NIVELES DE DEMOSTRACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMATICA EN CUARTO AÑO DE EDUCACIÓN MEDIA GENERAL DE LA UNIDAD EDUCATIVA NACIONAL "JUAN JOSÉ GUERRERO". BARQUISIMETO- LARA.

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

NIVELES DE DEMOSTRACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMATICA EN CUARTO AÑO DE EDUCACIÓN MEDIA GENERAL DE LA UNIDAD EDUCATIVA NACIONAL "JUAN JOSÉ GUERRERO". BARQUISIMETO- LARA.

AUTORA: PARADA DARLING

TUTOR: Dr. COLMENÁREZ DONES

VALENCIA, MAYO 2016

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

NIVELES DE DEMOSTRACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMATICA EN CUARTO AÑO DE EDUCACIÓN MEDIA GENERAL DE LA UNIDAD EDUCATIVA NACIONAL "JUAN JOSÉ GUERRERO". BARQUISIMETO- LARA.

AUTORA: PARADA DARLING

Trabajo de Grado presentado a la Maestría en Educación Matemática para optar por el Título de Magíster en Educación Matemática.

VALENCIA, MAYO 2016

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

VEREDICTO

Nosotros, miembros del jurado designado para la evaluación del Trabajo de Grado titulado: **"Niveles de Demostración en el Aprendizaje de la Matemática en cuarto año de Educación Media General de la Unidad Educativa Nacional Juan José Guerrero. Barquisimeto, Estado Lara"** presentado por la ciudadana DARLING DAYANA PARADA CANELÓN titular de la cédula de identidad Nº 18.656.842 para optar al título de Magíster en Educación Matemática, estimamos que el mismo reúne los requisitos para ser considerado como: ________________________

____________________________________ (Nombre, Apellido y Firma)

____________________________________ (Nombre, Apellido y Firma)

____________________________________ (Nombre, Apellido y Firma)

VALENCIA, MAYO 2016

DEDICATORIA

A Dios todopoderoso, *por darme la Sabiduría, Fe, Fortaleza, Salud y Esperanza para terminar mi trabajo.*

A mi Madre, *quien me dio la Vida, Educación, Amor, Apoyo incondicional en todo momento y me motivó siempre a luchar para alcanzar mis metas.*

A mis Hermanos, *no sólo por estar presentes aportando buenas cosas a mi vida, sino por los grandes momentos de felicidad y de diversas emociones que siempre me han causado.*

A mi familia, *por creer en mí, por sus ánimos, esperanzas, aventuras, ilusiones y experiencias compartidas, que agradeceré de forma infinita.*

A todas aquellas personas *importantes en mi vida que siempre estuvieron dispuestos para brindarme toda su ayuda. Con todo mi cariño este trabajo se los dedico.*

AGRADECIMIENTO

A Dios Todopoderoso, *quien ha creado mi camino y me ha dirigido por el sendero correcto, él que en todo momento está conmigo ayudándome.*

A la ilustre Universidad de Carabobo, *quien me dio la bienvenida y oportunidad de realizar mis estudios nutriéndome de muchos conocimientos.*

A mi Tutor Dr. Dones Colmenárez, *por su generosidad al brindarme la oportunidad de recurrir a su experiencia en un marco de confianza, afecto y amistad, fundamentales para la concreción de este trabajo.*

A todos los Profesores de la facultad de Ciencias de la Educación, *personas de gran sabiduría quienes se esforzaron por ayudarme a llegar al punto en el que me encuentro. Gracias a las ganas de transmitirme sus conocimientos y dedicación, he logrado importantes objetivos como culminar el desarrollo de mi trabajo.*

A los Estudiantes *de cuarto año de Educación Media General de la Unidad Educativa Nacional "Juan José Guerrero" en el lapso 2014-2015, quienes colaboraron para que se llevara a cabo esta investigación.*

INDICE GENERAL

LISTA DE TABLAS

TABLAS Nº **Pág.**

LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO Nº **Pág.**

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

NIVELES DE DEMOSTRACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMATICA EN CUARTO AÑO DE EDUCACIÓN MEDIA GENERAL DE LA UNIDAD EDUCATIVA NACIONAL "JUAN JOSÉ GUERRERO". BARQUISIMETO- LARA.

Autora: Parada Darling
Tutor: Dr. Colmenárez Dones
Año: 2016

RESUMEN

La presente investigación surge de la reflexión y la praxis en las clases de matemática, estuvo dirigida al análisis de los niveles de demostración matemática en los estudiantes de Cuarto Año de Educación Media General de la Unidad Educativa Nacional "Juan José Guerrero" de Barquisimeto Estado Lara. Conceptualmente, la misma se centró en los niveles de demostración según Balacheff (2000), quien los concibe desde el punto de vista de las prácticas matemáticas de los estudiantes y no desde la lógica matemática. De esta manera, el razonamiento demostrativo representa una problemática, porque involucra otros procesos de pensamiento (abstracción, análisis, conjeturación, entre otros) que se activan en la mente del estudiante cuando se afronta una tarea de demostración. Metodológicamente, la investigación es de tipo descriptiva, de campo apoyada en un diseño no experimental. La población estuvo conformada por 113 sujetos y la muestra por cincuenta y siete (57) estudiantes, que fueron seleccionados de forma probabilística estratificada a los cuales se les aplicó una prueba. Para determinar la confiabilidad se utilizó el programa computarizado estadístico SPSS 17.0 cuyo resultado fue de 0,831, además fue validado a través del procedimiento denominado juicio de expertos. Una vez obtenidos los resultados, éstos se categorizaron, codificaron y tabularon en una matriz de datos, interpretándolos mediante análisis descriptivos. Finalmente en estos análisis se obtuvo presencia de demostraciones a nivel pragmático en alto porcentaje e incipiente presencia del nivel conceptual. Además, los estudiantes tienden a recurrir a fórmulas como elementos que definen una función específica u objeto matemático y utilizan ejemplos prototípicos como medio de verificación de las proposiciones dadas. De acuerdo a los resultados, se recomienda a los docentes utilizar estrategias significativas que incentiven a los estudiantes a participar en tareas de demostración, con el fin de que evolucionen hacia lo conceptual sin olvidar lo pragmático.

Descriptores: Demostración Matemática, Niveles de Demostración de Balacheff, Aprendizaje, Argumentación.
Línea de Investigación: Enseñanza, Aprendizaje y Evaluación de la Educación Matemática.

INTRODUCCIÓN

Los cambios generados a nivel mundial en los ámbitos económicos, políticos, sociales y educativos se traducen en una realidad que exige cambiar las formas de pensar y de actuar, de tomar decisiones y valorar el conocimiento, a partir de las diferentes áreas del saber. En este ámbito de ideas, la matemática constituye un eje fundamental en el sector educativo, dada su importancia en todos los niveles.

La matemática es fundamental en el desarrollo de los estudiantes, por cuanto se considera que contribuye al razonamiento, además que otorga competencias básicas e indispensables para desarrollarse de manera personal y profesional.

Sobre este particular, en torno a la matemática se ha creado una especie de mito, que la cataloga en un alto grado de dificultad, pero su importancia radica en que otorga a las personas la capacidad de pensar en forma abstracta, encontrar analogías entre diversos fenómenos, crear el hábito de enfrentar problemas, tomar consecuentes iniciativas, establecer criterios de verdad, entre otros, con lo cual se amplía el universo cultural del individuo.

En el caso específico de los contenidos de la matemática, algunos de ellos son eminentemente prácticos, como las fórmulas de áreas, trigonometría y otros; en el caso de las demostraciones, se relacionan con la argumentación y la deducción, involucrándose procesos mentales como abstraer, inferir, especificar, generalizar, cuyos resultados generan confianza en el estudiante, ponen de manifiesto el pensamiento creativo, pensamiento lateral, especulativo, heurístico y lógico-deductivo.

La presente investigación se orientó a analizar los niveles de demostración matemática en los estudiantes de Cuarto Año de Educación Media General de la

Unidad Educativa Nacional “Juan José Guerrero”. La misma se encuentra estructurada de la siguiente manera:

En el Capítulo I, se presenta el problema de investigación, además se formulan las interrogantes y se propone el objetivo general y los específicos. Seguidamente, en el capítulo II, se abordan los referentes teóricos, con los antecedentes o estudios previos, así como las bases teóricas que dan soporte a la investigación y definición de términos.

En el Capítulo III, se da a conocer la metodología utilizada para el desarrollo del estudio, la naturaleza de la investigación, diseño, población y muestra, procedimiento, técnica e instrumento de recolección de información, validez y confiabilidad del instrumento y técnicas de análisis de los datos.

En el Capítulo IV, se presentan los análisis de los resultados obtenidos de la aplicación del instrumento a la muestra en estudio. Para ello se realizaron tablas de distribución de frecuencias y porcentajes; además se presentan las conclusiones que se derivaron del análisis y las recomendaciones como aporte del estudio realizado.

CAPÍTULO I

EL PROBLEMA

1.1. Planteamiento y Formulación del Problema

La educación es un proceso permanente y determinante en la vida del ser humano, que contribuye a su desarrollo profesional, político, económico y social; su objetivo es la formación integral, que de acuerdo con Fuentes (2012) está fundamentada en el enfoque de actuación adaptado a diferentes contextos de la sociedad, es decir, no es simplemente la adquisición de conocimientos, sino que permite desarrollar capacidades físicas e intelectuales, habilidades, destrezas y formas de comportamiento que se ponen en práctica en cualquier contexto.

En este sentido, la educación hace realidad las posibilidades intelectuales, profesionales, afectivas y éticas de los individuos, con las cuales se garantiza el progreso de la condición humana en todos los contextos donde interactúa. De allí que cada una de sus áreas curriculares son importantes para lograr estos objetivos y como garantes para la convivencia con sus semejantes y con el mundo.

En el caso específico de la matemática, Pastor y Puig (2006) la caracterizan como una ciencia abierta y dinámica, que se constituye en un instrumento fundamental para la comprensión del mundo y la formación intelectual. Su efectividad se encuentra apoyada en aspectos notables, como el razonamiento lógico, la precisión, rigor, abstracción, formalización y belleza, que se convierten en capacidades potenciales para el ser humano.

Cabe mencionar, que la Matemática es un área fundamental en la educación, no sólo por el conocimiento que aporta en sí, sino porque contribuye a enseñar a pensar y razonar. De este último aspecto, Ugas (2011) señala que es una operación lógica mediante la cual, “partiendo de uno o más juicios se deriva la validez o falsedad de un juicio distinto. Los juicios en que se basa un razonamiento expresa un conocimiento ya adquirido o tenido como noción”. (p.43)

Por su parte, Vega y Moreno (2011) señalan que argumentar-conjeturar- demostrar constituye una unidad cognitiva, cuya finalidad es la búsqueda de la verdad y la conjetura es el objetivo de la argumentación preformal e inicio del proceso demostrativo. Además señalan la necesidad de que el conocimiento se construya a partir de la experimentación, formulación, contrastación, justificación (argumentación) de conjeturas, además de estar dispuestos a buscar patrones y regularidades.

Asimismo, Balacheff (1998), ubica las demostraciones desde el punto de vista de las prácticas matemáticas de los estudiantes y no desde la lógica matemática, es decir, cómo los estudiantes llegan a la convicción de la validez de la solución propuesta. De esta manera, el razonamiento involucra otros procesos de pensamiento (abstracción, análisis, conjeturación, entre otros), activados en la mente del estudiante cuando se afronta una tarea de demostración; además, se evocan imágenes, conceptos, definiciones, conocimientos previos que pueden ser abordados desde otra perspectiva.

En el mismo orden de ideas, el autor citado plantea dos niveles de demostración: un nivel pragmático, donde recurren a la acción real o la ostensión (presentación); y un nivel conceptual, basada en un razonamiento deductivo, mediante la formulación de definiciones, propiedades y la relación entre ellas. Cada uno de estos niveles aporta elementos importantes para la comprensión de esta temática en la matemática, a partir del pensamiento inductivo y deductivo. Sin embargo, en la actualidad se aspira que en el aula de clase el estudiante evolucione hacia lo conceptual sin olvidar lo pragmático, ya que no tienen un concepto amplio de demostración y consideran que a través de ella se puede tener más seguridad del por qué de las cosas.

Para Vega y Moreno (2011), el desarrollo del razonamiento deductivo y el entendimiento de estructuras que pueden ser validadas y justificadas a través de axiomas, son procesos que se encuentran en unos de los estados más avanzados en el pensamiento matemático, pero algunos docentes lo consideran fuera de los contenidos matemáticos contemplado en el currículo escolar.

Por otro lado, los resultados del Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes PISA-2012, publicados por la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 2012), muestran que en los nueve países latinoamericanos participantes, un 58% de los estudiantes en matemáticas, un 45% en lectura y un 48% en ciencias, no demostró haber alcanzado el nivel II de desempeño, este nivel es un piso mínimo de logro en cada asignatura evaluada. En Venezuela el desempeño académico de los estudiantes de educación secundaria ha sido medido internacionalmente por la prueba PISA-2012, a través de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OECD) que evalúa estudiantes de 15 años de edad pertenecientes tanto a liceos como colegios del país.

A primera vista los resultados son preocupantes por el bajo rendimiento de los estudiantes. De acuerdo a la evaluación 60% de los estudiantes no superan las competencias básicas en matemáticas y 0% alcanzan el rendimiento óptimo. En consecuencia, se está por debajo del promedio de los países de la OCDE, pero se está en la media de los países de Latinoamérica a excepción de Chile, México y Brasil. Según Rico (2005) El Proyecto PISA "evalúa, las competencias matemáticas: el conjunto de capacidades puestas en juego por los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando resuelven". (P.50)

Los resultados mostrados en párrafos anteriores demuestran el bajo rendimiento académico en el área de matemática a nivel de educación secundaria, lo cual es alarmante, porque demuestra que se presentan deficiencias en el sistema educativo, basado en instrucción memorística y expositiva impartidas en las aulas de clases, donde el estudiante aprende de memoria datos, ideas y conceptos correspondientes a un currículo, pero en realidad no logra ningún nivel de comprensión y razonamiento que puedan proyectar un alto nivel del pensamiento en las demostraciones conceptuales o pragmática.

A la luz de las ideas expresadas, la presente investigación se realizó en la Unidad Educativa Nacional "Juan José Guerrero", de Barquisimeto, Estado Lara, donde se tuvo conversaciones con los estudiantes y docentes de Matemática, y se observó que las demostraciones son poco utilizadas y que además no toman en cuenta que éstas desarrollan habilidades cognitivas, estrategias lógicas, facilitan este tipo de actividad matemática y ayuda a recordar los conocimientos de teorías previas.

De igual manera, se conoció que los docentes, al tratar el tema de las demostraciones, presentan resultados que jerarquizan y creen necesarios justificar, suponiendo que a partir de la observación el estudiante aprenderá a validar, dándole poca importancia a su construcción social, como un procedimiento necesario en casos particulares, el cual contribuye al aprendizaje significativo, es decir, no se discute su importancia, utilidad y posibles aplicaciones en diferentes contextos.

En este sentido, en el proceso de aprendizaje de la matemática, la argumentación utilizada por los docentes se presenta como un medio de autovalidar los conocimientos o como un contenido a aprender, pero no se consideran estrategias que motiven al estudiante hacia su estudio y a la generación de sus propias demostraciones.

Al adentrarse en el tema desde un aspecto teórico y articular con la práctica educativa, surge la siguiente interrogante: ¿Cómo se manifiestan los niveles de demostración matemática en los estudiantes de cuarto año de Educación Media General en la Unidad Educativa Nacional "Juan José Guerrero"?

1.2 Objetivos de la Investigación

1.2.1 Objetivo General

Analizar los niveles de demostración matemática en los estudiantes de Cuarto Año de Educación Media General en la Unidad Educativa Nacional "Juan José Guerrero". Barquisimeto - Lara.

1.2.2 Objetivos Específicos

Diagnosticar las demostraciones de tipo conceptual y pragmática en los estudiantes de Cuarto Año en Educación Media General en la Unidad Educativa Nacional “Juan José Guerrero”.

Clasificar las demostraciones de tipo conceptual y pragmática que presentan los estudiantes de Cuarto Año en Educación Media General en la Unidad Educativa Nacional “Juan José Guerrero”.

Describir los niveles de demostración en el que se encuentran los estudiantes de Cuarto Año de Educación Media General en la Unidad Educativa Nacional “Juan José Guerrero”, según Balacheff.

