_{t-\Delta t} - 2 u_{t-2\Delta t}] \quad \text{Ec.2-93}$$

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t^2} [2 u_{t+\Delta t} - 5 u_t + 4 u_{t-\Delta t} - u_{t-2\Delta t}] \quad \text{Ec.2-94}$$

Para expresar el método en forma matricial, se evalúa la ecuación de equilibrio dinámico en  $t + \Delta t$ :

$$[M] * \{\ddot{u}_{t+\Delta t}\} + [C] * \{\dot{u}_{t+\Delta t}\} + [K] * \{u_{t+\Delta t}\} = \{P_{t+\Delta t}\}$$

Ec.2-95

Luego se reemplaza los valores de  $\dot{u}_{t+\Delta t}$ ,  $\ddot{u}_{t+\Delta t}$  donde resulta la siguiente expresión simplificada:

$$[K]^{eff} * \{u_{t+\Delta t}\} = [P]^{eff}$$

Ec.2-96

Donde:

$$[K]^{eff} = \frac{2}{\Delta t^2} * [M] + \frac{11}{6 \Delta t} * [C] + [K]$$

Ec.2-97

$$[P]^{eff} = \{P_{t+\Delta t}\} + \left( \frac{5}{\Delta t^2} * [M] + \frac{3}{\Delta t} * [C] \right) * \{U_t\} - \dots$$

$$\left( \frac{4}{\Delta t^2} * [M] + \frac{3}{2 \Delta t} * [C] \right) * \{U_{t-\Delta t}\} + \left( \frac{1}{\Delta t^2} * [M] + \frac{1}{3 \Delta t} * [C] \right) * \{U_{t-2\Delta t}\}$$

Ec.2-98

Los valores de  $U_{t-2\Delta t}$  y  $U_{t-\Delta t}$  no son conocidos al iniciar el método, por tanto para el instante  $t = 0$  estos se deben aproximar mediante algún procedimiento. Se plantea entonces evaluar la Ec. 2-91 y Ec.2-92 con  $t = 0$  y  $\tau = 0$ :

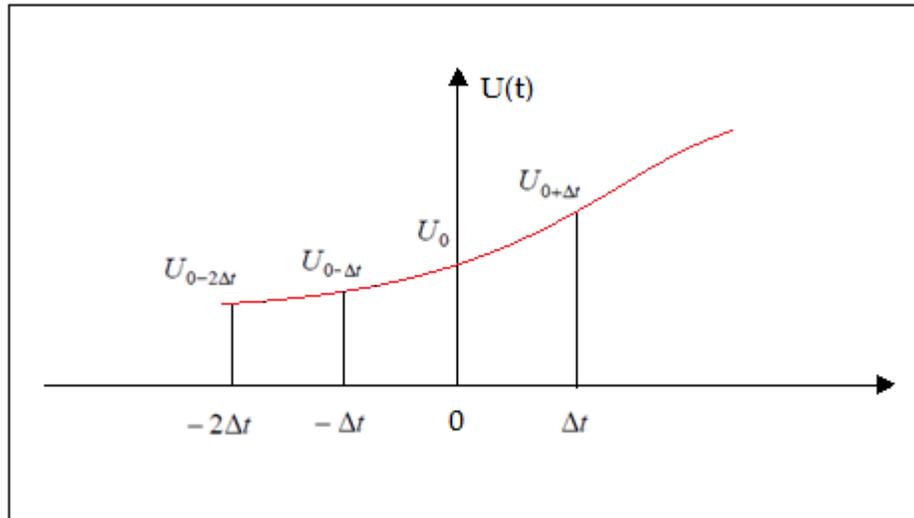
$$\dot{u}_0 = c = \frac{1}{6 \Delta t} [ u_{0-2\Delta t} - 6 u_{0-\Delta t} + 3 u_0 + 2 u_{0+\Delta t} ]$$

Ec.2-99

$$\ddot{u}_0 = 2b = \frac{1}{\Delta t^2} [ u_{0-\Delta t} - 2 u_0 + u_{0+\Delta t} ]$$

Ec.2-100

Gráficamente esto se observa en la Fig.13:



**Fig. 13 Representación gráfica del método de Houbolt en  $t = 0$ .**

*Fuente:* Di Benedetto y Segovia (2011).

De la Ec.2-100 se despeja  $u_{0-\Delta t}$  :

$$u_{0-\Delta t} = \Delta t^2 * \ddot{u}_0 + 2 u_0 - u_{0+\Delta t}$$

Ec.2-101

Luego se sustituye en la Ec.2-99 y a su vez se despeja  $u_{0-2\Delta t}$  quedando lo siguiente:

$$u_{0-2\Delta t} = 6 \Delta t * \dot{u}_0 + 6 \Delta t^2 * \ddot{u}_0 - 8 u_{0+\Delta t} + 9 u_0$$

Ec.2-102

Se plantea la Ec.2-96 en  $t = 0$  :

$$[K]^{eff} * \{u_{0+\Delta t}\} = [P]^{eff}$$

Ec.2-103

Donde  $[K]^{eff}$  es igual a la expresada a continuación:

$$[K]^{eff} = \frac{6}{\Delta t^2} * [M] + \frac{3}{\Delta t} * [C] + [K]$$

Ec.2-104

El vector  $[P]^{eff}$  es:

$$[P]^{eff} = \{P_{0+\Delta t}\} + \left( \frac{6}{\Delta t^2} * [M] + \frac{3}{\Delta t} * [C] \right) * \{U_0\} - \dots$$

$$\left( \frac{6}{\Delta t^2} * [M] + 2 * [C] \right) * \{\dot{U}_0\} + \left( 2 * [M] + \frac{1}{2\Delta t} * [C] \right) * \{\ddot{U}_0\}$$

Ec.2-105

Resolviendo el sistema de ecuaciones que se deriva de la Ec.2-103 es posible hallar  $\{u_{0+\Delta t}\}$ , mediante el cual luego se puede hallar  $u_{0-\Delta t}$  y  $u_{0-2\Delta t}$  a través de la Ec.2-101 y Ec.2-102, respectivamente.

Para los instantes de tiempo posteriores se debe considerar lo siguiente:

$$\{u_{t-\Delta t}\} \Rightarrow \{u_{t-2\Delta t}\} \quad \{u_t\} \Rightarrow \{u_{t-\Delta t}\} \quad \{u_{t+\Delta t}\} \Rightarrow \{u_t\}$$

Ec.2-106

Por último, es conveniente acotar que este método no presenta un intervalo de tiempo crítico, por lo tanto se considera que es incondicionalmente estable. Sin embargo, diversos autores han mencionado que este método puede incorporar amortiguamiento artificial (amortiguamiento numérico) al problema dinámico que físicamente no existe, en consecuencia las soluciones que se obtienen a través de él pueden no ser tan precisas.

## CAPITULO III

### MARCO METODOLOGICO

#### 3.1. Tipo de Investigación

Al respecto, Hurtado (2008) establece que la investigación proyectiva:

“... propone soluciones a una situación determinada a través de un proceso de indagación. Implica explorar, describir, explicar y proponer alternativas de cambio (...). Todas las investigaciones que implican el diseño o creación de algo basados en un proceso investigativo también entran en esta categoría.”

También Hurtado (2008) plantea:

“Algunos ejemplos de investigación proyectiva son: los estudios de arquitectura,..., los estudios de informática en los cuales hay que crear un programa; los inventos de maquinarias y artefactos.”

En función a lo anterior, el presente proyecto de investigación se enmarca dentro del tipo proyectiva, pues como ya se menciono implica el diseño o creación de un programa para dar solución al problema existente.

### 3.2. Diseño de Investigación

El Manual de Trabajos de Grado de Especialización y Maestrías y Tesis Doctorales (UPEL 2006) establece categorías para la consideración de un trabajo de grado bajo la modalidad de proyecto especial, dentro de ellas se encuentra la siguiente:

Trabajos que lleven a creaciones tangibles, susceptibles de ser utilizadas como soluciones a problemas demostrados, o que respondan a necesidades e intereses de tipo cultural. Se incluyen en esta categoría los trabajos de elaboración de libros de texto y de materiales de apoyo educativo, el desarrollo de software, prototipos y de productos tecnológicos en general, así como también los de creación literaria y artística.

Según esta consideración, la investigación está concebida dentro de la modalidad de proyecto especial, ya que consistió en el desarrollo de un programa (software) que genera información acerca de las propiedades dinámicas de una estructura en cualquier instante de tiempo.

Según Hurtado (2008): “El diseño se refiere a donde y cuando se recopila la información, así como la amplitud de la información a recopilar, de modo que se pueda dar respuesta a la pregunta de investigación de la forma más idónea posible.”(P. 147)

Para poder cumplir con el objetivo principal de este trabajo, el cual consiste en la creación de un programa para el cálculo de propiedades dinámicas de estructuras, fue necesario realizar en primer lugar una recopilación de información de fuentes bibliográfica para luego poder establecer los fundamentos teóricos de los métodos a plantear en el programa, así como también cualquier otra información relacionada con el lenguaje de programación escogido que fuese de utilidad para el desarrollo del mismo. Por tal razón, esta investigación se concibe dentro del tipo

documental, tal y como lo afirma UPEL (2006): “Se entiende por Investigación Documental, el estudio de problemas con el propósito de ampliar y profundizar el conocimiento de su naturaleza, con apoyo, principalmente, en trabajos previos, información y datos divulgados por medios impresos, audiovisuales o electrónicos” (P. 12)

En segundo lugar, se establecieron las siguientes fases de la investigación, las cuales guiaron la ejecución del presente trabajo de investigación:

**Fase 1.** Identificación de métodos numéricos aplicados al análisis de estructuras.

**Fase 2.** Definición de los Métodos Numéricos a utilizar en el diseño del programa.

**Fase 3.** Diseño del Programa.

**Fase 4.** Validación del programa.

### **3.3. Técnicas e Instrumentos de Recolección de Datos.**

En base al diseño de investigación, la técnica de recolección de datos fue la revisión documental la cual se realizó mediante el desarrollo de las siguientes etapas:

- **Etapa 1.** Reunión de la información y evaluación de las fuentes: Esta fase consistió en conocer y explorar el conjunto de fuentes que pudiesen resultar útiles para el desarrollo de la investigación, tales como: libros, artículos científicos, revistas, publicaciones, boletines e internet; cabe destacar que en este último, se obtiene acceso a las investigaciones más recientes

pudiéndose ingresar a base de datos computarizados, direcciones web de instituciones y universidades ubicadas en cualquier parte del mundo.

- **Etapa 2.** Resumen y Síntesis de la información recopilada: El objetivo principal de esta fase fue realizar una lectura crítica del material seleccionado a fin de obtener resúmenes y síntesis de las ideas básicas de las obras consultadas.
- **Etapa 3.** Presentación Resumida: en esta fase, se trató básicamente de la construcción de los contenidos teóricos de la investigación.

### **3.4. Procedimiento Metodológico**

**Fase 1.** Identificación de métodos numéricos aplicados al análisis de estructuras:

En esta fase se describió los fundamentos del análisis dinámico, así como también se enunciaron los fundamentos de análisis matemático numérico. De igual manera, se describió las características de los métodos numéricos aplicados a la solución del problema dinámico. Esta información se ve reflejada en el marco teórico de la investigación.

**Fase 2.** Definición de los Métodos Numéricos a utilizar en el diseño del programa:

En esta fase se definieron los métodos numéricos a utilizar en el programa tomando en cuenta las características de los métodos descritos en la fase 1. Considerando la facilidad de los métodos de ser ajustados a lenguaje de programación se definió utilizar todos los métodos numéricos estudiados en la fase 1, los cuales son:

- Método Newmark, basado en el comportamiento de la aceleración lineal y de aceleración constante.
- Método de Wilson.
- Método de Houbolt.
- Método de Diferencias Centrales.

**Fase 3. Diseño del Programa:**

- Definición de las variables de entrada, salida y proceso para el programa.
- Determinación de los pasos a seguir en el algoritmo de cálculo de los métodos a utilizar en el programa, representándolos mediante diagramas de flujo.
- Elaboración en base al lenguaje de programación MATLAB los códigos de cálculo de los métodos.
- Diseño de la interfaz gráfica GUIDE en MATLAB.
- Prueba del programa elaborado con la finalidad de evaluar su correcto funcionamiento.

**Fase 4. Validación del programa**

La validación de programa se enfocó en la realización de dos casos de estudios en los que se evaluará la aplicación del programa. Estos casos de estudio son:

- Caso 1. Calculo manual de las propiedades dinámicas haciendo uso de métodos numéricos.

En primer lugar, se realiza la descripción del cálculo manual de la respuesta dinámica de un sistema estructural plano, donde se evalúa su comportamiento bajo una acción sísmica aplicando cada uno de los métodos numéricos utilizados en el programa creado. Luego se describe el procedimiento para evaluar el mismo sistema estructural haciendo uso del programa. Esto se realiza con el fin de

comparar los resultados obtenidos mediante la aplicación del programa creado y los obtenidos manualmente para de esta forma verificar su semejanza.

- Caso 2. Cálculo de las propiedades dinámicas de un sistema estructural plano haciendo uso de SAP 2000.

En primer lugar, se realiza la descripción del procedimiento para el cálculo de la respuesta dinámica de un sistema estructural plano utilizando el programa de cálculo estructural SAP 2000. Luego se evalúa el mismo sistema estructural mediante la aplicación del programa creado. Esto se realiza con el fin de validar los resultados de la aplicación del programa creado y comparar con los obtenidos mediante el programa SAP 2000.

**Fase 5.** Análisis de los resultados:

El análisis de los resultados de la presente investigación se enfocó en la comparación de los resultados obtenidos en la fase de validación del uso del programa. Debido a la gran cantidad de información obtenida de la fase de validación se definió como propiedad dinámica para comparar el desplazamiento, el parámetro que mejor representa la respuesta dinámica de la estructura.

### **3.5. Desarrollo del programa**

#### **3.5.1. Descripción del programa**

El programa de cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos es un algoritmo de cálculo realizado con la finalidad de obtener una herramienta computacional a través de la cual sea posible calcular las propiedades dinámicas de una estructura que es sometida a una fuerza dinámica cualquiera.

El programa fue diseñado para operar bajo el sistema operativo Windows y fue realizado en MATLAB R2010a utilizando el lenguaje de programación que este dispone en conjunto con la herramienta GUIDE, la cual permite diseñar interfaces graficas de usuario.

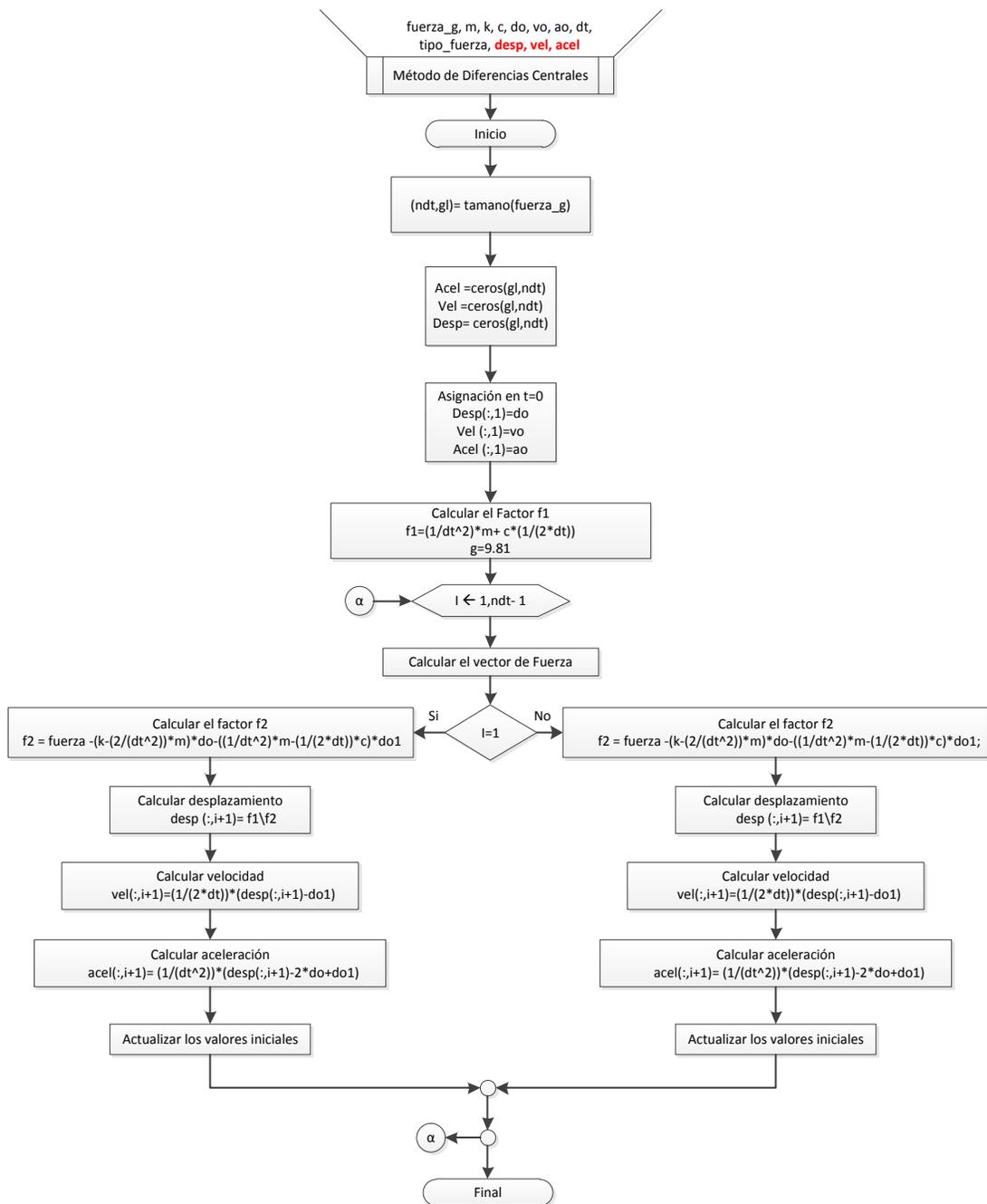
La selección del lenguaje de programación se realizó considerando las ventajas que presenta MATLAB para el diseño del programa, como son que este lenguaje esta ideado para realizar cálculos; por lo que presenta gran variedad de herramientas matemáticas para el manejo de matrices y vectores, resolución de sistemas de ecuaciones lineales y herramientas para elaboración de graficas.

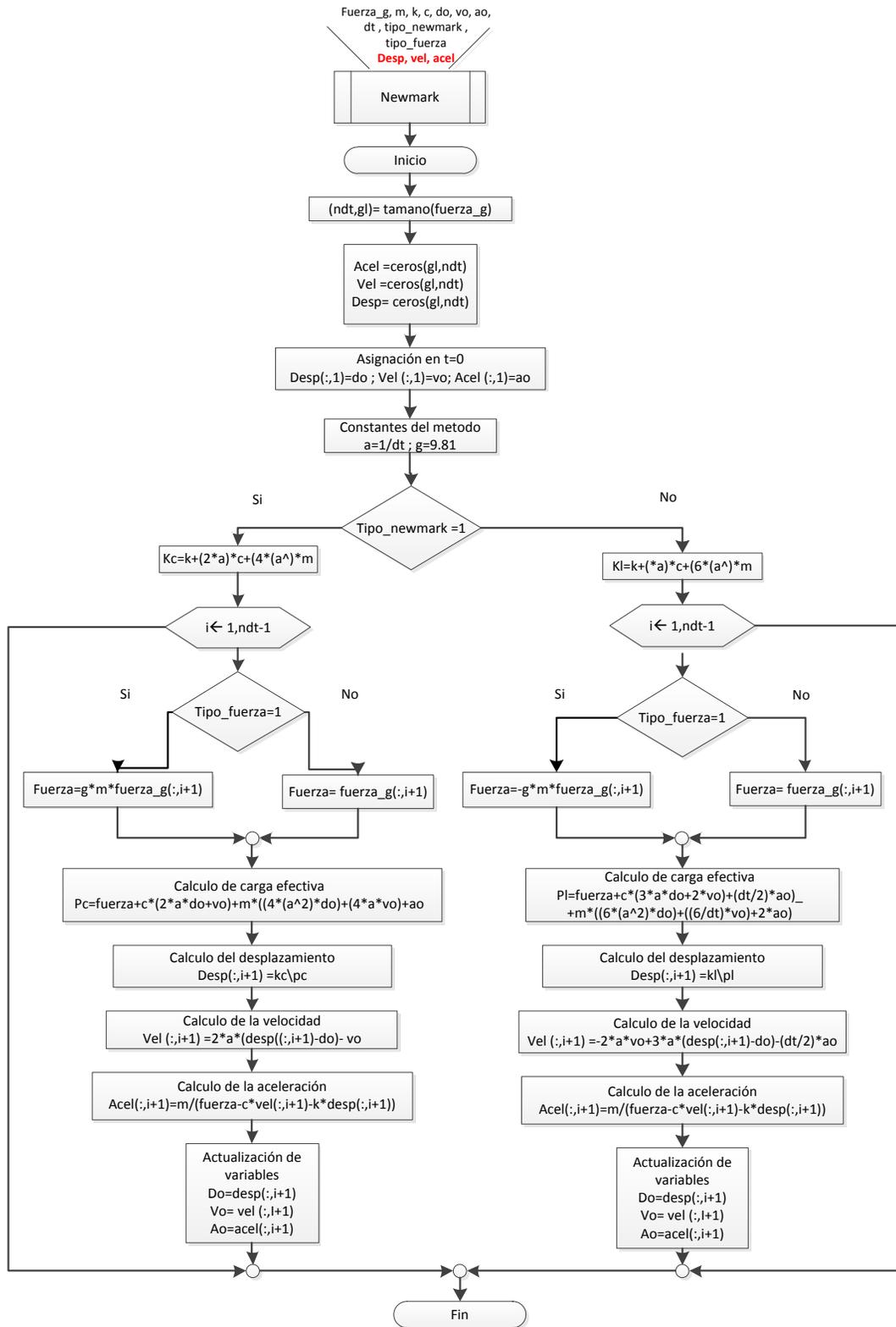
Es necesario destacar que aunque el programa fue realizado en lenguaje de programación de MATLAB, no es necesario tener instalado el programa MATLAB para su ejecución, debido a que ha sido diseñado para operar como una aplicación Windows independiente.

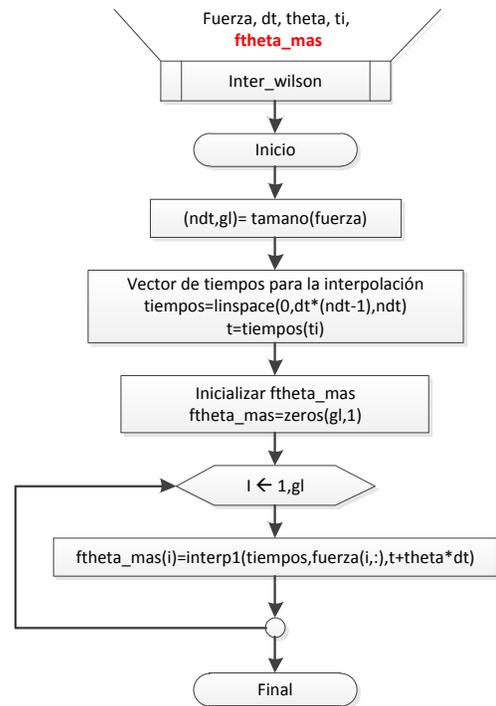
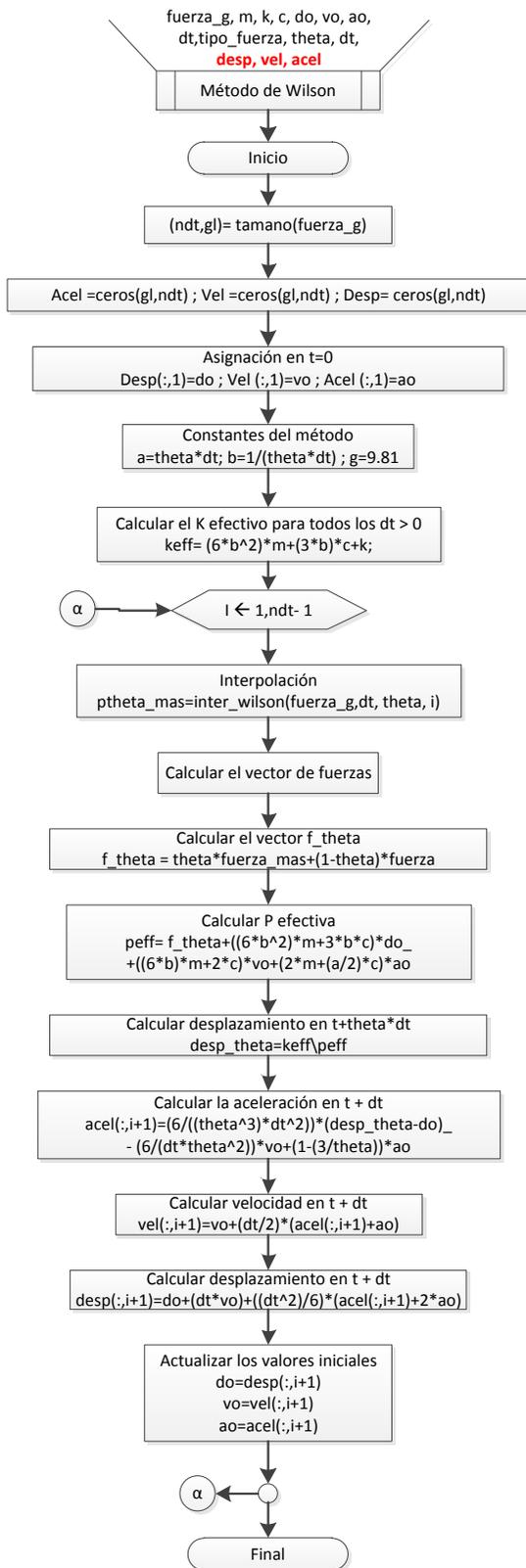
### **3.5.2. Algoritmo de trabajo**

A continuación se presentan los algoritmos de trabajo representados mediante diagramas de flujo de los métodos numéricos seleccionados.

Estos diagramas de flujos representan de forma esquemática el procedimiento que se utiliza en el programa de cálculo elaborado.









### 3.5.3. Instalación del programa

La realización del programa de cálculo se realiza a través de MATLAB COMPILER RUNTIME, el cual guía un proceso de manera automática, de manera tal que el programa pueda ser ejecutado sin tener instalado MATLAB en el computador.

Una vez instalado el programa se puede ingresar a él a través del icono que lo identifica en la ubicación donde fue instalado, al hacer clic sobre el icono se presentará una ventana que ejecuta Windows MS-DOS y luego aparecerá la ventana principal del programa para el cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos.

