UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DECCIENCIAS DE LA EDUCACION
AREA DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
DOCTORADO EN EDUCACION

EL CONFLICTO SEMIÓTICO: ELEMENTO CRUCIAL EN EL SISTEMA DE PRÁCTICAS DISCURSIVAS Y OPERATIVAS EN LAS QUE INTERVIENE EL INFINITO MATEMÁTICO

Bárbula, 2010

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DECCIENCIAS DE LA EDUCACION
AREA DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
DOCTORADO EN EDUCACION

EL CONFLICTO SEMIÓTICO: ELEMENTO CRUCIAL EN EL SISTEMA DE PRÁCTICAS DISCURSIVAS Y OPERATIVAS EN LAS QUE INTERVIENE EL INFINITO MATEMÁTICO

Autora: MSc. Carolina Vanegas
Tutora: Dra. Ana Beatriz Ramos
Trabajo presentado ante el área de estudio de Postgrado de la Universidad de Carabobo, para optar al título de Doctora en Educación.

Bárbula, 2010

El único verdadero viaje de descubrimiento
es aquel que se emprende no en busca
de paisajes nuevos, sino con ojos nuevos.
Marcel Proust

La mayoría de los grandes matemáticos y
científicos interpretan sus disciplinas como
un modo de pensar más que como un
conjunto de conocimientos.
Michael Strong

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DECCIENCIAS DE LA EDUCACION
AREA DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
DOCTORADO EN EDUCACION

Veredicto

Nosotros miembros del jurado designado para la evaluación de la Tesis Doctoral titulada ***"EL CONFLICTO SEMIÓTICO: ELEMENTO CRUCIAL EN EL SISTEMA DE PRÁCTICAS DISCURSIVAS Y OPERATIVAS EN LAS QUE INTERVIENE EL INFINITO MATEMÁTICO"***, presentada por la MSc. Carolina Vanegas, cédula de identidad V-15.182.637, para optar al título de Doctora en Educación, estimamos que el mismo reúne los requisitos para ser considerado como: ______________________________a los ___________ días del mes de________________del año____________

Nombre y Apellido C.I. Firma

____

____

____

Bárbula, 2010

Dedicatoria

A Dios por ser fuente de vida y luz espiritual que ilumina mi existencia.

Especialmente a mi padre ***Jorge Vanegas***, que desde un rincón del cielo, sigue orientando mi vida. Ejemplo de esfuerzo y honestidad, con su luz continúa alumbrando mi camino hacia el conocimiento.

A ***Agustina y Jorge Andrés*** por su lealtad, preocupación y amor hacia todas las cosas transcendentales de mi existencia.

Carolina Venegas

Reconocimientos

En esta página quiero agradecer a todas aquellas personas e instituciones que de alguna u otra manera contribuyeron a la realización de esta Tesis Doctoral y muy especialmente:

A la Dra. ***Ana Beatriz Ramos***, adscrita al Ciclo Básico de FaCES y docente de la asignatura Introducción a la Matemática, quien se desempeñara como tutora contribuyendo de manera fundamental en el impulso de este trabajo clarificando, mejorando y corrigiendo los distintos borradores y a quien agradezco el apoyo académico y humano que siempre me brindó.

A los inspiradores de este trabajo: ***mis estudiantes de "Matemática II"*** de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo. Estoy agradecida por todo lo que he aprendido de ellos; por lo arduamente que trabajaron, por la voluntad de comprender la matemática y por su confianza.

A la ***Universidad de Carabobo*** por haberme dado una nueva oportunidad para superarme profesionalmente.

Muchas gracias….

ÍNDICE GENERAL

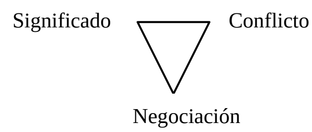
CAPITULO III
CONSTRUCCIÓN DEL HOLOSIGNIFICADO DE INFINITO

CAPITULO IV
LA METÓDICA

CAPITULO V
SIGNIFICADOS PERSONALES PUESTOS EN JUEGO POR LOS ALUMNOS DURANTE LA RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

CAPITULO VI
MODELIZACIÓN DE LOS ESPACIOS DE ESTADO Y TRAYECTORIAS DE LOS SIGNIFICADOS PERSONALES PUESTOS EN JUEGO

CAPITULO VII
APORTE TEÓRICO
EL PAPEL QUE JUEGA EL CONFLICTO SEMIÓTICO EN LA DINÁMICA DE LOS SIGNIFICADOS PERSONALES DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS



LISTA DE FIGURAS

LISTA DE CUADROS

DESCRIPCIÓN DE ABREVIATURAS

EOS: Enfoque ontosemiótico de la cognición matemática

TSD: Teoría de las situaciones didácticas

TCC: Teoría de los campos conceptuales

TAD: Teoría antropológica de lo didáctico

TRS: Teoría de las representaciones semióticas

O_m: Objeto matemático

COS: Conflicto ontosemiótico

S: Significado

PC: Pensamiento complejo

FaCES: Facultad de Ciencias Económicas y Sociales

AC-CP: Administración Comercial y Contaduría Pública

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DECCIENCIAS DE LA EDUCACION
AREA DE ESTUDIOS DE POSTGRADO
DOCTORADO EN EDUCACION

EL CONFLICTO SEMIÓTICO: ELEMENTO CRUCIAL EN EL SISTEMA DE PRÁCTICAS DISCURSIVAS Y OPERATIVAS EN LAS QUE INTERVIENE EL INFINITO MATEMÁTICO

Autora: MSc. Carolina Vanegas Rodríguez
Tutora: Dra. Ana Beatriz Ramos
Año: 2010

RESUMEN

Esta investigación tiene como propósito producir una reflexión teórica sobre la naturaleza y el papel que juega el conflicto semiótico en el sistema complejo de prácticas actuativas y comunicativas en las que interviene el objeto matemático infinito. En concreto se ha planteado como premisa central del estudio, la indagación teórica-práctica del fenómeno educativo denominado conflicto semiótico, a fin de dar respuestas a las siguientes interrogantes ¿Cómo sucede el conflicto? ¿Qué elementos le dan vida? ¿Cuál es su trayectoria? entre otras manifestaciones presentes en el mismo. Para la consecución del objetivo planteado se usaron como ejemplos ilustrativos objetos matemáticos en donde el infinito está implícito. Teóricamente el estudio se basó en el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (en adelante EOS) propuesto progresivamente por Godino y colaboradores (Godino y Batanero (1994), Godino y Arrieche (2001), Godino (2002), Godino, Batanero y Font (2006)). Dado que el EOS es un enfoque emergente, se consideró pertinente articularlo con el pensamiento complejo de Morin (1990, 1999, 2000), por lo tanto el estudio implicó realizar un análisis complejo del conflicto semiótico e indicar sus premisas constituyentes para interpretarlo como un elemento crucial en la generación en el tiempo del saber matemático producto de una interacción educativa. En relación a la metodología empleada, se combinaron diversas técnicas y enfoques según las distintas facetas del estudio, dependiendo de la cuestión particular abordada. Se amalgamó el estudio documental y cualitativo en la faceta epistemológica de la investigación con el análisis ontológico-semiótico (Godino, 2002) en la parte cognitiva. La información fue obtenida a través de cuestionarios, entrevistas individuales semiestructuradas y redes semánticas aplicadas a un grupo de estudiantes de Matemática II de las carreras de Administración y Contaduría de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo. Dado que el conflicto semiótico se produce por la ausencia de ciertas funciones semióticas y partiendo de la borrosidad en la cronogénesis de los significados personales de los objetos matemáticos, de la multiplicidad de los conflictos semióticos y de la relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados sistémicos puestos en juego y desarrollados durante la actividad matemática, se incorpora a la caracterización propuesta por Godino el conflicto ontosemiótico (COS) de seis tipos: lingüístico, actuativo, argumentativo, conceptual, situacional y proposicional. Adicionalmente se presenta la imbricación del COS con las cinco dimensiones duales contempladas en el EOS: personal/institucional, ostensivo/no ostensivo, concreto/abstracto, expresión/contenido y elemental/sistémico, incorporándose una sexta relación: El COS con la dimensión dual estructura/operación.

Descriptores: Conflicto semiótico, Infinito, Complejidad, Matemática, Negociación de significado.

INTRODUCCIÓN

La matemática es básica para la formación integral en la era de la información y del conocimiento. Gran parte de las profesiones y de los trabajos técnicos que hoy en día se ejecutan requieren de nociones matemáticas: las actividades industriales, la medicina, la física, la química, la sociología, la economía, la ingeniería, las artes y la música la utilizan para expresar y desarrollar muchas representaciones en forma gráfica, numérica y analítica. Adicionalmente, la matemática es considerada el medio universal para la comunicación científica.

A través del aprendizaje de esta disciplina un individuo puede llegar a desarrollar un pensamiento matemático que favorezca la abstracción reflexiva, el pleno empleo de las aptitudes mentales, el sentido crítico, la habilidad para el cálculo, la capacidad para la toma de decisiones y estrategias para la resolución de problemas; todas estas aptitudes operacionales formales indispensables para una mejor comprensión y asimilación de las diferentes asignaturas que curse, así como para un mejor desempeño en su vida cotidiana y profesional.