1.3 Justificación de la Investigación

El problema de la dificultad matemática por parte de los estudiantes llama la atención de todos los profesionales que hacen vida en la educación, pues las cifras suministradas por la UNESCO a través de la prueba de PISA 2012, muestran un alto porcentajes de estudiantes desvinculados del área de los números; en este sentido, puede decirse por un lado que los objetivos curriculares no son alcanzados y por otro lado no se ha podido lograr el desarrollo en el pensamiento de los estudiantes para la resolución de problemas, desarrollo de un pensamiento matemático manifestado a través de la demostración. En este sentido son diversas las razones que determinan y justifican esta investigación:

En primer lugar busca, describir los niveles de demostración ya sea conceptual o pragmático según lo definido por Balacheff (2000) que puedan manifestar los estudiantes de cuarto año en Educación Media General en la Unidad Educativa Nacional "Juan José Guerrero"

Es muy común que el aprendizaje de la demostración matemática sea uno de los elementos más difíciles para los estudiantes y es precisamente la práctica educativa asociada la que conlleva parte de esa dificultad. En ese sentido, la actividad matemática en el aula centra la función de la demostración exclusivamente en la verificación de resultados, sin acompañar ésta práctica de la discusión de las razones por las que se repiten una y otra vez validaciones ya hechas por otros. Además, se trata la demostración como un objeto que el profesor acepta o rechaza cuando la recibe de su estudiante, antes que resaltar su papel dentro de un proceso de justificación (Balacheff, 2000).

En este sentido Villiers citado por Ibañes, (2001), distingue las siguientes funciones: Verificación, concerniente a la verdad de una afirmación. Explicación, profundizando de porqué es verdad. Sistematización, la organización de varios resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas. Descubrimiento o invención de nuevos resultados, así como la Comunicación, la transmisión del conocimiento matemático.

Para que la demostración tenga sentido en el estudiante, es necesario que se presente ante ellos como una herramienta significante en los contextos matemáticos, por lo cual se debe descubrir y tener en cuenta la racionalidad que tienen inicialmente, saber cómo funciona y cómo puede evolucionar; porque es a partir de esta racionalidad, en pro o en contra de ella, que los estudiantes construirán el sentido de la demostración.

De igual manera, se considera relevante el identificar los niveles de demostración matemática de los estudiantes, como fuente de información para los docentes, a fin de tomar decisiones futuras sobre el uso de estrategias didácticas que fortalezcan los procesos de abstracción y conjeturación, para proyectar el razonamiento deductivo y el pensamiento lógico de los estudiantes en pro de que alcancen mayores competencias matemáticas.

Existe un interés social pues contribuye a preocuparse por la situación de crisis en la calidad de la formación de estudiantes en matemática. Por otro lado la aplicación de la demostración en los diferentes niveles educativos y la dificultad para desarrollo correcto en los procesos mentales, se da la necesidad real del estudiar con detalles los niveles de demostración presente en los estudiantes, y de esta forma hacer las recomendaciones necesarias para el desarrollo del pensamiento en los procesos deductivo o inductivo.

Desde el punto de vista académico, la investigación podrá servir como fuente de consulta para futuros estudios relacionados con la demostración matemática como proceso cognitivo, complementando algunos trabajos que puedan ser realizados en educación matemática.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

En éste capítulo se describe el marco teórico sobre el que se fundamenta la investigación en diversos aspectos. En el apartado 2.1 se describen los antecedentes de la investigación, surgidos de los estudios revisados. El apartado 2.2 incluye la fundamentación teórica donde se presentan las Bases Filosóficas, Social, Psicopedagógica y Legal. Finalmente, se expone la definición de términos relacionados con los niveles de demostración en el aprendizaje de la matemática.

2.1 Antecedentes de la Investigación

En el marco de los antecedentes de la investigación, se presentan algunos estudios relevantes relacionados con demostración, lógica de la construcción del conocimiento matemático, aprendizaje de la demostración matemática, actividades didácticas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática y esquemas de prueba y procesos cognitivos.

Viramontes y Martínez (2010), realizaron un estudio sobre la demostración: un análisis desde la teoría de las representaciones sociales, fijando la atención en la problemática en torno a los procesos de argumentación, como parte esencial para entender desde el punto de vista didáctico la demostración. Los autores en la investigación, introducen en el sistema didáctico algunas recomendaciones para que la transición entre las matemáticas sin demostraciones y aquellas que las requieren sea más ligera y que cuente con mayor significación para el estudiante. Además se aproximan a los procesos de argumentación que viven en la cultura del salón de clases para conocerlos, describirlos y caracterizarlos en términos de representaciones sociales partiendo de una descripción de la realidad cotidiana.

En la investigación, se concluye que la noción de demostración suele tener un estatus más o menos estático en los profesores, se describe como algo acabado y en los estudiantes se describe a través de procesos, también que la noción de matemática tiene en los profesores una serie de características bien diferenciadas y plurales y en los estudiantes se carga hacia las nociones de números, demostraciones y álgebra, con una marcada frecuencia en los números y por último la noción de verdadero tiene connotaciones que giran alrededor de las estructuras formales de validación: verdadero – axiomas – teoremas – demostración.

La investigación anterior aporta al presente estudio elementos esenciales presentes en la cognición del estudiante, éstos basados en la argumentación desde una perspectiva didáctica. En este sentido brinda estrategias significativas que permite al investigador ver la posible transición del estudiante de la aritmética al álgebra.

Por otro lado, Crespo (2011) desarrolla una investigación acerca de la lógica de la construcción del conocimiento matemático, ante el hecho reiterado de que los estudiantes no comprenden en el aula de matemática la necesidad de la demostración y que además aparecen formas de argumentación no deductivas y que son consideradas erróneas. Por esta razón, analiza primeramente las funciones de las demostraciones matemáticas y su presencia en la clase de matemática, señalando que las distintas formas del pensamiento lógico no siempre son logradas satisfactoriamente por los estudiantes, pues para comprobar la validez de una afirmación matemática se contentan recurriendo, por lo general, a una simple verificación o creen la propiedad, por resultarles evidente. También plantea una serie de reflexiones de la manera en la que se construye el conocimiento matemático, intentando identificar la lógica subyacente que guía la construcción del conocimiento matemático y compararla con la del descubrimiento en las ciencias fácticas.

En esta investigación se concluyó que la matemática combina intuición y razón, que la intuición es la base de la construcción del conocimiento matemático, no es deductiva y la presencia de formas no deductivas de argumentación en el aula, lleva a analizar cómo utilizarlas y a ser conscientes de su utilidad y limitaciones. También que no deben ignorarse esas formas, sino que por el contrario se debe estar atento a la manera en la que actúan para poder aprovecharlas a la hora de lograr en los estudiantes nuevos conocimientos matemáticos.

La investigación anterior, permite determinar los obstáculos cognitivos basados en los errores cometidos por parte de los estudiantes y éstos a su vez consideran la demostración como una simple verificación de un objeto matemático, sin pasar a la generalización de la propiedad. Además expresa la relación entre razón e intuición la cual no es deductiva.

Vega y Moreno (2011), realizan un trabajo sobre argumentar- conjeturar: introducción a la demostración, con la finalidad de potenciar a la argumentación para la producción de conjeturas, asumiendo que es precisamente la formulación de conjeturas la actividad central de la construcción de conocimiento matemático en la educación secundaria y la argumentación una competencia fundamental a desarrollar. Además, se exploró cómo fortalecer conjeturas a partir de la fortaleza de los argumentos que las soportan, y al lograrlo, se generó las condiciones de partida para su demostración. Asimismo, se caracterizó a la argumentación en sus facetas de preformal y formal, para fortalecer los argumentos en la fase preformal, mediante mecanismos de afirmación y refutación.

Los autores concluyen que es necesario mirar la matemática como una actividad social y cultural, en la que el conocimiento se construye a partir de la experimentación y la formulación, contrastación y justificación (argumentación) de conjeturas, y estar dispuestos a buscar patrones y regularidades, que existe la necesidad de reconceptualizar a la demostración a nivel educativo. Además, que la argumentación con bases empíricas y científicas debe ser encausada a la construcción de conjeturas y potenciar el paso de la conjetura a la prueba (fortalecer la misma hasta disponerla como una proposición que evidencia la necesidad de la prueba).

La investigación anterior, señala la argumentación como elemento esencial para la producción de conocimiento matemático, en este sentido el usar la argumentación en las diferentes actividades a realizar por parte del estudiante brindará buenos resultados a fin de alcanzar los propósitos de la presente investigación.

Al respecto, Querales (2011), realizó un trabajo titulado “Actividades Didácticas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática”, dirigidas a docentes en formación de la especialidad de matemática. La misma, estuvo conformada por docentes en formación de la especialidad de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Luis Beltrán Prieto Figueroa, donde se describen las creaciones de los estudiantes e hicieron reflexiones de las mismas, señalando que los estudiantes están acostumbrados a una enseñanza rígida y tradicional, además la demostración es vista como un proceso algorítmico y memorístico. Como conclusión señala, que el uso de actividades didácticas permite mejorar el aprendizaje y minimizar las concepciones negativas de los estudiantes en torno a la demostración matemática.

La investigación anterior, permite ver el uso de algoritmo en los estudiantes como estrategia para resolver problemas, en este sentido la aplicación permite al docente investigador tener una idea de la vía de demostración a seguir por parte del estudiante, pues este se familiariza con actividades algorítmica y resuelve de manera memorística.

En este contexto, Colmenárez y Quevedo (2012), realizaron un estudio sobre “Errores y obstáculos en el aprendizaje de la demostración matemática”, donde la población estuvo formada por un grupo de 30 estudiantes de la especialidad matemática, de la cual resultó que los estudiantes mantienen arraigado el esquema empírico de prueba en sus dos versiones, inductiva y perceptual, lo cual constituye un obstáculo epistemológico para la demostración matemática, además de la argumentación en el lenguaje cotidiano. También se obtuvo que el desarrollo algorítmico de la matemática y la concepción algorítmica de la demostración son vistas como una serie de pasos lógicos desde una hipótesis hasta una conclusión o tesis, que se gesta en la presentación usual universitaria de definiciones, teoremas, demostraciones, entre otros y constituyen un obstáculo de origen didáctico denominado el obstáculo de la algoritmización de la demostración.

En este sentido la investigación anterior permite conocer la estrategia a seguir por parte de los estudiantes, éstos se basan en la aplicación de algoritmos para hacer demostraciones, lo cual limita el razonamiento lógico del estudiante generando el obstáculo de la algoritmización.

Asimismo, Rodríguez (2012), realizó una investigación sobre esquemas de prueba y procesos cognitivos que activan los estudiantes cuando realizan demostraciones, la cual tuvo como propósito analizar los procesos cognitivos que activan los estudiantes de Análisis Matemático de la especialidad de matemática en Universidad Pedagógica Experimental libertador, Instituto Pedagógico de Barquisimeto. La investigación se centró en la aproximación teórica Pensamiento Matemático Avanzado, llegando a las conclusiones de que los estudiantes mantienen arraigado el esquema de prueba simbólico y axiomático, y de manera leve el empírico perceptual, el autoritario, el inductivo y el ritual.

Los estudiantes activan los procesos cognitivos de síntesis y abstracción cuando afrontan una tarea de demostración, algunos activan el proceso de generalización. Los que comprenden los enunciados y piensan en aspectos que van en el proceso, tales como: el tipo de enunciado, la clase de solución que requiere, el tipo de método de demostración que se puede emplear, es decir, revisan el proceso de demostración empleado y piensan en las ideas claves de la demostración. Y finalmente se encontró que los estudiantes consideran que el contexto en el cual se desarrollan las demostraciones es fundamental para activar este proceso.

El estudio anterior, permite al investigador examinar otras vías alternas en cuanto a aquellos estudiantes que tienen un razonamiento lógico, sin embargo existe una dificultad tanto en los conceptos como en los procedimientos derivados de errores cometidos debido a la forma en que se comprenden los procesos y resultados.

La revisión de estos estudios deja ver de manera general, que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje de la demostración matemática tanto conceptual como pragmática, que los errores son manifestaciones de las maneras en que están comprendiendo los procesos y resultados a los que llegan y la manera en la que se presenta la matemática. En muchas oportunidades se orienta de forma que los estudiantes crean que se trata de un saber ya cerrado y dado, en el que no se puede participar en su construcción, sino que se está descubriendo conceptos de una ciencia acabada.

2.2 Fundamentación Teórica

En éste apartado, se centra el análisis de una serie de teorías que tienen relación con los niveles de demostración en el aprendizaje. Para ello, se presenta primeramente la investigación realizada por Jean Piaget citado por Severo (1972); resaltando los aspectos como la epistemología matemática y psicológica, estructuras matemáticas y estructuras de la inteligencia. Además la teoría de Vygosky (1934): Zona de Desarrollo Próximo, seguido de la clasificación de los niveles de demostración que distingue Balacheff, los cuales se tomaron como base fundamental en el tema de estudio.

2.2.1 Base filosófica

2.2.1.1 Jean Piaget: epistemología matemática y psicología.

La matemática, es una de las ciencias más relevantes, que ha existido durante la historia del ser humano, ha contribuido desde el mejorar las formas de desarrollo intelectual, hasta la forma que debe regirse la vida del hombre. Gracias a ésta, la ciencia cuenta con los parámetros de tiempo más perfectos jamás existidos, toda la vida del ser humano gira alrededor de un número, desde las fórmulas científicas, hasta las fórmulas laborales más simples.

Es por ello, que Severo (1972) contrasta el avance de las disciplinas matemáticas y la importancia que las ciencias están dando a sus técnicas con lo limitado de las investigaciones respecto a la fundamentación epistemológica de las operaciones.

La matemática y lo empírico. La interpretación empirista de la matemática presenta a ésta como conectada directa o indirectamente a la experiencia; sea esta física (abstrayendo las nociones a partir de objetos que se encuentran fuera del sujeto investigador) o psicológica (a partir de lo dado en el sujeto y construido por una visión interna llamada introspección).

El psicologismo. Esta posición sostiene que la investigación no ha de centrarse en las fórmulas sino en los procesos psicológicos que conducen a las reglas y convenciones axiomáticas y a las que se puede arribar por medio de una "reflexión psicológica" (introspección).

El intuicionismo. En esta posición, Hilbert citado por Severo, 1972, sostiene que además de la experiencia y la deducción, un tercer elemento cognoscitivo integra la matemática. Esta es la intuición, que se presenta como elemento a priori.

2.2.1.2 Estructuras matemáticas y estructuras de la inteligencia.

Independientemente la formalización de los problemas de la matemática (cuestión que compete exclusivamente a esta disciplina), algunos problemas generales se presentan para su análisis en relación con la psicología. Tales son: la naturaleza de las estructuras, la intuición y las relativas a la invención y el descubrimiento matemáticos.

Las estructuras matrices: Estas temáticas sustenta la tesis de que frente a la disparidad de teorías en matemática se pueden abstraer las relaciones estructurales o comunes a las diferentes disciplinas haciendo caso omiso de sus elementos. Al ser precisadas las condiciones de esas relaciones interdisciplinarias se pueden construir los axiomas de la estructura descubierta.

Construir la teoría axiomática sería, entonces, extraer las consecuencias implícitas en esos axiomas. Si tales estructuras son demostradas como no reductibles entre sí, se les puede llamar "matrices". Estas son: a) Estructuras algebraicas. b) Estructuras de orden. c) Estructuras topológicas.

La abstracción reflectora y la experiencia: Al intentar axiomatizar las estructuras operativas, la "abstracción empírica" cedería su lugar a la "abstracción reflectora". La empírica se ejerce sobre objetos percibidos y consiste en tomar rasgos comunes de una serie de *objetos* mientras que la segunda es constructiva: extrae de un sistema de acciones u operaciones ciertos caracteres que se reflejan sobre operaciones de nivel superior (por ejemplo, al perder sus contenidos o volverse reversible la operación).

Lo anterior no implica que con una *introspección* se detecten esas operaciones o los entes lógico-matemáticos porque se trata de una construcción que eleva a un plano superior la operación inferior. Este tipo de experiencia sobre la que trabaja la operación lógico-matemática, la "experiencia lógico-matemática", se distingue de la "experiencia física" y la "psíquica".