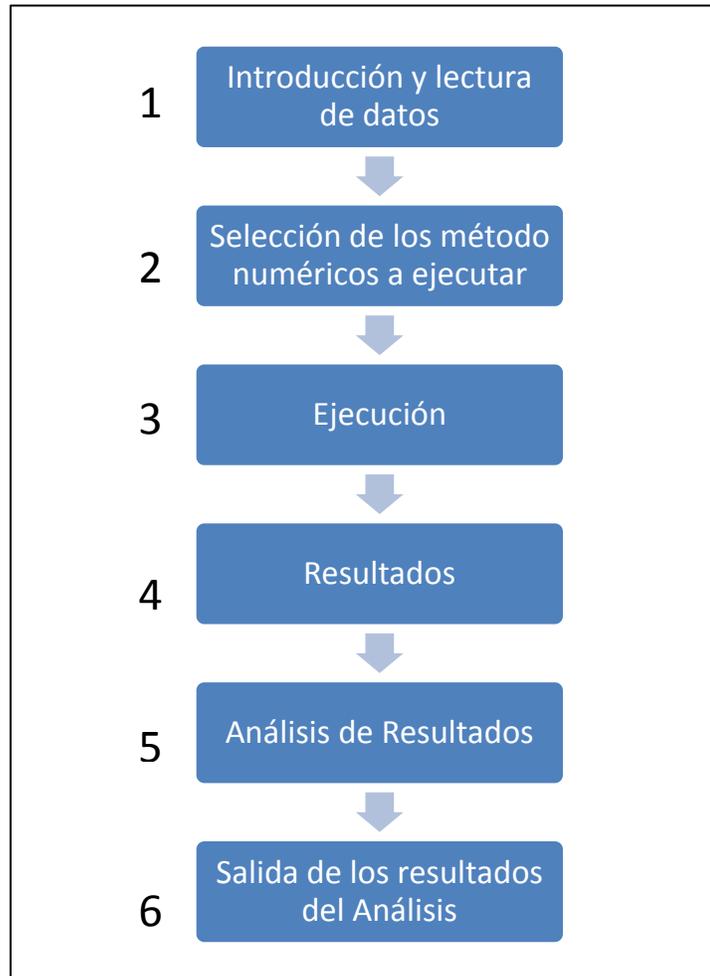


**Fig.14** Ventana principal del programa para el cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos.

*Fuente:* Di Benedetto y Segovia (2011).

### 3.5.4. Ejecución del Programa

En la Fig.15 se representa en forma esquemática el desarrollo para la ejecución del programa de cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos.



*Fig. 15 Esquema de ejecución del programa*

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

A continuación se presenta la descripción de cada uno de los bloques establecidos en la Fig.15:

## Bloque 1. Introducción y lectura de datos:

Este bloque permite suministrar al programa los datos necesarios para iniciar el cálculo. Estos datos están constituidos por:

1. Información del Sistema: se refiere a las matrices de rigidez, masa y amortiguación que representan las características que definen el comportamiento dinámico. Estas matrices pueden ser ingresadas al programa de dos formas:

- a) Archivo: Se refiere a archivos preparados por el usuario en formato de archivo de Excel (.xls) o archivo de datos (.txt)

Los archivos de Excel deben estar organizados como se muestra en la Fig.16:

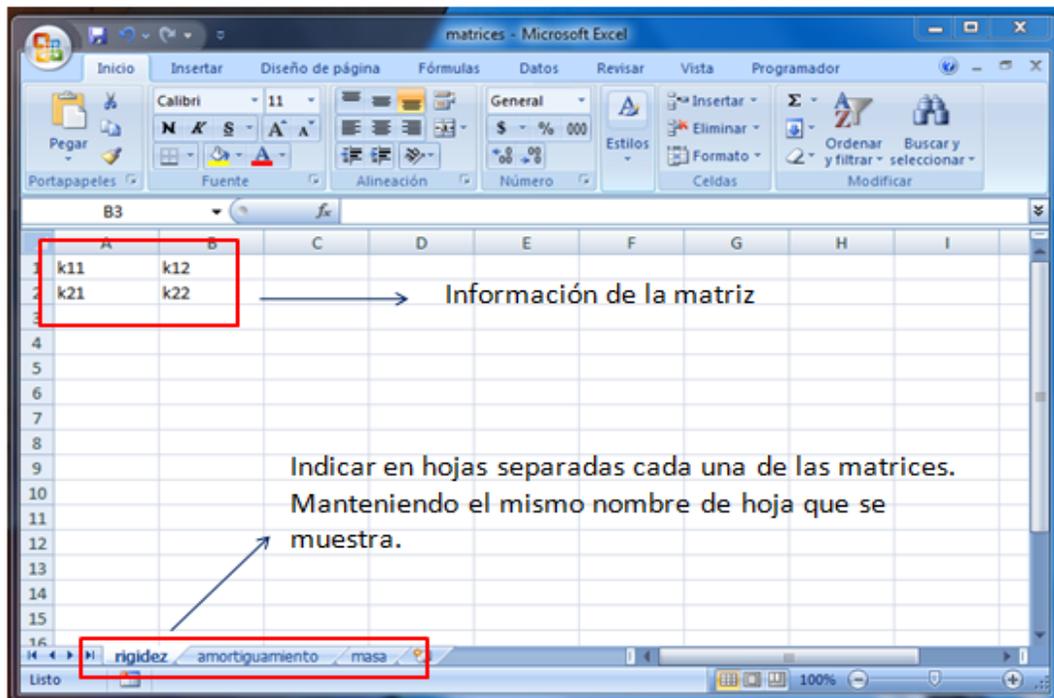


Fig. 16 Organización de archivo de datos

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

Los archivos de datos (.txt) deben estar organizados como se muestra la Fig.17:

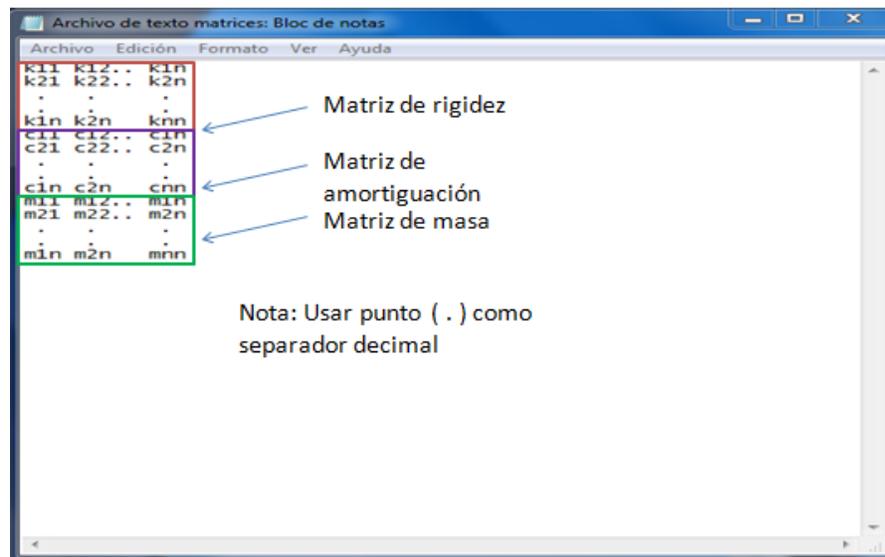


Fig. 17 Organización de archivo de datos de la información del sistema

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

b) Manual:

Se indica el tamaño de las matrices y luego se muestra una tabla con las dimensiones necesarias en donde se ingresan los datos de cada una de las matrices.

En ambos casos todas las unidades de las matrices deben estar en base al sistema internacional de unidades [kgf, m, s].

2. Información de la Fuerza Dinámica: La fuerza dinámica que se evalúa en el desarrollo del programa puede ser ingresada de dos formas: la primera consiste en seleccionar alguno de los registros sísmicos preestablecidos en el programa; la segunda forma consiste en ingresar un archivo de texto que represente un registro sísmico o cualquier otro tipo de fuerza dinámica.

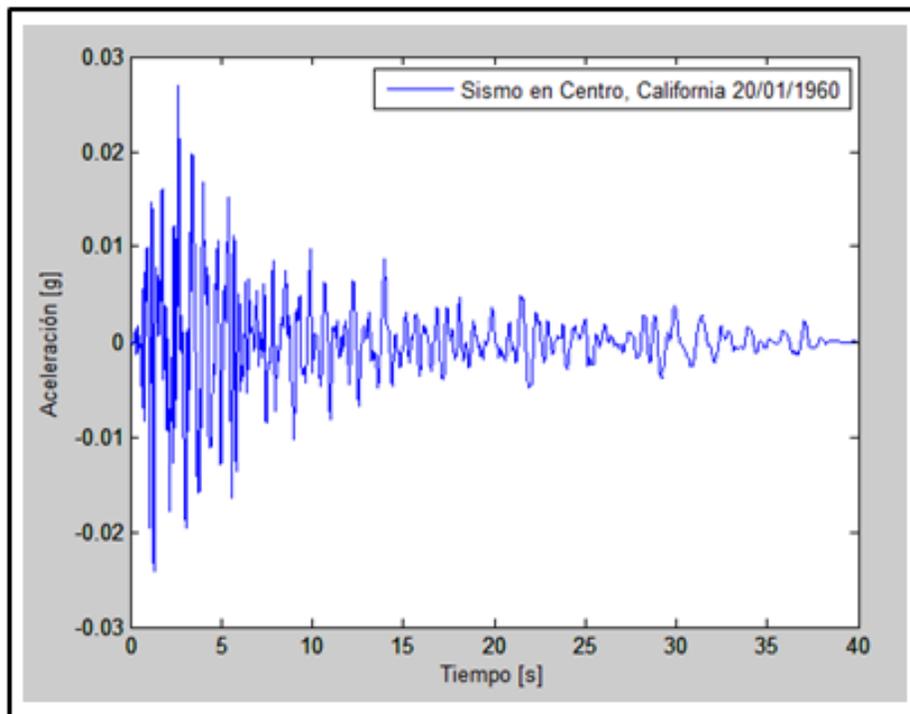
Los registros sísmicos preestablecidos en el programa fueron obtenidos de PEER Strong Motion Database, la cual es una base de datos de registros sísmicos de la

Universidad de Berkeley de California, E.E.U.U. En base a lo anterior, se establecieron como opciones para el programa los siguientes registros:

a) Registro de acelerograma del sismo ocurrido en Centro, California:

Este registro presenta las siguientes características:

- Fecha: 20/01/1960
- Magnitud: 5
- Intervalos de tiempo: 0.005 segundos.
- Duración: 40 segundos.
- Ubicación: California Central, E.E.U.U
- No de puntos: 8000



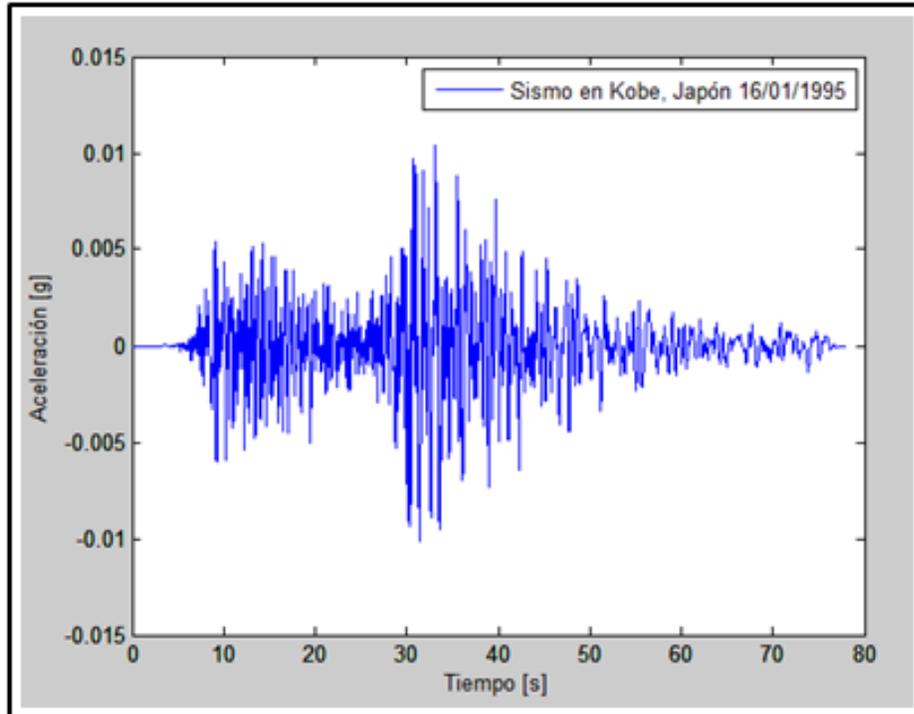
*Fig. 18* Gráfica del Acelerograma registrado en el sismo de Centro, California.

*Fuente:* PEER strong Motion Data Base

b) Registro de acelerograma de un sismo ocurrido en Kobe, Japón:

Este registro presenta las siguientes características:

- Fecha: 16/01/1995
- Magnitud : 6
- Intervalos de tiempo: 0.02 segundos.
- Duración: 78 segundos.
- Ubicación: Kobe, Japón.
- No de puntos: 3900



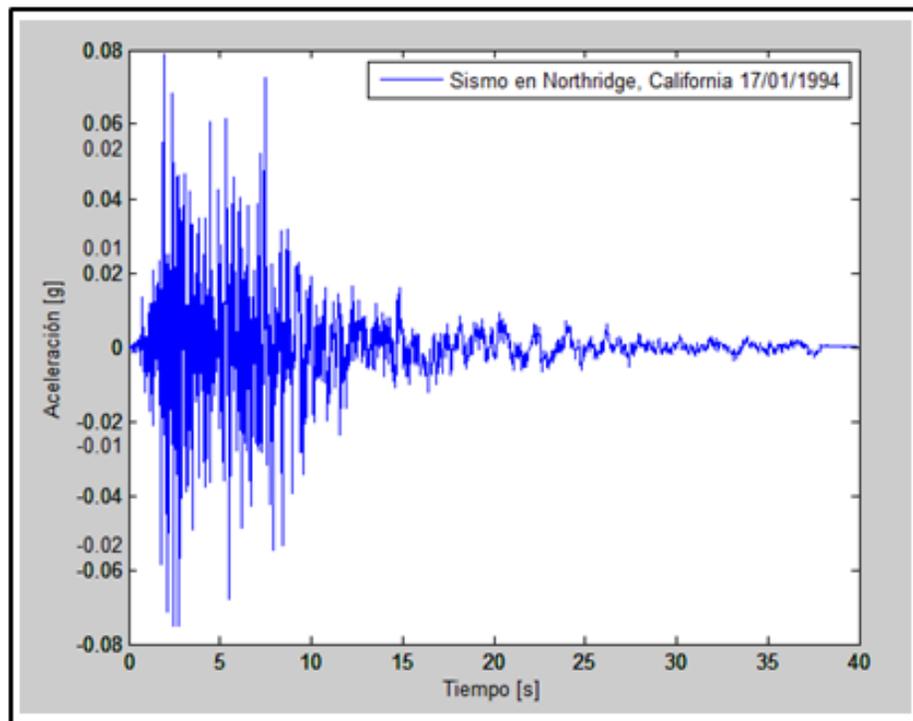
**Fig. 19 Gráfica del Acelerograma registrado en el sismo de Kobe, Japón.**

*Fuente:* PEER strong Motion Data Base

c) Registro de acelerograma del sismo ocurrido en Northridge.

Este registro presenta las siguientes características:

- Fecha: 17/01/1994.
- Magnitud : 6.6
- Intervalos de tiempo: 0.02 segundos.
- Duración: 40 segundos.
- Ubicación: Northridge, California. E.E.U.U.
- No de puntos: 2000

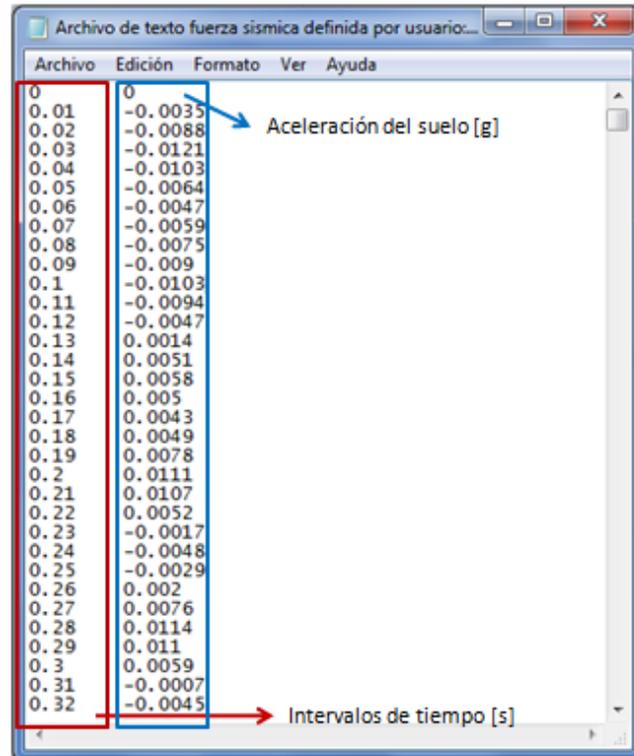


*Fig. 20* **Gráfica del Acelerograma registrado en el sismo de Northridge.**

*Fuente:* PEER strong Motion Data Base

En el caso de preferir indicar un archivo de texto con la información de la fuerza dinámica, se debe considerar lo siguiente:

a) Registro sísmico:



| Intervalos de tiempo [s] | Aceleración del suelo [g] |
|--------------------------|---------------------------|
| 0                        | 0                         |
| 0.01                     | -0.0035                   |
| 0.02                     | -0.0088                   |
| 0.03                     | -0.0121                   |
| 0.04                     | -0.0103                   |
| 0.05                     | -0.0064                   |
| 0.06                     | -0.0047                   |
| 0.07                     | -0.0059                   |
| 0.08                     | -0.0075                   |
| 0.09                     | -0.009                    |
| 0.1                      | -0.0103                   |
| 0.11                     | -0.0094                   |
| 0.12                     | -0.0047                   |
| 0.13                     | 0.0014                    |
| 0.14                     | 0.0051                    |
| 0.15                     | 0.0058                    |
| 0.16                     | 0.005                     |
| 0.17                     | 0.0043                    |
| 0.18                     | 0.0049                    |
| 0.19                     | 0.0078                    |
| 0.2                      | 0.0111                    |
| 0.21                     | 0.0107                    |
| 0.22                     | 0.0052                    |
| 0.23                     | -0.0017                   |
| 0.24                     | -0.0048                   |
| 0.25                     | -0.0029                   |
| 0.26                     | 0.002                     |
| 0.27                     | 0.0076                    |
| 0.28                     | 0.0114                    |
| 0.29                     | 0.011                     |
| 0.3                      | 0.0059                    |
| 0.31                     | -0.0007                   |
| 0.32                     | -0.0045                   |

**Fig. 21 Organización de archivo de datos para fuerza definida por un registro sísmico.**

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

b) Fuerza dinámica general: corresponde a una fuerza dinámica cualquiera que es ejercida sobre alguna de las coordenadas generalizadas (grados de libertad dinámicos) que definen el sistema.

En este caso se debe ingresar un archivo de texto como se muestra en la Fig. 22

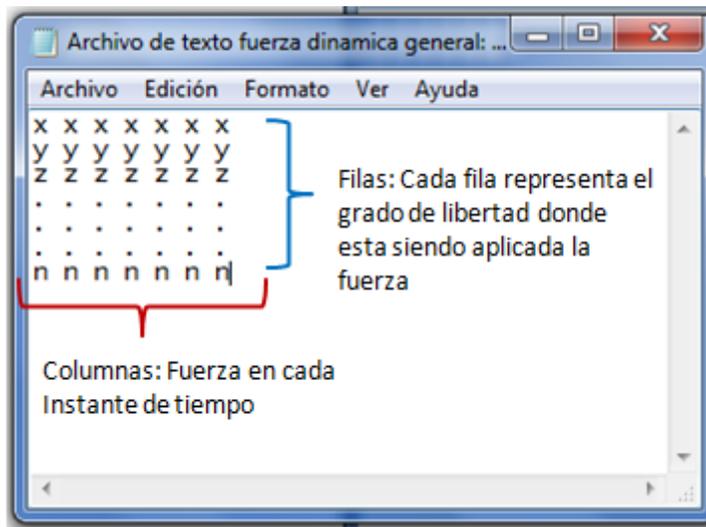


Fig. 22 Organización de archivo de datos para fuerza dinámica general.

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

3. Condiciones Iniciales: se refiere a los valores iniciales de velocidad, desplazamiento y aceleración en las que se encuentra el sistema para el inicio del análisis, estas se pueden considerar como un sistema en estado de reposo u otro que desee definir el usuario a través de un archivo de datos.

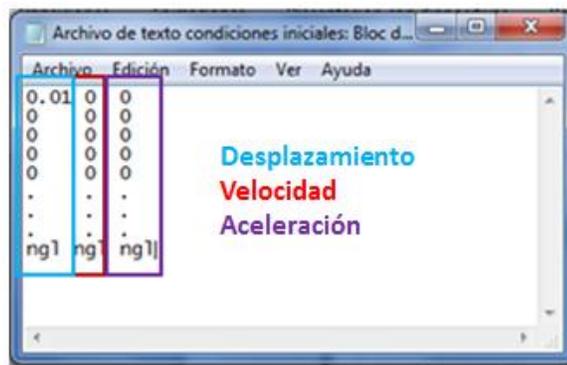


Fig. 23 Organización de archivo de datos para definir las condiciones iniciales

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

## **Bloque 2. Selección de los métodos numéricos:**

Este bloque permite seleccionar los métodos numéricos para los cuales se desea analizar el sistema estructural. Considerando que se pueden seleccionar varios métodos a ser ejecutados simultáneamente.

## **Bloque 3. Ejecución:**

Corresponde a los pasos necesarios que realiza el programa para la ejecución de cada uno de los métodos seleccionados por el usuario.

## **Bloque 4. Resultados:**

Para cada método ejecutado se almacena los resultados de desplazamiento, velocidad y aceleración de cada grado de libertad para cada uno de los instantes de tiempo estudiados.

Los resultados correspondientes a los métodos no seleccionados se mostrarán como nulos.

## **Bloque 5. Análisis de Resultados:**

Se permite analizar los resultados obtenidos por cada método ejecutado de forma individual o realizar una comparación entre 3 métodos que deben ser indicados por el usuario. Para ello se presentan tabulados los valores máximos de desplazamiento, velocidad y aceleración para un grado de libertad escogido por el usuario.

## **Bloque 6. Salida de Resultados:**

Los resultados de desplazamiento, velocidad y aceleración se pueden observar gráficamente. En el caso de análisis comparativo se muestran superpuestos los resultados correspondientes a los métodos seleccionados.

Además, se presenta la opción de generar un archivo de resultados donde se muestran los valores obtenidos de desplazamiento, velocidad y aceleración para cada instante de tiempo, de cada uno de los métodos seleccionados. Este archivo se guardara con el nombre que indique el usuario en la carpeta en donde se encuentre ubicado el programa instalado.

### 3.6. Validación del programa

#### 3.6.1. CASO 1. Calculo manual de las propiedades dinámicas haciendo uso de métodos numéricos.

Se estudiará una estructura aporricada de dos niveles de altura, a fin de obtener sus propiedades dinámicas en cada nivel haciendo uso de todos los métodos numéricos utilizados en el programa.

La estructura a estudiar posee las siguientes características:

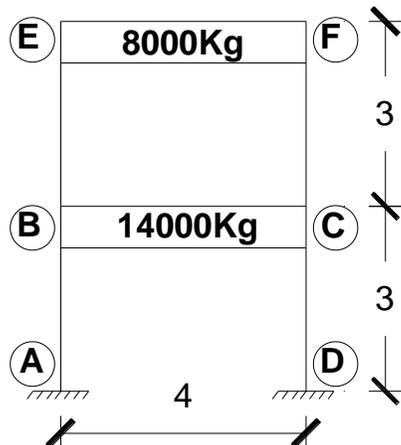


Fig. 24 Modelo de pórtico plano de dos niveles de altura.

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

Donde:

- Las columnas son de 0.30mx0.30m.
- Las vigas son de 0.30mx0.50m.
- Se asume que todos los elementos presentan las hipótesis de área infinita e inercia constante.
- La estructura se concebirá de concreto armado con las siguientes características:
  - El peso específico del concreto armado es  $2500 \text{ kg/m}^3$ .
  - La resistencia nominal a compresión es  $f'c = 250 \text{ kg/cm}^2$ .
- El amortiguamiento de la estructura es  $\zeta = 5\%$ .
- El modulo de elasticidad se define como  $E = 15100\sqrt{f'c}$ .

A continuación, se explicara detalladamente el procedimiento para realizar el cálculo manual y luego se describirá el procedimiento que se debe realizar en el programa creado para evaluar el mismo sistema estructural.

#### ▪ **Calculo Manual**

En primer lugar, es necesario determinar las matrices [K], [M] y [C] para el sistema en cuestión. Estas matrices servirán de datos tanto para el cálculo manual como para el cálculo mediante el programa.

A pesar que la determinación de estas matrices no es el objetivo del presente trabajo, se explicará su cálculo de modo que el lector pueda tener un entendimiento más amplio del tema.

#### ➤ Calculo de la Matriz [K]

El cálculo de la matriz [K] se hará a través de la obtención de la matriz de transformación de coordenadas, la cual se denomina matriz [A]. La determinación de esta matriz depende de los grados de libertad que puede adoptar la estructura de

acuerdo a sus condiciones. Para ello es necesario establecer los sistemas R-r, q-d y Q-D, los cuales se muestran en la Fig.25:

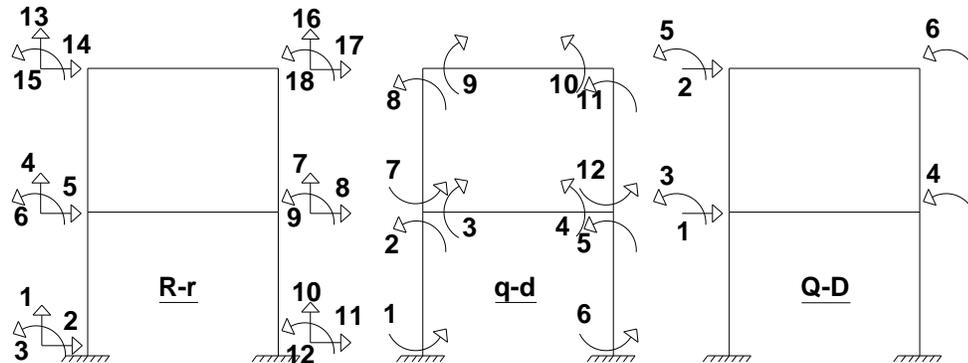


Fig. 25 Sistemas de coordenadas

a) Sistema global de carga estructural “R” y desplazamiento “r”

b) Sistema local de fuerzas “q” y deformación internas “d”

c) Sistema de coordenadas generalizadas Q-D.