La preocupación por las dificultades del aprendizaje de los conceptos matemáticos a nivel universitario motivó la investigación que, desde el punto de vista de los significados puestos en juego por los estudiantes, indaga y examina los motivos que hacen de la semiosis de los conceptos matemáticos un tema para ser explicado e interpretado. Parece razonable pensar que si un tipo de malentendido se manifiesta en un número considerable de alumnos de manera persistente durante los procesos de negociación de significados, su origen se debe buscar en los saberes[1] que se pretenden impartir y no tanto en los propios alumnos. Un malentendido sistemático es señal inequívoca de la comprensión incorrecta de un objeto matemático, por lo que

[1] En lo sucesivo se interpretará saber como el significado institucional de referencia mientras que el conocimiento se referirá al significado personal logrado.

el análisis de los conflictos semióticos puede dar información sobre los puntos críticos o los factores condicionantes de los actos de semiosis en los que se debe incidir para mejorar el proceso socio instruccional.

Advertir esta situación condujo a una indagación dirigida al conocimiento y análisis de los distintos tipos de malentendidos detectados que permitan producir una reflexión sobre las causas posibles de su aparición. Por lo tanto la presente investigación tiene como propósito producir una reflexión teórica sobre la naturaleza del conflicto semiótico, concebido como la discordancia existente entre el significado de un objeto matemático atribuido por una persona y el significado aceptado por la comunidad matemática en general. El conflicto semiótico será entonces interpretado como un elemento crucial en la generación en el tiempo del saber matemático producto de una interacción educativa. Tomando esto en consideración, el tejido argumental se realizó en seis niveles de análisis con bucles de realimentación especificados de la siguiente manera:

En el primer capítulo se abordan los elementos de la dimensión ontológica: una aproximación al tema objeto de estudio, que incluye las razones que motivan la investigación, se explicitan los objetivos que le dieron direccionalidad al trabajo y finalmente la justificación y relevancia donde se incluyen argumentos de índole teórica, práctica y metodológica a favor de la realización de la investigación. Como ejemplo ilustrativo se utilizó la noción de *infinito* ya que es un objeto matemático complejo de especial importancia para los licenciados en Administración Comercial y Contaduría Pública (en adelante AC-CP) en proceso de formación profesional porque interviene en varios conceptos clave del cálculo financiero y de la estadística inferencial como lo son el valor presente de una anualidad perpetua, la función de densidad de probabilidad y el valor esperado. De allí la necesidad de proporcionar a los alumnos la mayor solidez en el conocimiento y manejo de este concepto de elevada complejidad ontológica y semiótica.

El segundo capítulo corresponde al andamiaje teórico y conceptual que sustenta la Tesis Doctoral y que tiene relación fundamentalmente con el enfoque ontosemiótico de la instrucción y la cognición matemática (EOS) propuesto por

Godino y colaboradores Godino y Batanero (1994), Godino y Arrieche (2001), Godino (2002), Godino, Batanero y Font (2004)) [nombre determinado por el papel central que se asigna al lenguaje, a los procesos de comunicación e interpretación y a la variedad de objetos que se ponen en juego en la enseñanza y aprendizaje de la matemática y que constituye una perspectiva educativa que trata de vincular de manera coherente, consistente y pertinente las dimensiones epistémico y cognitiva enfatizando en los significados de los objetos matemáticos] articulado con el pensamiento complejo de Edgar Morin (1990, 1999b, 2000) [una nueva concepción que busca la integración de las partes en un todo, la recursividad y la relación dialógica entre elementos aparentemente antagónicos o discordantes pero que son realmente complementarios]. En este nivel se integran los conocimientos según una causalidad circular en la que cada uno de los enfoques nutre al otro, permitiendo asignar nuevas cualidades de significación al entramado discursivo.

Para que la proyección del pensamiento complejo en el campo de la dinámica de los significados personales de los objetos matemáticos pueda constituir una tarea fructífera fue preciso seleccionar, interpretar y adaptar los conceptos y principios más relevantes de esta perspectiva a las características y propósitos del estudio. Se resalta que la concepción básica de la complejidad implica la existencia simultánea de una heterogeneidad estructural y de una reciprocidad funcional, dándole importancia al papel que desempeña el ser humano ecocognoscente hacia quien se dirige el esfuerzo educativo.

En el tercer capítulo se realiza la construcción del holosignificado de la noción de *infinito* a partir de los siguientes elementos: (a) Un estudio histórico epistemológico, partiendo del pensamiento de Pitágoras hasta las aportaciones de Cantor, (b) Una explicitación de los criterios y experiencias de los principales investigadores que han profundizado en el estudio de esta entidad matemática, aportando así valiosos antecedentes, (c) El significado que tiene el objeto en la institución universitaria seleccionada, (d) Las orientaciones curriculares y (e) La descripción del significado institucional de referencia de *infinito* construido a partir de diferentes textos universitarios comúnmente empleados en la Facultad de Ciencias

Económicas y Sociales (en adelante FaCES) y de la experiencia de la investigadora en la aplicación y la enseñanza del cálculo integral y el álgebra matricial. En este estudio se identificaron y caracterizaron los diferentes elementos de significado del infinito, revelándose la complejidad ontosemiótica del mismo y su enlace con otros objetos matemáticos.

Como la plataforma epistemológica va de la mano de la metodología, en el cuarto capítulo se combinaron diversas técnicas y enfoques según las distintas facetas del estudio dependiendo de la cuestión particular abordada. Se articuló el estudio documental y cualitativo en la faceta epistemológica de la investigación con el análisis ontológico-semiótico (Godino, 2002 y Arrieche, 2003) como técnica para determinar significados personales e institucionales y su compleja dinámica de interrelaciones. La información fue obtenida a través de cuestionarios, entrevistas individuales de investigación semiestructuradas, redes semánticas (Álvarez y Jurgenson, 2003), asesorías y observaciones de un grupo de estudiantes, elegidos intencionalmente, cursantes en el turno de la tarde de la asignatura "Matemática II", perteneciente al tercer semestre de las carreras de AC-CP de FaCES-UC. Los datos recaudados fueron organizados en categorías que aludieron a procesos sobre los cuales se construyeron las expresiones generales de carácter teorizante que constituyen el aporte del presente trabajo intelectual.

La hermenéutica, por su condición multifacética que permite la inclusión de la intersubjetividad como herramienta de análisis en los procesos de comprensión, interpretación y aplicación estuvo presente en toda la investigación, en la elección de la plataforma epistemológica, en el tipo de preguntas que se formularon durante las entrevistas, en el análisis de los datos, en la interpretación de lo expresado por los entrevistados y en la comprensión e interpretación de los textos consultados.

En el quinto capítulo**,** se presentan los significados personales puestos en juego por los alumnos durante la recolección de la información donde se realiza una descripción del cuestionario, de las entrevistas semiestructuradas y de las redes semánticas obtenidas. Al abordar la investigación desde el paradigma de la complejidad, en esta fase del proceso se tomaron en cuenta los principios sistémico y holográmico del pensamiento complejo: la imposibilidad de conocer el todo sin conocer las partes y que las partes son reflejo del todo. Las entrevistas semiestructuradas se realizaron individualmente a varios estudiantes después de que estos contestaron el cuestionario (presentado en el Anexo G) siguiendo un guión previo de carácter básicamente informal. Una vez codificados y tabulados los resultados, se realizó el análisis ontológico-semiótico en donde se describen sistemáticamente los "patrones de conflicto", los porcentajes de cada una de las respuestas dadas por los alumnos a cada uno de los ítems. También se realizó una clasificación de las dificultades y los errores más frecuentes, una taxomía de los conflictos semióticos y se establecieron diferencias entre los razonamientos matemáticamente válidos y los realizados por los estudiantes.

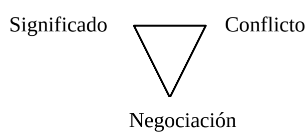
En el sexto capítulo se presenta la modelización de los espacios de estado y las trayectorias de los significados personales puestos en juego por los alumnos durante las entrevistas. En este sentido se puede considerar que un espacio de estado es un recurso de presentación esquemática que enlaza los diferentes significados (argumentativo, proposicional, conceptual, lingüístico, actuativo y situacional) manifestados por los agentes participantes y en donde es posible representar los conflictos ontosemióticos.

En el aporte teórico de la investigación, que emerge en el capítulo VII del documento, se presenta el papel que juega el conflicto semiótico en la dinámica de los significados personales de los objetos matemáticos. Se parte de tres prolegómenos básicos: (a) La borrosidad en la cronogénesis de los significados: la construcción de los significados se realiza en forma progresiva, dinámica y no lineal desfasada con respecto a la instrucción, (b) La relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados sistémicos que entran en juego y (c) La multiplicidad de los conflictos semióticos debido a la complejidad de los objetos matemáticos y a la complejidad de los procesos de pensamiento que se han de utilizar para construir y manejar dichos objetos, lo cual permitió incorporar a la caracterización propuesta por Godino el conflicto ontosemiótico (en adelante COS) de seis tipos: lingüístico, actuativo, argumentativo, conceptual, situacional y proposicional empleando como soporte fragmentos de las entrevistas. Adicionalmente se determinó la imbricación del conflicto ontosemiótico con las cinco dimensiones duales contempladas en el EOS: personal/ institucional, ostensivo/no ostensivo, concreto/abstracto, expresión/contenido y elemental/ sistémico, incorporándose una sexta relación: El COS vinculado con la dimensión dual estructura/ operación.

En el capítulo VIII se exponen las reflexiones finales a modo de conclusión, dejando abiertas vías posibles de futuras investigaciones relacionadas con el desarrollo del pensamiento complejo en el bucle recursivo conflicto → negociación de significados (la acción es recíproca ya que el conflicto anuncia la búsqueda de una negociación, proceso que genera nuevas circunstancias, nuevos significados, nuevos conflictos y nuevas negociaciones). Finalmente se incluye la experiencia de la investigadora para desarrollar la Tesis Doctoral.