La invención matemática: Ante la vieja disyuntiva de la invención o creación libre y el descubrimiento que presupone el encuentro imperativo con algo que existe independientemente del sujeto. Piaget propone una tercera posibilidad. Hablar de un trabajo "inconsciente" que soporta la construcción matemática es eludir el problema: todo lo relacionado con lo "consciente" o "inconsciente" es relativo a las deficiencias de la introspección. Apoyándose en las operaciones de Leroy (debate en el *Institute for advanced studies*, de Princeton) resume los pasos de la invención de la siguiente manera: 1) *tentativas* en diferentes direcciones sobre las cuales no se tiene certeza, a las que se concede desigual importancia y entre las cuales puede hallarse la solución certera al problema planteado; 2) *búsqueda* que reduce todo a unas cuantas direcciones provocando que algunas tentativas desechadas cubren mayor importancia, haciendo ver la solución como aparentemente nueva.

Ahora bien, la abstracción reflectora no es invención ni descubrimiento. La estructura que se obtiene con esa abstracción sale a una anterior pero no se reduce a ella. A la vez, no es una creación libre absoluta porque los resultados de la abstracción están ya contenidos fundamentalmente en la estructura inferior. Hay, en el fondo de todo ello, la combinación de estructuras determinadas por un marco de posibilidad ya definido.

La intuición: Ya es conocida de sobra la dificultad que presenta el abordaje de este tema dado que quienes sostienen la predominancia de la intuición como forma cognoscitiva no han elaborado una teoría consecuente de ella. Independientemente de las tesis que se han elaborado las investigaciones permiten observar que respecto a la "intuición" se tiene:

Las intuiciones operatorias en elementos discretos, son independientes de las imágenes y si éstas las acompañan son símbolos no generales. Tal es el caso de la conocida intuición de Poincaré de "n + 1", de lo transfinito (paso al límite en la serie 1 + 5 + 1/4 + 1 / 6 . . .).

La intuición matemática pura no guarda ya relación con acciones en objetos materiales sino con combinaciones de operaciones (como en el paso del espacio de tres dimensiones al espacio de *n* dimensiones).

2.2.1.3 Teoría de Vygotsky: Zona de Desarrollo Próximo.

Vygotsky (1934), para quien el conocimiento es el resultado de un proceso dinámico e interactivo; la información externa es interpretada y reinterpretada por la mente, que va construyendo progresivamente modelos explicativos cada vez más complejos y potentes, a partir de la interacción entre el sujeto y el medio, entendido social y culturalmente.

De acuerdo con Daniels (2003), la teoría de Vygotsky se basa principalmente en el aprendizaje sociocultural de cada individuo, a partir de interacciones sociales, argumentándose “que el aprendizaje despierta una serie de procesos de desarrollo interno, que sólo se ponen en marcha cuando el individuo interactúa con personas de su entorno y con sus pares” (p. 90). Este aprendizaje es visto como cultural y contextualmente específico, en el que la separación del individuo de sus influencias sociales es algo imposible.

Por otra parte, se asume que el conocimiento y el aprendizaje son producto de una construcción mental, en la que el "fenómeno real” se produce en la interacción “sujeto cognoscente-objeto conocido”, es decir, la realidad es una construcción creada por el observador.

En la teoría de Vygotsky (1934), se considera el aprendizaje como uno de los mecanismos fundamentales del desarrollo, en el cual el contexto ocupa un lugar central para la interacción social, como motor del desarrollo. Por ello, introduce el concepto de Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), que se expresa como la distancia entre el nivel real de desarrollo, con la capacidad de resolver independientemente un problema, así como el nivel de desarrollo potencial, a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz.

En el marco de la Zona de Desarrollo Próximo, se puede apreciar el papel mediador y esencial de los docentes en el proceso de la enseñanza-aprendizaje y del desarrollo de los estudiantes, el cual puede ser significativo en aspectos claves, como aquellos relacionados con la matemática y los contenidos relacionados con la resolución de problemas, como es el caso de las demostraciones.

2.2.2 Base Social

Actualmente, el Sistema Educativo Venezolano en sus diversos niveles está regido por los cuatros pilares fundamentales de la educación dictaminados por la UNESCO. Según Jacques Delors (1996), presidente de la Comisión Internacional sobre la Educación para el Siglo XXI, la educación a lo largo de la vida se basa en cuatro pilares: aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos, aprender a ser, los cuales están definidos de la siguiente forma:

Aprender a Conocer

Este pilar está asentado en las bases de la necesidad básica del hombre por tener conocimiento de todo su entorno, combinando una cultura general con la posibilidad de profundizar los conocimientos, lo que supone aprender a aprender para aprovechar las posibilidades de la educación a lo largo de la vida, según Jacques Delors, (1996).

> Consiste para cada persona en aprender a comprender el mundo que lo rodea, al menos suficientemente para vivir con dignidad, desarrollar sus capacidades profesionales y comunicarse con los demás. Como fin, su justificación es el placer de comprender, de conocer, de descubrir (p. 92).

Sobre estas consideraciones, se asume que para llegar a conocer primeramente se debe aprender y este proceso incluye ejercitar la memoria, la atención y el pensamiento.

Aprender a hacer

Este pilar está centrado en la necesidad del hombre de la producción, a fin de obtener no sólo una calificación profesional sino, una competencia que capacite al individuo para hacer frente a las situaciones. Pero, también, aprender a hacer enmarcado en las distintas experiencias sociales o de trabajo que se ofrecen a la colectividad a causa del contexto social. Consciente de las realidades de la educación actual, se hace hincapié en la necesidad de disponer de medios de enseñanza, tradicionales o nuevos que conviene utilizarse promoviendo la participación activa de los estudiantes, para de esta forma poder ayudar a la sociedad, mejorando sus economías, transformando sus conocimientos en nuevos empleos y tecnologías, en este aspecto es señalado por Jacques Delors, (1996)

> Está más estrechamente vinculado a la cuestión de la formación profesional: ¿Cómo enseñar al estudiante a poner en práctica sus conocimientos y, al mismo tiempo, cómo adaptar la enseñanza al futuro mercado del trabajo, cuya evolución no es totalmente previsible? (P.94).

Con relación a esto, los docentes deberían trabajar en equipo dentro de esta área, sobre todo en el nivel de Educación Media General, principalmente para contribuir a la indispensable flexibilidad de los programas de estudio. Ello evitará muchos fracasos, pondrá de manifiesto algunas cualidades naturales de los estudiantes y, por consiguiente, facilitará una mejor orientación de los estudios y la trayectoria de cada uno, según el principio de una educación impartida a lo largo de toda la vida.

Aprender a vivir juntos, aprender a vivir con los demás

Este pilar busca fomentar un ambiente sin violencia y con tolerancia, a vivir juntos practicando la comprensión del otro respetando los valores de pluralismo, comprensión mutua y paz. Se trata de aprender a vivir juntos conociendo a los demás, su historia, y sus tradiciones, a partir de ahí, crear un espíritu que impulse la realización de los proyectos comunes o la solución inteligente y pacífica de los conflictos.

Dentro de un entorno educativo, apoyar el intercambio cultural y así promover el conocimiento en lugar de concebir una educación llena de conflictos. Se piensa pues en una educación que genere y sea la base de este espíritu nuevo, sin descuidar a los otros tres pilares de la educación que, de alguna forma, proporcionan los elementos básicos para aprender a vivir juntos.

Aprender a ser

Aprender a que aparezca la propia personalidad y se esté en capacidad de actuar con suficiente autonomía, de juicio y de responsabilidad. Con tal fin, no menospreciar en la educación ninguna de las posibilidades de cada individuo, considerando el conocimiento, los valores y las competencias necesarias para el bienestar personal y familiar, y si es posible poder desarrollar una personalidad y una identidad propia, el conocimiento de sí mismo, y la autorrealización para así ser capaz de actuar con mayor autonomía, fundamento y responsabilidad personal.

En torno a las consideraciones presentadas, es relevante la enseñanza de la demostración matemática, como uno de los mayores retos en la actividad educativa, en el cual suelen estar involucrados ciertos aspectos que influirán directamente en el aprendizaje de los estudiantes; la adquisición de técnicas por parte de estos depende en buena medida de las estrategias utilizadas por el docente.

De acuerdo con Hanna (1989) “el papel que juega la demostración en matemática conduce a la conclusión de que la demostración debe formar parte de cualquier currículo”. Asimismo, plantea que el desafío principal al que se enfrentan los profesores en cuanto a la demostración, es precisamente realzar su papel en el aula, buscando y haciendo uso de estrategias o actividades más efectivas para potenciar la comprensión de la matemática como tal. (p. 27)

Según Tall (1991), la transición hacia el pensamiento matemático avanzado implica que el estudiante pase de la argumentación a la demostración como método de validación de un resultado matemático: Y esto se puede realizar presentando al estudiante las demostraciones lo más claras posible, intentando que quede claro el porqué y el para qué de cada paso, al presentar la demostración como la respuesta a una necesidad, de manera que la estructura de la matemática formal sea vista por el estudiante como un objetivo significativo.(p. 20)

Dada la posición del docente en el aula como garante de la legitimidad y validez de las actividades matemáticas que allí se realizan, resulta muy difícil devolver a los estudiantes la responsabilidad matemática de sus afirmaciones y más aún, que emerja de esta devolución la necesidad de una demostración más allá de una simple argumentación. Por ello Tall (1991) considera que la salida está en introducir al estudiante en actividades de conjetura, verificación, debate, que fomenten el pasaje hacia explicaciones basadas en normas convenidas por el grupo, desmitificando el ideal de demostración como un ritual formalista característico de la comunidad matemática, que en el aula sólo puede contemplarse, en el cual se pone de manifiesto el aprender a conocer y aprender a hacer.

Sobre este particular, los cuatro (4) pilares señalados: aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos, aprender a ser, son significativos en el tratamiento de las demostraciones matemáticas, por cuanto implican los siguientes aspectos: a) profundizar en su comprensión y significatividad; b) adquirir las competencias para llegar a producir sus propias demostraciones; c) realizar actividades en equipo en torno a esta práctica, con el fin de compartir el conocimiento; c) fortalecer su autonomía en la aplicación de este conocimiento.

2.2.3 Base Psicopedagógica

Balacheff citado por Azcárate (1987), define por argumentación cualquier discurso destinado a obtener el consentimiento del interlocutor sobre una afirmación; de la misma forma conceptualiza una explicación como una argumentación en que el consentimiento se busca a partir de la explicitación del carácter verdadero de la afirmación, utilizando exclusivamente argumentos de contenido y renunciando a otro tipo de argumentos como podrían ser los de autoridad, los afectivos o los de reputación. (p.7)

En el mismo orden de ideas, Balacheff define las pruebas "como aquellas explicaciones en que la explicitación del carácter verdadero de la afirmación se realiza sobre la base de normas aceptadas por una comunidad dada en un momento dado" (p.7)

Para finalmente llegar al concepto demostración, que "es cuando la comunidad involucrada es la matemática y las normas plantean la presentación de una sucesión de enunciados, cada uno de los cuales es una definición, un axioma, un teorema previo o un elemento derivado mediante reglas preestablecidas de los enunciados que le preceden, las pruebas reciben el nombre de demostraciones" (p.7)

En el proceso de aprendizaje de la matemática, la argumentación utilizada para demostrar una proposición matemática puede aparecer bajo distintos aspectos, con mayor o menor grado de explicitación y con distintos niveles de rigor; como un medio de autovalidar los conocimientos o como un contenido a aprender.

En este sentido, Balacheff (2000) distingue los niveles de demostración como "pragmático y conceptual" que tendrán un lugar privilegiado en la génesis cognitiva de la demostración. El nivel pragmático que se basa en acciones y visualizaciones de imágenes, éste nivel permite establecer la verdad de una aserción y el nivel conceptual que no incluyen acciones, sino que se basa en propiedades generales y las relaciones entre ellas. La posición de cada nivel de demostración está determinado por su nivel de exigencia de generalidad y por su nivel de conceptualización de los conocimientos que exige.

Existe una ruptura fundamental entre los dos niveles de demostración, el nivel pragmático se divide en: a) El empirismo ingenuo y b) la experiencia crucial y el nivel conceptual; a) El ejemplo genérico y b) la experiencia mental. Los cuales se definen de la siguiente forma:

2.2.3.1 Nivel Pragmático

a) El empirismo ingenuo: Consiste en asegurar la validez de un enunciado después de haberlo verificado en algunos casos. Este modo de validación tan rudimentario e insuficiente, es una de las primeras formas de los procesos de generalización, Piaget, citado por Balacheff (2000).

b) La experiencia crucial: Designa una experimentación cuyo resultado permite escoger entre dos hipótesis, siendo verdadera sólo una de ellas. Si esta experiencia permite rechazar una hipótesis, no es posible afirmar que la otra es verdadera, es decir, el proceso consiste en verificar una proposición de un caso para el cual no se asume que “si funciona ahora, entonces funcionará siempre”. Este tipo de validación se distingue del empirismo ingenuo en que el individuo plantea explícitamente el problema de la generalización y lo resuelve, aventurándose a la ejecución de un caso que reconoce tan poco particular como le es posible.

2.2.3.2 Nivel Conceptual

a) El ejemplo genérico: Consiste en la explicación de las razones de validez de una aserción para la validación de operaciones o transformaciones de un objeto en calidad de representante característico de determinada clase. La formulación libera las propiedades, características y las estructuras de una clase, estando siempre ligada a su categoría y a la exhibición de uno de sus representantes.

b) La experiencia mental: Se centra en la acción, interiorizándola y separándola de su ejecución sobre un representante en particular. Se desarrolla en una temporalidad anecdótica, pero las operaciones y las relaciones que inician la prueba nunca están designadas por su puesta en práctica. Las operaciones y las relaciones que sirven de preludio a la prueba nunca son escogidas por el resultado de su puesta en práctica; este es el caso genérico.

No se trata de "mostrar" que la proposición en cuestión es verdadera porque "funciona" para el ejemplo genérico y la experiencia mental, sino de establecer el carácter necesario de su validez presentando las razones que lo justifiquen. Así, la transición del ejemplo genérico a la experiencia mental debe cumplir con dos condiciones: el paso de la acción a la acción interiorizada y una descontextualización, que marca el progreso decisivo en la construcción de los conocimientos.

Según éste autor, el camino de un nivel de demostración a otro no ocurre espontáneamente, sino que el estudiante debe lograr distanciarse de la acción y el proceso de solución del problema, para detectar los elementos esencialmente generales de la situación. Es preciso tener un conocimiento en relación a estas consideraciones, debido a que contribuirá en gran medida a la obtención de un aprendizaje más significativo en los estudiantes.

Para que el aprendizaje sea significativo Ausubel (1978), señala que es necesario partir de las ideas que los aprendices ya poseen, interactuando con ellas a fin de enriquecerlas o modificarlas. De igual manera, establece que el aprendizaje es significativo cuando puede incorporarse a las estructuras de conocimiento previas, adquiriendo significado en la medida que se relaciona con esas ideas previas. De allí la necesidad de que lo nuevo que se aprenda tenga significado en sí mismo, es decir, que haya una relación no arbitraria o simplemente asociativa entre sus partes, aunado a lo cognitivo, lo cual adquiere significado en el aprendizaje de las demostraciones, como elemento que tiene relevancia en su formación. (p. 83)

Ausubel citado por Moreira (1997), señala que la estructura cognitiva tiende a organizarse jerárquicamente en términos de nivel de abstracción, generalidad e inclusividad de sus contenidos. Consecuentemente, la emergencia de los significados para los materiales de aprendizaje típicamente refleja una relación de subordinación a la estructura cognitiva. Conceptos y proposiciones potencialmente significativos quedan subordinados o, en el lenguaje (p. 52).

En torno a los aspecto señalados, para conocer los niveles de demostración que poseen los estudiantes de Cuarto Año de Educación Media General se toma como referencia el aprendizaje significativo en función del reconocimiento de la importancia y utilidad de esta temática, además de reconocer que el empirismo ingenuo y la experiencia crucial, ejemplo genérico y experiencia mental pueden ser utilizados en el aula para darle significado a estos contenidos, al reconocer los aspectos que la constituyen y no solamente los pasos para desarrollarla.

2.3 Base Legal

La fundamentación legal soporta al Sistema Educativo Bolivariano, sustentada en la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela (1999) como máximo instrumento legal, rector del desarrollo y la convivencia en la República, donde se consagran y profundizan los principios que consideran a la educación y la cultura como derechos fundamentales y pilares del proceso de cambio y transformación que se desarrolla en nuestro país. Otorga a la educación una condición básica para la realización de los fines esenciales del Estado.