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

Para estos sistemas se obtienen los siguientes vectores:

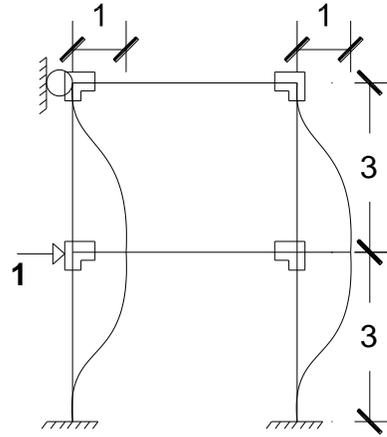
$$[D] = [X_b \ X_e \ \theta_b \ \theta_c \ \theta_e \ \theta_f]$$

$$[d]^t = [\theta_{ab} \ \theta_{ba} \ \theta_{bc} \ \theta_{cb} \ \theta_{cd} \ \theta_{dc} \ \theta_{be} \ \theta_{eb} \ \theta_{ef} \ \theta_{fe} \ \theta_{fc} \ \theta_{cf}]$$

Es conveniente, nombrar primero los grados de libertad dinámicos, ya que de esa forma se hace más sencillo la condensación de la matriz de rigidez a fin de simplificar los cálculos.

Una vez establecidos los grados de libertad de la estructura, se procede a liberar cada uno de ellos por separado de modo que se pueda ubicar la posición de

las juntas del sistema y así predecir el comportamiento de la estructura. Para la coordenada generalizada 1, es decir,  $[D] = [e_1]$ , el comportamiento del sistema es:



**Fig. 26 Deformada y desplazamiento de las juntas para la coordenada generalizada 1.**

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

En base a la deformada generada por la liberación de la coordenada generalizada 1 se calcula el vector  $[d_1]$ , obteniéndose:

$$[d_1]^t = [0.33 \quad 0.33 \quad 0 \quad 0 \quad 0.33 \quad 0.33 \quad -0.33 \quad -0.33 \quad 0 \quad -0.33 \quad -0.33]$$

De la misma forma, se calculan todos los vectores  $[d]$ , los cuales formaran a la matriz  $[A]$ , resultando así lo siguiente:

$$[A] = \begin{vmatrix} 0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.33 & 0.33 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -0.33 & 0.33 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.33 & 0.33 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.33 & 0.33 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Una vez calculada la matriz [A], se debe calcular la matriz de rigidez total de los miembros en coordenadas locales [k], la cual tiene la siguiente forma:

$$[k] = \begin{vmatrix} [k_{ab}] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [k_{bc}] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [k_{bc}] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [k_{be}] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [k_{ef}] & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [0] & [k_{fc}] \end{vmatrix}$$

Dicha matriz depende de las propiedades inerciales y de área de los elementos que conforman al sistema, como lo son las vigas y columnas. Debido a que todos estos elementos presentan las hipótesis de inercia constante y área infinita, la matriz estará compuesta [k<sub>ij</sub>] de cada miembro tiene la siguiente forma:

$$[k]_{ij} = \begin{vmatrix} 4EI/L & 2EI/L \\ 2EI/L & 4EI/L \end{vmatrix}$$

Donde:

- E: Modulo de elasticidad.
- I: Inercia de la sección transversal del tramo.
- L: Longitud del miembro en estudio.
- ij: Tramo de estudio.



|      |             |          |           |           |          |           |
|------|-------------|----------|-----------|-----------|----------|-----------|
|      | KDD         |          | KDS       |           |          |           |
|      | 4543515.52  | -3139511 | -2629554  | 0         | -3693194 | -1063640  |
|      | -3139510.72 | 3139511  | 3693194.4 | 1063640   | 3693194  | 1063640   |
| [K]= | -2629554.44 | 3693194  | 17070765  | 3730499.4 | 3730499  | 0         |
|      | 1.1642E-10  | 1063640  | 3730499.4 | 11758534  | 0        | 1074383.8 |
|      | -3693194.43 | 3693194  | 3730499.4 | 0         | 9609767  | 1074383.8 |
|      | -1063640    | 1063640  | 0         | 1074383.8 | 1074384  | 4297535.3 |
|      | KSD         |          | KDD       |           |          |           |

Sustituyendo las matrices respectivas se obtiene:

$$[K^*] = \begin{vmatrix} - & - \\ 2899085.87 & 1445370 \\ -1445370 & 1262059 \end{vmatrix}$$

La matriz obtenida, será ahora la nueva matriz de rigidez de la estructura [K] con la que se trabajara para obtener las propiedades dinámicas del sistema.

➤ Cálculo de la Matriz de Masa [M]:

En el esquema del sistema presentado en la Fig.24 se encuentran representados los pesos de cada nivel los cuales son:

**Para el Nivel 1:**  $P_1 = 14000 \text{ Kg}$

**Para el Nivel 2:**  $P_2 = 8000 \text{ Kg}$

Para obtener la masa de cada nivel, se debe dividir cada peso entre la gravedad, la cual se tiene como valor  $9,81 \text{ m/s}^2$ , obteniéndose así:

**Para el Nivel 1:**  $m_1 = 1427.12 \frac{\text{Kgs}^2}{\text{m}}$

**Para el Nivel 2:**  $m_2 = 815.49 \frac{kg s^2}{m}$

La matriz de masa [M] se expresa como:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

Al sustituir valores se obtiene:

$$[M] = \begin{bmatrix} 1427.12 & 0 \\ 0 & 815.49 \end{bmatrix}$$

➤ Cálculo de la Matriz de Amortiguamiento [C]:

Para el cálculo de esta matriz se hace uso de la siguiente ecuación:

$$[\zeta] = \frac{1}{2} [Q][A]$$

Ec.3-1

Donde:

- $\zeta$ : Amortiguamiento del sistema.
- Q: Matriz cuadrada que posee las diferencias de potencias de las frecuencias naturales.
- A: Vector columna de constantes.

Antes de hacer uso de la Ec.3-1, es necesario calcular las frecuencias naturales.

Las frecuencias naturales se obtienen haciendo uso de la siguiente ecuación:

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0$$

Ec.3 - 2

Donde:

- [K]: Matriz de rigidez del sistema condensada.
- $\omega$ : Frecuencias del sistema.
- [M]: Matriz de masa del sistema.

Al sustituir los valores de [K] y [M] y resolver se obtienen las frecuencias naturales:

$$\omega_1 = 20.68 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 56.13 \text{ rad/s}$$

Lo siguiente es calcular las constantes  $a$  del sistema haciendo uso de la Ec.3-1:

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_1^3 \\ \omega_2 & \omega_2^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo los valores y resolviendo se logra que:

$$a_1 = 5.32 \times 10^{-3}$$

$$a_2 = -1.12 \times 10^{-6}$$

Una vez calculadas las constantes, se determina finalmente la matriz [C] usando la siguiente ecuación:

$$[C] = [M] \left\{ \sum_{i=1}^2 a_i [M][K] \right\}$$

Ec.3 – 2

Sustituyendo resulta:

$$[C] = \begin{vmatrix} 15419.889 & -7687.75 \\ -7687.75 & 6712.743 \end{vmatrix}$$

➤ Selección de la fuerza dinámica:

En este paso, se debe establecer el origen de la fuerza dinámica que se le inducirán al sistema. Para este caso se definió una fuerza sísmica representada por los 5 primeros instantes del sismo en Kocaeli, Turquía ocurrido el 17 de Agosto de 1999, del cual se obtuvo los siguientes datos:

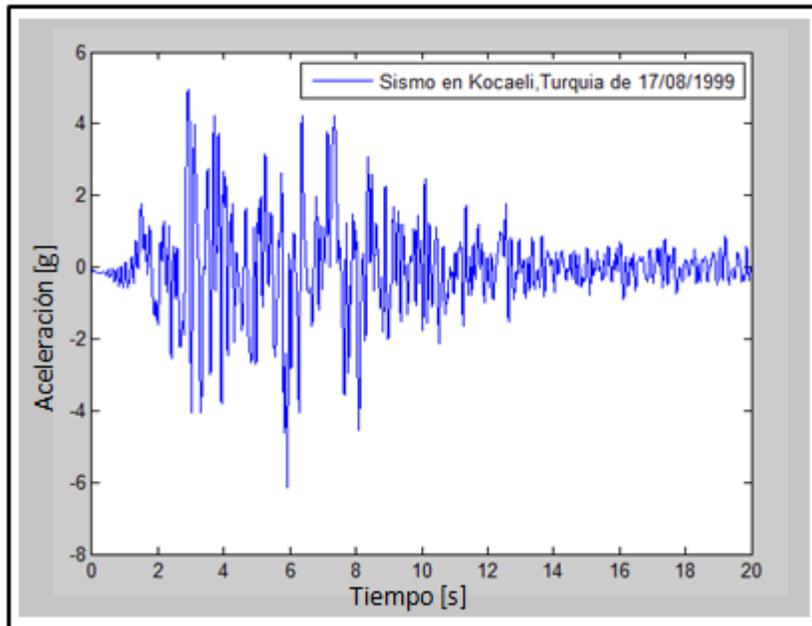
**Tabla 2**

*Datos de la fuerza dinámica para la aplicación de los métodos de numéricos en el caso de estudio 1.*

| Tiempo(s) | Aceleración(g) |
|-----------|----------------|
| 0.00      | -0.009873598   |
| 0.01      | -0.010150866   |
| 0.02      | -0.010072375   |
| 0.03      | -0.009720693   |
| 0.04      | -0.009296636   |
| 0.05      | -0.009039755   |
| 0.06      | -0.00912844    |

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

Además se presenta la grafica del acelerograma del sismo en estudio:



**Fig. 27 Gráfica del acelerograma del sismo ocurrido en Kocaeli, Turquía el 17 de Agosto de 1999.**

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

➤ Aplicación del Método Numérico:

Método de las Diferencias Centrales:

El procedimiento que se utiliza en este método se describe a continuación:

1) Selección de  $\Delta t$ :

Se toma como  $\Delta t$  los mismos intervalos de tiempo dados por la grafica del sismo, para los cuales corresponde el valor de 0,01 segundos.

2) Definición de tramos de estudio:

En este paso se definen los tramos de estudio. Para este caso de estudiaran los siguientes tramos de estudio los cuales son:

**Tabla 3**

*Tramos de estudio para la aplicación del método de diferencias centrales para un sistema estructural plano de dos niveles.*

| Tramo   | Tiempo Inicial ( $t_0$ ) | Tiempo Final ( $t_0+\Delta t$ ) |
|---------|--------------------------|---------------------------------|
| Tramo 1 | 0                        | 0.01                            |
| Tramo 2 | 0.01                     | 0.02                            |
| Tramo 3 | 0.02                     | 0.03                            |
| Tramo 4 | 0.03                     | 0.04                            |

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

Es importante tener en cuenta que se define como tramo de estudio al intervalo de tiempo que existe entre un punto y otro.

3) Calculo del Desplazamiento:

El desplazamiento se calcula haciendo uso de la Ec. 2-44, la cual se describe a continuación:

$$\{M\}^{Eff} * \{u_{t_0+\Delta t}\} = \{F\}^{eff}$$

Ec.2 – 44

Donde:

- $\Delta t$ : Incremento del tiempo igual a 0.01 segundos.
- $[F]^{eff}$ : Vector Columna de Fuerza efectiva.
- $[M]^{eff}$ : Matriz de masa efectiva del sistema.

Las matrices  $[M]^{eff}$  y  $[F]^{eff}$  se calculan mediante las ecuaciones 2-45 y 2-46 respectivamente. Tales ecuaciones se describen a continuación:

$$\{M\}^{Eff} = \frac{1}{\Delta t^2} * [M] + \frac{1}{2\Delta t} * [C]$$

*Ec. 2-45*

$$\{P\}^{Eff} = P_{t_0} - \left( [K] - \frac{2}{\Delta t^2} * [M] \right) * \{u_{t_0}\} - \left( \frac{1}{\Delta t^2} * [M] - \frac{1}{2\Delta t} [C] \right) * \{u_{t_0-\Delta t}\}$$

*Ec. 2-46*

Donde:

- $[M]$ : Matriz de masa del sistema.
- $[C]$ : Matriz de amortiguamiento del sistema.
- $P_{t_0}$ : Vector columna de carga aplicada al sistema en el instante inicial,  $t_0$ .
- $[K]$ : Matriz de rigidez del sistema.
- $\{u_{t_0}\}$ : Vector Columna de desplazamiento del sistema en el instante inicial,  $t_0$  del tramo de estudio.
- $\{u_{t_0-\Delta t}\}$ : Vector columna de desplazamiento del sistema en el instante anterior al inicial,  $t_{0-\Delta t}$ .

*Para el tramo 1:*

Para la determinación de la matriz de masa efectiva, se hace uso de las matrices de masa y rigidez del sistema calculadas anteriormente. Al sustituir dichas matrices en la ecuación 2-45 se obtiene:

$$[M]^{Eff} = \frac{1}{0.01^2} \begin{bmatrix} 1427.12 & 0 \\ 0 & 815.49 \end{bmatrix} + \frac{1}{2 * 0.01} \begin{bmatrix} 15419.9 & -7687.75 \\ -7687.75 & 6712.74 \end{bmatrix}$$

$$[M]^{Eff} = \begin{bmatrix} 913707 & -384387.5 \\ -384387.5 & 417186 \end{bmatrix}$$

La carga que se le aplica al sistema en el instante inicial, se obtiene como el producto de la matriz de masa por el vector aceleración de ese instante de tiempo, arrojando ello lo siguiente:

$$[P_{t_0}] = \begin{bmatrix} 138.2308 \\ 78.9883 \end{bmatrix}$$

El vector desplazamiento para el instante inicial así como también para el instante anterior a dicho instante, estará compuesto de ceros, ya que se considera que el sistema parte del reposo. Tales vectores son:

$$[u_{t_0}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; [u_{t_0-\Delta t}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al sustituir las respectivas matrices en la ecuación 2-46 se obtiene:

$$[P]^{Eff} = \begin{bmatrix} 138.2308 \\ 78.9883 \end{bmatrix}$$

Si se sustituyen los valores de la matriz de masa y carga efectiva, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 913707 & -384387.5 \\ -384387.5 & 417186 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_{1t_0+\Delta t} \\ u_{2t_0+\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 138.2308 \\ 78.9883 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene el desplazamiento para el instante  $t_1$ .

$$[u_{t_0+\Delta t}] = \begin{bmatrix} 9.438E - 06 \\ 9.702E - 06 \end{bmatrix}$$

Donde el primer valor se debe a la coordenada generalizada 1 y el segundo valor a la coordenada generalizada 2.

#### 4) Cálculo de la Velocidad:

La velocidad se obtiene haciendo uso de la Ec. 2-43, la cual es:

$$\{\dot{u}_{t_0}\} = \frac{1}{2 * \Delta t} * [\{u_{t_0+\Delta t}\} - \{u_{t_0-\Delta t}\}]$$

Ec.2 – 43

Donde:

- $[u_{t_0+\Delta t}]$ : Vector desplazamiento obtenido en el instante  $t_0+\Delta t$ , es decir,  $t_1$ .
- $[u_{t_0-\Delta t}]$ : Vector desplazamiento en el instante  $t_0-\Delta t$ .
- $\Delta t$ : Incremento del tiempo entre el tramo  $t_0$  y  $t_1$  igual a 0.01 segundos.

*Tramo 1*

Se sustituyen los respectivos valores obteniéndose así:

$$[\dot{u}_{t_0+\Delta t}] = \begin{bmatrix} 4.692E - 04 \\ 4.826E - 04 \end{bmatrix}$$

Donde el primer valor representa la velocidad en la coordenada generalizada 1 y el segundo valor en la coordenada generalizada 2.

#### 5) Calculo de la Aceleración:

La aceleración se obtiene utilizando la ecuación 2-40, la cual es:

$$\{\ddot{u}_{t_0}\} = \frac{1}{\Delta t^2} (\{u_{t_0+\Delta t}\} - 2\{u_{t_0}\} + \{u_{t_0-\Delta t}\})$$

Ec.2-40

Sustituyendo se tiene:

$$[\ddot{u}_{t_0+\Delta t}] = \begin{bmatrix} 9.248E - 02 \\ 9.712E - 02 \end{bmatrix}$$

Todos los valores de desplazamiento, velocidad y aceleración fueron determinados para el primer tramo, es decir, para el instante  $t_1$ . Luego para calcular los valores del tramo siguiente, se realiza el mismo procedimiento desde el paso 3, pero tomando como valores iniciales de desplazamiento, velocidad y aceleración los obtenidos en el tramo anterior (tramo 1), como valores anteriores al nuevo tramo inicial las condiciones iniciales del sistema y tomando en consideración que el vector  $[Pt_o]$  se recalcula con los valores obtenidos del acelerograma para el instante  $t_2$ . Esto se conoce como actualización de variables.

Al realizar este procedimiento se obtiene:

#### *Tramo 2*

Desplazamiento:

$$[u_{t_o+\Delta t}] = \begin{bmatrix} 1.843E - 05 \\ 1.956E - 05 \end{bmatrix}$$

Velocidad:

$$[\dot{u}_{t_o+\Delta t}] = \begin{bmatrix} 4.380E - 04 \\ 5.00E - 04 \end{bmatrix}$$

Aceleración:

$$[\ddot{u}_{t_o+\Delta t}] = \begin{bmatrix} 8.470E - 02 \\ 1.003E - 01 \end{bmatrix}$$

Finalmente se presentan tabulados los resultados correspondientes a la aplicación del método a todos los tramos de estudio.

**Tabla 4**

*Resumen de los valores obtenidos aplicando el método de diferencias centrales para un sistema estructural plano de dos niveles.*

| Propiedad                       | Tramo 1  | Tramo 2  | Tramo 3  | Tramo 4  |
|---------------------------------|----------|----------|----------|----------|
| Desplazamiento (m)              | 9.44E-06 | 1.84E-05 | 2.63E-05 | 3.21E-05 |
|                                 | 9.70E-06 | 1.96E-05 | 2.94E-05 | 3.79E-05 |
| Velocidad (m/s)                 | 4.69E-04 | 4.38E-04 | 3.93E-04 | 3.50E-04 |
|                                 | 4.83E-04 | 5.01E-04 | 4.72E-04 | 4.65E-04 |
| Aceleración (m/s <sup>2</sup> ) | 9.25E-02 | 8.47E-02 | 7.94E-02 | 6.98E-02 |
|                                 | 9.71E-02 | 1.00E-01 | 9.63E-02 | 9.26E-02 |

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

Método de Newmark

Este método está compuesto por dos suposiciones las cuales son:

- Comportamiento de la aceleración constante.
- Comportamiento de la aceleración lineal.

Para la primera suposición el procedimiento que se utiliza es:

1) Selección de  $\Delta t$ :

Se toma como  $\Delta t$  los mismos intervalos de tiempo dados por la grafica del sismo, según esto el valor de 0,01 segundos.

2) Definición de tramos de estudio:

En este paso se definen los tramos de estudio. Estos corresponden a los mismos realizados en el método de diferencias centrales.

3) Calculo de la matriz de carga efectiva  $[P_c]$ :

Dicha matriz se obtiene haciendo uso de la Ec. 2-62, la cual se describe a continuación:

$$[p_c] = \{p_t\} + [C] * \left( \frac{2}{\Delta t} \{u_{t-\Delta t}\} + \{\dot{u}_{t-\Delta t}\} \right) + .. \\ .. [M] * \left( \frac{4}{\Delta t^2} \{u_{t-\Delta t}\} + \frac{4}{\Delta t} \{\dot{u}_{t-\Delta t}\} + \{\ddot{u}_{t-\Delta t}\} \right)$$

Donde:

- $\Delta t$ : Incremento del tiempo igual a 0.01 segundos.
- $[P_t]$ : Vector Columna de Fuerza a la que se somete el sistema en el instante inicial,  $t - \Delta t$ .
- $[C]$ : Matriz de Amortiguamiento del sistema.
- $[M]$ : Matriz de masa del sistema.
- $\{u_{t-\Delta t}\}$ : Vector Columna de Desplazamiento del sistema en el instante inicial,  $t-\Delta t$ .
- $\{\dot{u}_{t-\Delta t}\}$ : Vector Columna de Velocidad del sistema en el instante inicial,  $t - \Delta t$ .
- $\{\ddot{u}_{t-\Delta t}\}$ : Vector Columna de Aceleración del sistema en el instante inicial,  $t-\Delta t$ .

*Para el Tramo 1*

El sistema en el instante inicial se considera que parte del reposo por lo que los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración serán:

$$[u_{t_0-\Delta t}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; [\dot{u}_{t_0-\Delta t}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; [\ddot{u}_{t_0-\Delta t}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al sustituir los respectivos valores y resolver el sistema que se genera se obtiene:

$$[p_c] = \begin{bmatrix} 142.1126 \\ 81.2064 \end{bmatrix}$$

4) Calculo de la Matriz de Amortiguamiento Efectivo  $[K_c]$ :

*Para el Tramo 1*

La matriz de amortiguamiento efectivo se consigue haciendo uso de la Ec. 2-61, la cual es:

$$[K_c] = [K] + \frac{2}{\Delta t} [C] + \frac{4}{\Delta t^2} [M]$$

Sustituyendo los valores se obtiene lo siguiente:

$$[K_c] = \begin{bmatrix} 2899085.87 & -1445370 \\ -1445370 & 1262059 \end{bmatrix} \dots \\ \dots + \frac{2}{0.01} \begin{bmatrix} 15419.88 & -7687.75 \\ -7687.75 & 6712.74 \end{bmatrix} + \frac{4}{0.01^2} \begin{bmatrix} 1427.12 & 0 \\ 0 & 815.49 \end{bmatrix}$$

Al resolver el sistema resulta:

$$[K_c] = \begin{bmatrix} 63067866 & -2982920 \\ -2982920 & 35224207 \end{bmatrix}$$

5) Calculo del Desplazamiento:

*Tramo 1*

El desplazamiento para el instante  $t_1$  se obtiene usando la Ec. 2-60. Dicha ecuación se describe a continuación:

$$[K_c] * \{u_t\} = [p_c]$$

Al sustituir y resolver el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$[u_t] = \begin{bmatrix} 2.37e - 06 \\ 2.51e - 06 \end{bmatrix}$$

Donde el primer valor corresponde al desplazamiento generado en la coordenada generalizada 1 y el segundo valor en la coordenada generalizada 2.

6) Calculo de la Velocidad:

*Tramo 1*

El cálculo de la velocidad se realiza usando la ecuación 2-59 la cual es:

$$\dot{u}_t = \frac{2}{\Delta t} (u_t - u_{t-\Delta t}) - \dot{u}_{t-\Delta t}$$

Sustituyendo los respectivos valores se obtiene:

$$[\dot{u}_t] = \begin{bmatrix} 0.000474 \\ 0.000501 \end{bmatrix}$$

El primer valor corresponde al obtenido producto del GL1 y el segundo al producido por el GL2.

## 7) Determinación de la Aceleración:

### *Tramo 1*

La aceleración se determina usando la ecuación 2-63, siendo esta la siguiente:

$$\{\ddot{u}_t\} * [M] = \{p_t\} - [C] * \{\dot{u}_t\} - [K] * \{u_t\}$$

Al sustituir los valores y resolviendo el sistema, se tiene:

$$[\ddot{u}_t] = \begin{bmatrix} 0.092161 \\ 0.097525 \end{bmatrix}$$

Para el estudio del tramo 2 el procedimiento es el mismo, partiendo ahora desde el paso numero 3. Es importante destacar que los valores iniciales con los que se obtendrán las propiedades para este tramo son los obtenidos en el tramo anterior, es decir, serán los valores finales del tramo 1. Realizando el procedimiento descrito se obtiene:

### *Tramo 2*

Desplazamiento:

$$[u_t] = \begin{bmatrix} 1.15e - 05 \\ 1.25e - 05 \end{bmatrix}$$

Velocidad:

$$[\dot{u}_t] = \begin{bmatrix} 0.0013 \\ 0.0015 \end{bmatrix}$$

Aceleración:

$$[\ddot{u}_t] = \begin{bmatrix} 0.0817 \\ 0.1001 \end{bmatrix}$$

**Tabla 5**

*Resumen de los valores obtenidos aplicando el método de Newmark suponiendo comportamiento de la aceleración constante para un sistema estructural plano de dos niveles.*

| Propiedad                      | Tramo 1   | Tramo 2   | Tramo 3   | Tramo 4   |
|--------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Desplazamiento(m)              | 2.370E-06 | 1.150E-05 | 2.610E-05 | 4.540E-05 |
|                                | 2.510E-06 | 1.250E-05 | 2.990E-05 | 5.430E-05 |
| Velocidad(m/s)                 | 4.740E-04 | 1.300E-03 | 1.620E-03 | 2.200E-03 |
|                                | 5.010E-04 | 1.500E-03 | 1.972E-03 | 2.900E-03 |
| Aceleración(m/s <sup>2</sup> ) | 9.210E-02 | 8.160E-02 | 6.899E-02 | 4.560E-02 |
|                                | 9.752E-02 | 1.001E-01 | 9.802E-02 | 8.467E-02 |

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011)

Para la segunda suposición del método de Newmark, correspondiente a un comportamiento de la aceleración lineal el procedimiento que se utiliza es el siguiente:

1) Selección de  $\Delta t$ :

Se toma como  $\Delta t$  el valor de 0,01 segundos, previamente establecido en los métodos anteriores.

2) Definición de tramos de estudio:

Se estudiarán los mismos tramos utilizados para los métodos anteriormente descritos.

3) Calculo de la matriz de carga efectiva  $[P_I]$ :

Se obtiene haciendo uso de la Ec. 2-68, la cual se describe a continuación:

$$[p_I] = \{p_t\} + [C] * \left( \frac{3}{\Delta t} \{u_{t-\Delta t}\} + 2 \{\dot{u}_{t-\Delta t}\} + \frac{\Delta t}{2} \{\ddot{u}_{t-\Delta t}\} \right) + \dots$$
$$[M] \left( \frac{6}{\Delta t^2} \{u_{t-\Delta t}\} + \frac{6}{\Delta t} \{\dot{u}_{t-\Delta t}\} + 2\{\ddot{u}_{t-\Delta t}\} \right)$$

Ec. 2 – 68

Donde:

- $[P_t]$ : Vector Columna de Fuerza a la que se somete el sistema en el instante inicial,  $t-\Delta t$ .
- $[C]$ : Matriz de Amortiguamiento del sistema.
- $[M]$ : Matriz de masa del sistema.
- $[u_{t-\Delta t}]$ : Vector Columna de Desplazamiento del sistema en el instante inicial,  $t-\Delta t$ .
- $[\dot{u}_{t-\Delta t}]$ : Vector Columna de Velocidad del sistema en el instante inicial,  $t-\Delta t$ .
- $[\ddot{u}_{t-\Delta t}]$ : Vector Columna de Aceleración del sistema en el instante inicial,  $t-\Delta t$ .