Como resultado de esta investigación se destacan los siguientes aportes epistemológicos significativos:

En primer lugar, el estudio complejo del conflicto ontosemiótico en la dinámica de los holosignificados personales de los objetos matemáticos basado en el bucle de cronogénesis



En segundo lugar, la contribución al desarrollo de una teoría sobre los conflictos ontosemióticos; gracias a la visión ontológica y semiótica que sobre ellos permite la articulación y presentación en niveles de los argumentos apoyados en una profunda revisión documental, usando en la elaboración discursiva del documento y sometiendo a la reflexión hermenéutica el pensamiento complejo, el EOS y la teoría de las representaciones semióticas.

En tercer lugar, el enfoque transdisciplinario al articular de manera coherente herramientas teóricas de diversas disciplinas: la educación de la matemática, la antropología cognitiva, la filosofía y la semiótica, porque desde la perspectiva compleja no existen fronteras entre las disciplinas ya que la realidad es multidimensional.

Un cuarto aporte lo constituye la incorporación de los constructos “borrosidad en la cronogénesis de los significados personales de los objetos matemáticos” como una herramienta conceptual para abordar la problemática de la discontinuidad en la construcción de significados y la "no-linealidad signo-significado" para explicar la ambigüedad de los registros de representación semiótica.

El quinto aporte es la inclusión en la metódica de las redes semánticas para determinar los significados personales puestos en juego por los agentes participantes relacionados con dos objetos matemáticos: infinito e indeterminación. Adicionalmente la profundización en las verbalizaciones sobre las prácticas incorrectamente realizadas.

El sexto aporte la modelización de los espacios de estado y trayectorias de los significados personales con la identificación y caracterización de regularidades o patrones ocultos en los conflictos semióticos, donde se puso de manifiesto la importancia de la negociación de significados como una manera de dar cuenta de cómo los estudiantes desarrollan la comprensión de las nociones matemáticas y desarrollan actitudes en relación a la matemática.

Y finalmente la articulación del conflicto ontosemiótico con las cinco facetas duales contempladas en el EOS y con las configuraciones epistémico/cognitivas.

También es conveniente acotar que aunque el estudio ontosemiótico se realiza en un escenario socioinstruccional universitario, la reflexión teórica tiene mayor alcance por cuanto puede extrapolarse a otros niveles educativos ya que, en el tema de la naturaleza y el papel determinante que juega el conflicto semiótico en la compleja dinámica de los significados personales matemáticos, hay una creciente conciencia de que amerita ser estudiado (Arrieche (2002), Font (1999), Acevedo (2007), Roa (2000), Wilhelmi et al.(2004)).

Al final del documento se incluyen las referencias bibliográficas y documentales consideradas como soporte durante el proceso de investigación. En el primer anexo se insertaron los conceptos clave que permiten: (a) Aclarar el significado de los términos empleados en el discurso, (b) Familiarizar al lector con vocablos que puedan tender a confundir o bloquear la lectura, por lo tanto, a través de su esclarecimiento se pretende dilucidar cualquier duda que pudiese surgir y que pueda ser óbice para la dinámica interactiva propia del proceso de comprensión lectora. Adicionalmente se incluye la trascripción total de las entrevistas, varios ejemplos contextualizados de aplicación de las integrales impropias propuestos por los estudiantes y las tablas de construcción de las redes semánticas de dos objetos matemáticos: infinito e indeterminación.

Para culminar se considera que este trabajo puede contribuir a una mejora de la enseñanza de la matemática y que motive a otros investigadores a continuar con esta interesante línea de investigación.

CAPITULO I
DIMENSIÓN ONTOLÓGICA

Si quieres saber que es el pensamiento complejo,
empieza complejizando tu pensamiento
Edgar Morin

El caos lo define el observador
Raúl Eduardo Nieto Echeverri (2006)

La matemática es una gimnasia del
espíritu y una preparación para la filosofía
Isócrates

CAPITULO I

DIMENSIÓN ONTOLÓGICA

Tal y como lo indica el título en esta sección se presenta una aproximación al tema objeto de estudio, se analiza su complejidad sistémica, se formulan los objetivos que le dan direccionalidad al trabajo, las razones que motivan su estudio y la relevancia de la investigación en el contexto de generación del sistema complejo de prácticas discursivas y operativas del infinito matemático.

1.- Introducción

Como se ha señalado en la introducción, el problema que se aborda en esta investigación se centra en un aspecto específico de la actividad discente en educación matemática; este es la dificultad que manifiestan la mayoría de los estudiantes para comprender ciertos objetos matemáticos en donde el infinito está implícito, su utilización en diversas situaciones problemáticas y su articulación con otros contenidos del currículo. Entender por qué ocurre este fenómeno multidimensional conlleva a la necesidad de producir una reflexión teórica sobre el proceso seguido por los alumnos en la construcción progresiva de los diferentes aspectos del conocimiento matemático.

2.- Aproximación al Tema Objeto de Estudio

El conflicto semiótico es un constructo teórico del enfoque ontosemiótico de la cognición matemática propuesto por Godino y colaboradores (Godino y Batanero (1994), Godino (2002), Godino y Arrieche (2001). Para estos investigadores un conflicto semiótico es *"cualquier disparidad, discordancia o desajuste entre los* *significados o contenidos atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa que provocan dificultades y limitaciones durante la actividad matemática”* (Godino, Batanero y Font (2006), p.14). En el trabajo matemático, los símbolos (objetos representantes o significantes) remiten o están en lugar de las entidades conceptuales (significados). El punto crucial en los procesos de instrucción matemática no es el dominio de la sintaxis del lenguaje simbólico matemático sino la comprensión de su semántica y pragmática, es decir, la naturaleza de los propios objetos matemáticos (conceptos, notaciones, teoremas, procedimientos, representaciones, argumentos, proposiciones, teorías, sistemas o estructuras matemáticas) y su dependencia de los contextos altamente estructurados y situaciones-problema de cuya resolución provienen.

La relatividad de los significados, entendidos como sistemas de prácticas operativas y discursivas, lleva a introducir una tipología básica de significados para la comprensión del conflicto semiótico. Los significados personales son concebidos como sistemas de prácticas complejas (en su versión institucional relativa a juegos de lenguaje y formas de vida, Wittgenstein (1953)) que realiza una persona para resolver el campo de problemas del que emerge un objeto matemático en un determinado momento (Godino, Batanero y Font (2006)). Los significados personales se van negociando y construyendo de forma progresiva, dinámica y no lineal en el decurso de la instrucción, partiendo de unos significados iniciales o previos al comienzo del proceso y alcanzando unos determinados significados finales, pero, incluso después de esta etapa, pueden sufrir nuevas transformaciones enriqueciéndose a partir de la actividad reflexiva según se va ampliando el campo de problemas asociado. Así la expresión “sabe lo que es el infinito”, referida a una persona dada, puede ser cierta si se refiere al contexto cotidiano y falsa si se refiere al mundo académico, e incluso en éste habría que diferenciar si se refiere al conocimiento necesario para la enseñanza en los primeros cursos de matemática de una carrera universitaria o al que sería preciso para realizar una investigación teórica sobre este objeto matemático. Se distingue el significado institucional (saber que se considera aceptable dentro de una institución) del significado personal (conocimiento sobre el objeto de una persona dada) que puede estar o no en coincidencia con el significado dado en la institución de la que forma parte.

Si la disparidad se produce entre significados institucionales se habla de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de una misma persona se designa como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos diferentes en interacción comunicativa (por ejemplo alumno-alumno o alumno-profesor) se habla de conflictos semióticos interaccionales (Godino, 2002). Un conflicto semiótico de tipo cognitivo se presenta cuando el sujeto construye una representación de un objeto matemático que cree estable y definitiva; pero a un cierto punto de su historia cognitiva, recibe informaciones del objeto no contemplados en la representación que tenía por lo que debe entonces adecuar el viejo significado a uno nuevo más amplio, que no sólo conserve las precedentes informaciones sino que acoja también las nuevas. D'Amore (2006a). El entramado es más fuerte y más cercano al objeto matemático. En este sentido, el principal objetivo de la enseñanza es el acoplamiento progresivo de los significados personales a los institucionales y la apropiación de los significados institucionales por parte de los estudiantes y en donde el papel del docente consiste en crear y mantener un entorno apropiado para negociar y conciliar los significados y asegurarse que los alumnos interaccionen y colaboren entre si eficazmente.

La importancia de la noción de significado se debe a que a partir de ella se puede deducir una teoría de la comprensión (Godino, Batanero y Font, 2006). La comprensión personal de un objeto matemático es, en este modelo, la "apropiación" del significado de dicho objeto. Se considera pertinente señalar que el significado de un objeto no se concibe como una entidad absoluta y unitaria sino como un sistema eco-dependiente, la comprensión de un objeto por un sujeto, en unas coordenadas espacio-temporales dadas, implicará la adquisición de los diversos elementos que componen los significados institucionales correspondientes. Esta teoría de la comprensión tiene dos ejes: uno descriptivo, que expresa los aspectos o componentes de los objetos a comprender y otro procesual que indicará las fases o niveles necesarios para lograr un alto grado de acuerdo entre el significado institucional pretendido y el personal adquirido por los estudiantes. Esta investigación se centrará principalmente en el eje procesual. Por lo tanto, en esta aproximación teórica se intentará abordar el conflicto semiótico implicado en la comprensión de los objetos matemáticos como un elemento crucial o punto crítico en la generación en el tiempo de los significados personales (donde se originan rupturas, fluctuaciones significativas, reestructuraciones intelectuales y/o enriquecimientos de los conocimientos matemáticos) que son resultados temporales y específicos para la institución de referencia.