La Constitución de la República Bolivariana de Venezuela (1999) establece en su preámbulo como fin supremo del pueblo, la refundación de la República y el establecimiento de una sociedad democrática, participativa, protagónica, multiétnica y pluricultural en un Estado de derecho y de justicia que consolida los valores de la libertad, solidaridad, democracia, la responsabilidad social y la preeminencia de los derechos humanos.

Las directrices constitucionales en materia educativa se encuentran especialmente fijadas en los artículos 102 y 103 de la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela (1999), mediante los cuales se establecen los fundamentos del sistema educativo, partiendo de:

> La Educación es un derecho humano y un deber social fundamental, es democrática, gratuita y obligatoria. El estado la sumirá como función indeclinable y de máximo interés en todos sus niveles y modalidades y como instrumento de conocimiento científico, humanístico y tecnológico al servicio de la sociedad (Art. 102).

"Toda persona tiene derecho a una educación integral, de calidad, permanente, en igualdad de condiciones y oportunidades, sin más limitaciones que las derivadas de sus aptitudes, vocación y aspiraciones" (Art. 103).

Por otra parte, los organismos gubernamentales crean sus propias leyes que los hacen autónomos y les dan más libertad de acción, es el caso de la Ley Orgánica de la Educación (2009), que estipula: "La educación como derecho humano y ser social fundamental orientada al desarrollo del potencial creativo de cada ser humano" (Art. 4).

En el mismo orden de ideas, se considera el Art.15, numeral 8, el cual reza lo siguiente: "Se establece desarrollar la capacidad de abstracción y el pensamiento crítico mediante la formación en lógica y matemáticas con métodos innovadores que privilegien el aprendizaje desde la cotidianidad y la experiencia".

Es importante señalar que la Educación Secundaria tiene como finalidad lograr la formación integral de los adolescentes y jóvenes acorde con las exigencias de la República Bolivariana de Venezuela. Además, los sistemas educativos deben responder a los múltiples retos que da la sociedad de la información, en función siempre de un enriquecimiento continuo de los conocimientos y de una ciudadanía adaptada a las exigencias de la época.

2.4 Definición de Términos

Argumentación: Según Ugas (2011), es el mecanismo que relaciona la información concreta con las abstracciones y generalizaciones; es decir, cómo se relacionan los datos, siguiendo las reglas del pensamiento crítico, para obtener información nueva.

Demostración Matemática: Balacheff (1998), la define desde el punto de vista de las prácticas matemáticas de los estudiantes, es decir, cómo los estudiantes llegan a la convicción de la validez de la solución propuesta.

Niveles de Demostración: Balacheff (2000), los define como un conjunto de argumentos explicativos usados por una persona para validar un conocimiento matemático.

Aprendizaje: Para Vygotsky (1934), es el mecanismo fundamental del desarrollo, en el cual el contexto ocupa un lugar central para la interacción social, como motor del desarrollo.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo se presenta la metodología utilizada para el desarrollo del estudio, la naturaleza, el diseño, la población y muestra de la investigación así como los procedimientos, las técnicas e instrumentos para organizar y analizar la información, validez y confiabilidad del instrumento y técnica de análisis de los datos.

3.1 Naturaleza de la Investigación

En la investigación, se analizaron los niveles de demostración matemática en los estudiantes de cuarto año. En tal sentido, el estudio se centró en el enfoque cuantitativo, definido por Hernández, Fernández y Baptista, (2010), como: aquel donde el objeto de estudio es "externo" al sujeto que lo investiga, tratando de lograr la máxima objetividad. Sus instrumentos suelen recoger datos cuantitativos los cuales también incluyen la medición sistemática y se emplea el análisis estadístico como característica resaltante. (p.6),

El estudio se enmarcó dentro de una investigación de carácter descriptivo, el cual Hernández y otros (2010), señalan "…busca especificar las propiedades, las características y los perfiles importantes de personas, grupos, comunidades o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis" (p.80). En definitiva permiten medir la información recolectada para luego describir, analizar sistemáticamente las características del fenómeno estudiado con base en la realidad del escenario que se plantea en esta investigación.

Los estudios descriptivos son útiles para mostrar con precisión las dimensiones de un fenómeno, suceso, comunidad, contexto o situación. En esta clase de estudios el investigador debe ser capaz de definir, o al menos visualizar, qué se medirá (qué conceptos, variables, componentes, entre otros) y sobre qué o quiénes se recolectarán los datos (personas, grupos, comunidades, objetos, animales, hechos, etc.) Hernández, y otros, (2010)

La investigación se apoyó en un trabajo de campo, según Balestrini (2002) las investigaciones de campo "In situ" se realizan en el propio sitio donde se encuentra el objeto de estudio, ello permite el conocimiento más a fondo del problema de estudio (p. 28). En efecto, en esta investigación la información se obtuvo directamente del contexto, es decir, de la Unidad Educativa Nacional "Juan José Guerrero" Barquisimeto-Edo Lara, donde se utilizaron fuentes primarias y secundarias.

3.2 Diseño de la Investigación

El diseño de la investigación es no experimental definida por Hernández y otros, (2010) como aquella "que se realiza sin manipular deliberadamente variables. Es decir, se trata de estudios donde no hacemos variar en forma intencional las variables independientes para ver su efecto sobre otras variables". Cabe señalar que, lo que hace el investigador en este tipo de diseño no experimental es observar fenómenos tal como se dan en su contexto natural, para posteriormente analizarlos.

En este sentido Hernández y otros, (2010) afirman "En estos casos el diseño apropiado (bajo un enfoque no experimental) es el transversal o transeccional". También señalan "que la investigación de tipo transversal o transeccional consiste en recolectar datos en un solo momento, en un tiempo único. Su propósito es describir variables y analizar su incidencia e interrelación en un momento dado" (p. 151).

Como es el caso del presente estudio, que tiene como principal propósito describir los niveles de demostración en el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes de cuarto año de la Unidad Educativa Nacional “Juan José Guerrero” Barquisimeto-Edo Lara, en el periodo escolar 2014-2015.

3.3 Población y Muestra

3.3.1 Población.

Hernández y otros, (2010), indican que “una población es el conjunto de todos los casos que concuerdan determinadas especificaciones” (p. 174). La población en este estudio consistió en la totalidad de 113 educandos de cuarto Año de Educación Media General de la Unidad Educativa Nacional “Juan José Guerrero”, durante el año escolar 2014-2015, estudiantes distribuidos por la coordinación de cuarto año en 3 secciones: 2 con 38 estudiantes y 1 con 37. A continuación se muestra la matrícula de estudiantes de cuarto año.

Tabla N° 1: Estudiantes del cuarto año de Educación Media General de la Unidad Educativa Nacional “Juan José Guerrero” Barquisimeto-Edo Lara clasificados por edad y género del año escolar 2014-2015.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="3">Secciones</th><th colspan="2">A</th><th colspan="2">B</th><th colspan="2">C</th><th rowspan="3">Totales</th></tr>
<tr><th colspan="2">Edad</th><th colspan="2">Edad</th><th colspan="2">Edad</th></tr>
<tr><th>15</th><th>16</th><th>16</th><th>17</th><th>15</th><th>16</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Género</td><td>Femenino</td><td>8</td><td>10</td><td>14</td><td>4</td><td>8</td><td>9</td><td>54</td></tr>
<tr><td>Masculino</td><td>10</td><td>10</td><td>18</td><td>2</td><td>10</td><td>10</td><td>59</td></tr>
<tr><td colspan="2">Sub totales</td><td>18</td><td>20</td><td>32</td><td>6</td><td>18</td><td>19</td><td>113</td></tr>
<tr><td colspan="2">Totales</td><td colspan="2">38</td><td colspan="2">38</td><td colspan="2">37</td><td>113</td></tr>
</table>

Fuente: Parada (2016).

En la Tabla N° 1 se puede observar que las edades de los estudiantes están

$$ksh = \frac{n}{N} = \frac{57}{113} = 0{,}5044$$

niveladas, es decir, existen la misma cantidad de estudiantes de género masculino con edades entre 15 y 16 años en las secciones A y C, pero las sección B posee 18 estudiantes de género masculinos de 16 años y 2 de 17 prevaleciendo los estudiantes de 16 años. Con respecto a los estudiantes de género femenino más del 50% tiene 16 años.

3.3.2 Muestra.

Este aspecto es definido como "un subgrupo de la población de interés sobre el cual se recolectarán datos, y que tiene que definirse o delimitarse de antemano con precisión, éste deberá ser representativo de dicha población" (Hernández y otros, 2010, p.173). Se seleccionó para el estudio el 50% de la población por considerar éste porcentaje una muestra representativa de la población, lo que equivale a 57 estudiantes seleccionados como muestra.

La elección de la muestra se hizo de forma probabilística, definida por Hernández y otros, como "El subgrupo de la población en el que todos los elementos de ésta tienen la misma posibilidad de ser elegidos" (p 176). Dado que la población tiene división en subgrupos como son las secciones, edad y género se procedió hacer el muestreo de forma probabilística estratificada, la cual Hernández y otros (2010) lo definen como: "Muestreo en el que la población se divide en segmentos y se selecciona una muestra para cada segmento" (p 180).

En consecuencia, para calcular el tamaño de la muestra en cada uno de los estratos, se consideró el siguiente procedimiento que plantea Hernández y otros (2010)

Dónde:

N=113, Estudiantes de cuarto año correspondientes a la población total.

n=57, Muestra representativa del 50% de la población total.

Fracción constante.

$$ksh = \frac{n}{N} = \frac{57}{113} = 0{,}5044$$

A continuación se presenta la siguiente tabla de la muestra probabilística estratificada de los estudiantes de cuarto año de Educación Media general.

Tabla N° 2: Muestra Probabilística Estratificada con respecto a la Población descrita en la tabla 1.

ESTRATOS	**ESTUDIANTES**	**TOTAL POBLACIÓN**	**MUESTRA**
1	Femenino edad 15 A	8	8 x 0,5044= 4
2	Femenino edad 16 A	10	10 x0,5044= 5
3	Masculino edad 15 A	10	10 x0,5044= 5
4	Masculino edad 16 A	10	10 x0,5044= 5
5	Femenino edad 16 B	14	14 x0,5044= 7
6	Femenino edad 17 B	4	4x0,5044= 2
7	Masculino edad 16 B	18	18 x0,5044= 9
8	Masculino edad 17 B	2	2 x0,5044= 1
9	Femeninos edad 15 C	8	8 x0,5044= 4
10	Femeninos edad 16 C	9	9 x0,5044= 5
11	Masculino edad 15 C	10	10 x0,5044= 5
12	Masculino edad 16 C	10	10 x0,5044= 5
		N=113	**n=57**

Fuente: Parada (2016).

3.4 Procedimiento

Para alcanzar los objetivos de estudio en esta investigación se consideraron los siguientes pasos:

1. Diseñar la prueba para la recolección de información, la cual permitió extraer los principales descriptores característicos de cada nivel de demostración matemática según los planteados por Balacheff.
2. Validación de la Prueba, la cual fue sometida a la consideración de tres (3)

expertos especialistas en el área de matemática y dos (2) expertos en metodología, con la finalidad de juzgar la pertinencia de los descriptores que se seleccionaron para cada nivel con los objetivos que se plantearon en la investigación.

3. Diseñar el instrumento de recolección de información final.
4. Recolección de la información aplicando el instrumento en la muestra seleccionada.
5. Descripción, análisis e interpretación de los datos obtenidos.
6. Elaboración de las conclusiones y recomendaciones al respecto.

3.5 Técnicas e Instrumentos de Recolección de Información

Para abordar la realidad contextual de la investigación, se hace necesaria la elección de técnicas e instrumentos que ayuden a la obtención de la información en torno a los niveles de demostración matemática presentes en los estudiantes de cuarto año. Los instrumentos representan un momento amplio, dentro del cual adquieren significación las expresiones del sujeto estudiado.

Según Hernández y otros (2010): Un instrumento de medición adecuado es aquel que registra datos observables que representan verdaderamente a los conceptos o variables que el investigador tiene en mente. En la presente investigación se utilizó una prueba con la intención de identificar los niveles de demostración en los estudiantes, el autor mencionado en líneas anteriores señala que una prueba mide variables específicas como las del razonamiento matemático.

Ary, Cheser y Razavieh (1994), refieren que la prueba constituye un valioso instrumento de medición en el análisis educacional, puesto que son una serie de estímulos que se le presentan a un individuo para suscitar respuestas, además de tener como condición indispensable la objetividad, que se muestra por un nivel máximo de concordancia entre los calificadores (p.184-187).

Esta prueba se aplicó como fuente de obtención de datos e información y estuvo conformada por diez (10) ítems presentados en dos hojas, suministrada al estudiante para ser resuelta de manera individual. Mediante su aplicación se buscó que las respuestas de los estudiantes pudieran evidenciar el conocimiento y las destrezas que poseen en relación con la ejecución de diferentes tareas matemáticas, referidas a objetivos matemáticos correspondientes a cuarto año como lo es: trigonometría, ecuaciones, logaritmo y función exponencial. Además, se les solicitó hacer todas las anotaciones necesarias y utilizadas en la resolución de problemas, ejercicios y demostraciones, a fin de vislumbrar los niveles de demostración matemática que aplican, así como los significados que manifiestan explícitamente de este aspecto de la matemática.

A continuación, se especifica el indicador asociado a cada uno de los ítems de la prueba.

- **Ítem 1:** Referido al nivel de demostración pragmática y verificación de casos particulares.
- **Ítem 2:** Referido al nivel de demostración pragmática y el uso de argumentos validos en las preposiciones.
- **Ítem 3:** Referido al nivel de demostración pragmática y dirigida a resolver proposiciones en casos generales.
- **Ítem 4:** Referido al nivel de demostración conceptual y definición de concepto de una Función Logarítmica.
- **Ítem 5:** Referido al nivel de demostración conceptual y definición de concepto de una Función Seno.
- **Ítem 6:** Referido al nivel de demostración conceptual y definición de concepto de Angulo.
- **Ítem 7(a) y 7(b):** Referido al nivel de demostración conceptual, y uso de diferentes clases de representaciones.
- **Ítem 8:** Referido al nivel de demostración pragmático y uso de proposiciones

validas.

- **Ítem 9:** Referido al nivel de demostración conceptual e identificación de propiedades de un objeto matemático.
- **Ítem 10:** Referido al nivel de demostración conceptual e identificación de en proposiciones matemáticas.

3.6 Validez del Instrumento

Toda medición o instrumento de recolección de datos debe reunir tres requerimientos esenciales: confiabilidad, validez y objetividad. La validez queda determinada por "el grado en que el instrumento realmente mide la variable que se pretende medir" (Hernández y otros, 2010). Los mismos autores del párrafo anterior, se refieren a la validez de experto como: "grado en que aparentemente un instrumento de medición mide la variable en cuestión de acuerdo con voces calificadas". (p.204)

Para garantizar la validez de los instrumentos prueba se utilizó el criterio de juicio de experto. Para lo cual, se consultó la opinión de tres (3) expertos de la especialidad de matemática y dos (2) de metodología, a quienes se le entregó un ejemplar de la prueba (ver anexo C) junto con un formato para ser analizada y certificada (ver anexo D). El formato de validación constaba de una primera parte correspondiente al título, objetivo de la investigación y tabla de especificaciones de la variable con el fin de evaluar la coherencia, pertinencia y claridad de los ítems; la segunda parte, se refería a la redacción del instrumento y presentación de cada ítems, considerándose para tal fin los aspectos: redacción clara y coherencia interna, si los ítems inducen a las respuestas, si el instrumento contiene instrucciones para su llenado y por último, si el instrumento permite el logro del objetivo: Describir los niveles de demostración pragmático y conceptual en los estudiantes de cuarto año. Como resultado de validación, se modificaron algunos ítems.

3.7 Confiabilidad del Instrumento

Hernández y otros (2010), plantean que “la confiabilidad de un instrumento de medición se refiere al grado en que un instrumento produce resultados consistentes y coherentes” (p. 200).

Además Hernández y otros (2010), señalan que existen diversos procedimientos para calcular la confiabilidad de un instrumento de medición. Todos utilizan fórmulas que producen coeficientes de fiabilidad que pueden oscilar entre cero y uno, donde recordemos que un coeficiente de cero significa nula confiabilidad y uno representa un máximo de confiabilidad. Cuanto más se acerque el coeficiente a cero (0), mayor error habrá en la medición (p. 300).