*Para el Tramo 1*

Se considera que el sistema en el instante inicial parte del reposo, por lo que los vectores de desplazamiento, velocidad y aceleración serán:

$$[u_{t-\Delta t}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; [\dot{u}_{t-\Delta t}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; [\ddot{u}_{t-\Delta t}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al sustituir los respectivos valores y resolver el sistema que se genera se obtiene:

$$[p_l] = \begin{bmatrix} 142.1126 \\ 81.2064 \end{bmatrix}$$

4) Calculo de la Matriz de Amortiguamiento Efectivo  $[K_l]$ :

*Para el Tramo 1*

La matriz de amortiguamiento efectivo se consigue haciendo uso de la ecuación 2-67, la cual es:

$$[K_l] = [K] + \frac{3}{\Delta t} [C] + \frac{6}{\Delta t^2} [M]$$

Sustituyendo los valores se obtiene:

$$[K_l] = \begin{bmatrix} 93152256 & -3751695 \\ -3751695 & 52205281 \end{bmatrix}$$

5) Calculo del Desplazamiento:

*Tramo 1*

El desplazamiento para el instante  $t_1$  se obtiene usando la Ec. 2-66.

$$[K_l] * \{u_t\} = [p_l]$$

*Ec. 2 – 66*

Al sustituir y resolver el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$[u_t] = \begin{bmatrix} 1.59e - 06 \\ 1.67e - 06 \end{bmatrix}$$

6) Calculo de la Velocidad:

*Tramo 1*

El cálculo de la velocidad se realiza usando la Ec. 2-65 la cual es:

$$\dot{u}_t = -2\dot{u}_{t-\Delta t} + \frac{3}{\Delta t}(u_t - u_{t-\Delta t}) - \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_{t-\Delta t}$$

*Ec. 2 – 65*

Sustituyendo los respectivos valores se obtiene:

$$[\dot{u}_t] = \begin{bmatrix} 0.0004779 \\ 0.0005010 \end{bmatrix}$$

7) Determinación de la Aceleración:

*Tramo 1*

La aceleración se determina usando la Ec. 2-69, siendo esta la siguiente:

$$\{\ddot{u}_t\} * [M] = \{p_t\} - [C] * \{\dot{u}_t\} - [K] * \{u_t\}$$

*Ec. 2 – 69*

Al sustituir los valores y resolviendo el sistema, se tiene:

$$[\ddot{u}_t] = \begin{bmatrix} 0.0928 \\ 0.0974 \end{bmatrix}$$

El estudio del tramo 2 tiene el mismo procedimiento realizado, partiendo ahora desde el paso numero 3. Para dicho tramo los valores iniciales son los obtenidos en el tramo anterior, es decir, serán los valores finales del tramo 1; realizando este procedimiento se obtiene:

Tramo 2

Desplazamiento:

$$[u_t] = \begin{bmatrix} 1.08e - 05 \\ 1.16e - 05 \end{bmatrix}$$

Velocidad:

$$[\dot{u}_t] = \begin{bmatrix} 0.00134 \\ 0.00149 \end{bmatrix}$$

Aceleración:

$$[\ddot{u}_t] = \begin{bmatrix} 0.0829 \\ 0.1011 \end{bmatrix}$$

**Tabla 6**

*Resumen de los valores obtenidos aplicando el método de Newmark suponiendo comportamiento de la aceleración lineal para un sistema estructural plano de dos niveles.*

| Propiedad                      | Tramo 1   | Tramo 2   | Tramo 3   | Tramo 4   |
|--------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Desplazamiento(m)              | 1.590E-06 | 1.080E-05 | 2.799E-05 | 5.140E-05 |
|                                | 1.670E-06 | 1.160E-05 | 3.146E-05 | 6.088E-05 |
| Velocidad(m/s)                 | 4.779E-04 | 1.340E-03 | 2.061E-03 | 2.579E-03 |
|                                | 5.010E-04 | 1.490E-03 | 2.470E-03 | 3.388E-03 |
| Aceleración(m/s <sup>2</sup> ) | 9.285E-02 | 8.290E-02 | 6.486E-02 | 4.290E-02 |
|                                | 9.748E-02 | 1.011E-01 | 9.881E-02 | 8.868E-02 |

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

Método de Wilson  $\theta$

El procedimiento para hacer uso de este método se describe a continuación:

1) Selección de  $\Delta t$ :

Se toma como  $\Delta t$  el mismo intervalo definido para los métodos descritos anteriormente, el cual corresponde al valor de 0,01 segundos.

2) Factor  $\theta$ :

Para realizar este método se debe seleccionar el valor del factor  $\theta$ , el cual según lo establecido en la descripción del método establecida en el marco teórico de la presente investigación debe cumplir lo siguiente  $1 \leq \theta \leq 1.34$ . Para este caso de estudio se seleccionó  $\theta=1.33$ .

3) Definición de tramos de estudio:

Se estudian los mismos tramos de estudios previamente definidos en la tabla 2. Con la consideración que la aplicación del método de Wilson genera un punto de estudio extra por cada tramo de estudio, que corresponde al intervalo  $t+\theta\Delta t$  definido en la descripción del método.

**Tabla 7**

*Tramos de estudio para la aplicación del método de Wilson  $\theta$  para el caso de estudio de un sistema estructural plano de dos niveles.*

| Tramo   | Tiempo Inicial (t) | Tiempo Final (t+ $\Delta t$ ) | Tiempo Extra (t+ $\theta\Delta t$ ) |
|---------|--------------------|-------------------------------|-------------------------------------|
| Tramo 1 | 0                  | 0.01                          | 0.0133                              |
| Tramo 2 | 0.01               | 0.02                          | 0.0233                              |
| Tramo 3 | 0.02               | 0.03                          | 0.0333                              |
| Tramo 4 | 0.03               | 0.04                          | 0.0433                              |
| Tramo 5 | 0.04               | 0.05                          | 0.0533                              |

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

4) Calculo de la matriz de carga efectiva  $[P]^{eff}$ :

Se obtiene haciendo uso de la Ec. 2-80, la cual se describe continuación:

$$[P]^{eff} = \theta * \{\hat{P}_{t+\theta\Delta t}\} + (1 - \theta) * \{P_t\} + \left( \frac{6}{\theta^2\Delta t^2} * [M] + \frac{3}{\theta\Delta t} * [C] \right) * \{u_t\} + \dots$$

$$\left( \frac{6}{\theta\Delta t} * [M] + 2 * [C] \right) * \{\dot{u}_t\} + \left( 2 * [M] + \frac{\theta\Delta t}{2} * [C] \right) * \{\ddot{u}_t\}$$

Ec. 2 – 80

Donde:

- $[P]^{\text{eff}}$ : Vector Columna de Fuerza a la que se somete el sistema en el instante extra,  $t + \theta t$ .
- $[\widehat{P}_{t+\theta\Delta t}]$ : Vector Columna de Fuerza a la que se somete el sistema en el instante extra  $t + \theta\Delta t$ .
- $[P_t]$ : Vector Columna de Fuerza a la que se somete el sistema en el instante inicial  $t$ .
- $[C]$ : Matriz de Amortiguamiento del sistema.
- $[M]$ : Matriz de masa del sistema.
- $[u_t]$ : Vector Columna de Desplazamiento del sistema en el instante inicial  $t$ .
- $[\dot{u}_t]$ : Vector Columna de Velocidad del sistema en el instante inicial  $t$ .
- $[\ddot{u}_t]$ : Vector Columna de Aceleración del sistema en el instante inicial  $t$ .

*Para el Tramo 1*

Se considera que el sistema parte del reposo, los vectores de desplazamiento y velocidad son:

$$[u_{t=0}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; [\dot{u}_{t=0}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; [\ddot{u}_{t=0}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El vector  $P_{t+\theta\Delta t}$ , se calcula realizando una interpolación entre la fuerza introducida al sistema en el instante de tiempo que se desea hallar  $t + \Delta t$  y la fuerza del siguiente punto de estudio.

Para el primer tramo la interpolación se realizó entre el vector de fuerza en  $t = 0.01$  y  $t = 0.02$ , siendo estos vectores los siguientes:

$$[P_{t=0.01}] = \begin{bmatrix} 142.1126 \\ 81.2064 \end{bmatrix} \quad [P_{t=0.02}] = \begin{bmatrix} 141.0137 \\ 80.5786 \end{bmatrix}$$

Realizando la interpolación entre estos vectores se obtiene:

$$[P_{t+\theta\Delta t=0.0133}] = \begin{bmatrix} 141.7499 \\ 81.9384 \end{bmatrix}$$

Ahora el vector  $[\hat{P}_{t+\theta\Delta t}]$  se obtiene de la Ec. 2-77 la cual es:

$$\hat{P}_{t+\theta\Delta t} = \theta P_{t+\theta\Delta t} + (1 - \theta)P_t$$

Ec.2 – 77

Sustituyendo se obtiene:

$$\hat{P}_{t+\theta\Delta t=0.0133} = 1.33 * \begin{bmatrix} 141.7499 \\ 81.9384 \end{bmatrix} + (1 - 1.33) * \begin{bmatrix} 138.2308 \\ 78.9883 \end{bmatrix}$$

Quedando:

$$[\hat{P}_{t+\theta\Delta t=0.0133}] = \begin{bmatrix} 142.9112 \\ 82.9120 \end{bmatrix}$$

Al sustituir los respectivos valores en la Ec. 2-80 y resolver el sistema que se genera se obtiene:

$$[P]^{eff} = \begin{bmatrix} 144.4558 \\ 84.2068 \end{bmatrix}$$

##### 5) Cálculo de la Matriz de Amortiguamiento Efectivo $[K]^{eff}$ :

*Para el Tramo 1*

La matriz  $[K]^{eff}$  se consigue haciendo uso de la Ec. 2-79, la cual es:

$$[K]^{eff} = \frac{6}{\theta^2\Delta t^2} [M] + \frac{3}{\theta\Delta t} [C] + [K]$$

Ec.2 – 79

Sustituyendo los valores se obtiene:

$$[K]^{eff} = \begin{bmatrix} 54784291.6 & -3179448.95 \\ -3179448.95 & 30437130.1 \end{bmatrix}$$

6) Cálculo del Desplazamiento en  $t + \theta\Delta t$ :

*Tramo 1*

El desplazamiento para el instante  $t + \theta\Delta t$  se obtiene usando la Ec. 2-78. Dicha ecuación se describe a continuación:

$$[K]^{eff} * \{u_{t+\theta\Delta t}\} = [P]^{eff}$$

*Ec. 2 – 78*

Al sustituir y resolver el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$[u_{t+\theta\Delta t=0.0133}] = \begin{bmatrix} 2.81e - 06 \\ 3.06e - 06 \end{bmatrix}$$

7) Cálculo de la Aceleración:

*Tramo 1*

El cálculo de la aceleración se realiza usando la Ec. 2-82 la cual es:

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = \frac{6}{\theta^3\Delta t^2} (u_{t+\theta\Delta t} - u_t) - \frac{6}{\theta^2\Delta t} \dot{u}_t + \left(1 - \frac{3}{\theta}\right) \ddot{u}_t$$

*Ec. 2 – 82*

Sustituyendo los respectivos valores se obtiene:

$$[\ddot{u}_{t+\Delta t=0.01}] = \begin{bmatrix} 0.07166 \\ 0.07804 \end{bmatrix}$$

8) Determinación de la Velocidad:

*Tramo 1*

La velocidad se determina usando la Ec. 2-84, siendo esta la siguiente:

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_{t+\Delta t} + \ddot{u}_t)$$

*Ec. 2 – 84*

Al sustituir los valores y resolviendo el sistema, se tiene:

$$[\dot{u}_{t+\Delta t=0.01}] = \begin{bmatrix} 0.00036 \\ 0.00039 \end{bmatrix}$$

9) Cálculo del Desplazamiento:

*Tramo 1*

El desplazamiento para el instante  $t + \Delta t$  se obtiene usando la Ec.2-85. Dicha ecuación se describe a continuación:

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \Delta t \dot{u}_t + \frac{\Delta t^2}{6} (\ddot{u}_{t+\Delta t} + 2\ddot{u}_t)$$

*Ec. 2 – 84*

Sustituyendo:

$$[u_{t+\Delta t=0.01}] = \begin{bmatrix} 1.194e - 06 \\ 1.300e - 06 \end{bmatrix}$$

Finalizado el estudio del tramo 1 se procede a estudiar el tramo 2. El procedimiento es el mismo, partiendo ahora desde el paso número 4.

*Tramo 2*

Aceleración:

$$[\ddot{u}_{t=0.02}] = \begin{bmatrix} 0.0770 \\ 0.0932 \end{bmatrix}$$

Velocidad:

$$[\dot{u}_{t=0.02}] = \begin{bmatrix} 0.0011 \\ 0.0012 \end{bmatrix}$$

Desplazamiento:

$$[u_{t=0.02}] = \begin{bmatrix} 8.44e - 06 \\ 9.35e - 06 \end{bmatrix}$$

**Tabla 8**

*Resumen de los valores obtenidos aplicando el método de Wilson  $\theta$  para un sistema estructural plano de dos niveles.*

| Propiedad                      | Tramo 1   | Tramo 2   | Tramo 3   | Tramo 4   |
|--------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Desplazamiento(m)              | 1.194E-06 | 8.440E-06 | 2.303E-05 | 4.369E-05 |
|                                | 1.300E-06 | 9.350E-06 | 2.597E-05 | 5.152E-05 |
| Velocidad(m/s)                 | 3.600E-04 | 1.100E-03 | 1.790E-03 | 2.310E-03 |
|                                | 3.900E-04 | 1.200E-03 | 2.120E-03 | 2.980E-03 |
| Aceleración(m/s <sup>2</sup> ) | 7.166E-02 | 7.700E-02 | 6.140E-02 | 4.190E-02 |
|                                | 7.804E-02 | 9.320E-02 | 9.052E-02 | 8.080E-02 |

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

Método de Houbolt

1) Selección de  $\Delta t$ :

Se toma como  $\Delta t$  los mismos intervalos de tiempo dados por la grafica del sismo, para los cuales corresponde el valor de 0,01 segundos.

2) Definición de tramos de estudio:

Se estudiaron los mismos tramos de estudio definidos en los métodos anteriores.

3) Determinación de la Matriz  $[K]^{eff}$ :

*Tramo 1*

La matriz  $[K]^{eff}$  para el primer tramo de estudio se obtiene mediante la Ec. 2-104, la cual es:

$$[K]^{eff} = \frac{6}{\Delta t^2} * [M] + \frac{3}{\Delta t} * [C] + [K]$$

*Ec. 2 – 104*

Al sustituir los valores se obtiene:

$$[K]^{eff} = \begin{bmatrix} 93152256 & -3751695 \\ -3751695 & 52205281 \end{bmatrix}$$

4) Cálculo de la Carga Efectiva  $[P]^{eff}$ :

*Tramo 1*

La carga efectiva se determina haciendo uso de la Ec. 2-105 para el primer tramo de estudio, que es:

$$[P]^{eff} = \{P_{0+\Delta t}\} + \left(\frac{6}{\Delta t^2} * [M] + \frac{3}{\Delta t} * [C]\right) * \{U_0\} - \dots$$

$$\left(\frac{6}{\Delta t^2} * [M] + 2 * [C]\right) * \{\dot{U}_0\} + \left(2 * [M] + \frac{1}{2} \Delta t * [C]\right) * \{\ddot{U}_0\}$$

Ec. 2 – 105

Sustituyendo, se obtiene:

$$[P]^{eff} = \begin{bmatrix} 142.1126 \\ 81.2064 \end{bmatrix}$$

5) Cálculo del Desplazamiento:

*Tramo 1*

El desplazamiento se obtiene a partir de la Ec. 2-103, que es:

$$[K]^{eff} * \{u_{t+\Delta t=0.01}\} = [P]^{eff}$$

Ec. 2 – 103

Al sustituir los valores y resolver el sistema que se genera, se obtiene:

$$[u_{t+\Delta t=0.01}] = \begin{bmatrix} 1.59e - 06 \\ 1.67e - 06 \end{bmatrix}$$

6) Cálculo del vector  $u_{0-\Delta t}$ :

*Tramo 1*

Se calcula haciendo uso de la Ec. 2-101 la cual es:

$$u_{0-\Delta t} = \Delta t^2 * \ddot{u}_0 + 2 u_0 - u_{0+\Delta t}$$

Ec. 2 – 101

Al igual que en los métodos anteriores se asume que el sistema parte del reposo. Por lo que quedan los siguientes vectores:

$$[u_{t=0}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; [\dot{u}_{t=0}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; [\ddot{u}_{t=0}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Al sustituir en la Ec. 2-101, se obtiene:

$$u_{0-\Delta t} = 0.01^2 * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.59e - 06 \\ 1.67e - 06 \end{bmatrix}$$

Quedando lo siguiente:

$$[u_{0-\Delta t}] = - \begin{bmatrix} 1.59e - 06 \\ 1.67e - 06 \end{bmatrix}$$

7) Calculo del vector  $u_{0-2\Delta t}$ :

*Tramo 1*

Se calcula con la Ec.2-102, la cual es:

$$u_{0-2\Delta t} = 6 \Delta t * \dot{u}_0 + 6 \Delta t^2 * \ddot{u}_0 - 8 u_{0+\Delta t} + 9 u_0$$

*Ec. 2 – 102*

Sustituyendo se obtiene:

$$u_{0-2\Delta t} = 6 * 0.01 * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 6 * 0.01^2 * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 1.59e - 06 \\ 1.67e - 06 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quedando lo siguiente:

$$[u_{0-2\Delta t}] = -8 \begin{bmatrix} 1.59e - 06 \\ 1.67e - 06 \end{bmatrix}$$

8) Determinación de la Velocidad:

*Tramo 1*

La velocidad se obtiene haciendo uso de la Ec. 2-93, la cual es:

$$\dot{u}_{t+\Delta t=0.01} = \frac{1}{6 \Delta t} [11 u_{t+\Delta t} - 18 u_t + 9 u_{t-\Delta t} - 2 u_{t-2\Delta t}]$$

Ec. 2 – 93

Sustituyendo:

$$[\dot{u}_{t+\Delta t=0.01}] = \begin{bmatrix} 0.0004770 \\ 0.0005010 \end{bmatrix}$$

9) Calculo de la Aceleración:

*Tramo 1*

La aceleración se obtiene haciendo uso de la Ec. 2-94, que es:

$$\ddot{u}_{t+\Delta t=0.01} = \frac{1}{\Delta t^2} [2 u_{t+\Delta t} - 5 u_t + 4 u_{t-\Delta t} - u_{t-2\Delta t}]$$

Ec. 2 – 94

Al sustituir, se obtiene:

$$[\ddot{u}_{t+\Delta t=0.01}] = \begin{bmatrix} 0.09540 \\ 0.10019 \end{bmatrix}$$

10) Actualización de Variables:

Una vez estudiado el tramo, se debe realizar una actualización de variables, de modo que los valores obtenidos para el tramo estudiado se conviertan en los

valores iniciales del siguiente tramo de estudio. Esta actualización se realiza con la Ec. 2-106 la cual se muestra a continuación:

$$\{u_{t-\Delta t}\} \Rightarrow \{u_{t-2\Delta t}\} \quad \{u_t\} \Rightarrow \{u_{t-\Delta t}\} \quad \{u_{t+\Delta t}\} \Rightarrow \{u_t\}$$

Ec. 2 – 106

Al sustituir los respectivos valores se obtiene que para el tramo 2:

$$\{u_{t-2\Delta t}\} = \begin{bmatrix} -1.59e - 06 \\ -1.67e - 06 \end{bmatrix}$$

$$\{u_{t-\Delta t}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\{u_t\} = \begin{bmatrix} 1.59e - 06 \\ 1.67e - 06 \end{bmatrix}$$

Una vez determinado los desplazamientos, velocidades y aceleraciones del tramo 1 se procede a calcular los mismos valores para el tramo 2.

Se realiza el mismo procedimiento desde el paso 3 hasta el paso 10, obviando los pasos 4, 6, 7 pues los valores de estos vectores ya fueron obtenidos en el tramo anterior.

Además se debe tomar en consideración que la matriz  $[K]^{eff}$  y  $[P]^{eff}$  deben ser calculados con la Ec.2-97 y la Ec.2-98, respectivamente.

Los valores obtenidos al realizar dicho procedimiento fueron:

*Tramo 2*

Desplazamiento:

$$[u_{t1+\Delta t}] = \begin{bmatrix} 7.55e - 06 \\ 8.31e - 06 \end{bmatrix}$$

Velocidad:

$$[\dot{u}_{t1+\Delta t}] = \begin{bmatrix} 0.0009596 \\ 0.0010789 \end{bmatrix}$$

Aceleración:

$$[\ddot{u}_{t1+\Delta t}] = \begin{bmatrix} 0.0873 \\ 0.0995 \end{bmatrix}$$

**Tabla 9**

*Resumen de los valores obtenidos aplicando el método de Houbolt para un sistema estructural plano de dos niveles.*

| Propiedad                      | Tramo 1   | Tramo 2   | Tramo3    | Tramo 4   |
|--------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Desplazamiento(m)              | 1.590E-06 | 7.550E-06 | 1.930E-05 | 3.660E-05 |
|                                | 1.670E-06 | 8.310E-06 | 2.220E-05 | 4.390E-05 |
| Velocidad(m/s)                 | 4.770E-04 | 9.590E-04 | 1.511E-03 | 1.999E-03 |
|                                | 5.010E-04 | 1.078E-03 | 1.820E-03 | 2.590E-03 |
| Aceleración(m/s <sup>2</sup> ) | 9.540E-02 | 8.730E-02 | 7.207E-02 | 5.386E-02 |
|                                | 1.590E-06 | 7.550E-06 | 9.453E-02 | 8.562E-02 |

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

- **Aplicación del programa de cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos.**

A continuación se explica el procedimiento a seguir para determinar las propiedades dinámicas del sistema anteriormente explicado haciendo uso del Programa "Calculo de Propiedades Dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos"

## Bloque1. Introducción y Lectura de Datos:

- ✓ Iniciar el programa.
- ✓ Pulsar el botón “Inicio” en la pantalla principal.
- ✓ Seleccionar en el panel “Opciones de Lectura” la forma de entrada de datos. En este caso se toma la opción “Manual”.
- ✓ Colocar en la casilla “Tamaño” el número de grados de libertad del sistema y pulsar el botón “Actualizar Tamaño”. Para el sistema en cuestión el número de grados de libertad es 2. Luego hacer clic en la celda perteneciente a cada matriz para introducir el valor.

La ventana de entrada de datos debe mostrar lo siguiente:

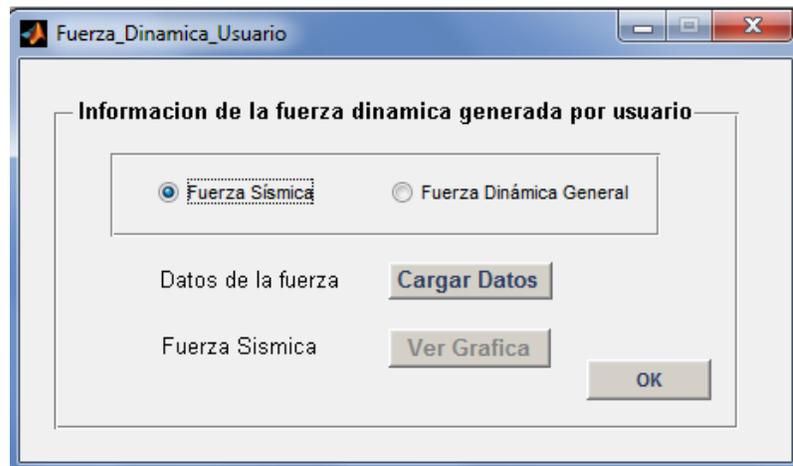
The screenshot shows a software window titled "Datos de Entrada" with a sub-header "Información del Sistema". It contains several sections:

- Opciones de lectura:** Radio buttons for "Archivo" and "Manual" (selected). A dropdown menu shows "Texto (.txt)". A "Cargar Archivo" button is present. A "Tamaño" field contains the value "2", and an "Actualizar Tamaño" button is next to it.
- Matriz de Rigidez:** A 2x2 matrix with values:  $\begin{bmatrix} 2.9e+006 & -1.4e+006 \\ -1.4e+006 & 1.3e+006 \end{bmatrix}$
- Matriz de Amortiguacion:** A 2x2 matrix with values:  $\begin{bmatrix} 1.5e+004 & -7.7e+003 \\ -7.7e+003 & 6.7e+003 \end{bmatrix}$
- Matriz de masa:** A 2x2 matrix with values:  $\begin{bmatrix} 1.4e+003 & 0 \\ 0 & 8.2e+002 \end{bmatrix}$
- Fuerza Dinámica:** A dropdown menu set to "Definida por Usuario" and a "Cargar" button.
- Condiciones Iniciales:** Radio buttons for "Reposo" (selected) and "Otro", with a "Cargar" button.
- A "CONTINUAR" button is located at the bottom right of the window.

**Fig.28 Ventana de entrada de datos del programa para el cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos para el caso de estudio 1.**

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

- ✓ En el panel “Fuerza Dinámica” se selecciona el tipo de fuerza que se le inducirá al sistema. Para este caso se selecciona la opción “Definida por usuario” y luego se oprime el botón “Cargar”.
- ✓ Aparece la ventana de fuerza dinámica usuario donde se selecciona la opción fuerza sísmica.