3.- El Grado de Acercamiento al Conocimiento Matemático

En la investigación que se pretende desarrollar, se intentará abordar sistemáticamente las premisas constitutivas del conflicto semiótico implicado en la comprensión de los objetos matemáticos basado en un estudio exploratorio previo (Vanegas (2008a, 2008b)):

1) El conflicto de significado se debe al aparente principio de precisión, concisión, coherencia y universalidad del lenguaje matemático concebido como un sistema de signos. En la interacción de la triada docente-alumno-significado institucional de referencia se construye y configura un lenguaje lógico-matemático como instrumento de significación y comunicación entre los sujetos involucrados.

2) El conflicto de significado implica un modelo particular de sistema semiótico que orienta la organización de los procesos de interpretación de los sistemas de signos matemáticos que entran en juego.

Este supuesto implica que:

a) El significado personal de un objeto matemático evoluciona hacia un significado más cercano al significado institucional de referencia producto de una serie de autoorganizaciones cognitivas en la mente de los estudiantes.

b) En él se evidencian relaciones sistémicas entre macroconjuntos significantes inmersos en una diversidad de contextos, circunstancias espacio-temporales y psicosociales que determinan y relativizan estas relaciones.

3) Los conflictos semióticos se manifiestan en forma de malentendidos, que no son aleatorios ni impredecibles sino que es factible encontrar ciertas regularidades o patrones subyacentes, asociaciones con variables propias a las actividades propuestas de los sujetos o de las circunstancias presentes o pasadas. Al tomar el análisis ontológico-semiótico como contexto y herramienta articuladora, dialógica y flexible para explorar y caracterizar los conflictos semióticos puestos en juego por los agentes participantes se podrán identificar dichos patrones.

4) El conflicto semiótico se concibe como un elemento crucial eco-dependiente. Es decir, no puede entenderse de manera aislada e independiente del contexto social, tecnológico, cultural y circunstancial en el que surge, sino que por el contrario, la disparidad entre los significados depende del medio y las herramientas que proporciona la cultura.

Este supuesto implica que:

a) El significado de un objeto matemático depende de la institución educativa donde es utilizado por lo que no hay un significado único de las entidades matemáticas.
b) Lo mismo ocurre con las personas, no todas exhiben las mismas prácticas para resolver un campo de problemas debido a que cada individuo tiene su propia historia y está sujeto a influencias, costumbres y experiencias distintas. En otro proyecto de investigación, desarrollado paralelamente a este, se profundiza en esta situación. (Vanegas, 2007)

5) El conflicto semiótico, sea cual fuese su ubicación espacio-temporal, tiene características hipercomplejas no deterministas, están presentes elementos aleatorios que originan cambios en los significados personales de los objetos matemáticos. Es

un macrosistema (dinámico y creador) producto de la relación dialógica orden/desorden en donde es factible encontrar aciertos a partir de los malentendidos.

6) El conflicto semiótico es de naturaleza holográmica, lo que significa que las partes se dan en el todo y el todo se encuentra en cada una de las partes. Implica un continuo de relaciones con un ambiente de incertidumbre ya que es preciso adaptar la enseñanza de los contenidos a las características y necesidades de los alumnos. Es una macrored semiótica en donde se generan y despliegan modelos cognitivos, una serie de representaciones, formas de organización de los significados personales relacionados con el saber matemático. La comprensión del conflicto semiótico implica analizar la totalidad del sistema que genera dicho conflicto.

7) Los conflictos semióticos se pueden explicar mediante trayectorias cognitivas. En cada experiencia particular de enseñanza de un contenido se producen una serie de estados posibles que describen secuencias particulares de funciones.

El conflicto semiótico se puede explicar como un punto crucial en la cronogénesis de los significados personales matemáticos. El punto crucial puede suceder porque:

a) El significado institucional de referencia se presenta incompleto, confuso o poco coherente y por lo tanto no es potencialmente significativo (Cuando un docente da como ejemplo de un conjunto vacío: “los profesores de matemática propietarios de un avión” los alumnos interpretan que un conjunto vacío es aquel que está conformado por elementos fuera de lo común y no la definición correcta: un conjunto vacío es aquel que no tiene elementos). En este caso es el docente quien tiene la posibilidad de resolver el conflicto semiótico empleando dos alternativas: la primera, seleccionando aquellos significados que él considera relevantes para la instrucción, asegurándose de su completitud y coherencia y la segunda, ofreciendo a los estudiantes experiencias más completas de tal modo que ellos, por cuenta propia, sean capaces de construir el significado del objeto matemático en cuestión.

b) El alumno no dispone de los conocimientos necesarios para construir nuevos significados ya que las definiciones son imprecisas, los conceptos no son suficientemente generales o las demostraciones son poco rigurosas, en este caso es preciso minimizar la distancia entre lo que sabe el alumno y el significado institucional de referencia; es decir, se ha de hacer una adaptación del nuevo significado a lo que ya sabe.
c) Diversos libros de texto originan conflictos semióticos porque dejan a cargo del alumno la realización de determinadas funciones semióticas que son básicas para la correcta interpretación del texto matemático.
d) La animadversión hacia la matemática, la ansiedad por acabar una tarea, el miedo al fracaso, una actitud negativa del profesor hacia sus alumnos, son actitudes afectivas y emocionales que pueden explicar la presencia de conflictos semióticos.
e) Los conflictos semióticos se pueden presentar por la forma en que se organizan y transmiten los contenidos matemáticos. Por lo general se presenta en primer lugar el símbolo, gráfico, signo o representación sobre el objeto en cuestión, haciendo que el alumno intente comprender el significado de lo que se ha representado.

Cada trayectoria muestral tiene asociada un tipo específico de conflicto semiótico pero que indudablemente están conectados entre si y se refuerzan mutuamente. En todos estos casos se producirá un conflicto semiótico porque se presenta la disparidad entre el significado personal y el de referencia y en lugar de seguir una secuencia normal, se produce entonces una bifurcación, una discontinuidad, un cambio brusco. En esa nueva trayectoria se pueden presentar obstáculos: un conflicto semiótico latente que impide que el sujeto pueda comprender a largo plazo nuevos contenidos matemáticos. Es por eso que en esta investigación se interpretará el conflicto semiótico como un elemento crucial que afecta la verdadera comprensión de los objetos matemáticos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas.

8) El conflicto semiótico es una situación contingente y por lo tanto inestable por lo que también se le puede denominar tensión semiótica. Cuando surgen estas situaciones de tensión se favorece la aparición de nuevas estructuras de significación de orden y complejidad más elevadas.

9) El conflicto semiótico implica un proceso de negociación o clarificación de los significados entre los distintos intérpretes que intervienen en el proceso educativo, de tal manera de aportar pautas para seleccionar las configuraciones didácticas y los patrones de interacción más apropiados y caracterizar los aprendizajes logrados. Por lo tanto se concebirá como un bucle recursivo

Conflicto → Negociación

de significados (la acción es recíproca ya que el conflicto anuncia la búsqueda de una negociación, proceso que genera nuevas circunstancias, nuevos significados, nuevos conflictos y nuevas negociaciones).

En la explicación de las premisas constitutivas del conflicto semiótico se utilizarán como ejemplos ilustrativos diversos objetos matemáticos que involucran la noción de infinito, la información experimental recabada proporcionará el basamento para reformular los supuestos iniciales y producir argumentaciones más sólidas.

Por otra parte, con respecto a la justificación de ¿Por qué se escogió el infinito para realizar el análisis complejo? La elección se debe a que:

a) Es un objeto matemático con una elevada complejidad ontológica y semiótica, evidenciada en más de una ocasión por la investigación internacional (D’Amore et al.(2006b), Garbin y Azcárate (2002), Waldegg (1996), Penalva (1996), Turégano (1996), Sacristán (2003), Fischbein, Tirosh y Hess (1979) entre otros).
b) A pesar de que su comprensión no es intuitiva, no es resultado de un proceso de instrucción explícita en algún curso del currículo educativo.

c) Permite evaluar la transición del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado (Tall, 1992), lo cual implica la ejecución de distintos niveles de abstracción y generalización.
d) Es un objeto con una faceta no ostensiva, en el sentido de que es un objeto que no se puede presentar directamente sino es mediante ciertos ostensivos asociados de difícil conversión entre los diferentes registros de representación semiótica.
e) Por sí mismo es un concepto muy importante en la enseñanza del cálculo diferencial e integral, ya que interviene en procesos infinitos que forman la base del concepto de límite que se maneja en los cursos de matemática de las carreras de Administración Comercial y Contaduría Pública de FaCES- UC y es fundamental para la modelización matemática del valor presente de una anualidad perpetua (concepto manejado en cálculo financiero) y en la formulación matemática de la función de densidad de probabilidad y valor esperado (estadística inferencial).

Y finalmente, se escogió para el análisis este objeto matemático porque se coincide con lo señalado por Arboleda y Recalde (1995):

> *Con el infinito nos encontramos con un concepto fundamental para la epistemología de la matemática, de alta relevancia para la historia de las disciplinas y, no obstante, solamente reconocido en las axiomáticas como resultado de un proceso o como presupuesto para procesos operatorios* (p.156)

En esta investigación las premisas serán abordadas desde un marco conceptual de amplio espectro que aglutine y reinterprete apropiadamente los aspectos señalados en toda su complejidad y variabilidad. Precisamente el teórico que está trabajando actualmente con este paradigma emergente es Morin (1990, 1999a, 2000) quien resalta que la interpretación y comprensión de diversos fenómenos socioculturales requieren de una forma de pensamiento distinto como una forma de encaminar a la sociedad hacia el bienestar, la evolución y la productividad. En su obra interpreta desde una óptica educativa los siete principios guía para un pensamiento complejo, señalando que pensar desde la complejidad es una tarea de ardua ejercitación, es estar al tanto de las variables que intervienen en la naturaleza para describirlas, comprenderlas y detallar como se dan las relaciones entre un fenómeno determinado y su apropiado contexto para ser bien interpretado.