Es por ello que se aplicó una prueba piloto a 10 integrantes de la muestra, para poder medir la confiablidad del instrumento (prueba), para lo cual se codificaron las respuestas considerando opciones dicotómicas (correctas e incorrectas) y posterior a ello se aplicó el programa computarizado llamado SPSS 17.0 para Windows y paquete estadístico cuyo resultado fue de 0.831 con una confiabilidad alta (ver anexo E).

3.8 Técnica de Análisis de los datos

El análisis de los datos que se obtuvo, se realizó mediante unidades de codificación. Hernández y otros (2010) señalan “que las categorías de un ítem o pregunta requieren codificarse con símbolos o números; y esto debe hacerse, porque de lo contrario no se efectuaría ningún análisis o sólo se contaría el número de respuestas en cada categoría” (p. 262). Asimismo, afirma que “Si las categorías no fueron precodificadas y/o se tienen preguntas abiertas, deben asignarse los códigos o la codificación a todas las categorías de los ítems”. (p. 263).

De esta manera, indican el siguiente procedimiento para la codificación:

> Una vez que están codificadas todas las categorías de los ítems, se

procede a elaborar el "libro de códigos", el cual describe la localización de las variables y los códigos asignados a las categorías en una matriz o base de datos. Los elementos comunes de un libro de códigos son: variables de la investigación, preguntas o ítems, categorías, códigos (números o símbolos utilizados para asignarse a las categorías) y número de columna en la matriz de datos a que corresponde cada ítem.

En este sentido, para la presente investigación se utilizaron los siguientes códigos:

Ítem 1:

A1. Resulta un número par y presenta un ejemplo como justificación.

A2. Resulta un número par y no justifica.

A3. Resulta un número par indicando que es de la forma 2n y agrega un ejemplo.

Ítem 2:

B1. Resulta un número impar y presenta un ejemplo como justificación.

B2. Resulta un número impar y no justifica.

B3. Resulta un número impar indicando que es de la forma 2n+1 y agrega un ejemplo.

Ítem 3:

C1. Resulta un número impar y presenta un ejemplo como justificación.

C2. Resulta un número impar y no justifica.

C3. Resulta un número impar indicando que es de la forma 2n+1 y agrega un ejemplo

Ítem 4:

D1. Define la función logaritmo mediante la fórmula $Log_a\, y = x \Leftrightarrow a^x = y$ especificando el conjunto de partida y de llegada.

D2. Define la función logaritmo mediante la fórmula $Log_a\, y = x \Leftrightarrow a^x = y$ sin especificar el conjunto de partida y de llegada.

D3. Confunde la definición de logaritmo con una propiedad de los logaritmos.

D4. Confunde la definición de logaritmo con una función afín.

Ítem 5:

E1. Describe la función Seno como una función real de variable real de la forma *f(x) = a + b.*

E2. Define la función Seno como *f(x) = a + b* , *Sen (cx + d).*

E3. Define la función Seno como la razón trigonométrica $\left(Sen\alpha = \frac{CO}{H}\right)$.

E4. Confunde la definición con el dominio de la función.

Ítem 6:

F1. Describe un Ángulo como la parte del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen el mismo punto de origen.

F2. Afirma que un Ángulo está formado por dos rayos $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ cuyo origen es común (vértice O).

Ítem 7a:

G1. Triángulo Rectángulo porque uno de sus ángulos mide 90º.

G2. Triángulo Escaleno porque todos sus lados tienen longitudes diferentes.

Ítem 7b:

G3. Demuestra la proposición mediante el uso de identidades trigonométricas.

G4. Aplica una identidad trigonométrica pero no concluye la demostración

Ítem 8:

H1. Demuestra la proposición usando identidades trigonométricas y desarrolla ambos miembros al mismo tiempo.

H2. Demuestra la proposición usando identidades trigonométricas partiendo del primer miembro y llega al segundo miembro.

H3. Sólo escribe las identidades trigonométricas a utilizar y no hace ningún desarrollo

Ítem 9:

I1. Justifica de manera adecuada usando propiedades y definiciones previas.

I2. Confunde propiedades y definiciones previas en las justificaciones dadas.

Ítem 10:

J1. Considera cierta la igualdad porque es una propiedad dada en clase por su docente.

Además, Hernández y otros (2010) afirman que: Cuando las personas no responden a un ítem, contestan incorrectamente o no puede registrarse la información, se crean una o varias categorías de valores perdidos y se les asignan sus respectivos códigos.

En consecuencia, en todos los ítems se uso el código **NR** para los estudiantes que no responden. Posterior al proceso de codificación se realizo el análisis descriptivo correspondiente, en contraste con los elementos teóricos pertinentes para cada caso.

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

En este capítulo, se presenta el análisis de la información obtenida en la aplicación de la prueba a los estudiantes de cuarto año de Educación Media General en el lapso 2014-2015. Cumplida esta fase de la aplicación del instrumento y con el fin de lograr los propósitos de la investigación, se procedió analizar e interpretar los resultados, en los cuales se vinculan a cada uno de los objetivos. En este sentido, los resultados de los ítems emitidos por los sujetos de estudio, se presentan a través de tablas en las cuales los datos recabados se distribuyeron por frecuencia y porcentaje, analizándolas mediante unidades de codificación en forma cuantitativa.

Seguidamente, la información se presenta por medio de gráficos en forma de barra con su respectivo análisis descriptivo, emitiendo interpretaciones de los mismos, haciendo las inferencias pertinentes en la búsqueda del nivel de demostración en el que se encuentra el estudiante y sustentando la explicación con bases teóricas que fueron desarrolladas en el capítulo II.

Una vez concluido el análisis de cada ítem, se ofrecen las conclusiones y se abordan las recomendaciones.

4.1 Presentación y Análisis de los Resultados.

A continuación, se presenta una tabla donde se refleja la distribución de frecuencia y porcentaje según el número ítems contestados y no contestados y como fundamento teórico se tomó la clasificación de los niveles de demostración dada por Balacheff (2000).

Tabla Nº 3: Distribución de frecuencia y porcentaje según los ítems contestados y no contestados (N=57)

	CONTESTADOS		**NO CONTESTADOS**	
ÍTEM	**F**	**%**	**f**	**%**
1	57	100,0	0	0
2	57	100,0	0	0
3	57	100,0	0	0
4	53	93,0	4	7
5	54	94,7	3	5,3
6	56	98,2	1	1,8
7a	56	98,2	1	1,8
7b	55	96,5	2	3,5
8	50	87,7	7	12,3
9	57	100,0	0	0
10	52	91,2	5	8,8

Fuente: Parada (2016).

Con relación a estos resultados, se observa que existen 4 ítems contestados al 100% por parte de los estudiantes, estos ítems son: 1, 2, 3 y 9. En los ítems restantes se observa que el porcentaje también es alto, es decir, mayor o igual al 87,7%, pero no llega al 100%. Estos resultados son significativos para el estudio, puesto que los instrumentos arrojan información suficiente para analizar los niveles de demostración matemática en los estudiantes de Cuarto Año de Educación Media General en la Unidad Educativa Nacional "Juan José Guerrero". Barquisimeto - Lara. Es por ello, que seguidamente se considera el análisis de cada uno de los ítems que conformaron el instrumento.

Respuestas al ítem 1.

1. ¿Al sumar dos números pares, qué tipo de número resulta?

Las respuestas dadas por los estudiantes se codifican de la siguiente manera:

A1. Resulta un número par y presenta un ejemplo como justificación.

A2. Resulta un número par y no justifica.

A3. Resulta un número par indicando que es de la forma 2n y agrega un ejemplo.

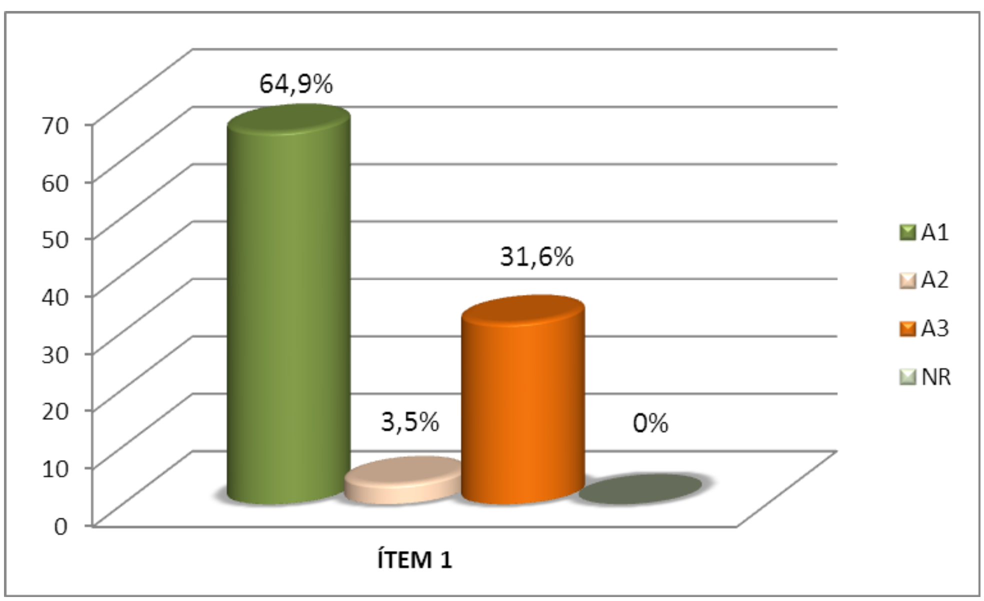
NR. No responde.

Tabla Nº 4: Distribución de frecuencias según las respuestas dadas al ítem 1.

	A1	**A2**	**A3**	**NR**
f	37	2	18	0
%	64,9	3,5	31,6	0

Fuente: Parada (2016)

Gráfico Nº 1: Resultados porcentuales según las respuestas dadas al ítem 1.



Fuente: Parada (2016)

De acuerdo con los resultados obtenidos, se puede observar que casi las dos terceras partes (64,9%) de la muestra de estudiantes *presenta un ejemplo para verificar la proposición* establecida, mientras que un poco más de la cuarta parte (31,6%) *generalizan la proposición* y el resto (3,5%) simplemente constata la proposición, *sin justificación* de la misma. Se puede decir que prevalece en este ítem el nivel pragmático en las respuestas emitidas por los estudiantes ya que *verifican la proposición en casos particulares*. Cero estudiantes no responden.

Respuestas al ítem 2.

2. ¿Al sumar un número par con un número impar, qué tipo de número resulta?

Para la elaboración de la tabla de resultados se consideran los siguientes códigos:

B1. Resulta un número impar y presenta un ejemplo como justificación.

B2. Resulta un número impar y no justifica.

B3. Resulta un número impar indicando que es de la forma 2n+1 y agrega un ejemplo.

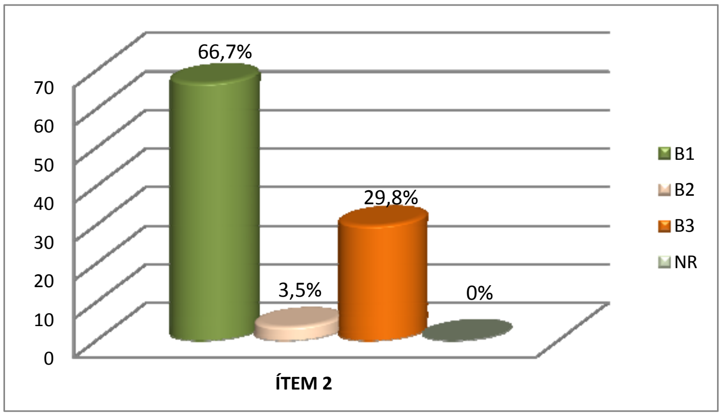
NR. No responde.

Tabla Nº 5: Distribución de frecuencias según las respuestas dadas al ítem 2.

	B1	**B2**	**B3**	**NR**
f	38	2	17	0
%	66,7	3,5	29,8	0

Fuente: Parada (2016)

Gráfico Nº 2: Resultados porcentuales según las respuestas dadas al ítem 2.



Fuente: Parada (2016)

En este ítem, se aprecia que las dos terceras partes (66,7%) de la muestra de estudiantes *aplica argumentos empíricos para validar la proposición* dada, mientras que un poco mas de la cuarta parte (29,8%) *aplica argumentos conceptuales* y el resto (3,5%) no justifica la proposición señalada. En este sentido, se puede decir que destaca el nivel pragmático en el desempeño de los estudiantes. Cero estudiantes no responden

Respuestas al ítem 3.

3. ¿Al multiplicar dos números impares, qué número resulta?

Las respuestas dadas por los estudiantes se codifican de la siguiente manera:

C1. Resulta un número impar y presenta un ejemplo como justificación.

C2. Resulta un número impar y no justifica.

C3. Resulta un número impar indicando que es de la forma 2n+1 y agrega un ejemplo.

NR. No responde

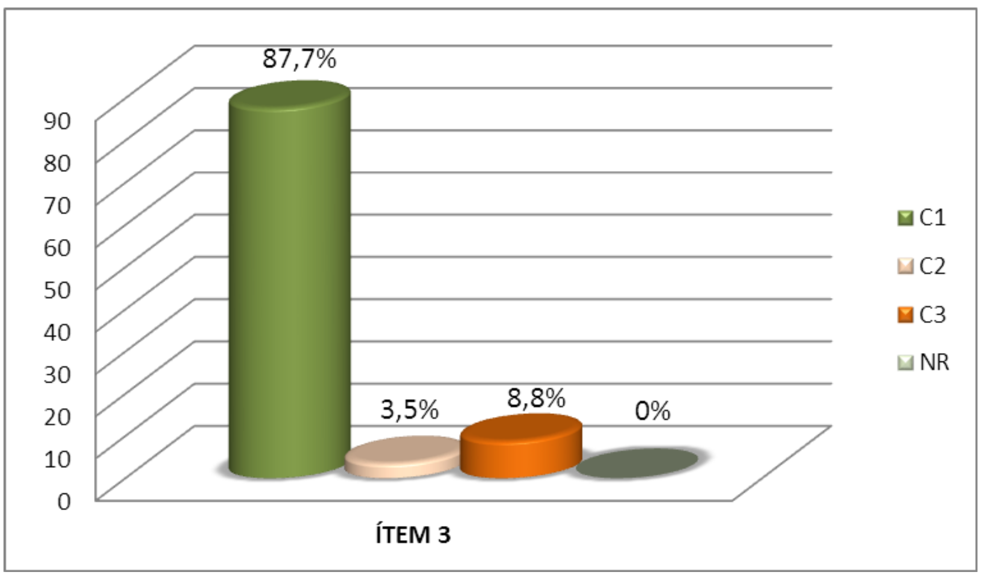
.

Tabla Nº 6: Distribución de frecuencias según las respuestas dadas al ítem 3.

	C1	**C2**	**C3**	**NR**
f	50	2	5	0
%	87,7	3,5	8,8	0

Fuente: Parada (2016)

Gráfico Nº 3: Resultados porcentuales según las respuestas dadas al ítem 3.



Fuente: Parada (2016)

Los resultados de éste ítem destacan que la mayoría de la muestra (87,7%) *no resuelve la proposición para casos generales* y sólo un porcentaje muy bajo (8,8%) *aplica casos particulares* sin llegar a la generalización completa y (3,5%) da respuestas pero no justifica, lo que hace inferir la presencia del nivel pragmático en la mayoría de ellos. Cero estudiantes no responden.

Respuestas al ítem 4.

4. Defina la función Logaritmo de un número real.

Para la elaboración de la tabla de resultados se consideran los siguientes códigos:

D1. Define la función logaritmo mediante la fórmula $Log_a\, y = x \iff a^x = y$ especificando el conjunto de partida y de llegada.

D2. Define la función logaritmo mediante la fórmula $Log_a\, y = x \iff a^x = y$ sin especificar el conjunto de partida y de llegada.

D3. Confunde la definición de logaritmo con una propiedad de los logaritmos.

D4. Confunde la definición de logaritmo con una función afín.