**Fig.29 Ventana para indicar la fuerza dinámica definida por usuario del programa para el cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos en el caso de estudio 1.**

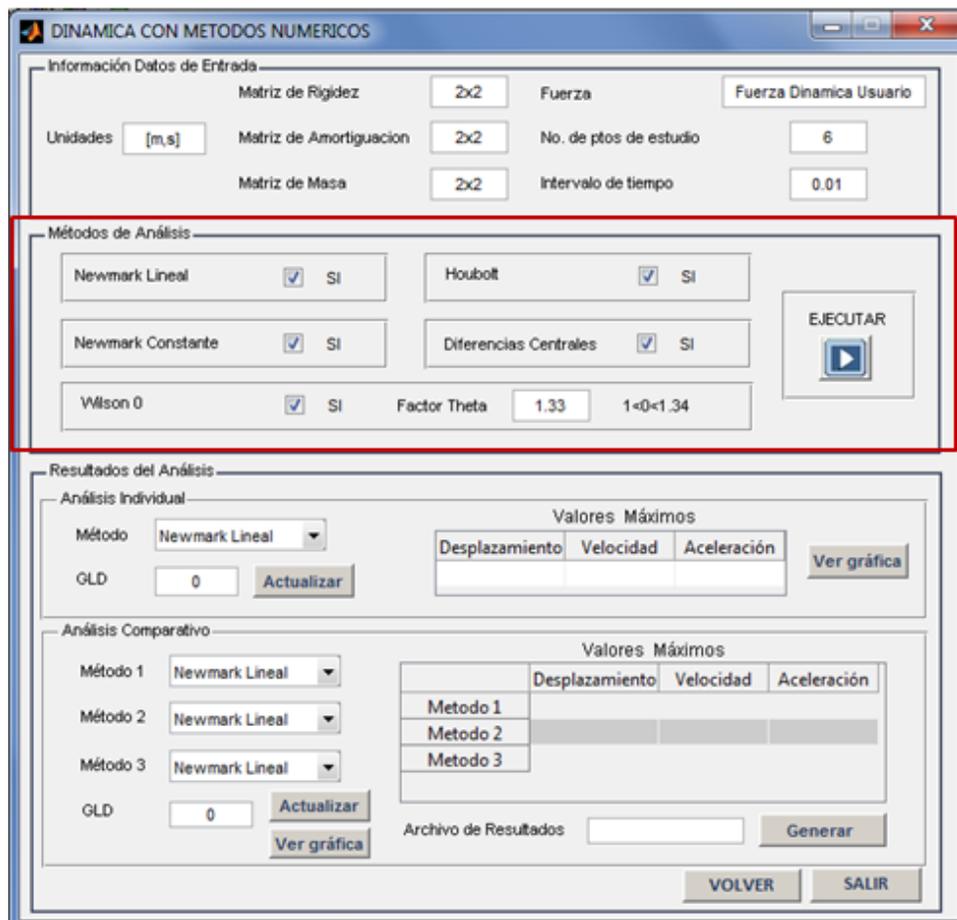
*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

- ✓ Luego se pulsa el botón “Cargar Datos” para ubicar el archivo en el que se encuentra la fuerza dinámica a la que se desea someter el sistema. En este caso se definió un archivo con los datos del sismo descrito anteriormente en la descripción del cálculo manual.
- ✓ Para salir de esta ventana se pulsa OK y se retorna a la ventana de entrada de datos donde se debe seleccionar en el bloque de “Condiciones Iniciales” la opción “Reposo”. Esto indica que el sistema parte del reposo.

- ✓ Para finalizar la entrada de datos, pulsar el botón “CONTINUAR”.

Bloque 2. Selección de los métodos numéricos a ejecutar.

- ✓ Hacer clic en todos los métodos a utilizar para el análisis en el panel “Métodos a Analizar”.
- ✓ Ingresar el valor del factor  $\theta$  en la casilla “Factor Theta”. Colocar 1.33 para este caso.

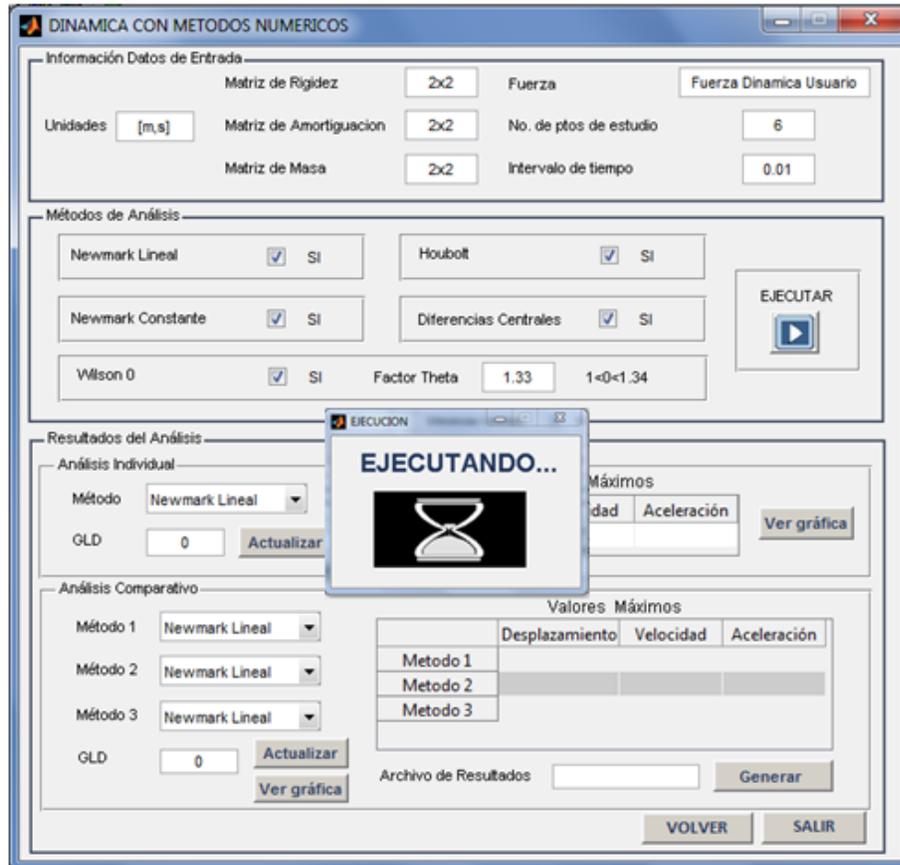


**Fig.30** Ventana para la selección de los métodos numéricos a ejecutar en el programa para el cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos para el caso de estudio 1.

*Fuente:* Di Benedetto y Segovia (2011).

### Bloque 3. Ejecución

- ✓ Pulsar el Botón “EJECUTAR en la ventana presentada en la Fig.30.
- ✓ Mientras se ejecuta aparecerá la siguiente ventana.



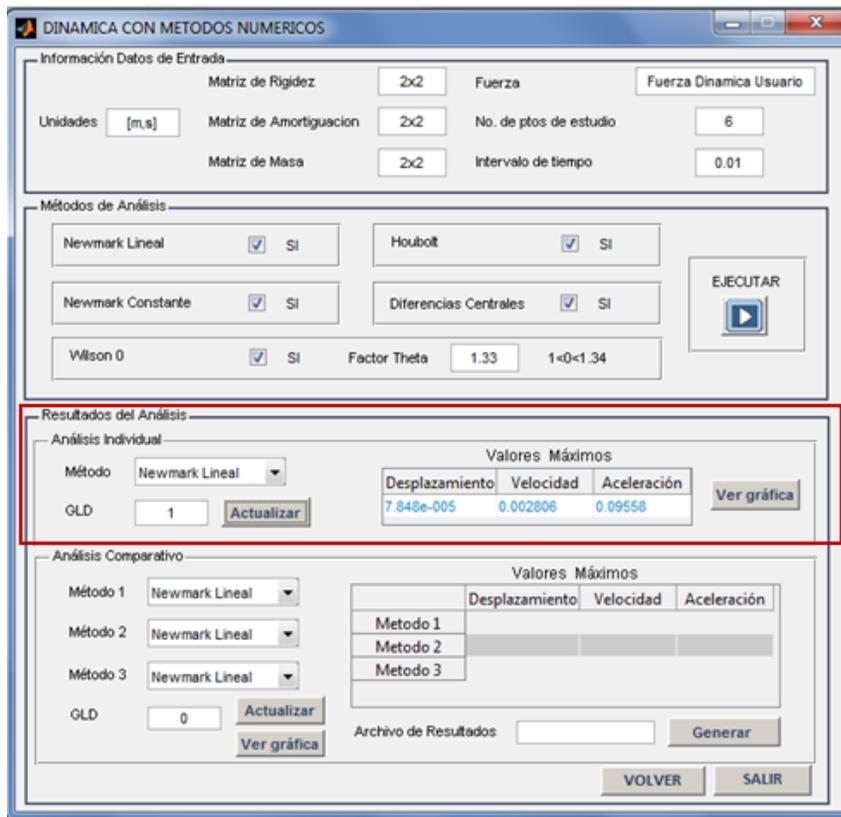
**Fig.31 Ventana durante la ejecución de los métodos seleccionados en el programa para cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos para el caso de estudio 1.**

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

### Bloque 4. Análisis de Resultados.

- ✓ Seleccionar en la opción “Método” del panel “Análisis Individual” el método para el cual se quieren visualizar los resultados. Tomar en este caso Newmark Lineal.

- ✓ Ingresar en la celda “GLD” el número del grado de libertad para el cual se desea visualizar sus propiedades dinámicas. Colocar 1 para este caso y pulsar el botón “Actualizar”.
- ✓ Al pulsar “Actualizar” aparecerán los valores máximos correspondientes al grado de libertad seleccionado.



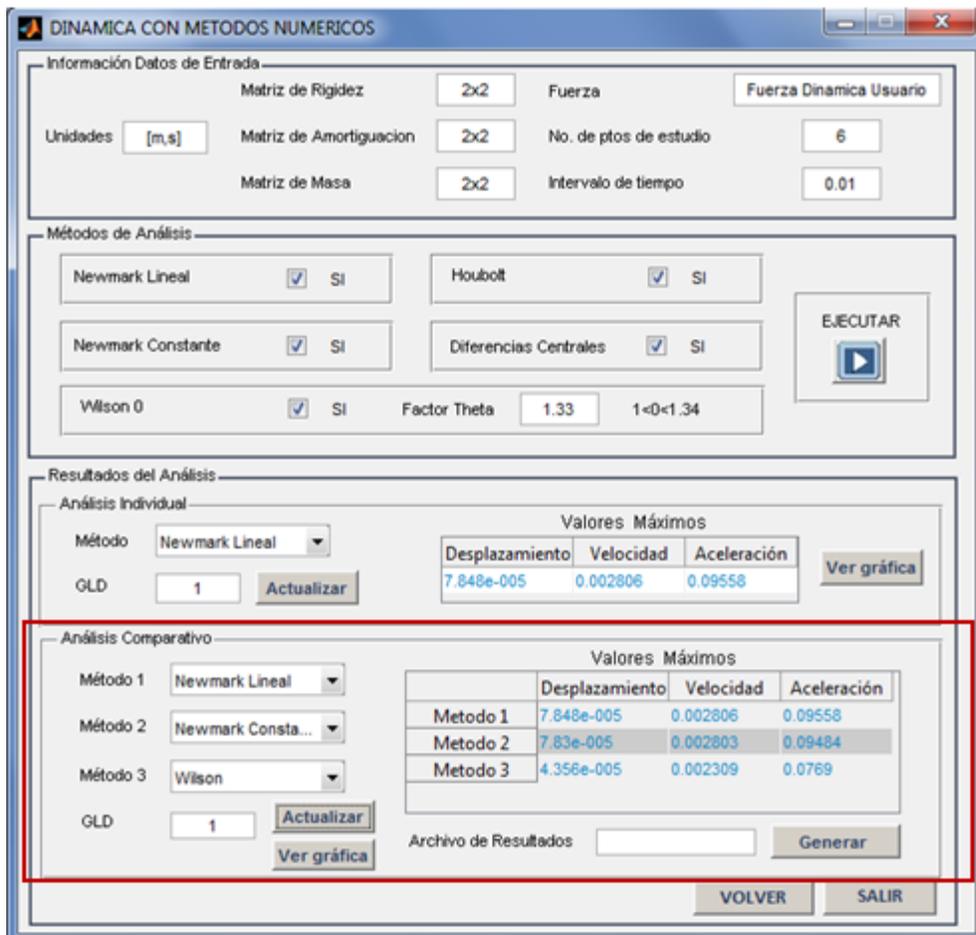
**Fig.32** Ventana de resultados en el análisis individual del método de Newmark lineal para el grado de libertad 1, en el programa para cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos para el caso de estudio 1.

*Fuente:* Di Benedetto y Segovia (2011).

- ✓ En caso de desear realizar un análisis comparativo, seleccionar en el bloque “Análisis Comparativo” los métodos que se desean visualizar en conjunto

para un grado de libertad en específico. Seleccionar para este caso los métodos Newmark Lineal, Newmark Constante y Wilson, para el grado de libertad dinámico 1 y hacer clic en actualizar.

- ✓ Al pulsar “Actualizar”, se mostraran los valores de las propiedades dinámicas máximos para cada método.

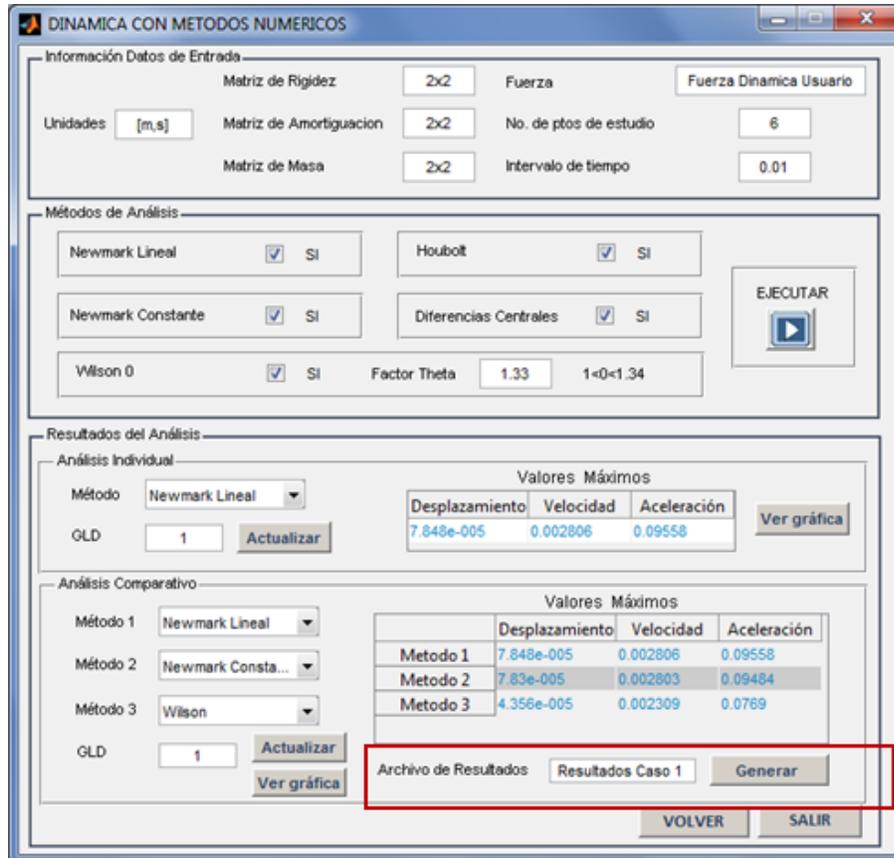


**Fig.33** Ventana de resultados en el análisis comparativo entre el método de Newmark lineal, Newmark constante y Wilson para el grado de libertad dinámico 1, en el programa para cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos para el caso de estudio 1.

*Fuente:* Di Benedetto y Segovia (2011).

## Bloque 5. Resultados.

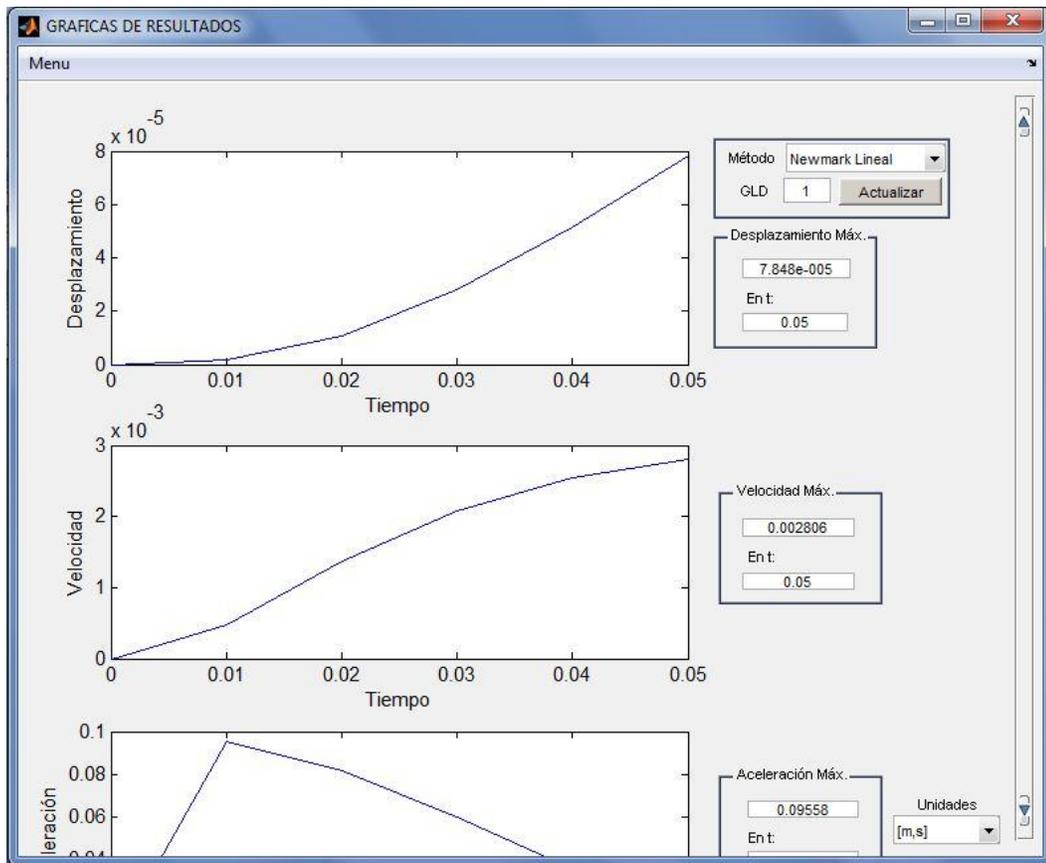
- ✓ Si se desea obtener el archivo de resultados correspondientes al análisis realizado, se debe indicar su nombre en la casilla de texto y oprimir el botón generar.



**Fig.34** Ventana donde se indica como generar el archivo de resultados en el programa para cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos para el caso de estudio 1.

*Fuente:* Di Benedetto y Segovia (2011).

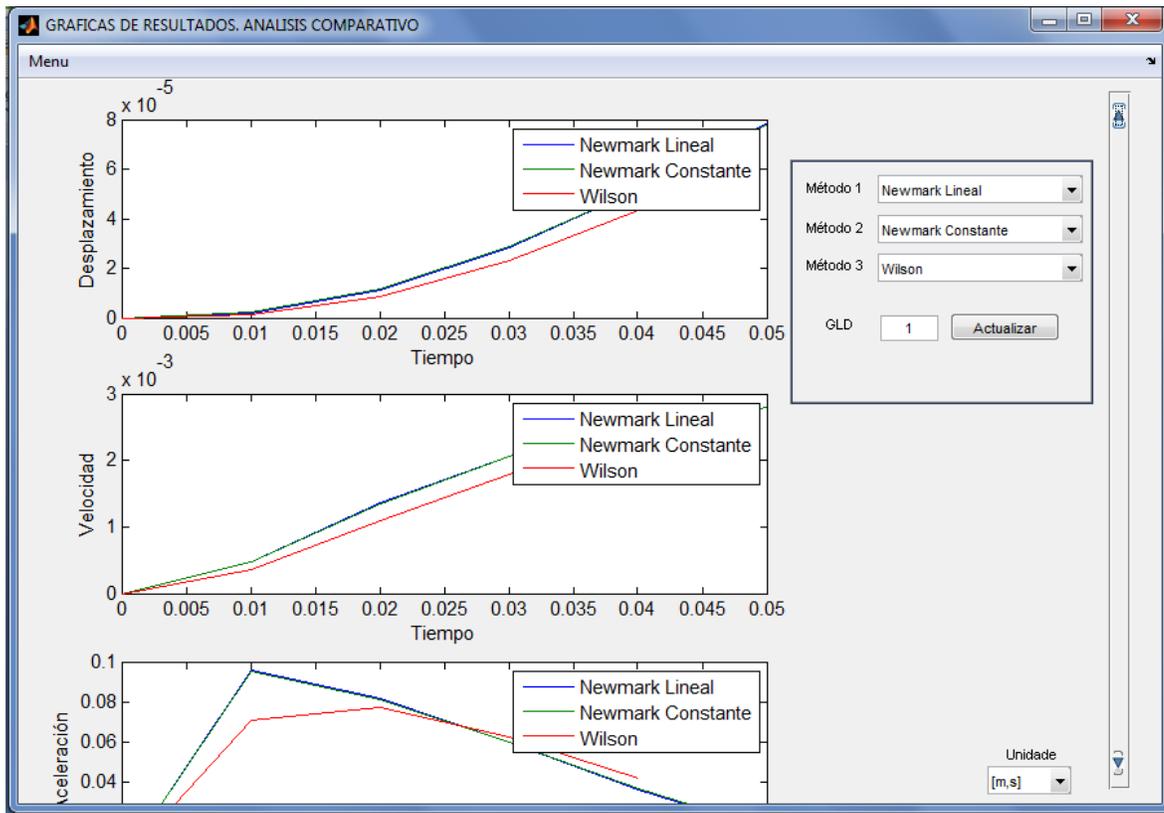
- ✓ Oprimir el botón “Ver Gráfica” del panel “Análisis Individual” si se desea visualizar las gráficas de las propiedades dinámicas obtenidas por el método y grado de libertad seleccionado previamente en este panel.



**Fig.35 Ventana de graficas de resultados para análisis individual en el programa para cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos para el caso de estudio 1.**

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

- ✓ Oprimir el botón “Ver Gráfica” del panel “Análisis Comparativo” si se desea visualizar las gráficas de las propiedades dinámicas obtenidas para el grado de libertad y métodos seleccionados en este panel. Se mostrará una gráfica por cada propiedad superponiendo los métodos seleccionados.



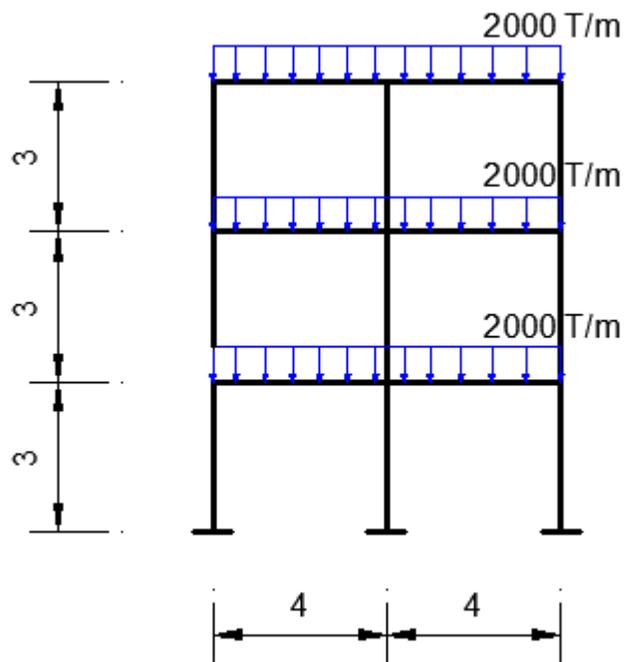
**Fig.36 Ventana de graficas de resultados para análisis comparativo en el programa para cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos para el caso de estudio 1.**

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

3.6.2. Caso 2. Calculo de las propiedades dinámicas de un sistema estructural plano haciendo uso de SAP 2000.

Se plantea el estudio de un pórtico de 3 niveles de altura a fin de obtener sus propiedades dinámicas haciendo uso del programa de cálculo estructural SAP 2000 y del programa elaborado.

La estructura a estudiar posee las siguientes características:



**Fig.37 Sistema estructural en el plano de 3 niveles de altura para el caso de estudio 2.**

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

Donde se debe considerar lo siguiente:

- Las columnas son de 0.30mx0.30m.
- Las vigas son de 0.30mx0.30m.

- La estructura se concebirá de concreto armado y presenta las siguientes características:

- El peso específico del concreto armado es 2500 kg/m<sup>3</sup>.
- El módulo de elasticidad se define como:

$$E = 21737065 \times 10^3 \text{ kg/m}^2$$

- La masa a considerar para la estructura es solo el peso generado por la carga distribuida que se encuentra aplicada sobre las vigas.
- Para este caso de estudio se definió como fuerza dinámica el acelerograma correspondiente al sismo del Centro, California.
- La estructura será analizada mediante el método de Newmark suponiendo aceleración constante.

▪ **Aplicación del programa de cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos.**

Para la aplicación del programa de cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos es necesario previamente calcular la matriz de rigidez, masa y amortiguación que definen las características del sistema estructural a estudiar. Estas matrices se calculan siguiendo el procedimiento establecido en el caso de estudio 1 y se obtiene lo siguiente:

➤ **Matriz [K]:**

$$[K] = \begin{bmatrix} 2761100 & -1538100 & 285700 \\ -1538100 & 2278000 & -1080600 \\ 285700 & -1080600 & 836900 \end{bmatrix}$$

➤ **Matriz de Masa [M]:**

$$[M] = \begin{bmatrix} 1630.9888 & 0 & 0 \\ 0 & 1630.9888 & 0 \\ 0 & 0 & 1630.9888 \end{bmatrix}$$

➤ **Matriz de Amortiguamiento [C]:**

Se considera que la estructura no posee amortiguamiento, por lo cual su matriz de amortiguación estará compuesta de ceros.

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

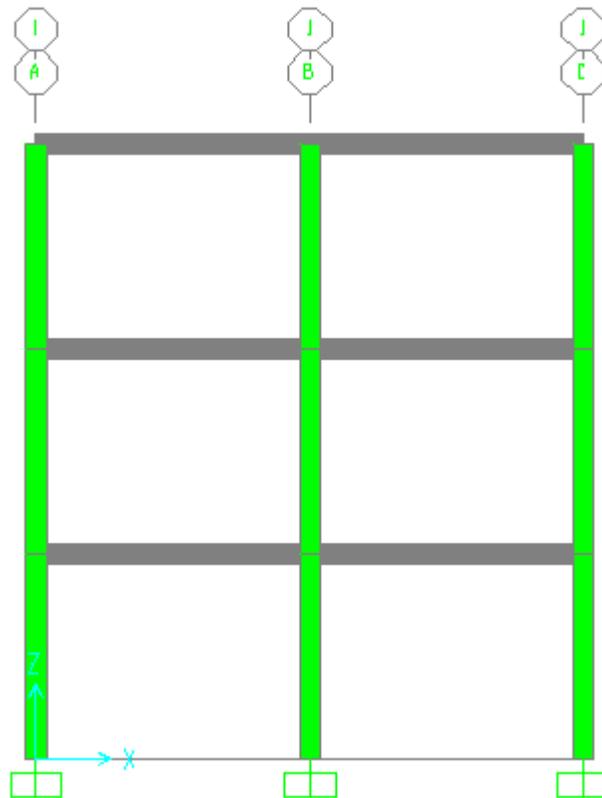
Una vez calculada estas matrices se define la carga dinámica a utilizar la cual para este caso de estudio corresponde al sismo ocurrido en Centro, California. Este registro sísmico se encuentra preestablecido en el programa para el cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos.

Se define como método de estudio el método de Newmark bajo la suposición de comportamiento de la aceleración constante y se ejecuta el programa.

▪ **Aplicación del programa SAP 2000:**

A continuación se detallara el procedimiento para analizar el sistema estructural antes planteado utilizando SAP 2000:

- ✓ Modelar el sistema estructural con las condiciones y características representadas en la Fig. 36.