4.- Elementos Guía de la Investigación

Para delinear los elementos guía de la investigación se establecieron las siguientes interrogantes de interés: ¿Cómo sucede el conflicto semiótico? ¿Qué elementos le dan vida? ¿Cuál es su trayectoria? ¿Cómo cambia el significado de un objeto matemático en una persona? ¿Cómo influyen los conflictos semióticos de tipo cognitivo en la formación de los conocimientos matemáticos? ¿Por qué se presenta el fenómeno de no congruencia en la conversión de las representaciones semióticas? ¿Cuáles son las condiciones que aseguran la concordancia entre los significados institucionales y los significados personales? ¿Cuáles son las restricciones que pueden impedir satisfacer estas condiciones? ¿Existe relación entre el conflicto semiótico y las cinco dimensiones duales contempladas en el EOS? ¿Es factible integrar el pensamiento complejo con el enfoque ontosemiótico para explicar la cronogénesis de los significados personales del objeto infinito matemático?

Es necesario reconocer la complejidad de estas cuestiones y la variedad de posibles respuestas. Sin embargo, esta dificultad no puede implicar la renuncia a la clarificación de estas cuestiones, si el propósito es tratar de entender el proceso seguido en la construcción y negociación de los significados personales de los objetos matemáticos. Uno de los aspectos más importantes de la actual investigación es que la explicación teórica sobre la naturaleza y el papel que juega el conflicto semiótico tome en cuenta aspectos no considerados por el enfoque de Godino. Esto exigió una explicación actualizada que pueda incorporarse en una instancia operativa en otros niveles educativos.

5.- ***Intención Rectora de la Investigación***

Producir una reflexión teórica sobre la naturaleza y el papel que juega el conflicto semiótico en la cronogénesis del sistema complejo de prácticas actuativas y comunicativas en las que interviene el objeto matemático infinito.

6.- Pistas de Itinerario

De acuerdo al tema objeto de estudio seleccionado se hace necesario fijar los términos que se persiguen para el desarrollo de la presente investigación. Debido a que se hace implícito para el estudio la indagación dentro de una producción constructiva enmarcándose dentro de lo señalado por Martínez (2004) quien asevera que los objetivos de una investigación implican una orientación epistémico especial, los cuales, sencillamente aceptan o se apoyan en una determinada teoría o supuestos básicos a fin de explícitar o desarrollar el estudio. A continuación se detallan dichos objetivos:

1) Indagar sobre los factores condicionantes que operan en la constitución de las prácticas discursivas y operativas en las que interviene el objeto matemático infinito.
2) Elaborar una metódica basada en la articulación de las redes semánticas con el análisis ontosemiótico para determinar la complejidad de los objetos personales y detectar conflictos semióticos potenciales.
3) Determinar la relación del conflicto semiótico con las cinco facetas duales en las que pueden ser consideradas las entidades matemáticas, según el juego del lenguaje en que participan, empleando como contexto de reflexión diversos objetos matemáticos en donde el infinito está implícito.

El constructo conflicto semiótico es un término altamente complejo que se ajusta a cuatro dimensiones o puntos de reflexión previstos desarrollar en esta investigación. En la dimensión ontológica, el conflicto semiótico actúa como un objeto de conocimiento identificable a través de diversos atributos e ilustrado por evidencias y ejemplos. En la dimensión gnoseológica, el conflicto semiótico es un elemento crucial en la cronogénesis de los significados personales atribuidos al macrosistema organizado de objetos matemáticos. En la dimensión epistemológica, el conflicto semiótico es una herramienta conceptual integrada en un marco teórico en la faceta cognitiva del EOS y el pensamiento complejo. Y finalmente en la dimensión metodológica los conflictos semióticos potenciales pueden ser detectados mediante el análisis ontológico-semiótico, técnica para determinar significados personales e institucionales y su compleja dinámica de interrelaciones.

Como guía de la reflexión teórica se utilizaron datos experimentales, en concreto se tomó como contexto la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo. Específicamente los hechos factuales fueron aportados por las prácticas operativas y discursivas de los estudiantes de “Matemática II”, asignatura obligatoria del tercer semestre de las carreras de Administración Comercial y Contaduría Pública y última matemática cursada por estos estudiantes. El propósito de los cuestionarios, las entrevistas individuales semiestructuradas y las redes semánticas es que los alumnos expongan los significados personales de ciertos objetos matemáticos asociados con el *infinito* de una manera explícita para poder describir y caracterizar en detalle los conocimientos alcanzados, los malentendidos, las dificultades y los conflictos cognitivos, así como para poner de manifiesto en qué elementos se han producido mayor grado de acuerdo y desacuerdo con el significado institucional pretendido. En otras palabras, el análisis de estos instrumentos dará indicios sobre la presencia de los conflictos semióticos y estos a su vez ofrecerán información sobre el proceso progresivo de construcción y negociación de los significados personales de los objetos matemáticos. A continuación se presenta un resumen de la metódica de la actual investigación:

a) Hermenéutica: En el sentido de que se realizaron interpretaciones de las interpretaciones hechas por los sujetos investigados.

b) Exploratoria: En el sentido que se ha pretendido recoger y analizar información que pueda servir para orientar futuras investigaciones.
c) De campo: Ya que la investigación se ha realizado en el lugar de trabajo de los sujetos investigados.

La metodología implicó un análisis ontológico-semiótico para determinar los significados personales e institucionales y su compleja dinámica de interrelaciones y un estudio teórico para elaborar el sistema de nociones teóricas sobre la naturaleza y el papel que juega el conflicto semiótico.

La unidad de análisis se determinó tomando como grupo de interés los estudiantes de Administración Comercial y Contaduría Pública de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. Como Subgrupo de agentes interpretantes fueron elegidos treinta estudiantes de “Matemática II”. Así el contexto de estudio quedó delimitado en el Departamento de Matemática AC-CP FaCES-UC durante el primer semestre del 2008 (Abril/2008 a Agosto/2008).

Por su parte los instrumentos de selección de significados fueron: a) Un cuestionario destinado a detectar los significados en forma escrita (práctica operativa), b) Una entrevista individual semiestructurada dirigida a detectar los significados personales en forma verbal (práctica discursiva o comunicativa) y c) Las redes semánticas (Álvarez y Jurgenson, 2003) en donde los alumnos definen el objeto matemático seleccionado con diez palabras o frases sueltas y luego jerarquizan estas palabras según su importancia.

Las técnicas de presentación de la información incluyeron cuadros esquemáticos, gráficos radiales, gráficos de líneas (para la modelización de los estados), bucles recursivos y árboles de bifurcación.

7.- Justificación de la Investigación

En este apartado se plantea la importancia y justificación de la investigación considerando fundamentalmente su relevancia, en el sentido de producir una reflexión compleja sobre la brecha existente entre los contenidos formalmente introducidos y los conocimientos efectivamente construidos por los alumnos en el seno de los sistemas didácticos en matemática, especialmente en el subsistema de educación superior; aspecto que contribuirá a la develación del conflicto semiótico de tipo cognitivo como un elemento crucial en la cronogénesis de los significados personales matemáticos. De igual manera, se introduce la importancia y justificación del estudio a partir de diversas dimensiones, como lo son: (a) Desde una perspectiva epistemológica al remitirse al análisis de los significados personales e institucionales en el espacio matemático; (b) El enriquecimiento de la disciplina donde se ubica la investigación: la educación matemática, ya que los conflictos semióticos pueden explicar las dificultades potenciales de los alumnos en el proceso de estudio, así como identificar las limitaciones de las competencias y comprensiones matemáticas puestas en juego evitando discontinuidades en el proceso instruccional y finalmente (c) Como una vía metodológica al incorporar para la comprensión de los problemas en la educación matemática la perspectiva del análisis ontológico-semiótico como técnica para determinar significados institucionales y personales y su compleja dinámica de interrelaciones.

La semiótica, la ciencia de los signos, tiene tres grandes ramas: la sintaxis (las relaciones formales entre los signos), la semántica (las relaciones entre el signo y el objeto referido) y la pragmática (el estudio del sentido que se da al discurso en función del contexto en el que se enuncia). Si el docente presenta un objeto matemático y no explica claramente las reglas formales de operación, el conocimiento ofrecido será incompleto, el alumno tenderá a memorizar fórmulas, identidades y procedimientos sin una genuina comprensión de los mismos con el agravante de que en la matemática son fundamentales los conocimientos previos para comprender otros contenidos. En segundo lugar está la semántica. Es indispensable enseñar a los alumnos a comprender e interpretar los objetos matemáticos para que estén en capacidad de construir argumentos lógicamente coherentes, usando la terminología adecuada y las reglas comunes manejadas dentro de la convección matemática, porque muchos estudiantes prefieren aplicar linealmente un algoritmo prefijado, único y simple que les proporcione de un modo mecánico la respuesta que emplear un razonamiento que implique un esfuerzo mental. Y finalmente la pragmática, que es la aplicabilidad en la vida cotidiana y profesional. Si no se le enseña al estudiante por qué y donde va a aplicar ese conocimiento, el interés por la matemática muere. Por estas razones es perentorio indagar en profundidad y de manera sistemática las implicaciones de las tres ramas de la semiótica en la práctica matemática.