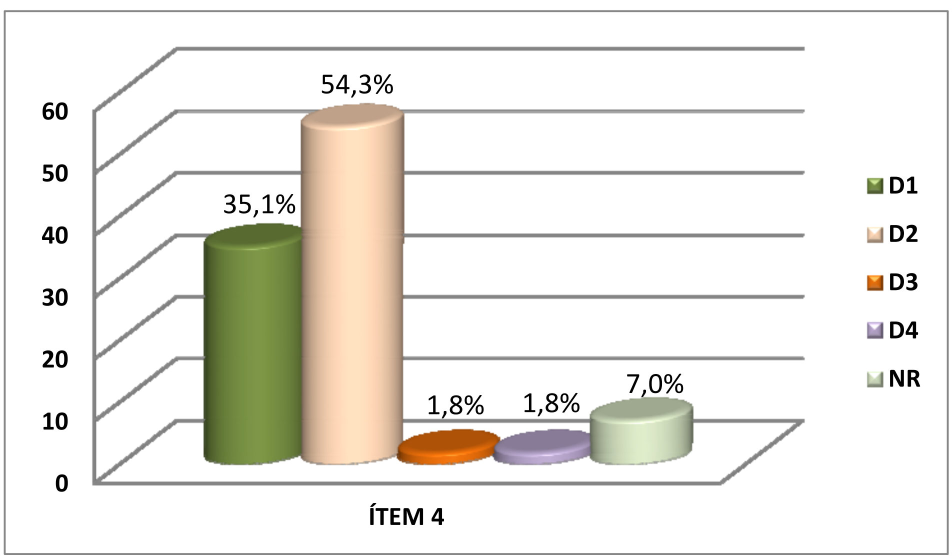
NR. No responde.

Tabla Nº 7: Distribución de frecuencias según las respuestas dadas al ítem 4.

	D1	D2	D3	D4	NR
f	20	31	1	1	4
%	35,1	54,3	1,8	1,8	7,0

Fuente: Parada (2016)

Gráfico Nº 4: Resultados porcentuales según las respuestas dadas al ítem 4.



Fuente: Parada (2016)

Con relación a los resultados correspondientes al ítem 4, se aprecia que menos de dos quintas partes (35,1%) de la muestra *definen la función por la fórmula*, especificando el conjunto de partida y de llegada. Por otro lado, más de dos quintas partes de la muestra (54,4%) *definen la función* como una fórmula pero sin especificar su conjunto de partida y de llegada; además de que poco porcentaje (3,6%) *confunden la definición* con otras definiciones y propiedades es decir (1,8%) confunde las propiedad de logaritmo con la definición y otro (1,8%) confunde la función logarítmica con función afín y sólo un 7% de estudiantes no respondió.

Respuestas al ítem 5.

5. Define la función Seno.

Las respuestas dadas por los estudiantes se codifican de la siguiente manera:

E1. Describe la función Seno como una función real de variable real de la forma $f(x) = a + b$.

E2. Define la función Seno como $f(x) = a + b$, $Sen\,(cx + d)$.

E3. Define la función Seno como la razón trigonométrica $\left(Sen\alpha = \frac{CO}{H}\right)$.

E4. Confunde la definición con el dominio de la función.

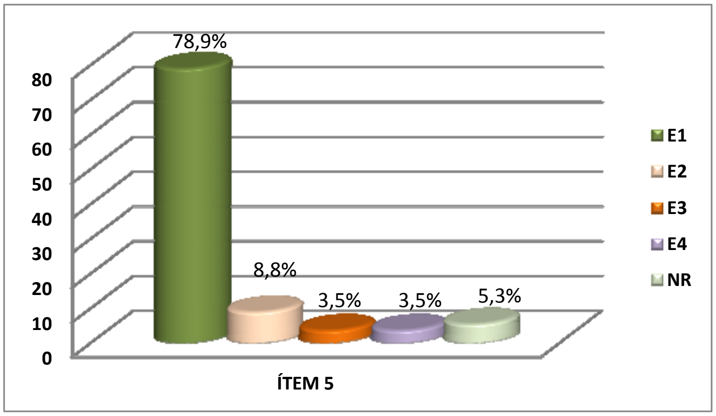
NR. No responde.

Tabla Nº 8: Distribución de frecuencias según las respuestas dadas al ítem 5.

	E1	**E2**	**E3**	**E4**	**NR**
f	45	5	2	2	3
%	78,9	8,8	3,5	3,5	5,3

Fuente: Parada (2016)

Gráfico Nº 5: Resultados porcentuales según las respuestas dadas al ítem 5.



Fuente: Parada (2016)

Se puede observar que a pesar de que mas de dos terceras partes (78,9%) de la muestra señala que es una función real de variable real, particularmente como una función constante, la mayoría de la muestra (códigos E2, E3, E4) *definen la función seno mediante fórmulas*, sin definir el objeto matemático en sí, es decir, no logra definir con precisión la función seno. Un (5,3%) no responde

Respuestas al ítem 6.

6. Defina Ángulo.

Para la elaboración de la tabla de resultados se consideran los siguientes códigos:

F1. Describe un Ángulo como la parte del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen el mismo punto de origen.

F2. Afirma que un Ángulo está formado por dos rayos $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ cuyo origen es común (vértice O).

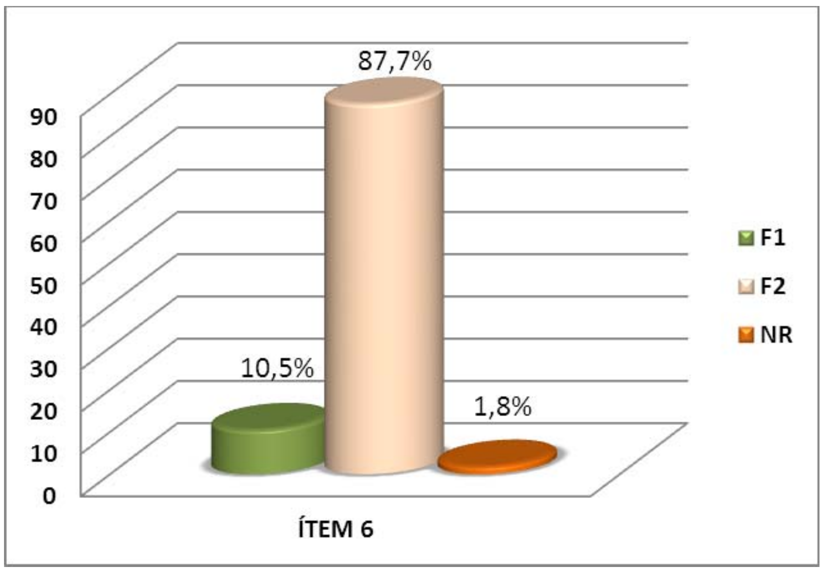
NR. No responde.

Tabla Nº 9: Distribución de frecuencias según las respuestas dadas al ítem 6

	F1	**F2**	**NR**
f	6	50	1
%	10,5	87,7	1,8

Fuente: Parada (2016)

Gráfico Nº 6: Resultados porcentuales según las respuestas dadas al ítem 6.

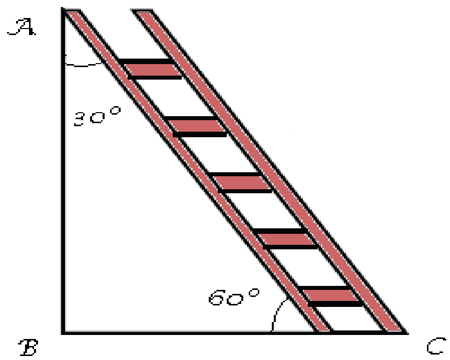


Fuente: Parada (2016)

Con relación a las respuestas de los estudiantes, se aprecia que poco menos de una sexta parte de la muestra (10,5%) *define adecuadamente el objeto matemático* dado (ángulo) y poco más de las tres cuartas partes (87,7%) *define de manera incompleta*, lo que significa que en el planteamiento de definiciones los estudiantes proceden inadecuadamente y el (1,8%) no respondió.

Respuestas al ítem 7.

7. En la siguiente figura, se muestra una escalera de 2mts de longitud que está apoyada en una pared, formando un ángulo de 30º con ésta y de 60º con el piso:



a-) ¿Qué tipo de triángulo se forma entre la pared, la escalera y el piso (Triángulo ABC)?

Las respuestas dadas por los estudiantes se codifican de la siguiente manera:

G1. Triángulo Rectángulo porque uno de sus ángulos mide 90º.

G2. Triángulo Escaleno porque todos sus lados tienen longitudes diferentes.

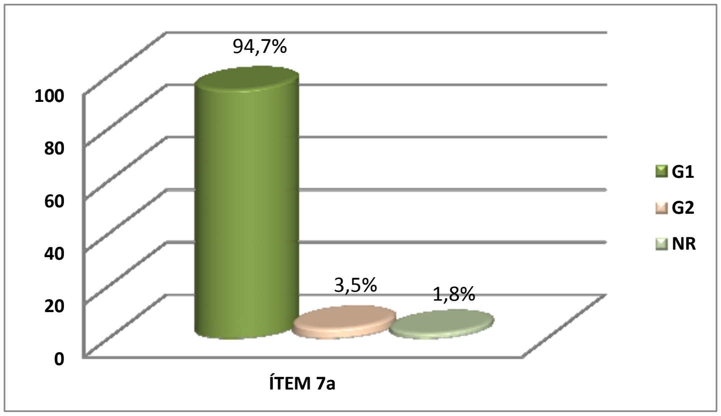
NR. No responde.

Tabla Nº 10a: Distribución de frecuencias según las respuestas dadas al ítem 7a.

	G1	**G2**	**NR**
f	54	2	1
%	94,7	3,5	1,8

Fuente: Parada (2016)

Gráfico Nº 7a: Resultados porcentuales según las respuestas dadas al ítem 7a.



Fuente: Parada (2016)

En este caso, se observa que la mayoría de la muestra (94,7%) no manipuló la figura y *no utilizaron diferentes clases de representaciones* durante el proceso de verificación de la proposición. Además, pocos estudiantes (3,5%) respondieron que el triángulo era escaleno. No obstante, las justificaciones dadas eran más visuales que de razonamiento o cálculo sobre triángulos y (1,8%) no respondió.

b-) Demostrar que la suma de los lados del triángulo ABC es ($3 + \sqrt{3}$) mts.

Las respuestas dadas por los estudiantes se codifican de la siguiente manera:

G3. Demuestra la proposición mediante el uso de identidades trigonométricas.

G4. Aplica una identidad trigonométrica pero no concluye la demostración.

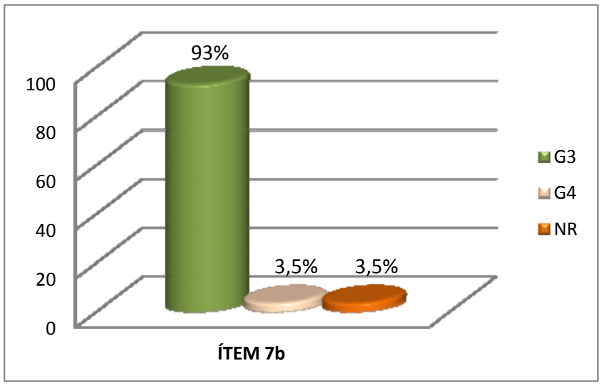
NR. No responde.

Tabla Nº 10b: Distribución de frecuencias según las respuestas dadas al ítem 7b.

	G3	**G4**	**NR**
F	53	2	2
%	93	3,5	3,5

Fuente: Parada (2016)

Gráfico Nº 7b: Resultados porcentuales según las respuestas dadas al ítem 7b.



Fuente: Parada (2016)

De las respuestas emitidas por los estudiantes, se observa que la mayoría de la muestra (93%) *aplica diferentes clases de representaciones* mediante identidades trigonométricas y teorema de Pitágoras. Sin embargo, un (3,5%) sólo utiliza identidades trigonométricas pero no aplicó el teorema de Pitágoras como una manera de facilitar y culminar la verificación de la proposición, mientras que un (3,5%) de la muestra no respondió.

Respuestas al ítem 8.

8. Explicar porque se puede afirmar lo siguiente:

$$\frac{cos40^{o}.sec40^{o}}{cot40^{o}} = \frac{sen40^{o}}{cos40^{o}}$$

Las respuestas dadas por los estudiantes se codifican de la siguiente manera:

H1. Demuestra la proposición usando identidades trigonométricas y desarrolla ambos miembros al mismo tiempo.

H2. Demuestra la proposición usando identidades trigonométricas partiendo del primer miembro y llega al segundo miembro.

H3. Sólo escribe las identidades trigonométricas a utilizar y no hace ningún desarrollo.

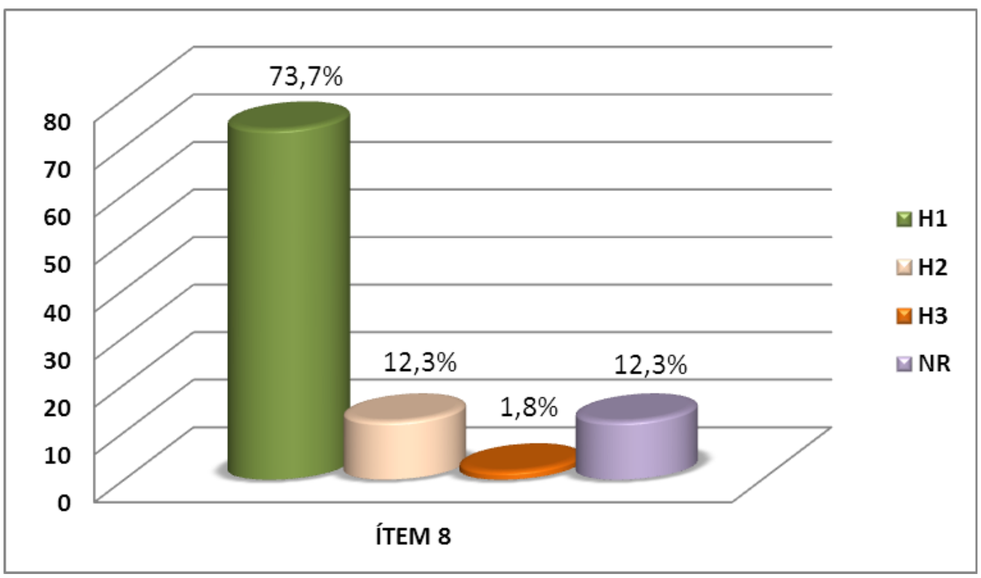
NR. No responde.

Tabla Nº 11: Distribución de frecuencias según las respuestas dadas al ítem 8.

	H1	**H2**	**H3**	**NR**
f	42	7	1	7
%	73,7	12,3	1,8	12,3

Fuente: Parada (2016)

Gráfico Nº 8: Resultados porcentuales según las respuestas dadas al ítem 8.



Fuente: Parada (2016)

De las respuestas de los estudiantes, se observa que poco más de las dos terceras partes de la muestra (73,7%) realiza la demostración desarrollando ambos miembros simultáneamente, mientras que un (12,3%) parte de un miembro para llegar al otro. Sin embargo, en ambos casos (códigos H1 y H2) demuestran la proposición *considerando objetos matemáticos como representantes característicos* (identidades trigonométricas) pero no dan una conclusión verbal para asegurar la validez de la proposición. Además, un estudiante escribe las identidades trigonométricas a utilizar y no hace ningún desarrollo, mientras que sólo un (12,3%) de la muestra no respondió.

Respuestas al ítem 9.

9. A continuación se presenta la demostración de una propiedad. Justificar cada paso
de la demostración según sus criterios:

$$\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y, \quad a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

	JUSTIFICACIONES
Sean $m = \log_a x$ y $n = \log_a y$	
Entonces	
$a^m = x$, $a^n = y$ ----------------→	____________________
Luego, se tiene que	
$a^m . a^n = x.y$ ----------------→	____________________
$a^{m+n} = x.y$ ----------------→	____________________
Obteniendo	
$\log_a(x.y) = m + n$ ----------------→	____________________
Por lo tanto	
$\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$ ---------→	____________________

Para la elaboración de la tabla de distribución de frecuencias, se consideran los siguientes códigos:

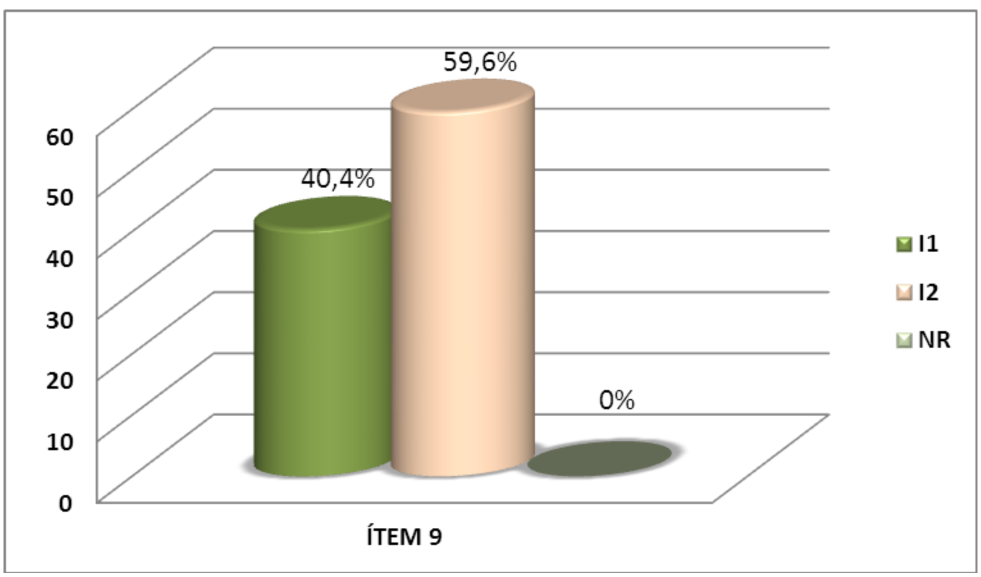
I1. Justifica de manera adecuada usando propiedades y definiciones previas.
I2. Confunde propiedades y definiciones previas en las justificaciones dadas.
NR. No responde.