**Fig.38 Modelado del sistema estructural en el plano de 3 niveles de altura para el caso de estudio 2 en el programa SAP 2000.**

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

- ✓ Definir el acelerograma seleccionado:

El acelerograma del sismo ocurrido en Centro, California debe ser establecido en SAP 2000 como una función de carga dinámica a través de un archivo de datos. A continuación se detalla el procedimiento a seguir:

- ✓ Ir al menú DEFINE, seleccionar FUNCTIONS y luego seleccionar TIME HISTORY.

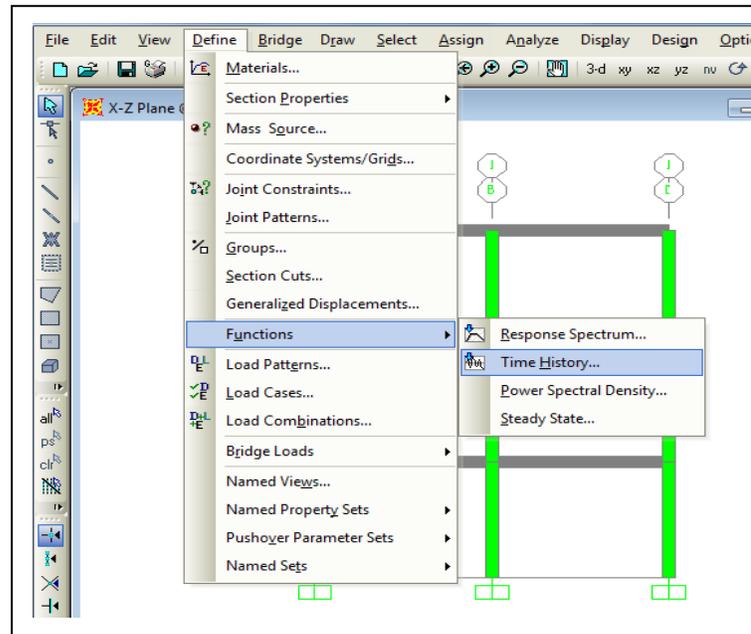


Fig.39 Definición del acelerograma seleccionado en el programa SAP 2000.

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

- ✓ El acelerograma debe ser establecido como una función desde archivo como se muestra en la Fig. 40.

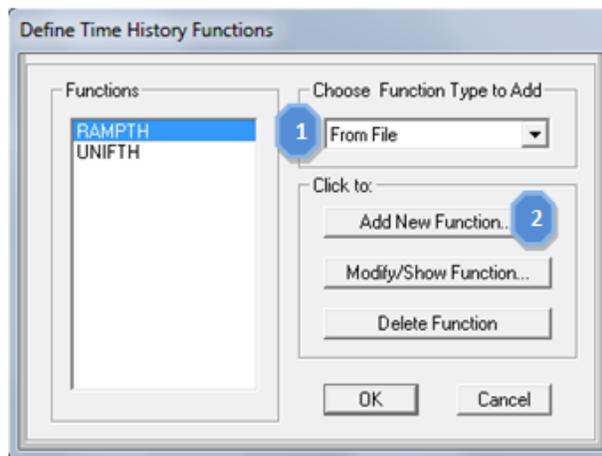
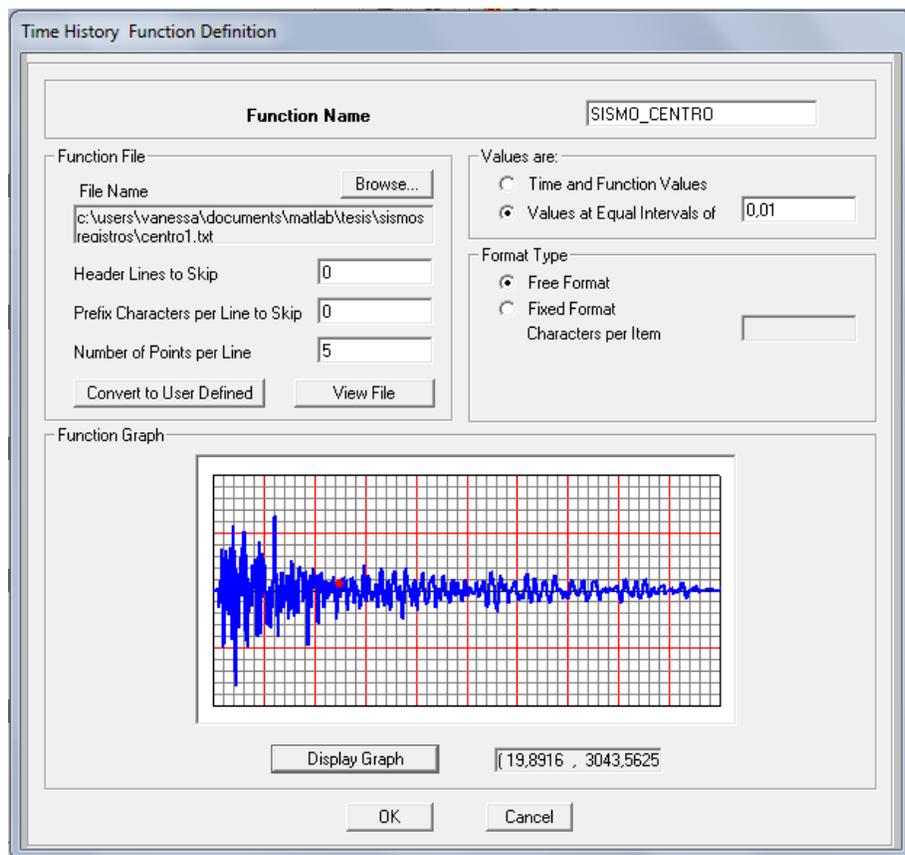


Fig.40 Selección desde archivo del acelerograma en el programa SAP 2000.

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

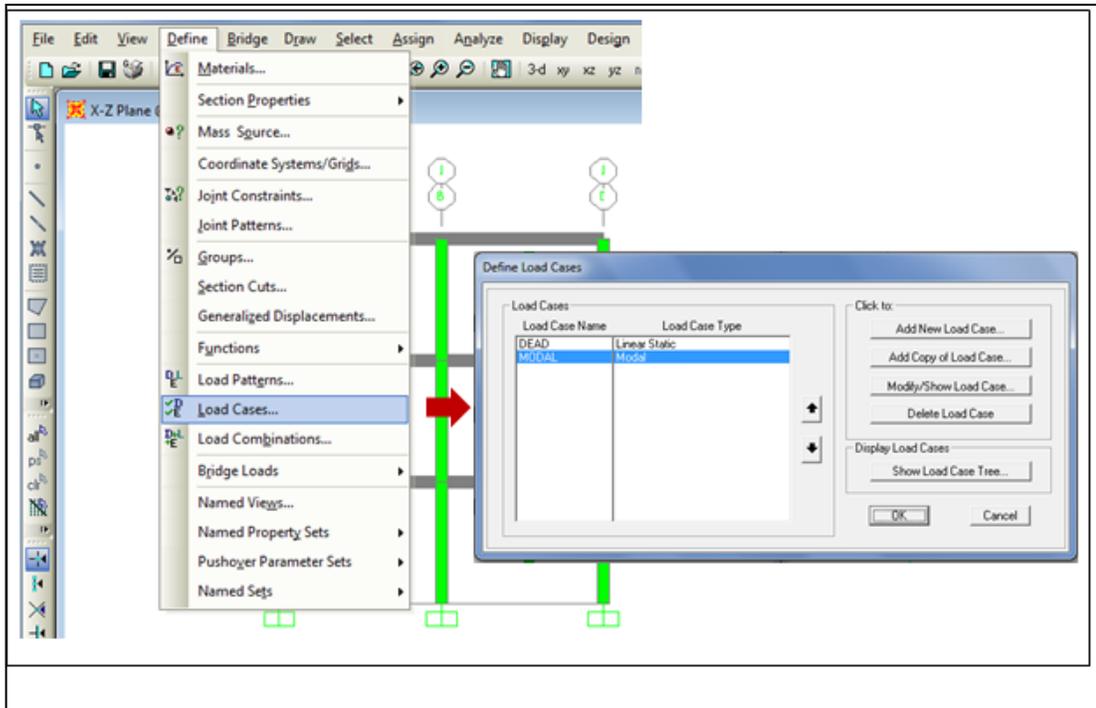
- ✓ Luego aparece una pantalla como se muestra en la Fig. 40; donde se puede indicar el nombre del acelerograma, la ubicación del archivo, el número de líneas a omitir y número de puntos por línea. Los últimos 2 datos mencionados dependen del formato del archivo de datos que se define, para este caso de estudio corresponde a lo mostrado en la Fig.41.



**Fig.41 Definición del acelerograma en el programa SAP 2000.**

*Fuente:* Di Benedetto y Segovia (2011).

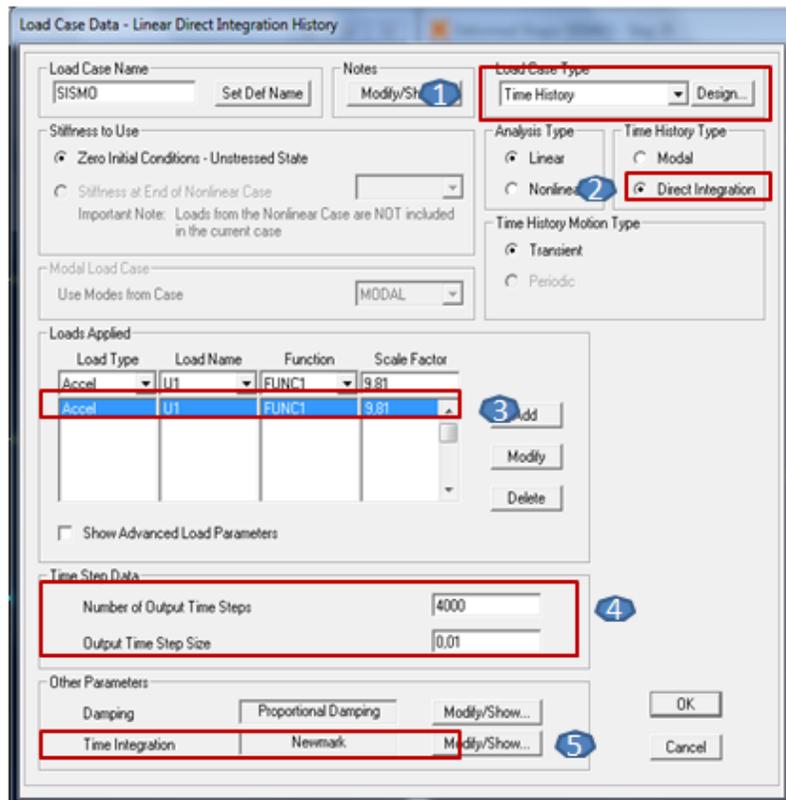
- ✓ Para que el programa SAP 2000 pueda realizar los cálculos se debe definir el caso de análisis como se muestra en la Fig. 42:



**Fig.42 Definición del caso de análisis para evaluar el acelerograma en el programa SAP 2000.**

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

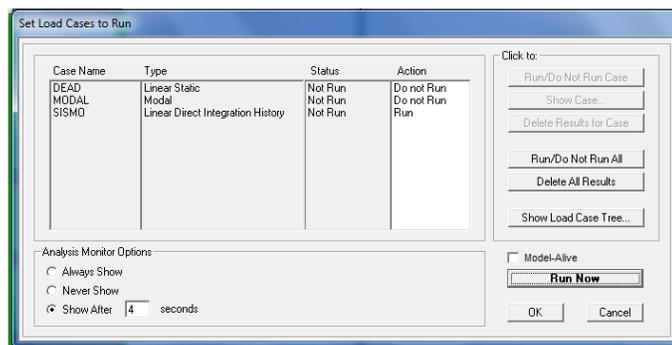
Para la evaluación del acelerograma el caso de análisis que se debe definir es TIME HISTORY. Luego se debe adicionar el acelerograma como un caso de carga. En la Fig. 43 se esquematiza como debe quedar la pantalla una vez ingresado todos los datos.



**Fig.43** Definición del caso de análisis para evaluar el acelerograma en el programa SAP 2000.

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

- ✓ Ejecutar el caso de carga definido



**Fig.44** Ejecución del caso de análisis definido para el acelerograma.

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

- ✓ Obtención de los resultados.

Una vez ejecutado el caso de análisis se muestra su proceso de ejecución (Fig.45).

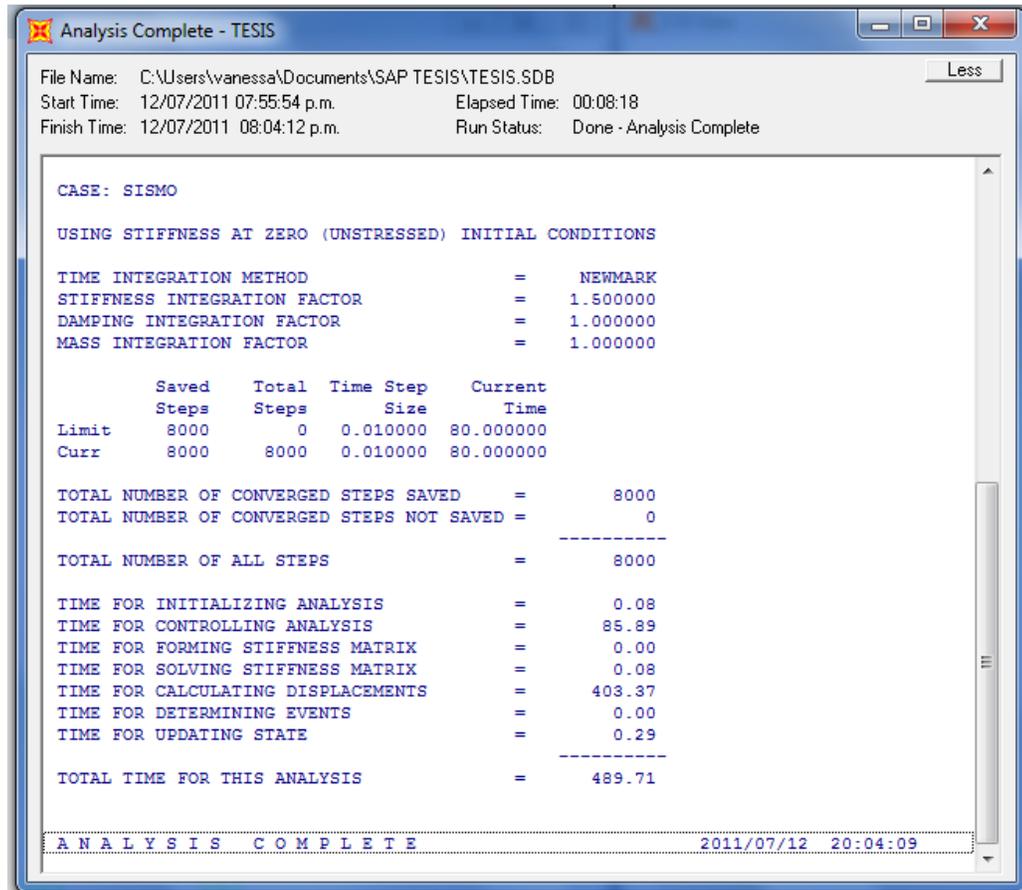
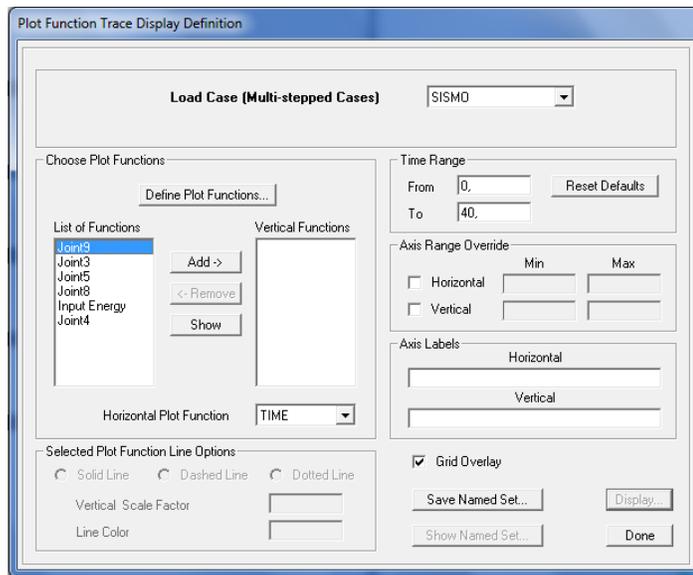


Fig.45 Ejecución del caso de análisis definido para el acelerograma.

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

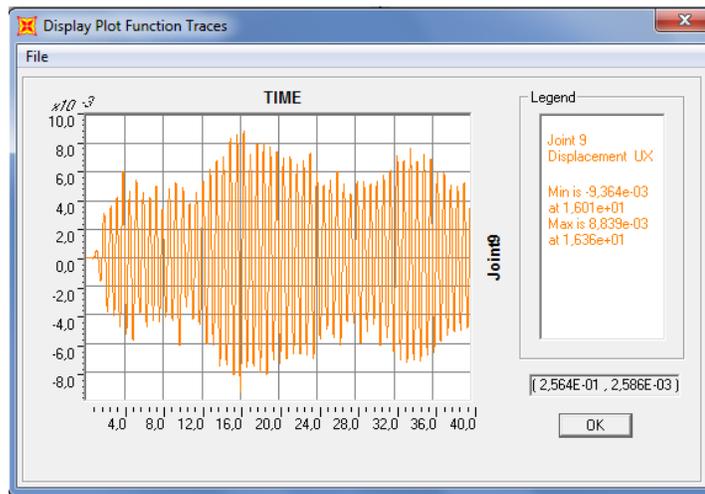
- ✓ Para poder observar los valores correspondientes a la respuesta dinámica por cada nivel de la estructura, se selecciona del menú la opción DISPLAY → SHOW PLOT FUNCTIONS. Luego se despliega una ventana donde se indican los resultados que se desean observar (Fig. 46) en este caso se definió la junta 9, la cual corresponde al desplazamiento de la coordenada generalizada 1.



**Fig.46 Definición de graficas de resultados en el programa SAP 2000.**

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

Se oprime el botón ADD para añadir la gráfica a mostrar y luego se oprime el botón DISPLAY donde aparece la siguiente pantalla:



**Fig.47 Grafica del desplazamiento en el análisis Historia –Tiempo para la coordenada generalizada 1 en el caso de estudio 2.**

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

## CAPITULO IV

### RESULTADOS Y ANALISIS DE RESULTADOS

#### 4.1. Resultados

**4.1.1. Caso 1** Cálculo manual de la respuesta dinámica de un sistema estructural plano donde se evalúa su comportamiento bajo una acción sísmica utilizando cada uno de los métodos de estudio.

A continuación se muestra una tabla resumen con los valores obtenidos mediante el cálculo manual de cada uno de los métodos y haciendo uso del programa creado:

**Tabla 10**

*Resumen de los resultados obtenidos mediante el cálculo manual y el programa creado.*

| Propiedad Dinámica Tramo 1      | GLD | Método Numérico       |          |                   |          |                |          |                 |          |          |          |
|---------------------------------|-----|-----------------------|----------|-------------------|----------|----------------|----------|-----------------|----------|----------|----------|
|                                 |     | Diferencias Centrales |          | Newmark Constante |          | Newmark Lineal |          | Wilson $\theta$ |          | Houbolt  |          |
|                                 |     | Manual                | Programa | Manual            | Programa | Manual         | Programa | Manual          | Programa | Manual   | Programa |
| Desplazamiento (m)              | 1   | 9.44E-06              | 9.45E-06 | 2.37E-06          | 2.37E-06 | 1.59E-06       | 1.59E-06 | 1.19E-06        | 1.18E-06 | 1.59E-06 | 1.59E-06 |
|                                 | 2   | 9.70E-06              | 9.73E-06 | 2.51E-06          | 2.50E-06 | 1.67E-06       | 1.67E-06 | 1.30E-06        | 1.26E-06 | 1.67E-06 | 1.67E-06 |
| Velocidad (m/s)                 | 1   | 4.69E-04              | 4.72E-04 | 4.74E-04          | 4.74E-04 | 4.78E-04       | 4.78E-04 | 3.60E-04        | 3.55E-04 | 4.77E-04 | 4.78E-04 |
|                                 | 2   | 4.83E-04              | 4.87E-04 | 5.01E-04          | 5.00E-04 | 5.01E-04       | 5.00E-04 | 3.90E-04        | 3.78E-04 | 5.01E-04 | 5.00E-04 |
| Aceleración (m/s <sup>2</sup> ) | 1   | 9.25E-02              | 9.45E-02 | 9.21E-02          | 9.48E-02 | 9.29E-02       | 9.56E-02 | 7.17E-02        | 7.09E-02 | 9.54E-02 | 9.56E-02 |
|                                 | 2   | 9.71E-02              | 9.73E-02 | 9.75E-02          | 1.00E-01 | 9.75E-02       | 1.00E-01 | 7.80E-02        | 7.56E-02 | 1.00E-01 | 1.00E-01 |

| Propiedad Dinámica Tramo 2      | GLD | Método Numérico       |          |                   |          |                |          |                 |          |          |          |
|---------------------------------|-----|-----------------------|----------|-------------------|----------|----------------|----------|-----------------|----------|----------|----------|
|                                 |     | Diferencias Centrales |          | Newmark Constante |          | Newmark Lineal |          | Wilson $\theta$ |          | Houbolt  |          |
|                                 |     | Manual                | Programa | Manual            | Programa | Manual         | Programa | Manual          | Programa | Manual   | Programa |
| Desplazamiento (m)              | 1   | 1.84E-05              | 1.82E-05 | 1.15E-05          | 1.15E-05 | 1.08E-05       | 1.09E-05 | 8.44E-06        | 8.37E-06 | 7.55E-06 | 7.54E-06 |
|                                 | 2   | 1.96E-05              | 1.98E-05 | 1.25E-05          | 1.25E-05 | 1.16E-05       | 1.17E-05 | 9.35E-06        | 9.09E-06 | 8.31E-06 | 8.28E-06 |
| Velocidad (m/s)                 | 1   | 4.38E-04              | 4.39E-04 | 1.30E-03          | 1.35E-03 | 1.34E-03       | 1.36E-03 | 1.10E-03        | 1.09E-03 | 9.59E-04 | 9.58E-04 |
|                                 | 2   | 5.01E-04              | 5.02E-04 | 1.50E-03          | 1.50E-03 | 1.49E-03       | 1.50E-03 | 1.20E-03        | 1.21E-03 | 1.08E-03 | 1.07E-03 |
| Aceleración (m/s <sup>2</sup> ) | 1   | 8.47E-02              | 8.78E-02 | 8.16E-02          | 8.12E-02 | 8.29E-02       | 8.15E-02 | 7.70E-02        | 7.69E-02 | 8.73E-02 | 8.71E-02 |
|                                 | 2   | 1.00E-01              | 1.00E-01 | 1.00E-01          | 9.92E-02 | 1.01E-01       | 9.95E-02 | 9.32E-02        | 9.16E-02 | 9.95E-02 | 9.88E-02 |

| Propiedad Dinámica Tramo 3      | GLD | Método Numérico       |          |                   |          |                |          |                 |          |          |          |
|---------------------------------|-----|-----------------------|----------|-------------------|----------|----------------|----------|-----------------|----------|----------|----------|
|                                 |     | Diferencias Centrales |          | Newmark Constante |          | Newmark Lineal |          | Wilson $\theta$ |          | Houbolt  |          |
|                                 |     | Manual                | Programa | Manual            | Programa | Manual         | Programa | Manual          | Programa | Manual   | Programa |
| Desplazamiento (m)              | 1   | 2.63E-05              | 2.62E-05 | 2.81E-05          | 2.86E-05 | 2.80E-05       | 2.83E-05 | 2.20E-05        | 2.29E-05 | 1.93E-05 | 1.92E-05 |
|                                 | 2   | 2.94E-05              | 2.96E-05 | 3.24E-05          | 3.22E-05 | 3.15E-05       | 3.15E-05 | 2.60E-05        | 2.58E-05 | 2.22E-05 | 2.20E-05 |
| Velocidad (m/s)                 | 1   | 3.93E-04              | 3.96E-04 | 1.62E-03          | 2.06E-03 | 2.06E-03       | 2.07E-03 | 1.79E-03        | 1.79E-03 | 1.51E-03 | 1.50E-03 |
|                                 | 2   | 4.72E-04              | 4.92E-04 | 1.97E-03          | 2.45E-03 | 2.47E-03       | 2.46E-03 | 2.12E-03        | 2.12E-03 | 1.82E-03 | 1.80E-03 |
| Aceleración (m/s <sup>2</sup> ) | 1   | 7.94E-02              | 7.93E-02 | 6.90E-02          | 5.98E-02 | 6.49E-02       | 5.97E-02 | 6.14E-02        | 6.21E-02 | 7.21E-02 | 7.13E-02 |
|                                 | 2   | 9.63E-02              | 9.83E-02 | 9.80E-02          | 9.23E-02 | 9.88E-02       | 9.30E-02 | 9.05E-02        | 8.92E-02 | 9.45E-02 | 9.27E-02 |

| Propiedad Dinámica Tramo 4      | GLD | Método Numérico       |          |                   |          |                |          |                 |          |          |          |
|---------------------------------|-----|-----------------------|----------|-------------------|----------|----------------|----------|-----------------|----------|----------|----------|
|                                 |     | Diferencias Centrales |          | Newmark Constante |          | Newmark Lineal |          | Wilson $\theta$ |          | Houbolt  |          |
|                                 |     | Manual                | Programa | Manual            | Programa | Manual         | Programa | Manual          | Programa | Manual   | Programa |
| Desplazamiento (m)              | 1   | 3.21E-05              | 3.31E-05 | 5.11E-05          | 5.16E-05 | 5.14E-05       | 5.15E-05 | 4.37E-05        | 4.36E-05 | 3.66E-05 | 3.64E-05 |
|                                 | 2   | 3.79E-05              | 3.89E-05 | 6.15E-05          | 6.11E-05 | 6.09E-05       | 6.06E-05 | 5.15E-05        | 5.13E-05 | 4.39E-05 | 4.34E-05 |
| Velocidad (m/s)                 | 1   | 3.50E-04              | 3.48E-04 | 2.20E-03          | 2.54E-03 | 2.58E-03       | 2.55E-03 | 2.31E-03        | 2.31E-03 | 2.00E-03 | 1.98E-03 |
|                                 | 2   | 4.65E-04              | 4.63E-04 | 2.90E-03          | 3.31E-03 | 3.39E-03       | 3.33E-03 | 2.98E-03        | 2.96E-03 | 2.59E-03 | 2.54E-03 |
| Aceleración (m/s <sup>2</sup> ) | 1   | 6.98E-02              | 6.96E-02 | 4.56E-02          | 3.64E-02 | 4.29E-02       | 3.60E-02 | 4.19E-02        | 4.19E-02 | 5.39E-02 | 5.20E-02 |
|                                 | 2   | 9.26E-02              | 9.26E-02 | 8.47E-02          | 7.93E-02 | 8.87E-02       | 8.00E-02 | 8.08E-02        | 7.90E-02 | 8.56E-02 | 8.24E-02 |

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

En los resultados mostrados se observa la similitud entre los valores obtenidos mediante el cálculo manual y el cálculo en el programa.