El conflicto semiótico es un elemento temático de gran interés y actualidad en diversos campos del saber principalmente en el educativo, psicológico, lingüístico y filosófico. Por esta razón esta investigación va dirigida a un amplio público: personas dedicadas a la transmisión del saber y del quehacer matemático, usuarios de la matemática, investigadores en educación matemática, semiólogos, entre otros.

Las razones expuestas en los párrafos precedentes justifican la realización de esta investigación, con la que se busca contribuir al fortalecimiento y potenciación de la educación matemática ofreciendo una explicación teórica sobre la naturaleza y el papel que juega el conflicto semiótico de tipo cognitivo en la cronogénesis de los significados personales matemáticos. El estudio descrito en este documento guarda identificación con la línea de investigación “Matemática y Epistemología” del Programa Doctoral en Educación y busca analizar el aprendizaje de la ciencia exacta en términos de procesos de construcción y negociación de los significados de los sujetos que forman parte de una organización adscrita al Subsistema de Educación Superior. Desde este punto de vista, que relega la psicología cognitiva a un papel secundario, se enfatiza la perspectiva epistemológica que concibe la matemática como una producción realizada socialmente.

Este estudio complejo sobre el conflicto semiótico tendrá su aplicabilidad en cuanto a que podrá servir como basamento teórico o punto de partida para formular como segundo momento, cualquier intervención en función de los criterios de idoneidad didáctica (Godino, 2002) que permitan mejorar la educación matemática.

8.- Aportes Pretendidos de la Investigación

Con la presente investigación se pretende:

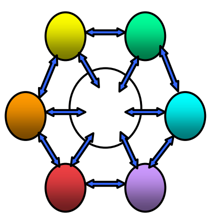
a) Contribuir en la reformulación de nociones, conceptos y categorías sobre la naturaleza y el papel que juega el conflicto semiótico en la cronogénesis de los significados personales matemáticos. Se pretende incluir a la clasificación propuesta por Godino la expresión significado personal no formal o su equivalente significado en la cotidianidad.

b) Incorporar el estudio de las redes semánticas al análisis ontológico-semiótico de la cognición matemática. Se pretende dar una visión dinámica, de tal manera de saber por qué se produce el conflicto semiótico y analizar como cambia o evoluciona en el tiempo.

c) Contribuir a develar el conflicto semiótico de tipo cognitivo implicado en la comprensión de los objetos matemáticos desde una perspectiva compleja de tal manera de evitar las lagunas, vacíos de significación o disparidad de interpretaciones que requieran procesos de negociación o clarificación de significados y por ende cambios en el proceso de enseñanza.

d) Enfatizar en el proceso de negociación de significados (basado en los conflictos semióticos y sus mecanismos de resolución) como eje-vector de la educación matemática.

e) Apuntar hacia la necesidad de la conformación de una línea de investigación en FaCES-UC sobre la dinámica de los significados matemáticos empleando el EOS, ya que este enfoque de corte pragmático, semiótico y antropológico permite explicar muchos de los fenómenos en el aula durante los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación de la matemática.



CAPITULO II
MARCO TEÓRICO REFERENCIAL

El futuro se llama incertidumbre.
Edgar Morin

Lo simple y lo complejo son reflejo el uno del otro.
Marilyn Ferguson

Para mantenerse viable, un sistema abierto necesita hallarse en un constante estado de desequilibrio.
Ilya Prigogine

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO REFERENCIAL

1.- Introducción

Los modelos teóricos junto con los instrumentos metodológicos constituyen la base de cualquier disciplina científica. En esta investigación se adoptarán dos enfoques teóricos [el enfoque ontosemiótico de la instrucción y la cognición matemática propuesto por Godino y colaboradores (Godino y Batanero (1994), Godino y Arrieche (2001), Godino (2002), Godino, Batanero y Font (2006)) y el pensamiento complejo de Morin (1990, 1999b, 2000)] porque se considera que el planteamiento de Godino y Batanero, aunque posee los constructos necesarios para precisar los significados y la comprensión desarrollada por los estudiantes no profundiza en la semiogénesis (la dinámica de los significados personales de los objetos matemáticos). El pensamiento complejo aportará los elementos necesarios para facilitar esta investigación, con lo que se aspira dar una explicación más detallada del tema objeto de estudio. Por lo tanto en la estructuración del capítulo se han incluido los siguientes aspectos: (a) Una descripción de los constructos más importantes del EOS como lo son: el objeto matemático, la función semiótica, las dualidades cognitivas, las trayectorias didácticas y los criterios de idoneidad, (b) Una breve descripción de la teoría de las representaciones semióticas de Duval (1995) donde se profundiza en las tres actividades cognitivas de la semiosis (formación, tratamiento y conversión de los sistemas de representación), (c) Una aproximación a la complejidad, donde se indica su significado, la diferenciación entre complejidad estructural y funcional como preámbulo para abordar el pensamiento complejo de Morin (1999c) con sus siete principios: sistémico, holográmico, de realimentación, recursivo, de autonomía/dependencia, dialógico y de omnijetividad, (d) Se profundiza en el constructo noosfera matemática como el ámbito de la simbolización de los agentes interpretantes, (e) Se señalan las diferentes características del discurso moriniano que lo hacen tan rico en expresiones, macroconceptos, metáforas e imágenes, (f) Y finalmente se presentan los antecedentes del conflicto semiótico: La teoría de las situaciones didácticas propuesta por Brousseau (1983) y el análisis sobre los errores cometidos por los estudiantes durante la actividad matemática, estudio realizado por Radatz (1980).

Si se busca superar los enfoques reduccionistas y fragmentarios sobre las dificultades específicas que presentan los estudiantes en la comprensión de ciertos objetos matemáticos, resulta imprescindible abordar y caracterizar el sistema global

Significado → Conflicto → Negociación

interpretado en un sentido más profundo y explicativo y que tome en consideración las múltiples relaciones y concatenaciones contextuales, especialmente en correspondencia con las situaciones de la cotidianidad. En lo que sigue se precisaran los fundamentos teóricos de esta Tesis Doctoral.

2.- El Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición Matemática

Este apartado tiene como objetivo presentar una síntesis de los supuestos y nociones teóricas, de naturaleza pragmática (operacional o contextual) que configuran el EOS propuesto en diferentes trabajos por Godino y colaboradores (Godino y Batanero (1994), Godino, Batanero y Font (2006)) como producto de la articulación de diversos modelos teóricos (realizados en el área francófona) existentes en la didáctica de la matemática entre los cuales se pueden nombrar: (1) Teoría de las Situaciones Didácticas [TSD] (Brousseau, 1983), (2) Teoría de los campos conceptuales [TCC] (Vergnaud, 1990) y (3) Teoría antropológica de lo didáctico [TAD] (Chevallard, 1991). En el EOS se consideran seis dimensiones o facetas interdependientes, cada una de las cuales se puede modelizar mediante procesos estocásticos, con sus respectivos estados y trayectorias muestrales. Tales dimensiones son las siguientes: epistémica (relativa al conocimiento institucional), docente (funciones del profesor), discente (funciones del estudiante), mediacional (relativa al uso de los recursos instruccionales), cognitiva (cronogénesis de los significados personales de los estudiantes), emocional (afectos, valores, sentimientos) implicados en el estudio de un contenido matemático y ecológica (adaptación curricular, socio-profesional y conexiones intra e interdisciplinares).

Godino, Batanero y Font (2006) sostienen que el aprendizaje matemático es el resultado de los patrones de interacción entre los distintos componentes de las trayectorias muestrales. Gran parte de la dificultad de las propuestas de corte filosófico proviene de la necesidad de mantener a la vista relaciones complejas entre conceptos muy abstractos y no olvidar por ello las relaciones con los pensamientos más cotidianos, los que constituyen la base empírica de la disciplina. En el EOS ciertos constructos teóricos como objeto matemático, función semiótica, dualidades cognitivas (atributos contextuales), trayectorias didácticas (proyecto didáctico) y criterios de idoneidad didáctica constituyen elementos claves para la comprensión del discurso. Una explicación detallada del significado de cada una de estas expresiones es lo que se intentará seguidamente.

2.1.- La Metáfora del Objeto Matemático como Herramienta para Estructurar el Cuerpo de Conocimientos Matemáticos

En la terminología del EOS se señala que un objeto matemático es "todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o al cual puede hacerse referencia, cuando una persona hace, comunica o aprende matemática" Godino (2002, p.85). En este sentido, un objeto matemático es una entidad emergente en un sistema de prácticas realizada en un campo de problemas específico. Por su parte, Bishop (1999) sostiene que el significado de un objeto matemático se logra estableciendo conexiones entre la idea matemática concreta que se discute y el restante conocimiento personal del individuo. Para este autor una nueva idea es significativa en la medida en que el individuo la pueda conectar con el conocimiento que ya tiene, adicionalmente sostiene que es un estado construido personalmente.

Como se afirma en Godino y Batanero (1994), el significado de los objetos matemáticos no puede reducirse a su simple definición matemática cuando se está interesado por los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación de los mismos. Las diversas situaciones problemáticas y las prácticas que hacen las personas para resolverlos en distintas instituciones y momentos históricos aportan rasgos característicos de las nociones que en ellas intervienen las cuales deben ser tomadas en cuenta en la enseñanza.