Tabla Nº 12: Distribución de frecuencias según las respuestas dadas al ítem 9.

	I1	**I2**	**NR**
f	23	34	0
%	40,4	59,6	0

Fuente: Parada (2016)

Gráfico Nº 9: Resultados porcentuales según las respuestas dadas al ítem 9.



Fuente: Parada (2016)

En estos resultados, se aprecia que el (40,4%) de la muestra *identifica las definiciones y propiedades previas* para justificar de manera adecuada la proposición, los cuales son rasgos del nivel conceptual de los estudiantes. Mientras que poco más de la mitad (59,6%) *confunden las definiciones y propiedades previas* en las justificaciones dadas. Cero estudiantes no respondieron

Respuestas al ítem 10.

10. Verifique la siguiente igualdad $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ **donde** $y \neq 0$**.**

Las respuestas dadas por los estudiantes se codifican de la siguiente manera:

J1. Considera cierta la igualdad porque es una propiedad dada en clase por su docente.

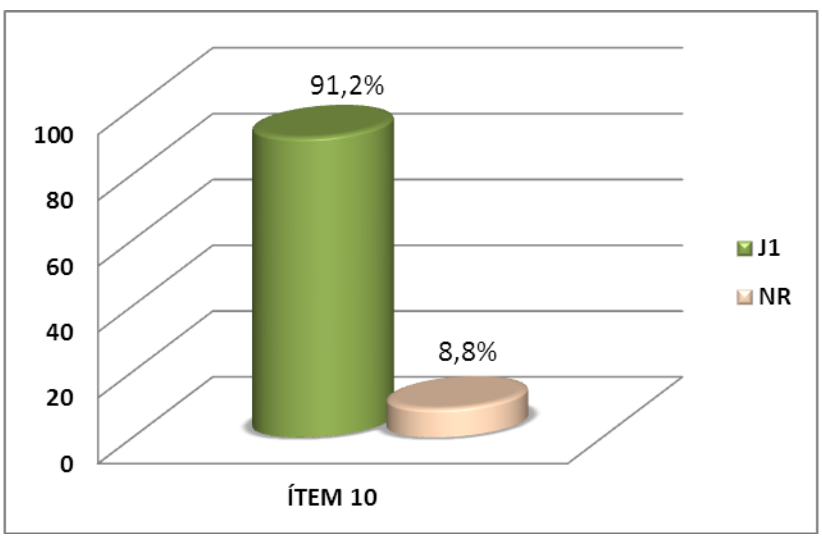
NR. No sabe o no responde.

Tabla Nº 13: Distribución de frecuencias según las respuestas dadas al ítem 10.

	J1	**NR**
f	52	5
%	91,2	8,8

Fuente: Parada (2016)

Gráfico Nº 10: Resultados porcentuales según las respuestas dadas al ítem 10.



Fuente: Parada (2016)

Se aprecia que la gran mayoría de la muestra (91,2%) no desarrolla ningún tipo de justificación matemática, se infiere que *no observan la presencia de definiciones*, porque consideran cierta la igualdad aún teniendo como modelo la demostración anterior, mientras que otra parte de la muestra (8,8%) no respondió.

Con relación a las respuestas expresadas por los estudiantes en el instrumento aplicado, se observa que en la mayoría de ellos prevalece la presencia de un nivel pragmático en las demostraciones, dado que llegaron solo hasta una comprobación o toman como válida los argumentos dados, aplicaron ejemplos para verificar la proposición establecida, además de considerar argumentos empíricos para validarla, lo cual refleja el empirismo ingenuo y experiencia crucial definida por Balacheff.

Otro elemento que destaca en las respuestas es la débil aplicación del nivel conceptual, como en las definiciones de funciones y objetos matemáticos, en caso de aquellos estudiantes que presentaron esta conceptualización, lo hicieron sin profundizar en ello, es decir, no verificaron las proposiciones. También en algunos casos, como el ítem 9, los estudiantes aplicaron los dos niveles, pragmático y conceptual, aunque se pretendía comprobar éste último, al igual que en el ítem 10 pero no lo hicieron.

4.2 Conclusiones

Una vez aplicada la prueba a la muestra, con el fin de analizar los niveles de demostración matemática en los estudiantes de Cuarto Año de Educación Media General en la Unidad Educativa Nacional "Juan José Guerrero". Barquisimeto – Lara, se presentan a continuación las principales conclusiones emanadas del estudio:

Nivel de Demostración Pragmática: Existe notable presencia de éste nivel de demostración, ya que todos los ítems que se referían a este nivel, fueron contestados por gran parte de la muestra. Y solo pocas respuestas no fueron contestadas evidenciándose lo siguiente:

- Utilizan ejemplos prototípicos y aplican argumentos empíricos como medios de verificación o validación de las proposiciones dadas, afirmando lo que plantea Balacheff (2000), que el estudiante plantea explícitamente el problema la generalización y lo resuelve aventurándose a la ejecución del mismo.

- Además, los estudiantes tienden a recurrir a las fórmulas, como elementos que definen una función específica u objeto matemático, pero lo hacen de manera incompleta, es decir, de un modo tan rudimentario e insuficiente, destacando los procesos de generalización.

- Emplean respuestas sustentadas en conocimientos previos, en concordancia con lo referido por Ausubel (1978), el aprendizaje es significativo cuando puede incorporarse a las estructuras de conocimiento previas, adquiriendo significado en la medida que se relaciona con esas ideas previas, sin embargo los estudiantes no manipulan toda la información para verificarla y no dan conclusiones que demuestren la validez de la proposición.

- Los estudiantes en el nivel pragmático, se ubican en un estado concreto-empírico, lo cual solo a través de la praxis se puede llevar a una abstracción o esquematización de acuerdo con lo referido por Piaget citadas por Severo (1972).

Nivel de Demostración Conceptual: Se percibe incipiente presencia del nivel conceptual, de todos los ítems que se referían a este nivel, fueron contestados por la muestra a pesar de no contestar de manera favorable. Y solo pocas respuestas no fueron contestadas evidenciándose lo siguiente:

- Sólo en el ítem 9, los estudiantes identificaron las definiciones y propiedades previas para justificar de manera adecuada la proposición, porque se les facilitó un formato con los pasos dados para colocar la justificación de los mismos.

- Los estudiantes no se basan en propiedades generales sino en casos particulares, sin establecer el carácter necesario de su validez, es decir, no se comprometen a un proceso más elaborado de validación de una proposición matemática.

- Una minoría de estudiantes ubicados en el nivel conceptual, coinciden con las afirmaciones de Piaget citadas por Severo (1972), en cuanto a que se manifiesta en ellos tres elementos (cognición, deducción, experiencia) que permiten llevar al estudiante a un nivel de demostración más elevado, evidenciándose una intuición directa, pero no llegan a un pensamiento avanzado, es decir, no llegan a un razonamiento formal matemático necesario en un nivel educativo superior.

4.3 Recomendaciones

Con el fin de fortalecer los niveles de demostración matemática en los estudiantes de cuarto año de Educación Media General y como respuesta a las conclusiones surgidas del estudio, se considera pertinente realizar las siguientes recomendaciones a los docentes:

- Ser muy electivos para propósitos de enseñanza ya que el significado que toman los estudiantes en los ejemplos a utilizar puede ser inadecuado, ellos lo reciben como condición de hecho y esto puede ser un obstáculo para el desarrollo de procesos de pruebas más elaborados.

- Desarrollar actividades en el aula desde los primeros años de Educación Media General dirigidas a fortalecer la creatividad y el pensamiento reflexivo abordando el tema de demostración en los estudiantes, con diversas actividades en las que ponga en práctica su nivel de razonamiento.

- Presentar demostraciones en clase, procediendo desde las ideas elementales hacia la conclusión de manera gradual y fragmentada, esto con el fin de que el estudiante se familiarice con el contenido, su origen y evolucione hacia lo conceptual sin olvidar lo pragmático.

- Utilizar estrategias didácticas de manera constante que incentiven a los estudiantes a participar en tareas de demostración de definiciones, teoremas, propiedades, basados en su comprensión más que en la reproducción textual. Una buena enseñanza debe, promover el cambio conceptual y facilitar el aprendizaje significativo. De acuerdo a lo afirmado por Vygotsky (1934), se debe propiciar un ambiente de aprendizaje donde exista la interacción sociocultural de cada individuo, a partir de interacciones sociales (información externa), en el cual aprendizaje despierte una serie de procesos de desarrollo interno, interpretada y reinterpretada por la mente haciendo efectivo el aprendizaje.

REFERENCIAS

Ausubel, D. P., Novak, J. D., y Henesian, H., (1978). Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. México, Trillas. Título original: Educational psychology. Now York, Holt Rinehart and Winton

Ary, D; Cheser, L y Razavieh, A. (1994**). Introducción a la Investigación Pedagógica.** México. Editorial McGraw- Hill, Segunda Edición. (pp. 184-187).

Azcarate (1987) Definicion, demostraciones ¿por qué?, ¿cuándo?, ¿cómo?. En línea: http://imerl.fing.edu.uy/didactica_matematica/documentos_2008/carmen%20azc%C3%A1rate%20gimenez_%20def%20y%20dem.pdf

Balacheff, N. (1998**). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In D. Pimm** (Ed.), Mathematics, Teachers and Children. (pp. 216-235). London: Hodder & Stoughton.

Balacheff, N. (2000**). Procesos de pruebas en los alumnos de matemática**. Primera Edición. Universidad de los Andes. Bogotá. Colombia. www: http://ued.uniandes.edu.co.

Balestrini, M. (2002) **Como se elabora un proyecto de investigación**. Consultores. Venezuela: BL consultores asociados.

Colmenárez, D. y Quevedo, B. (2012**). Errores y Obstáculos en el Aprendizaje de la Demostración Matemática**. Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Editorial Academia Española. Barquisimeto, Venezuela.

Constitución de la República (1999). **Gaceta Oficial de la República de Venezuela Nro. 32696**. Caracas: 16 de diciembre de 1999.

Crespo, C. (2011). **Acerca de la lógica de la construcción del conocimiento matemático**. Acta latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 24, 721 – 727.

Daniels, H (2003). **Vygotsky y la Pedagogía.** Madrid: Paidós.

Delors, J. (1996). **La Educación encierra un tesoro**. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el siglo XXI. Santillana, Ediciones UNESCO. Paris, Francia.

Fuentes, W (2012). **Gestión del Conocimiento en Educación Superior.** Madrid: Continental.

Hanna, G. (1989). **Proofs that prove and proofs that explain. Proceedings of the PME** *13*, Vol.2, pp. 45-51.

Hernández, R.; Fernández, C. y Baptista, P. (2010). **Metodología de la Investigación.** (5ra. Ed.).México: Mc. Graw. Hill.

Ibañes, M. (2001) Un ejemplo de demostración en Geometría como medio de descubrimiento. Revista digital [disponible en línea] http://revistasuma.es/IMG/pdf/37/095-098.pdf[Consulta [Consulta, julio 2013].

Ley Orgánica de Educación. (2009). Gaceta Oficial Nº 5.929 Extraordinaria 15 de Agosto de 2009.

Moreira, M.A., Caballero, M.C. y Rodríguez, M.L. (1997). **Actas del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo.** Burgos, España. pp. 19-44. Traducción de Mª Luz Rodríguez Palmero.

Pastor, P., & Puig, G. (2006). "**Matemáticas".** México: Editorial Mc Graw Hill.

Querales, K. (2011). **Actividades didácticas para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática, dirigidas a docentes en formación de la especialidad de matemática.** Trabajo de maestría. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Luis Beltrán Prieto Figueroa, Barquisimeto.

Rico, L. (2005). La competencia matemática en PISA. En Fundación Santillana (Ed.), La Enseñanza de las matemáticas y el Informe PISA (pp. 21-40). Madrid: Editor en línea http://www.pna.es/Numeros2/pdf/Rico2007PNA1(2)Lacompetencia.pdf

Rodríguez, P. (2012). **Esquemas de prueba y procesos cognitivos que activan los estudiantes cuando demuestran. Trabajo de maestría**. Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Luis Beltrán Prieto Figueroa, Barquisimeto.

Severo, I. (1972) **Jean Piaget: Epistemología, matemática y psicología**. Universidad autónoma de Nuevo León. Monterrey –México. Libro en línea [Disponible en linea].

Tall, D. (1991). **The nature of advanced mathematical thinking.** In David Tall (Ed) *Advanced mathematical thinking*, (pp. 3-21). Dordrech, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Ugas, G (2011) **Articulación, método, metodología y epistemología. Taller permanente de estudio en epistemología en ciencias sociales.** Ediciones

TAPECS. Táchira-Venezuela.

UNESCO (2012). **Situación Educativa de América Latina y el Caribe Hacia una Educación para todos 2015**. [Documento en línea]. Disponible en: http://www.unesco.org/new/fileadmin/MULTIMEDIA/FIELD/Santiago/images/SITIED-espanol.pdf

Vega, E. y Moreno, G. (2011). **Argumentar- conjeturar: Introducción a la demostración. Acta latinoamericana de Matemática Educativa.** Volumen 24, 509 – 516.

Vygotsky, L.S (1934). **Pensamiento y lenguaje.** Moscú: APN RSFSR.

Viramontes, J. y Martínez, G. (2010). **La demostración, un análisis desde la teoría de las representaciones sociales.** Acta latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen 23.

ANEXOS

ANEXO A: Validación del instrumento por expertos.
REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Profesor: ________________________________
Estimado Docente:

Ante todo reciba un cordial saludo.

Por medio de la presente cumplimos con participarle que usted ha sido seleccionado en calidad de experto, para la validación del instrumento que fue elaborado con el fin de recolectar la información necesaria para la investigación titulada: **Niveles de demostración en el aprendizaje de la matemática en cuarto año de educación media general de la unidad educativa nacional "Juan José Guerrero". Barquisimeto- Lara,** la cual es realizada por: Darling Parada, como requisito final para la aprobación del Trabajo de Grado del pensum de estudio de la Maestría en Educación Matemática.

Esperando de usted su valiosa colaboración, y sin otro particular a que hacer referencia, queda de usted.

Atentamente,

____
Prof. DARLING PARADA
C.I.18656842

Anexos:

- Título y Objetivos de la investigación
- Tabla de Operacionalización
- Instrumento
- Formato de Validación

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

NIVELES DE DEMOSTRACIÓN EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN CUARTO AÑO DE EDUCACIÓN MEDIA GENERAL DE LA UNIDAD EDUCATIVA NACIONAL "JUAN JOSÉ GUERRERO". BARQUISIMETO- LARA.

Objetivo General

Analizar los niveles de demostración matemática en los estudiantes de cuarto año de Educación Media General en la Unidad Educativa Nacional "Juan José Guerrero". Barquisimeto - Lara.

Objetivos Específicos

- Diagnosticar las demostraciones de tipo conceptual y pragmática en los estudiantes de cuarto año en Educación Media General.
- Clasificar las demostraciones de tipo conceptual y pragmática que presentan los estudiantes de cuarto año en Educación Media General.
- Describir los niveles de demostración en el que se encuentran los estudiantes de Cuarto Año de Educación Media General en la Unidad Educativa Nacional "Juan José Guerrero", según Balacheff.