4.1.2. **Caso 2** Cálculo de las propiedades dinámicas de un sistema estructural plano haciendo uso de SAP 2000.

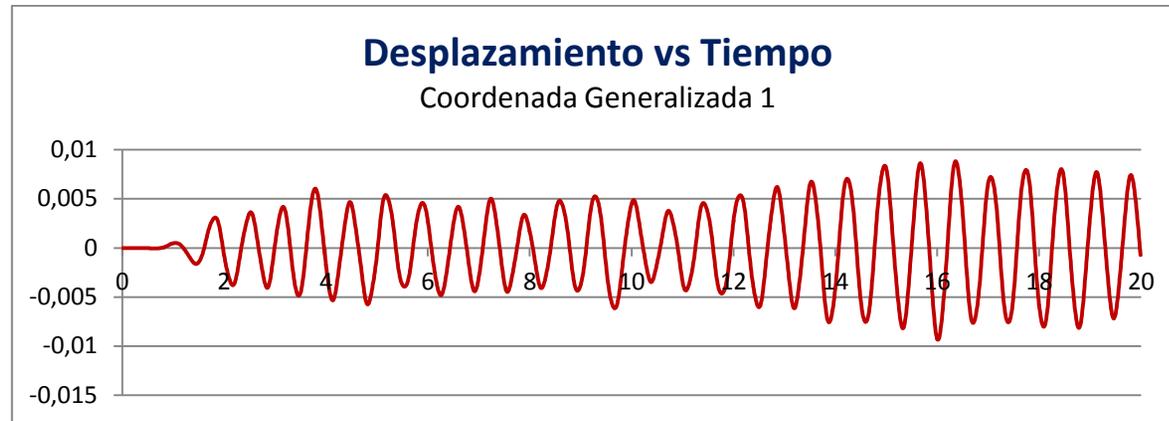
**Tabla 11**

*Resultados de los valores máximos obtenidos mediante la ejecución del programa de cálculo de propiedades dinámicas de estructuras utilizando métodos numéricos y el software SAP 2000.*

| PROGRAMA |                    | SAP 2000 |                    |
|----------|--------------------|----------|--------------------|
| GLD      | Desplazamiento [m] | GLD      | Desplazamiento [m] |
| 1        | 0.010              | 1        | 0.009              |
| 2        | 0.024              | 2        | 0.021              |
| 3        | 0.033              | 3        | 0.028              |

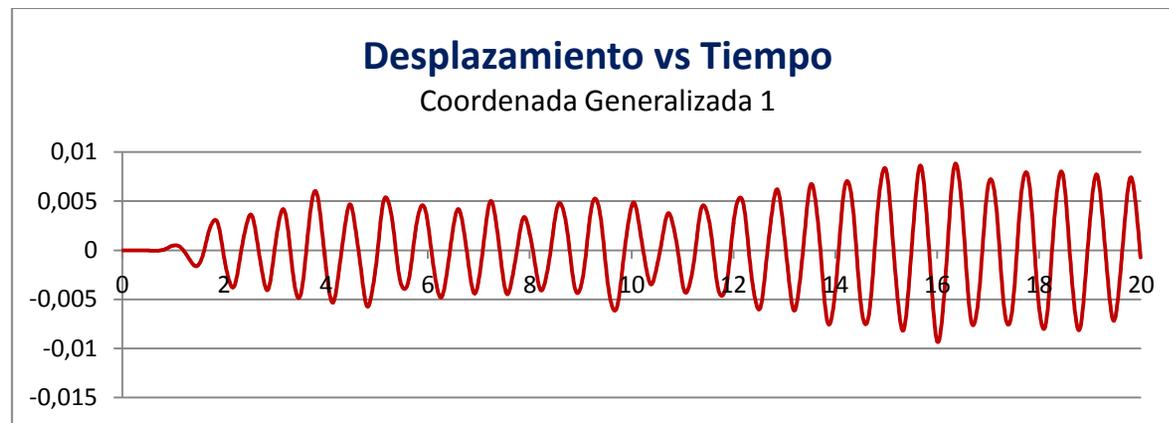
Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

A continuación se muestran las gráficas de los resultados de desplazamiento obtenidos mediante el programa elaborado así como también los obtenidos mediante SAP 2000. Se graficaron los valores comprendidos entre 0 y 20 segundos.



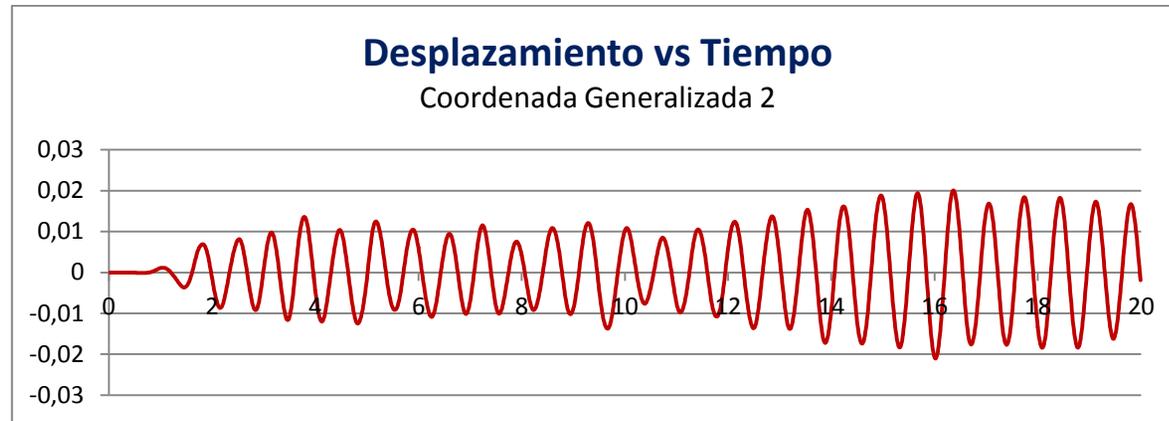
**Fig.48 Gráfica desplazamiento vs tiempo para la coordenada generalizada 1 de los resultados obtenidos de SAP 2000.**

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

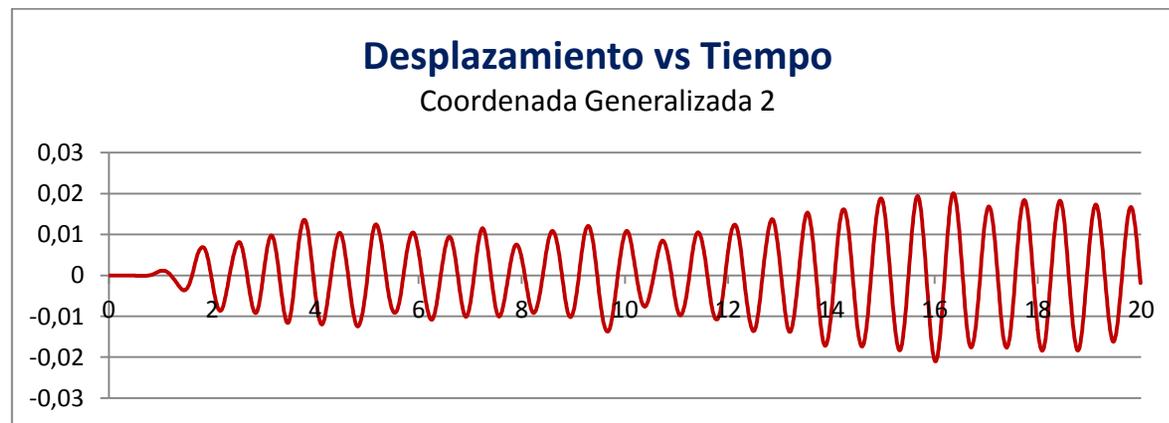


**Fig.49 Gráfica desplazamiento vs tiempo para la coordenada generalizada 1 de los resultados obtenidos del programa elaborado.**

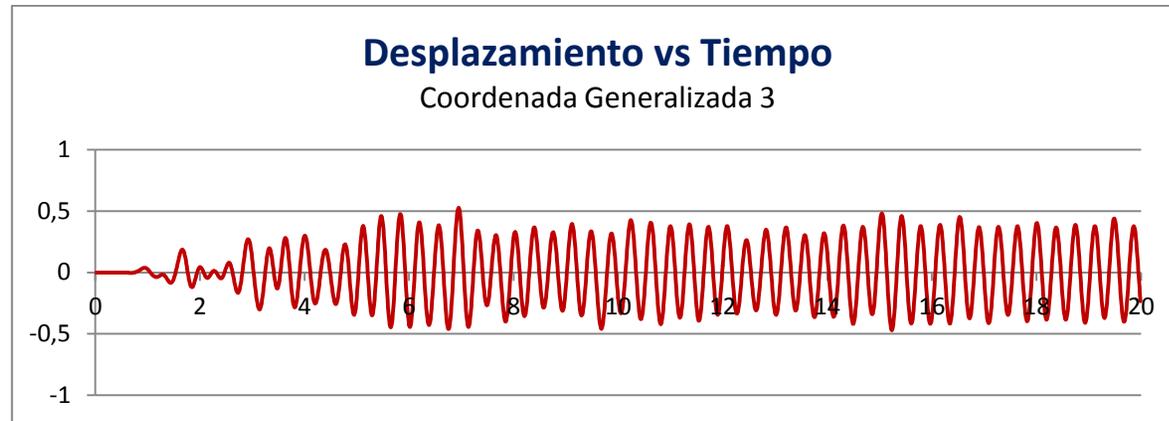
*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*



*Fig.50* **Gráfica desplazamiento vs tiempo para la coordenada generalizada 2 de los resultados obtenidos de SAP 2000.**  
*Fuente:* Di Benedetto y Segovia (2011).

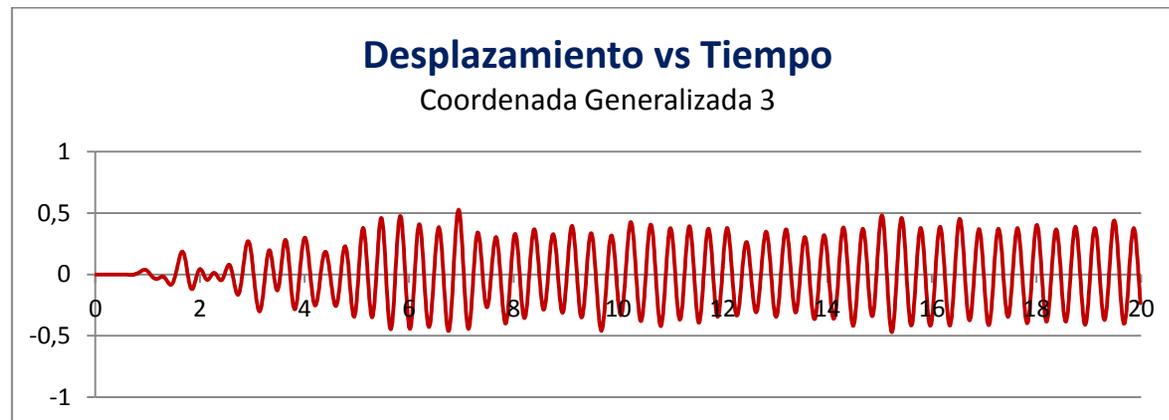


*Fig.51* **Gráfica desplazamiento vs tiempo para la coordenada generalizada 2 de los resultados obtenidos del programa elaborado.**  
*Fuente:* Di Benedetto y Segovia (2011).



**Fig.52 Gráfica desplazamiento vs tiempo para la coordenada generalizada 3 de los resultados obtenidos de SAP 2000.**

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*



**Fig.53 Gráfica desplazamiento vs tiempo para la coordenada generalizada 3 de los resultados obtenidos del programa elaborado.**

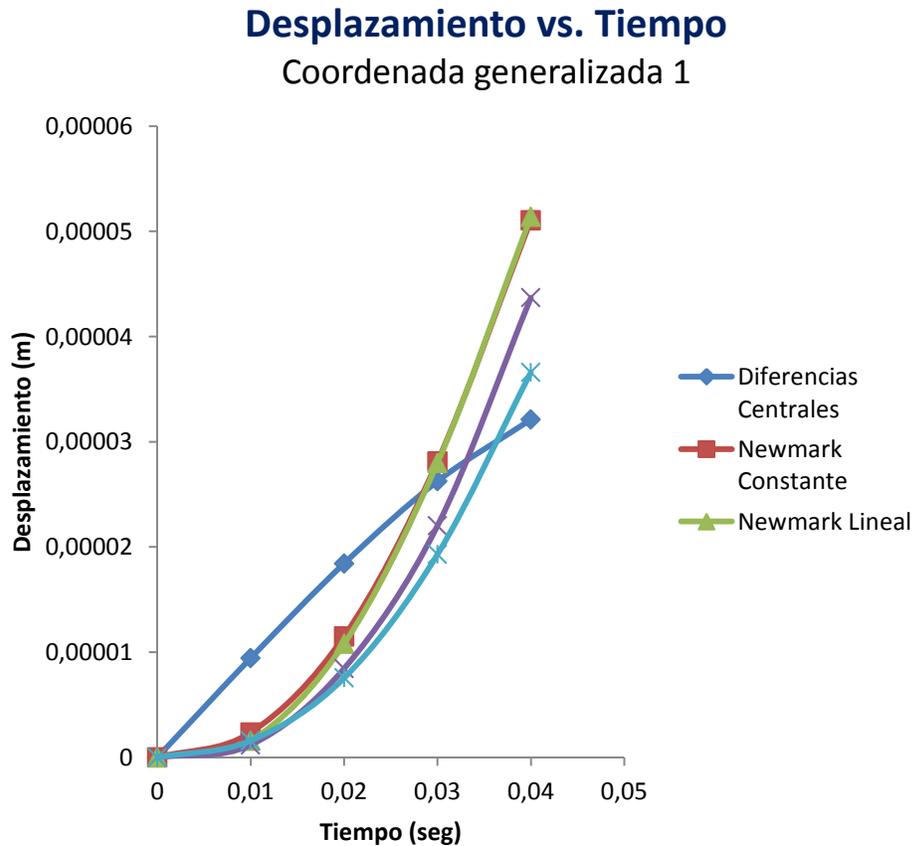
*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

Se puede observar en las gráficas de cada una de las coordenadas generalizadas que ambos cálculos presentan un comportamiento muy similar.

## 4.2. Análisis de Resultados

### 4.2.1. Caso 1

Se muestra a continuación las gráficas de los desplazamientos de cada coordenada generalizada aplicando cada uno de los métodos:

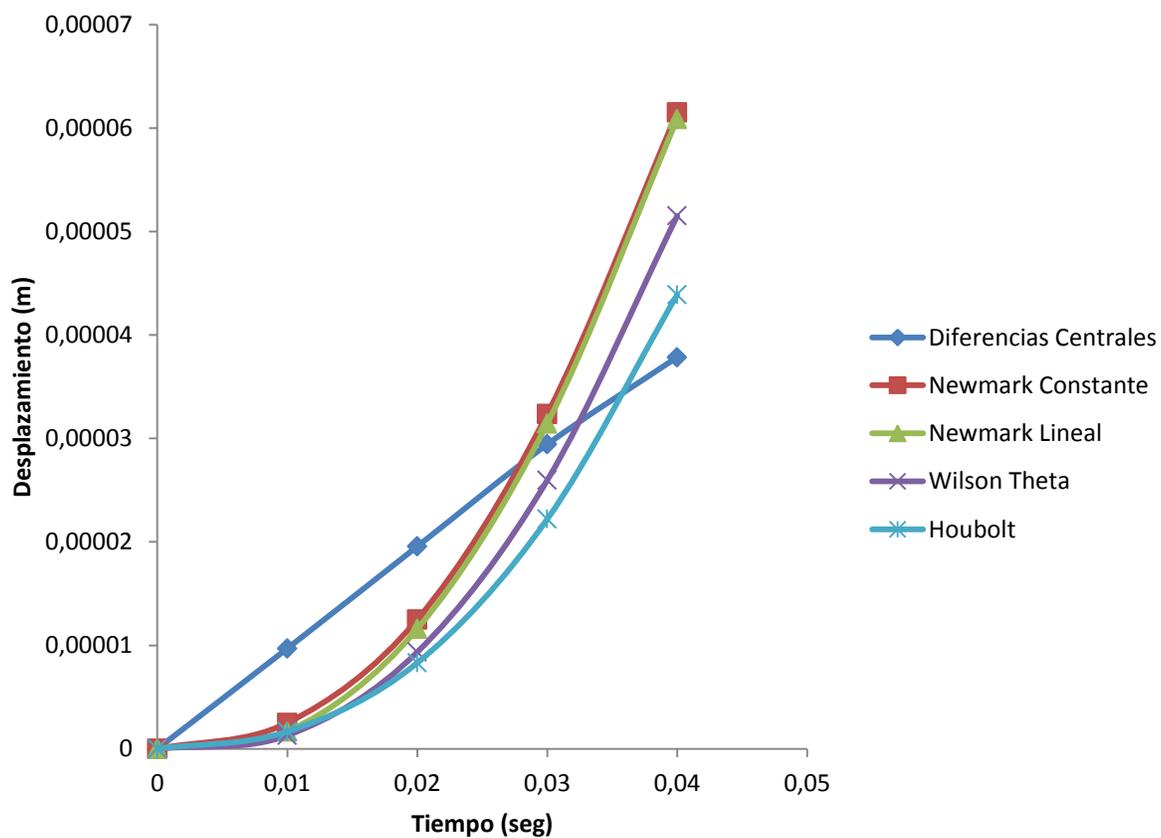


**Fig.54 Gráfica desplazamiento vs tiempo para la coordenada generalizada 1 de los resultados obtenidos debidos al cálculo manual.**

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

## Desplazamiento vs. Tiempo

Coodernada generalizada 2

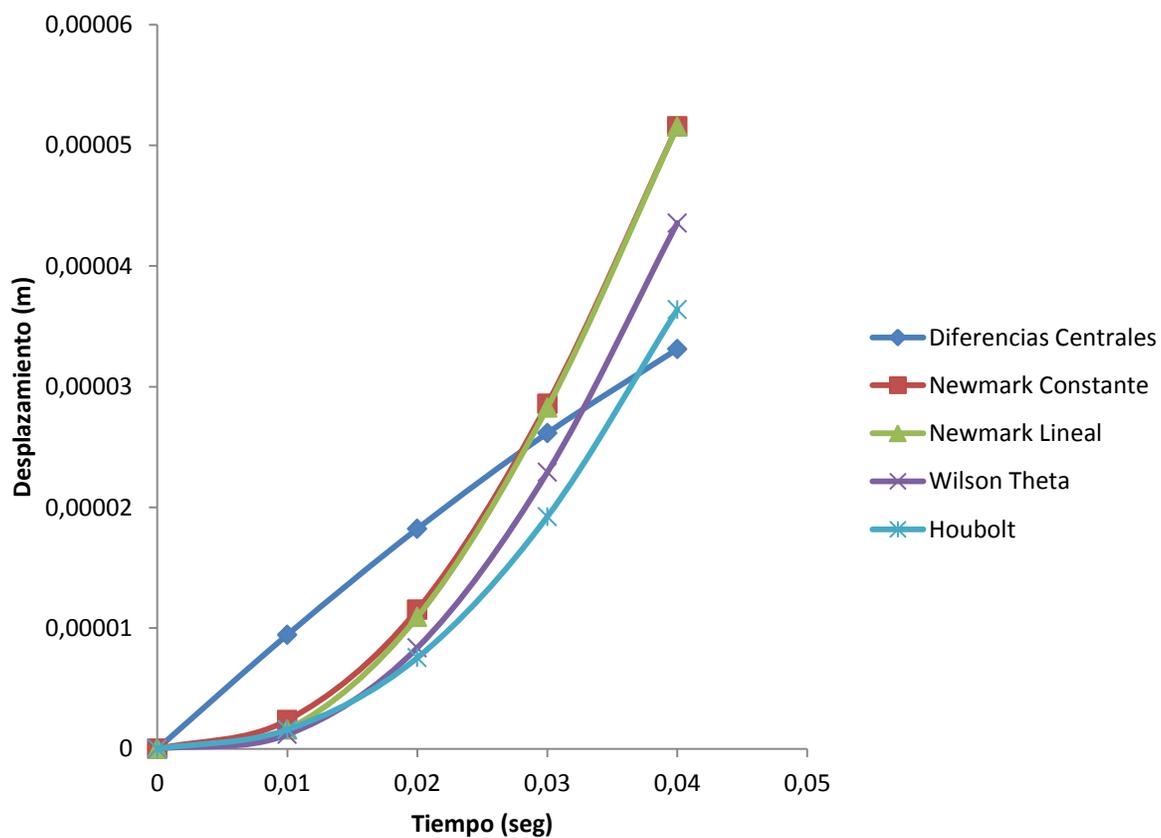


**Fig.55** Gráfica desplazamiento vs tiempo para la coordenada generalizada 2 de los resultados obtenidos debidos al cálculo manual.

*Fuente:* Di Benedetto y Segovia (2011).

## Desplazamiento vs. Tiempo

Coordenada generalizada 1

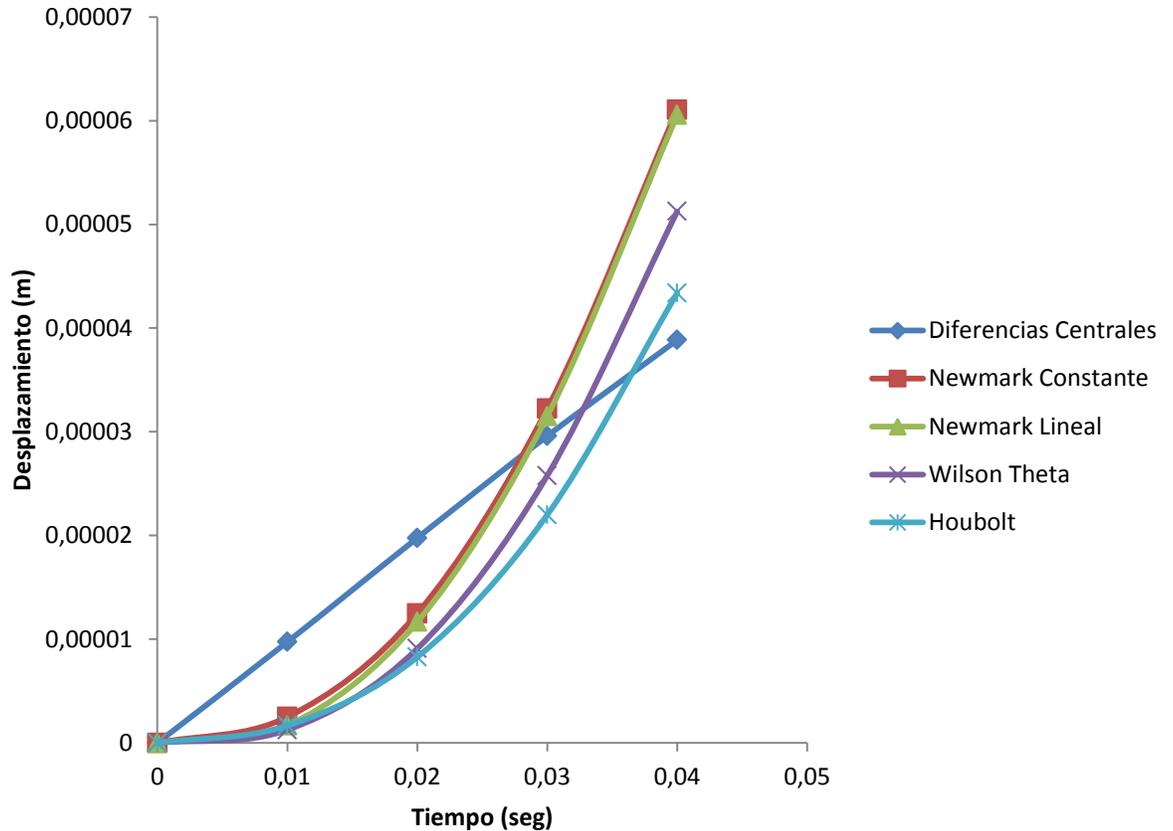


**Fig.56 Gráfica desplazamiento vs tiempo para la coordenada generalizada 1 de los resultados obtenidos debidos al cálculo con el programa.**

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

## Desplazamiento vs. Tiempo

### Coordenada Generalizada 2



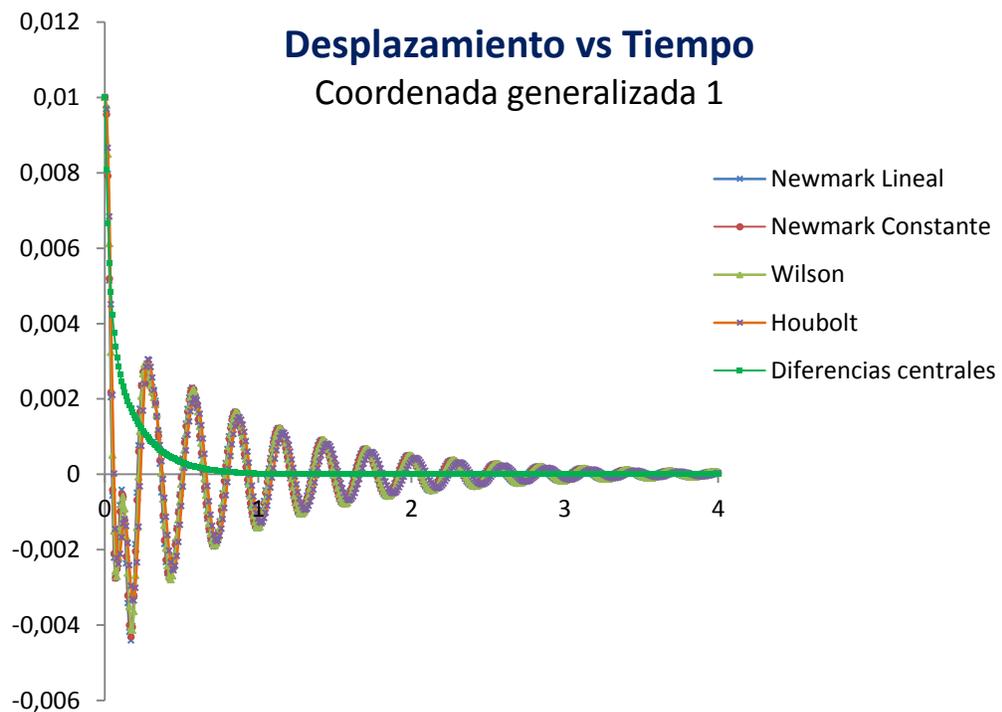
**Fig.57 Gráfica desplazamiento vs tiempo para la coordenada generalizada 2 de los resultados obtenidos debido al cálculo con el programa.**

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

En las figuras anteriores se puede observar que los valores obtenidos en cada método son similares entre sí, exceptuando el método de diferencias centrales el cual presenta valores y un comportamiento diferente a los demás métodos, esto ocurre tanto para los resultados obtenidos a través del cálculo manual como en los obtenidos mediante la aplicación del programa elaborado.