Para analizar los procesos de construcción y negociación de significados se considera necesario caracterizar y explicitar los distintos tipos de objetos mediante los cuales es posible describir la actividad matemática y los productos resultantes de la misma. En el trabajo previamente citado y en consonancia con la semiótica de Peirce (1965), Godino distingue seis tipos de entidades primarias:

1) Lenguaje: Son aquellas expresiones, notaciones, gráficos u otros elementos lingüísticos que representan no sólo el vehículo para acceder a las situaciones problemáticas planteadas o para la implementación de su tratamiento, sino como forma de comunicación entre los agentes interpretantes con el objetivo de generar un lenguaje común, más acorde con el de la disciplina (e.g. El símbolo ∞ se usa en lugar de la palabra infinito).
2) Situaciones-problema: Son aquellas actividades de cuyo tratamiento emergen los objetos matemáticos y motivan su estudio sistemático de acuerdo al desarrollo de la disciplina. Por ejemplo una aplicación extramatemática, un ejercicio son situaciones-problema (e.g. Calcular el área limitada por la curva $y = 1/x$, el eje “x” para todo x mayor o igual a uno).
3) Concepto: Definición del objeto matemático (e.g. Una función f se llama antiderivada o primitiva de una función G, en un intervalo I, si $G'(x)=f(x)$ para todo valor de x en I).

4) Proposición: Propiedad o atributo de un objeto. (e.g. Si la función f es integrable en el intervalo I y si k es cualquier constante entonces: $\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$)
5) Procedimiento: La aplicación de número finito de manipulaciones explícitamente descritas sin ambigüedad es lo que se denomina algoritmo, procedimiento u operación. Los ejemplos concretos de cálculo de área de una región plana no acotada limitada por curvas en coordenadas cartesianas pueden generalizarse a algoritmos de resolución de integrales impropias.
6) Argumento: Expresión que se usa para validar y explicar proposiciones (sean deductivas o no).

Estos seis tipos de objetos se pueden calificar de matemáticos porque se ponen en juego durante la actividad matemática y son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas como los sistemas conceptuales, teorías, entre otros. Estos objetos están relacionados entre sí formando "configuraciones", definidas como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Por lo tanto el modelo descrito es holográmico (en el sentido que describe Morin, 1999) de presencia del todo en cada parte. En este caso, aunque el objeto seleccionado para el estudio es un concepto (infinito matemático) se ponen en juego situaciones-problema, lenguaje, propiedades, argumentos y procedimientos relacionados.

Las anteriores consideraciones conducen a resaltar los siguientes aspectos:

1) Una persona comprende el significado de un objeto matemático si es capaz de reconocer los problemas, procedimientos, argumentaciones, propiedades, representaciones y relacionarlo con los restantes objetos matemáticos en toda la variedad de situaciones planteadas por la institución correspondiente.
2) Los significados matemáticos dependen del contexto institucional en que se usan.
3) Los significados matemáticos son procesos y por lo tanto son dinámicos y no estáticos. Los significados están sumergidos en un flujo de acontecimientos, interrelaciones en un entorno cambiante.

4) Los objetos matemáticos y sus significados no se pueden considerar aisladamente sino hay que interpretarlos integrados (en forma de red) por este motivo cuando en esta Tesis Doctoral se hable del objeto personal *infinito potencial* se está considerando un objeto cuyo significado constituye un conjunto de prácticas asociadas con un proceso reiterativo, una acción proyectada en lo posible pero no realizada. Esta interpretación compleja coincide con el planteamiento de Morin (1999a, 1999b, 1999c) quien concibe un sistema como un conjunto de elementos relacionados por nexos múltiples, capaz cuando interactúa con su entorno, de responder, de evolucionar, de aprender y de autoorganizarse. Todos los elementos del sistema se organizan en torno a una finalidad.

Con el término *práctica matemática* se designa toda actuación o expresión (verbal, numérica, gráfica, geométrica, analítica y algebraica) realizada por una persona para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. Godino, Batanero y Font (2006, p. 5). En el EOS la práctica ocupa un lugar privilegiado mientras que el objeto matemático ocupa una posición derivada de esa práctica (Ramos, 2005). Las praxeologías matemáticas pueden ser operativas, discursivas y regulativas. Las prácticas en las que prima el componente operatorio o actuativo permiten realizar acciones y argumentaciones cuya finalidad es la resolución de situaciones problema (o tareas). Las prácticas discursivas o comunicativas están relacionadas con el dominio y la creación del lenguaje así como en su uso para la realización de argumentaciones que permitan dar una justificación de la validez de las acciones realizadas. En matemática, las argumentaciones siempre llevan un componente que va regulando todo el proceso. Es decir, el discurso matemático tiene que basarse en conceptos básicos y en premisas válidas. Finalmente las prácticas regulativas o formativas están orientadas básicamente a conseguir establecer propiedades o proposiciones y definiciones de objetos matemáticos.

Godino (2002) plantea que los significados personales indicaran los aprendizajes logrados, así como las respuestas erróneas, juzgadas desde el punto de vista institucional son indicativas de las dificultades y conflictos cognitivos de los sujetos en el estudio de un contenido matemático. Adicionalmente indican que el significado personal es global cuando corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar de forma potencial el sujeto relativo a un objeto matemático. El significado personal es declarado cuando da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación. Y finalmente hablan de un significado personal logrado que corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. Esto significa que conceptualmente hay tres tipos de significados personales pero en los procesos reales están mezclados e interactuando constantemente entre si, producto de la formación previa de cada individuo, de las expectativas y los valores adquiridos, las actitudes, las creencias, las necesidades, los intereses, los miedos y los ideales que se hayan asimilado.

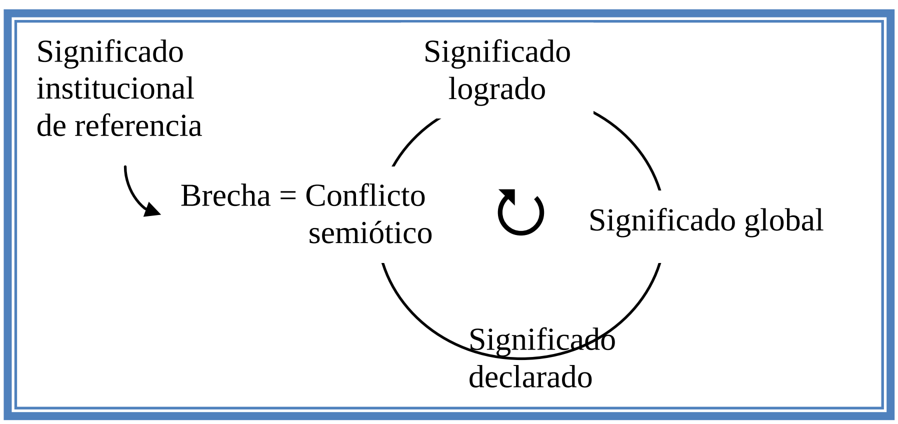


Figura 1. Los significados personales (faceta cognitiva) interpretados como un lazo de realimentación
Fuente: Elaboración propia

Con la figura anterior se pretende ilustrar que los significados personales se pueden interpretar como un lazo de realimentación y que la brecha existente entre el significado logrado por el estudiante y el significado institucional de referencia es lo que se ha denominado en este documento conflicto semiótico. Otro aspecto que permite aclarar la figura es que en un bucle recursivo no se regresa al punto de partida sino que se produce un valor agregado al conocimiento.

Los significados y los objetos personales son fenómenos individuales, pero al estar inmerso el ser humano en instituciones donde necesariamente se dan interacciones, tienen también un carácter colectivo, por lo tanto Godino, Batanero y Font (2006) proponen adicionalmente una tipología básica de significados institucionales: (1) Significados institucionales referenciales, un sistema de prácticas históricas, epistemológicas y didácticas que son aceptadas por la comunidad matemática en general, las cuales aparecen detalladas en libros de texto, en las plataformas de ayuda al estudio, en los materiales didácticos elaborados por los profesores en forma ostensiva y en otros elementos portadores de significado, (2) Significados institucionales pretendidos incluidos en la planificación del proceso de estudio (programa general de la asignatura, cronograma de actividades, entre otros), (3) Significados institucionales implementados, interpretados como el sistema de prácticas que efectivamente tienen lugar en la clase de matemática, las cuales servirán de referencia inmediata para el estudio de los alumnos y que están afectadas por variables aleatorias (el tiempo disponible, los conocimientos previos de los estudiantes, disturbios, paros, entre otros) y finalmente (4) Significados institucionales evaluados, donde el docente selecciona una muestra representativa de los significados implementados y construye una colección de tareas o cuestiones en las pruebas de evaluación, esto con la finalidad de confrontar el significado que trata de transmitir con el efectivamente adquirido. De esta clasificación se deduce que los objetos personales y sus significados se encarnan en los estudiantes y los institucionales se encarnan en los profesores.

Y dado que un objeto matemático solo tiene sentido cuando es captado bajo una cierta relación, con una cierta función, si significa algo dentro de una determinada estructura, en lo que sigue se explicará el significado de función semiótica.

2.2.- Función Semiótica: Las Relaciones entre los Objetos Matemáticos

La revisión del diccionario de la Real Academia de la lengua Española (1992, p.1469) lleva al conocimiento de que la palabra semiótica tiene sus raíces en el griego *semeiotiké*, que se traduce como sobreentendido, definiendo la semiótica como la ciencia del uso y significado de los signos. Para Eco (1991) la semiótica se ocupa de cualquier cosa que pueda considerarse como signo. La aparición de la semiótica como disciplina se debe fundamentalmente a los trabajos de Peirce (1965) quien presenta esta disciplina como una ciencia, cuyo objetivo central es proporcionar los fundamentos de cualquier otra ciencia particular que trate de los signos. Esta definición no permite establecer una línea divisoria precisa entre la semiótica y otras disciplinas con las que, o bien parece poder asociarse intuitivamente, o con las que tiene en común el objeto de estudio. Este es el caso de disciplinas como la lingüística, la lógica, la matemática, la estética o la antropología –todas las cuales se ocupan en un sentido en otro del fenómeno general de los signos.