TUTOR:
Dr. Dones Colmenárez

AUTORA:
Darling Parada

ANEXO B: OPERACIONALIZACIÓN DE LA VARIABLE

PROPÓSITO	VARIABLE	DEFINICIÓN CONCEPTUAL	DEFINICIÓN OPERACIONAL	DIMENSION	INDICADORES	ÍTEMS
Analizar los Niveles de Demostración en el aprendizaje de la matemática en cuarto año de Educación Media General de la Unidad Educativa Nacional "Juan José Guerrero".	Nivel de Demostración	Conjunto de argumentos explicativos usados por una persona para validar un conocimiento matemático. (Balacheff 2000).	Representa la manera de comunicar la verificación, bien sea pragmática o conceptual de una proposición matemática.	Conceptual	*Define objetos matemáticos: ➢ Función logaritmo de un número real…………………... ➢ Función seno…………………. ➢ Ángulo………………………..	4 5 6
					*Observa la presencia de definiciones en la proposición matemática.	10
					*Identifica las propiedades previas.	9
					*Utiliza diferentes clases de representaciones (dibujos, esquemas o gráficos) durante el proceso de verificación de una proposición	7a y 7b
				Pragmática	*Verifica la proposición en casos particulares.	1
					* Aplica argumentos para asegurar la validez de una proposición	2
					*Resuelve la proposición para casos generales sin llegar a la generalización completa.	3
					*Explica las razones de validez de una proposición considerando un objeto como representante característico de una determinada clase	8

Fuente: Parada (2016).

ANEXO C: Instrumento aplicado a los estudiantes.

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

PRUEBA

Estimado Estudiante:

La presente Prueba tiene como finalidad recabar información necesaria y pertinente de corte educativo, relacionado con los Niveles de Demostración en el aprendizaje de la matemática en cuarto año de Educación Media General. La información que aportes es totalmente confidencial y será de utilidad para alcanzar los objetivos planteados; por lo que se agradece tu colaboración y sinceridad.

INSTRUCCIONES

- Lea cuidadosamente cada una de las preguntas, si tienes alguna duda consulta con el profesor.
- Responda en forma clara.
- Trate de responder todas las preguntas.

GRACIAS POR SU COLABORACIÓN

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DIRECCIÓN DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Nombre y Apellido: ______________________ Año: ____ Sección: _____ Fecha:

A continuación se presentan los siguientes planteamientos:

1) ¿Al sumar dos números pares, qué tipo de número resulta? Justifique su respuesta.

2) ¿Al sumar un número par con un número impar, qué tipo de número resulta? Justifique su respuesta.

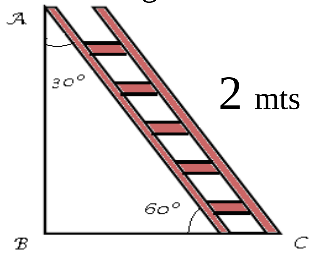
3) ¿Al multiplicar dos números impares, qué número resulta? Justifique su respuesta.

4) Defina la función logaritmo de un número real.

5) Defina la función seno.

6) Defina ángulo.

7) En la siguiente figura, se muestra una escalera de 2mts de longitud que está apoyada en una pared, formando un ángulo de 30º con ésta y de 60º con el piso.



a) ¿Qué tipo de triángulo se forma entre la pared, la escalera y el piso (Triángulo ABC)? Justifique su repuesta.

b) Demostrar que la suma de los lados del triángulo ABC es $\left(3+\sqrt{3}\right)$ mts.

8) Explicar porque se puede afirmar lo siguiente $\dfrac{\cos(40^\circ)\cdot\sec(40^\circ)}{\cot(40^\circ)} = \dfrac{sen(40^\circ)}{\cos(40^\circ)}$.

9) A continuación se presenta la demostración de una propiedad. Justificar cada paso de la demostración según sus criterios:

$$\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y, \quad a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

	JUSTIFICACIONES
Sean $m = log_a x$ y $n = log_a y$	
Entonces	
$a^m = x$, $a^n = y$ - - - - - - - - →	______________________
Luego, se tiene que	
$a^m . a^n = x.y$ - - - - - - - - →	______________________
$a^{m+n} = x.y$ - - - - - - - - →	______________________
Obteniendo	
$log_a(x.y) = m + n$ - - - - - - - - →	______________________
Por lo tanto	
$log_a(x.y) = log_a x + log_a y$ - - - - →	______________________

10) Verifique la siguiente igualdad $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$, donde $y \neq 0$.

ANEXO D: Formato de Validación.

INSTRUMENTO	PRUEBA
INVESTIGACIÓN	Analizar los niveles de demostración en el aprendizaje de la matemática en cuarto año de Educación Media General de la Unidad Educativa Nacional "Juan José Guerrero". Barquisimeto - Lara.

- **Aspectos relacionados con los ítems**

Nº	**Ítem** / **Aspectos específicos**	**1**		**2**		**3**		**4**		**5**		**6**		**7.a**		**7.b**	
		SI	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**
1	La redacción del ítem es clara																
2	El ítem tiene coherencia interna																
3	El ítem induce a la respuesta																
4	El ítem mide lo que pretende																

Nº	**Ítem** / **Aspectos específicos**	**8**		**9**		**10**	
		SI	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**
1	La redacción del ítem es clara						
2	El ítem tiene coherencia interna						
3	El ítem induce a la respuesta						
4	El ítem mide lo que pretende						

Nº	**Aspectos Generales**	**SI**	**NO**	**Observaciones**
5	El instrumento contiene instrucciones para responder			
6	Los ítems permiten el logro del objetivo relacionado con el diagnóstico			
7	Los ítems están presentados de una forma lógica y secuenciada			
8	El número de ítems es suficiente para recoger la información. En caso de ser negativa su respuesta, sugiera el (los) ítems que falta (n).			

Observación General: ____

VALIDEZ	
Aplicable	☐
Aplicable atendiendo las observaciones	☐
No aplicable	☐

ANEXO D: Formato de Validación.

INSTRUMENTO	CUESTIONARIO
INVESTIGACIÓN	Analizar los Niveles de Demostración en el aprendizaje de la matemática en cuarto año de Educación Media General de la Unidad Educativa Nacional "Juan José Guerrero". Barquisimeto - Lara.

- Aspectos relacionados con los ítems

N°	**Aspectos específicos** / **Ítem**	**1**		**2**		**3**		**4**		**5**		**6**		**7.a**		**7.b**	
		SI	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**
1	La redacción del ítem es clara	X		X		X		X		X		X		X		X	
2	El ítem tiene coherencia interna	X		X		X		X		X		X		X		X	
3	El ítem induce a la respuesta	X		X		X		X		X		X		X		X	
4	El ítem mide lo que pretende	X		X		X		X		X		X		X		X	

N°	**Aspectos específicos** / **Ítem**	**8**		**9**		**10**	
		SI	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**
1	La redacción del ítem es clara	X		X		X	
2	El ítem tiene coherencia interna	X		X		X	
3	El ítem induce a la respuesta	X		X		X	
4	El ítem mide lo que pretende	X		X		X	

N°	**Aspectos Generales**	**SI**	**NO**	**Observaciones**
5	El instrumento contiene instrucciones para responder	X		
6	Los ítems permiten el logro del objetivo relacionado con el diagnóstico	X		
7	Los ítems están presentados de una forma lógica y secuenciada	X		
8	El número de ítems es suficiente para recoger la información. En caso de ser negativa su respuesta, sugiera el (los) ítems que falta (n).	X		

Observación General: ______________________

Validado por: Martín Andonegui

C.I: 7391809

Firma: MAndonegui

Fecha: 26-02-15

Correo Electrónico: m_andonegui@hotmail.com

VALIDEZ	
Aplicable	X
Aplicable atendiendo las observaciones	
No aplicable	

ANEXO D: Formato de Validación.

INSTRUMENTO	CUESTIONARIO
INVESTIGACIÓN	Analizar los Niveles de Demostración en el aprendizaje de la matemática en cuarto año de Educación Media General de la Unidad Educativa Nacional "Juan José Guerrero". Barquisimeto - Lara.

- Aspectos relacionados con los ítems

N°	Ítem / Aspectos específicos	1		2		3		4		5		6		7.a		7.b	
		SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI	NO
1	La redacción del ítem es clara	✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓	
2	El ítem tiene coherencia interna	✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓	
3	El ítem induce a la respuesta	✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓	
4	El ítem mide lo que pretende	✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓	

N°	Ítem / Aspectos específicos	8		9		10	
		SI	NO	SI	NO	SI	NO
1	La redacción del ítem es clara	✓		✓		✓	
2	El ítem tiene coherencia interna	✓		✓		✓	
3	El ítem induce a la respuesta	✓		✓		✓	
4	El ítem mide lo que pretende	✓		✓		✓	

N°	Aspectos Generales	SI	NO	Observaciones
5	El instrumento contiene instrucciones para responder	✓		
6	Los ítems permiten el logro del objetivo relacionado con el diagnóstico	✓		
7	Los ítems están presentados de una forma lógica y secuenciada	✓		
8	El número de ítems es suficiente para recoger la información. En caso de ser negativa su respuesta, sugiera el (los) ítems que falta (n).	✓		

Observación General: ____________________

Validado por: Dra Jenny Pérez.

C.I: 7.407.770

Firma: [firma]

Fecha: 27/02/15

Correo Electrónico: jennypyanez@yahoo.es

VALIDEZ	
Aplicable	☒
Aplicable atendiendo las observaciones	☐
No aplicable	☐

ANEXO D: Formato de Validación.

INSTRUMENTO	CUESTIONARIO
INVESTIGACIÓN	Analizar los Niveles de Demostración en el aprendizaje de la matemática en cuarto año de Educación Media General de la Unidad Educativa Nacional "Juan José Guerrero". Barquisimeto - Lara.

- Aspectos relacionados con los ítems

N°	**Ítem** / **Aspectos específicos**	**1**		**2**		**3**		**4**		**5**		**6**		**7.a**		**7.b**	
		SI	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**
1	La redacción del ítem es clara	✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓	
2	El ítem tiene coherencia interna	✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓	
3	El ítem induce a la respuesta	✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓	
4	El ítem mide lo que pretende	✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓	

N°	**Ítem** / **Aspectos específicos**	**8**		**9**		**10**	
		SI	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**
1	La redacción del ítem es clara	✓		✓		✓	
2	El ítem tiene coherencia interna	✓		✓		✓	
3	El ítem induce a la respuesta	✓		✓		✓	
4	El ítem mide lo que pretende	✓		✓		✓	

N°	**Aspectos Generales**	**SI**	**NO**	**Observaciones**
5	El instrumento contiene instrucciones para responder	✓		
6	Los ítems permiten el logro del objetivo relacionado con el diagnóstico	✓		
7	Los ítems están presentados de una forma lógica y secuenciada	✓		
8	El número de ítems es suficiente para recoger la información. En caso de ser negativa su respuesta, sugiera el (los) ítems que falta (n).	✓		

Observación General: ______________________

Validado por: Lisbeth Santeliz

C.I: 7402362

Firma: [signature]

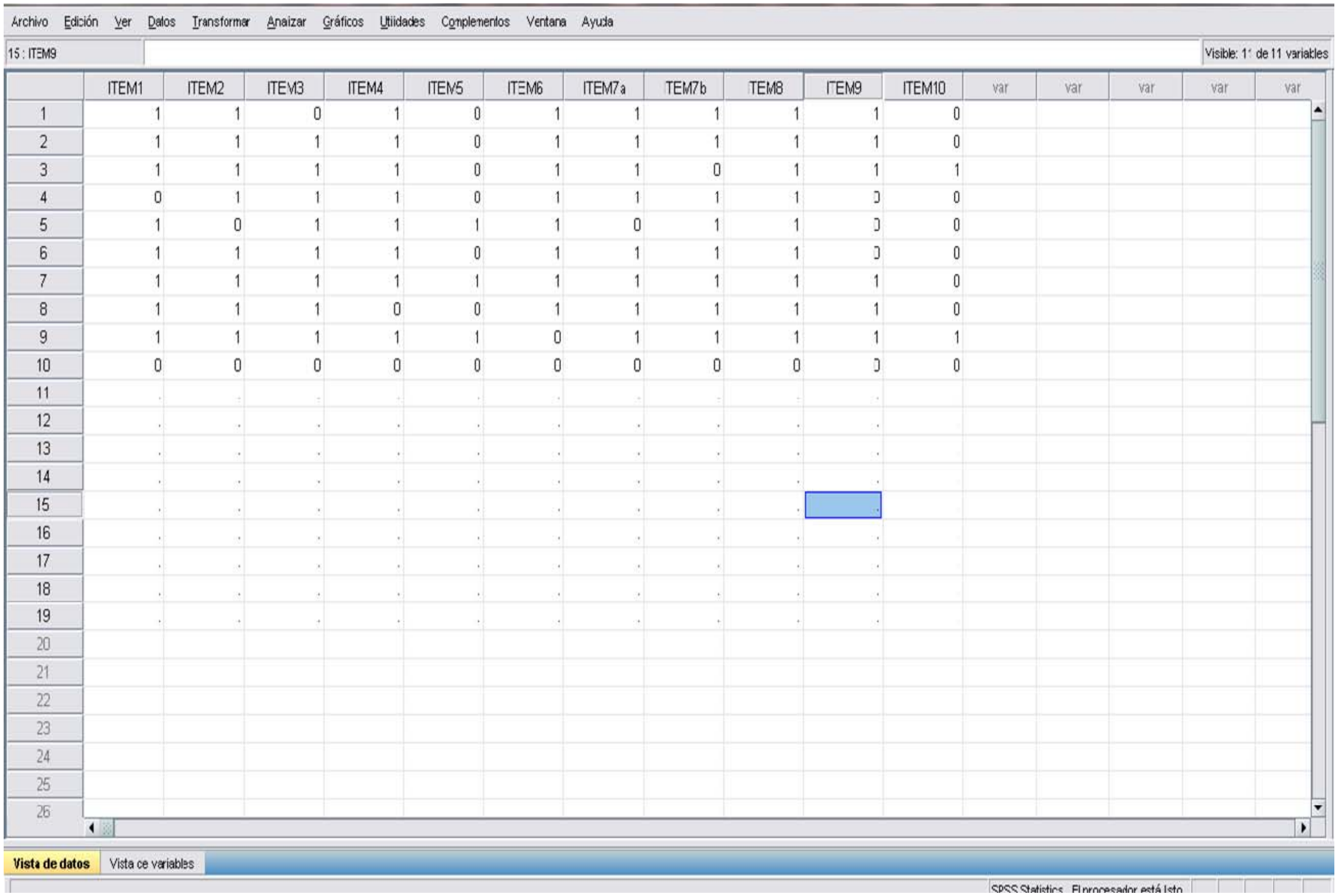
Fecha: 26-02-2015

Correo Electrónico: lisbethcsr@yahoo.com

VALIDEZ	
Aplicable	✓
Aplicable atendiendo las observaciones	
No aplicable	

ANEXO E: Confiabilidad

Análisis de fiabilidad



	ITEM1	ITEM2	ITEM3	ITEM4	ITEM5	ITEM6	ITEM7a	ITEM7b	ITEM8	ITEM9	ITEM10
1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0
2	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
3	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1
4	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0
5	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0
6	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
8	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0
9	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
12	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
13	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
14	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
15	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
16	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
17	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
18	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
19	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	

Escala: TODAS LAS VARIABLES

Resumen del procesamiento de los casos

		N	%
Casos	Válidos	10	100,0
	Excluidos[a]	0	,0
	Total	10	100,0

a. Eliminación por lista basada en todas las variables del procedimiento.

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	N de elementos
,831	11

Coeficiente de correlación intraclase

	Correlación intraclase[a]	Intervalo de confianza 95%		Prueba F con valor verdadero 0			
		Límite inferior	Límite superior	Valor	gl1	gl2	Sig.
Medidas individuales	,309[b]	,128	,635	5,914	9	90	,000
Medidas promedio	,831[c]	,618	,950	5,914	9	90	,000

Modelo de efectos mixtos de dos factores en el que los efectos de las personas son aleatorios y los efectos de las medidas son fijos.

a. Coeficientes de correlación intraclase de tipo C utilizando una definición de coherencia, la varianza inter-medidas se excluye de la varianza del denominador.

b. El estimador es el mismo, ya esté presente o no el efecto de interacción.

c. Esta estimación se calcula asumiendo que no está presente el efecto de interacción, ya que de otra manera no es estimable.