Debido al comportamiento divergente presentado por el método de diferencias centrales, se analizó el sistema estructural estudiado para un periodo de tiempo más extenso de modo que se pudiese apreciar su comportamiento en el tiempo y verificar si este es aproximado al real, sabiéndose que el comportamiento real es el representado por la solución analítica de la ecuación de equilibrio dinámico.

Con el fin de tener un patrón de comparación, se sometió el sistema estructural a un estado de vibración libre mediante la aplicación de un desplazamiento inicial en la coordenada generalizada 1. Esta condición se calculó para todos los métodos, arrojando la siguiente gráfica:



**Fig.58 Gráfica de desplazamiento vs. Tiempo en vibración libre del sistema estructural de la coordenada generalizada 1 para el caso 1.**

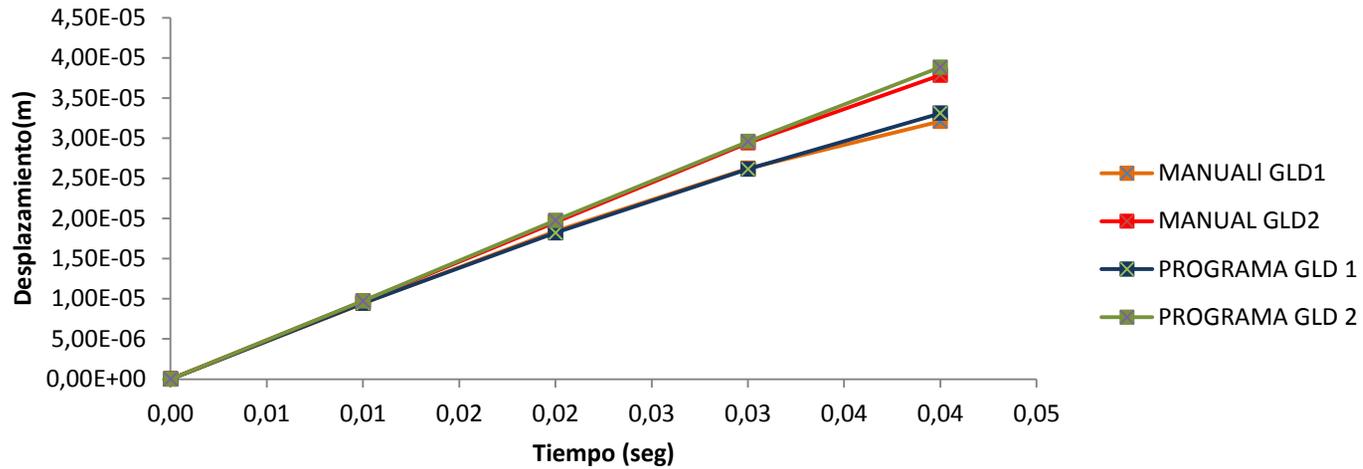
*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

En la gráfica anterior se puede observar que el método de diferencias centrales presenta un comportamiento alejado del real, mientras los demás métodos se aproximan al comportamiento real de una estructura en vibración libre, el cual según la revisión bibliográfica, debe tener valores de desplazamiento que disminuyan progresivamente en el paso del tiempo.

En base a esto se puede concluir que el método de diferencias centrales no es exacto para el cálculo de propiedades dinámicas de estructuras.

A fin de realizar una comparación más específica entre los resultados obtenidos manualmente y los obtenidos por el programa, se muestran a continuación las gráficas de desplazamiento en el tiempo obtenidas por cada método para ambas coordenadas generalizadas.

### Desplazamiento vs. Tiempo

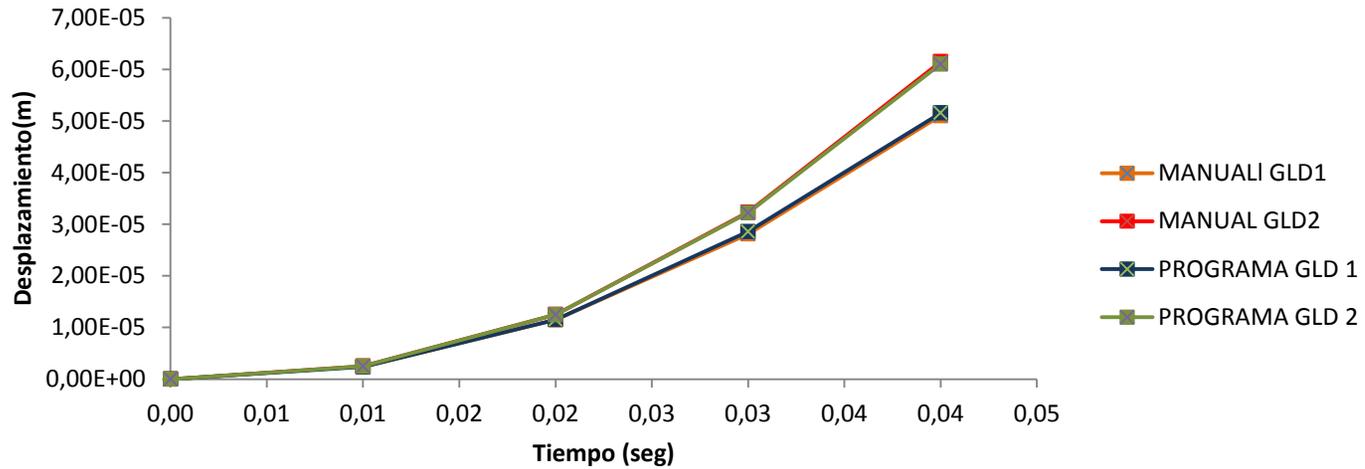


| TIEMPO | GLD 1<br>Manual | GLD 1<br>Programa | GLD 2<br>Manual | GLD 2<br>Programa | Error (%) |       |
|--------|-----------------|-------------------|-----------------|-------------------|-----------|-------|
|        |                 |                   |                 |                   | GLD 1     | GLD 2 |
| 0      | 0.000E+00       | 0.000E+00         | 0.000E+00       | 0.000E+00         | 0.00      | 0.00  |
| 0.01   | 9.438E-06       | 9.448E-06         | 9.702E-06       | 9.732E-06         | 0.10      | 0.31  |
| 0.02   | 1.843E-05       | 1.823E-05         | 1.956E-05       | 1.976E-05         | 1.10      | 1.02  |
| 0.03   | 2.625E-05       | 2.615E-05         | 2.943E-05       | 2.959E-05         | 0.36      | 0.55  |
| 0.04   | 3.211E-05       | 3.311E-05         | 3.785E-05       | 3.885E-05         | 3.03      | 2.58  |

**Fig.59** Gráfica desplazamiento vs tiempo para ambas coordenadas generalizadas obtenidos debidos al cálculo con el programa para el método de Diferencias Centrales.

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

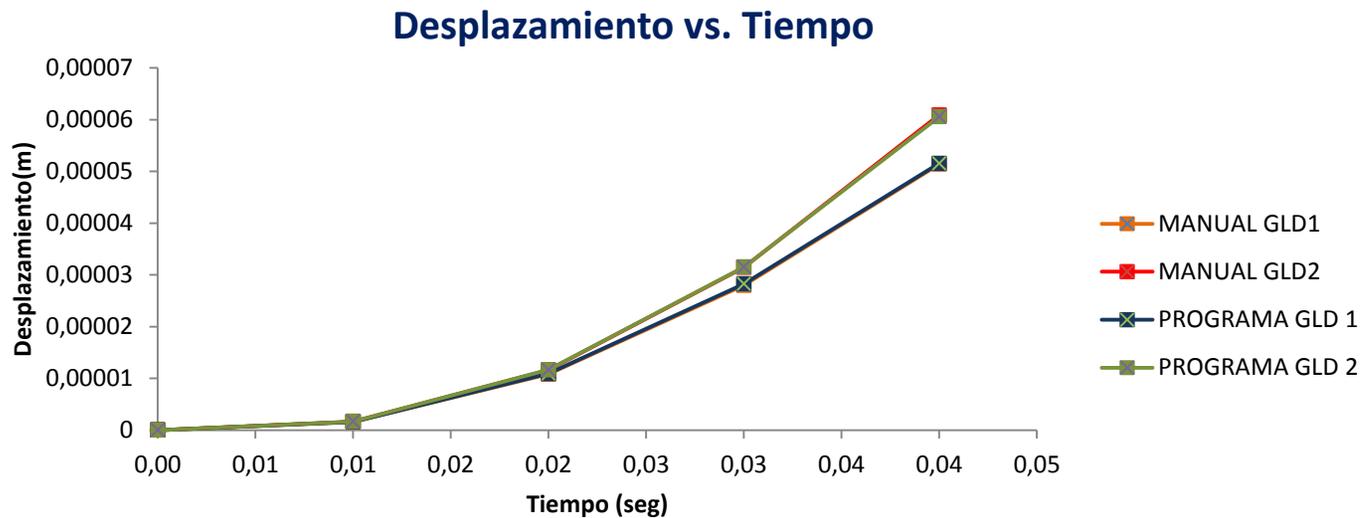
### Desplazamiento vs. Tiempo



| TIEMPO | GLD 1<br>Manual | GLD 1<br>Programa | GLD 2<br>Manual | GLD 2<br>Programa | Error (%) |       |
|--------|-----------------|-------------------|-----------------|-------------------|-----------|-------|
|        |                 |                   |                 |                   | GLD 1     | GLD 2 |
| 0      | 0.000E+00       | 0.000E+00         | 0.000E+00       | 0.000E+00         | 0.00      | 0.00  |
| 0.01   | 2.370E-06       | 2.371E-06         | 2.510E-06       | 2.501E-06         | 0.04      | 0.37  |
| 0.02   | 1.150E-05       | 1.151E-05         | 1.250E-05       | 1.248E-05         | 0.11      | 0.14  |
| 0.03   | 2.813E-05       | 2.858E-05         | 3.237E-05       | 3.223E-05         | 1.57      | 0.43  |
| 0.04   | 5.106E-05       | 5.158E-05         | 6.151E-05       | 6.106E-05         | 1.01      | 0.74  |

**Fig.60 Gráfica desplazamiento vs tiempo para ambas coordenadas generalizadas obtenidos debidos al cálculo con el programa para el método de Newmark Constante.**

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

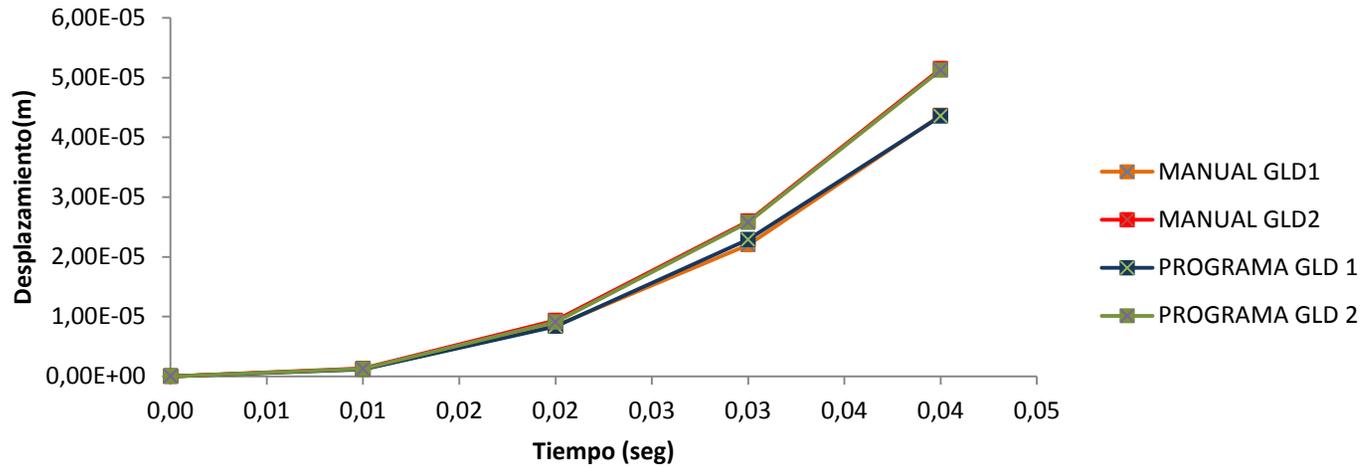


| TIEMPO | GLD 1<br>Manual | GLD 1<br>Programa | GLD 2<br>Manual | GLD 2<br>Programa | Error (%) |       |
|--------|-----------------|-------------------|-----------------|-------------------|-----------|-------|
|        |                 |                   |                 |                   | GLD 1     | GLD 2 |
| 0      | 0.000E+00       | 0.000E+00         | 0.000E+00       | 0.000E+00         | 0.00      | 0.00  |
| 0.01   | 1.590E-06       | 1.593E-06         | 1.670E-06       | 1.668E-06         | 0.19      | 0.14  |
| 0.02   | 1.080E-05       | 1.092E-05         | 1.160E-05       | 1.166E-05         | 1.06      | 0.55  |
| 0.03   | 2.798E-05       | 2.826E-05         | 3.145E-05       | 3.151E-05         | 0.99      | 0.20  |
| 0.04   | 5.140E-05       | 5.154E-05         | 6.088E-05       | 6.055E-05         | 0.28      | 0.54  |

**Fig.61 Gráfica desplazamiento vs tiempo para ambas coordenadas generalizadas obtenidos debidos al cálculo con el programa para el método de Newmark Lineal.**

*Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).*

### Desplazamiento vs. Tiempo

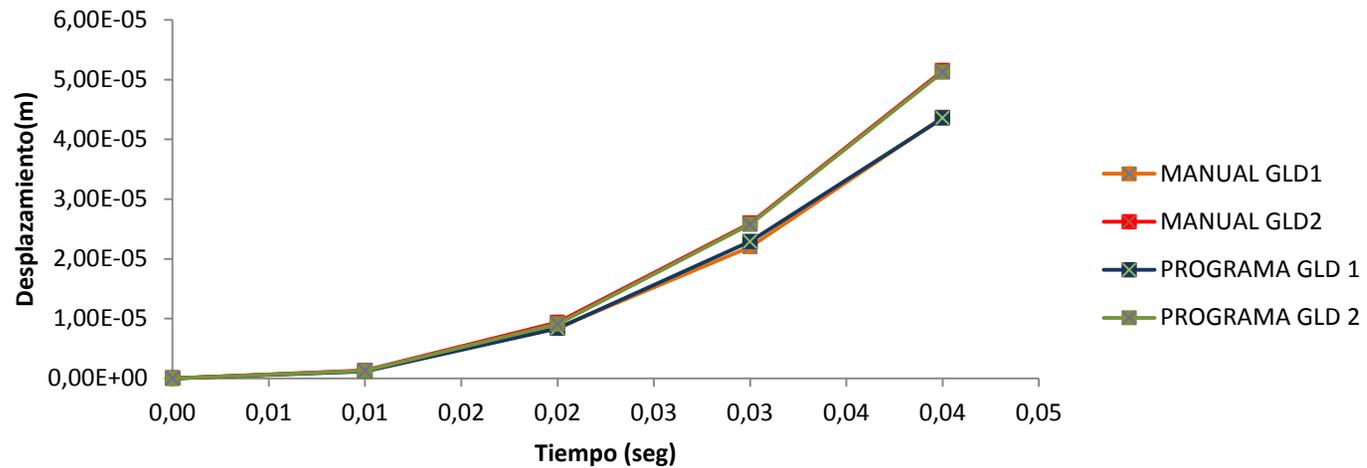


| TIEMPO | GLD 1<br>Manual | GLD 1<br>Programa | GLD 2<br>Manual | GLD 2<br>Programa | Error (%) |       |
|--------|-----------------|-------------------|-----------------|-------------------|-----------|-------|
|        |                 |                   |                 |                   | GLD 1     | GLD 2 |
| 0      | 0.000E+00       | 0.000E+00         | 0.000E+00       | 0.000E+00         | 0.00      | 0.00  |
| 0.01   | 1.194E-06       | 1.182E-06         | 1.300E-06       | 1.261E-06         | 1.02      | 3.02  |
| 0.02   | 8.440E-06       | 8.372E-06         | 9.350E-06       | 9.091E-06         | 0.80      | 2.77  |
| 0.03   | 2.202E-05       | 2.291E-05         | 2.596E-05       | 2.578E-05         | 3.87      | 0.71  |
| 0.04   | 4.369E-05       | 4.356E-05         | 5.151E-05       | 5.125E-05         | 0.29      | 0.51  |

Fig.62 Gráfica desplazamiento vs tiempo para ambas coordenadas generalizadas obtenidos debidos al cálculo con el programa para el método de Wilson  $\theta$ .

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

### Desplazamiento vs. Tiempo



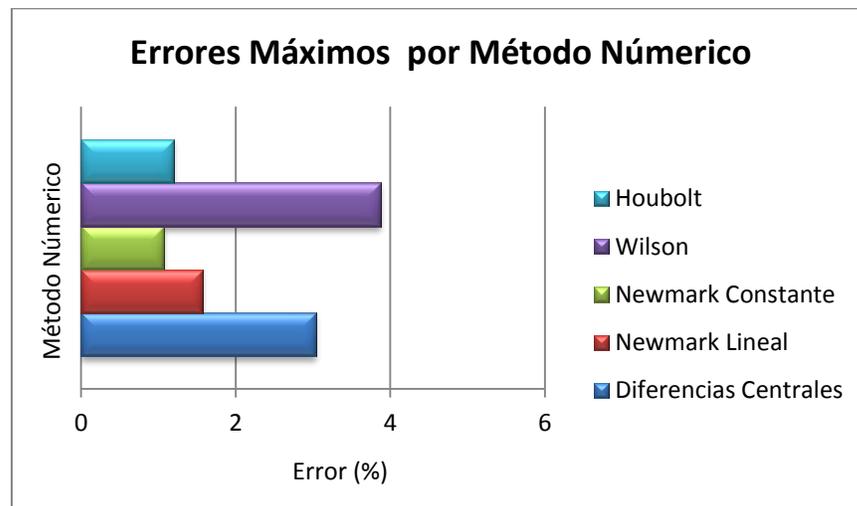
| TIEMPO | GLD 1<br>Manual | GLD 1<br>Programa | GLD 2<br>Manual | GLD 2<br>Programa | Error (%) |       |
|--------|-----------------|-------------------|-----------------|-------------------|-----------|-------|
|        |                 |                   |                 |                   | GLD 1     | GLD 2 |
| 0      | 0.000E+00       | 0.000E+00         | 0.000E+00       | 0.000E+00         | 0.00      | 0.00  |
| 0.01   | 1.590E-06       | 1.593E-06         | 1.670E-06       | 1.668E-06         | 0.19      | 0.14  |
| 0.02   | 7.550E-06       | 7.541E-06         | 8.310E-06       | 8.275E-06         | 0.12      | 0.42  |
| 0.03   | 1.930E-05       | 1.923E-05         | 2.220E-05       | 2.199E-05         | 0.35      | 0.95  |
| 0.04   | 3.660E-05       | 3.639E-05         | 4.390E-05       | 4.338E-05         | 0.57      | 1.19  |

**Fig.63 Gráfica desplazamiento vs tiempo para ambas coordenadas generalizadas obtenidos debidos al cálculo con el programa para el método de Houbolt.**

*Fuente:* Di Benedetto y Segovia (2011).

En las figuras anteriores se observa que los valores obtenidos por el programa y los obtenidos manualmente presentan gran similitud entre sí, por esta razón las gráficas presentan un comportamiento muy cercano, pudiendo verificarse esto con los valores de errores, donde el máximo error es de 3.87% obtenido en el método de Wilson  $\Theta$ .

Gráficamente se puede observar las variaciones de los errores obtenidos según cada método en la figura 64.



**Fig.64 Errores máximos por método numérico.**

*Fuente:* Di Benedetto y Segovia (2011).

El hecho que el máximo error se haya obtenido en el método de Wilson  $\Theta$  no implica que este deba descartarse para el cálculo de las propiedades dinámicas de estructuras, ya que estos errores solo representan las variaciones entre los valores obtenidos manualmente y el programa.

Por tal razón, el error máximo obtenido representa que el método de Wilson  $\Theta$  es el más propenso a errores de cálculo humano, lo cual se debe principalmente a que el método de Wilson  $\Theta$  requiere una mayor cantidad de cálculos que los demás métodos numéricos evaluados.

En base a los análisis realizados se puede concluir que el programa elaborado realiza los cálculos correctamente para todos los métodos numéricos empleados en él.

#### 4.2.2. CASO 2

A continuación se muestra una comparación entre los valores máximos de desplazamiento obtenidos haciendo uso del programa SAP 2000 y el programa creado.

**Tabla 12**

*Comparación entre resultados obtenidos por el programa y SAP 2000.*

| Coordenada Generalizada | Desplazamiento [m] |          | Error (%) | Error Promedio (%) | Desviación Estándar |
|-------------------------|--------------------|----------|-----------|--------------------|---------------------|
|                         | SAP 2000           | PROGRAMA |           |                    |                     |
| 1                       | 0.009              | 0.010    | 10        | 12.57              | 2.60                |
| 2                       | 0.021              | 0.024    | 12.5      |                    |                     |
| 3                       | 0.028              | 0.033    | 15.2      |                    |                     |

Fuente: Di Benedetto y Segovia (2011).

Se puede observar que los valores obtenidos presentan gran similitud, siendo el mayor porcentaje de error 15.2% obtenido en la coordenada generalizada 3.

Los resultados difieren en precisión decimal, sin embargo no presentan una variación significativa en magnitud. Se verifica que los desplazamientos aumentan con la altura de la estructura, tal como se espera que sea el comportamiento de un sistema estructural sometido a movimientos en su base.

En función del análisis de los resultados evaluados en el caso 2, se puede decir que la herramienta creada se verifica y valida, debido a la similitud entre los resultados obtenidos, generando esto un alto grado de confiabilidad en el software desarrollado.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

### *Conclusiones*

Con la culminación de este trabajo especial de grado, se cuenta con una herramienta computacional capaz de calcular la respuesta de una estructura en cada instante de tiempo en el rango lineal.

El programa se encuentra diseñado para trabajar con los siguientes métodos numéricos: Diferencias Centrales, Newmark Constante, Newmark Lineal, Wilson  $\theta$  y Houbolt. Los resultados obtenidos por el programa son almacenados en un archivo de Excel para su posterior utilización en las demás etapas de diseño estructural.

Esta herramienta permite analizar sistemas estructurales sometidos a cualquier tipo de carga dinámica, una vez conocidas sus condiciones geométricas definidas por la matriz de rigidez, amortiguación y masa.

La principal limitación del uso del programa es la necesidad de calcular las matrices de rigidez, amortiguamiento y masa del sistema estructural que se desea estudiar. Sin embargo, el uso de esta herramienta disminuye el tiempo empleado para el cálculo de propiedades dinámicas de estructuras mediante métodos numéricos y los algoritmos utilizados por la misma reducen la cantidad de operaciones a realizar disminuyendo los errores que puedan suscitarse en el cálculo.

La fase de validación del programa se realizó mediante dos casos de estudio, en el primero se pudo verificar que los cálculos que realiza la herramienta son correctos según la formulación establecida en cada método; y en el segundo se

validó que mediante la utilización de este programa, se pueden obtener valores similares a los generados por un software comercial de gran envergadura y uso tal como lo es el SAP 2000.

Se comprobó que los métodos utilizados para el desarrollo del programa arrojan resultados aproximados a la respuesta real de un sistema estructural, exceptuando el método de diferencias centrales el cual presento resultados que difieren al comportamiento real, tal y como se comprobó en el patrón de comparación establecido en el análisis de resultados.

Esta herramienta tiene una aplicación en la rehabilitación y patología de edificaciones existentes, ya que permite caracterizar mejor el comportamiento del sistema.

La utilización del lenguaje de programación de MATLAB permite realizar los cálculos de forma eficiente y con suficiente precisión numérica, lo cual es indispensable para la realización de este tipo de cálculos.

### ***Recomendaciones***

Se recomienda la continuación de este trabajo especial de grado con el objetivo de generar el código necesario que permita obtener las matrices de rigidez, masa y amortiguamiento de un sistema estructural cualquiera, de forma tal que la utilización de este programa sea más eficiente. Tomando en cuenta que este debe realizarse de tal forma que pueda ser implementado en el mismo lenguaje de programación.

Además, se recomienda continuar esta investigación realizando las modificaciones necesarias en los algoritmos establecidos, de forma tal que se pueda realizar análisis no lineal en el tiempo.

Es importante para el uso de cualquier software de cálculo conocer cómo se debe suministrar los datos de entrada, así como también consideraciones y cálculos que estos realizan de modo que los resultados obtenidos sean los correctos. Es por ello, que para el uso de este programa se recomienda seguir el procedimiento descrito en la presente investigación.

## BIBLIOGRAFIA

ACUÑA, M. B. (1997). *Como se Elabora el Proyecto de Investigacion*.

BAZAN, E. (2010). *DISEÑO SISMICO DE EDIFICIOS*. MEXICO: LIMUSA.

CLOUGH, R. (1995). *Dynamics of Structures*. Berkeley: Computers & Structures, Inc.

FALCONI, R. (2006). *Dinamica de Estructuras con Matlab*. Quito.

G., J. L. (2007). *VULNERABILIDAD SISMICA DE EDIFICACIONES*. CARACAS: FONDO EDITORIAL SIDETUR.

HUMAR, J. (2002). *Dynamics of Structures*. Balkema Publishers.

J. Undurraga y R. Venegas, *Creación de material pedagógico para la resolución, modelación e interpretación numérica de ecuaciones diferenciales*, Proyecto Fondo de Investigación, innovación y desarrollo de la docencia FIDED, Universidad Tecnológica de Chile, 2006

NEWMARK, N. (1959). "A Method of Computation for Strucutral Dynamics2 *Journal of engineering mechanics division ASCE*.

PAZ, M. (1980). "Structural Dynamics Theory and Computation" *Van nostrand reinhold company*.

Paz, M. (1992). *Dinamica Estructural. Teoria y Practica*. Barcelona: Reverte.

VELIZ, A. C. (2009). *TUTORES Y TESISTAS EXITOSOS*. CARACAS.

WILSON, E. (2002). *Three Dimensional Static and Dinamic Analysis of Structures*. Berkeley: Computers and Strucutures, Inc.

<http://www.csiberkeley.com/support/technical-papers>

<http://peer.berkeley.edu/smcat/search.html>