Las redes semióticas se ocupan de los denominados procesos semióticos. Un proceso semiótico es un proceso en el que existe "una acción o influencia que es, o conlleva, una operación de tres factores: un signo, su objeto y su intérprete" Peirce (1965). Dependiendo de qué factor se aísle para su estudio, la semiótica se puede dividir, de acuerdo con Peirce, en tres ramas básicas: gramática pura (el estudio del signo), lógico (el estudio del objeto del signo) y retórica (el estudio del intérprete del signo). Pero lo que caracteriza a la semiótica como tal y la hace diferente de otras disciplinas es que la interdependencia entre los tres factores es absolutamente esencial a la hora de individualizar los fenómenos que pertenecen a su dominio.

Eco (1991) señala que existen límites o umbrales para la semiótica y los clasifica en límites políticos, límites naturales y límites epistemológicos. Los límites políticos son de tres tipos:

1) Límites académicos: En el sentido de que otras disciplinas han desarrollado investigaciones sobre temas que el semiólogo no puede dejar de reconocer como

propios: la lógica formal, la lógica de los lenguajes naturales, la semántica filosófica, entre otras.

2) Límites cooperativos: En el sentido de que varias disciplinas han elaborado teorías o descripciones que se reconocen como típicamente semióticas: la lingüística, la teoría de la información, entre otros.
3) Límites empíricos: Más allá de los cuales se encuentran grupos de fenómenos todavía no analizados: formas arquitectónicas, artísticas, entre otros.

Los límites naturales son aquellos que la investigación semiótica no puede traspasar, porque se entraría en un terreno no semiótico en el que aparecen fenómenos que no pueden entenderse como funciones semióticas y los límites epistemológicos no dependen de la definición semiótica, sino de la definición de la propia disciplina en función de la pureza teórica.

Para Eco (1979) la función semiótica se puede concebir metafóricamente como una correspondencia entre conjuntos en donde se pone en juego tres componentes:

- ✓ Un plano de expresión – objeto inicial (el signo).
- ✓ Un plano de contenido – objeto final (el significado).
- ✓ Un criterio o regla de correspondencia (un código interpretativo que regula la correlación entre los planos de expresión y contenido).

Las relaciones de dependencia entre expresión y contenido pueden ser de tipo representacional (un objeto se pone en lugar de otro para un cierto propósito), instrumental u operatoria (un objeto usa a otro u otros como instrumento) y estructural (dos o más objetos componen un sistema del que emergen nuevos objetos. Por lo tanto las funciones semióticas son un instrumento relacional que facilita el estudio conjunto de las representaciones ostensiva (dominio de lo público) y de las mentales (dominio de lo privado) activadas en las prácticas matemáticas. Con frecuencia las funciones semióticas vienen dadas por uno de sus tres componentes, quedando los otros dos implícitamente establecidos. Hablar de significado supone que hay además una expresión y un código interpretativo. El signo, por tanto, no supone una simple correspondencia entre expresión y contenido; de un algo que está en lugar de otro algo, sino que alguien debe hacer una posible interpretación. Cuando la interpretación que hace un alumno no está de acuerdo con lo esperado desde la institución de enseñanza, se produce un conflicto semiótico que explica muchas de las dificultades y errores observados en el aprendizaje. En lo que sigue se presentará una clasificación de las dependencias o funciones semióticas y sus descriptores respectivos:

Tipología de las Funciones Semióticas

1) Según el plano de contenido

a) Lingüístico: Término, expresión en sus diversos registros semióticos.
b) Situacional: Aplicación, ejercicio, situación-problema.
c) Conceptual: Concepto, definición.
d) Proposicional: Propiedad, atributo.
e) Actuativo o procidemental: Algoritmo, procedimiento, técnica de cálculo, estrategia.
f) Argumentativo: Argumento, justificación, razonamiento.

2) Según la naturaleza del contenido

a) Ostensivo o perceptible: Representaciones materiales usadas en el proceso de negociación de significados (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficas, notaciones).
b) Extensivo o general: Las entidades fenomenológicas que inducen actividades matemáticas (Situaciones-problema, tareas, aplicaciones).
c) Actuativo: Modos de actuar ante situaciones o tareas (Operaciones, algoritmos, procedimientos, técnicas, estrategias)
d) Intensivo o particular: Representaciones matemáticas. abstracciones, generalizaciones (Definiciones, proposiciones, identidades).

e) Validativo: Tipos de argumentaciones para validar proposiciones (demostraciones, comprobaciones, justificaciones).

3) Según el agente que interpreta el objeto

a) Personal o cognitivo: La correspondencia expresión-contenido la hace una persona individualmente
b) Institucional o epistémico: La correspondencia expresión-contenido es compartida en el seno de una institución

4) Según el papel desempeñado por el objeto

Cuando se genera una representación con carácter semiótico, esta operación puede conceder significación diferente para una enunciación produciéndose lo que puede llamarse diversidad de las formas, en las cuales la representación connota doble función: la de comunicación (*representacional*) y la de transformación de la información (*instrumental*). Ambas contribuyen a constituir la toma de conciencia ante la representación no ostensiva y lo que se intenta evidenciar en el plano de contenido.

5) Según el grado de complejidad del objeto

a) Elemental: El contenido de la función semiótica es un objeto preciso, determinable sin ambigüedad en las circunstancias espacio-temporales fijadas.
b) Sistémico: El contenido de la función semiótica es un sistema de prácticas. Es una entidad compuesta y organizada, tiene un carácter teórico y trata de explicar la complejidad de los objetos matemáticos, pero no puede ser descrito en su totalidad.

6) Factores contextuales

Diversas circunstancias que condicionan y determinan los procesos de comunicación e interpretación

a) Temporales: Ocasional o atemporal
b) Fenomenológico: Interno (matemático) o externo

La clasificación de las funciones semióticas de acuerdo al esquema anterior permite combinar varios criterios. Por ejemplo, un significado institucional de referencia (interpretación del agente) puede ser sistémico (grado de complejidad) y de naturaleza actuativo. Una reflexión acerca de estos tipos de clasificación, es que pueden usarse indistintamente, facilitando el análisis para aquellos investigadores que desde diferentes criterios intenten tipificar las funciones semióticas. En algunos casos se complementan y otros son alternativos, dependiendo del caso.

2.3.- Dualidades Cognitivas

Los objetos matemáticos que intervienen en las prácticas matemáticas, según las circunstancias contextuales y del juego del lenguaje en que participen, pueden ser considerados desde las siguientes facetas o dimensiones duales: personal/institucional, elemental/sistémico, ostensivo/no ostensivo, ejemplar/tipo y expresión/contenido. Las dualidades cognitivas no son elementos antagónicos, como parece sino que, a pesar de las apariencias, están íntimamente concatenados. El EOS se abre ante un tipo de totalización que no rechaza las diferencias. A continuación se describen someramente dichas dimensiones:

1) *Dualidad personal/institucional*: Si los sistemas de prácticas son compartidas en el seno de una institución, por ejemplo documentos curriculares, libros de texto, explicaciones de un profesor ante su clase, los objetos emergentes se consideran objetos institucionales mientras que si estos sistemas son específicos de una persona se consideran objetos personales.

2) *Dualidad elemental/sistémico*: En algunas circunstancias los objetos matemáticos participan como entidades unitarias (que se suponen son conocidas previamente), mientras que otras intervienen como sistemas que se deben descomponer para su estudio. Por ejemplo en la semiosis del objeto unitario “integral” está contenido el objeto “derivada” y toda aquella propiedad que permita encontrar la primitiva

elemental correspondiente (productos notables, identidades trigonométricas, entre otros.). También puede ocurrir que una integral se intente resolver inicialmente mediante un cambio de variable z^n, luego se aplique el método de integración por partes y finalmente se realice una división de polinomios. Todos estos artificios matemáticos pueden combinarse para encontrar la antiderivada solicitada.

3) *Dualidad ostensivo/no ostensivo*: Se entiende por ostensivo cualquier objeto que es público y que por lo tanto se puede mostrar a otra persona, por ejemplo la integral de la función x^3 que el profesor escribe en la pizarra y el alumno ve directamente. Los objetos institucionales y personales tienen una naturaleza no-ostensiva (no perceptibles por sí mismos). Ahora bien, cualquiera de estos objetos se usa en las prácticas públicas por medio de sus ostensivos asociados (notaciones, símbolos, gráficos, entre otros). Una definición ostensiva es la explicación del significado de una expresión a través de la demostración. En las explicaciones no ostensivas se correlacionan en realidad los signos con sus significados mediante el uso de otros signos, cuyos significados habrían de ser descritos a su vez. Las definiciones no ostensivas son circulares porque las mismas razones que existían para requerir una explicación de los signos cuyos significados se pretende explicar mediante ellas existen también para requerir una explicación de los signos que se usan en la explicación.

4) *Dualidad ejemplar/tipo* (intensivo/extensivo): Es la dialéctica entre lo particular y lo general. Los ejemplares tienen todas las características de los casos paradigmáticos de particulares, son concretos y están espaciotemporalmente ubicados. Los tipos por su parte, tienen todas las características de los universales, se identifican por rasgos o características generales que se pueden hallar, en el mismo momento de tiempo, ejemplificados en distintos lugares.

5) *Dualidad expresión/contenido*: La actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser

esencialmente relacionales. Los distintos objetos descritos, con diversas notaciones según su naturaleza y función no se pueden concebir como entidades aisladas, sino puestos en relación unos con otros.

La aportación del EOS a la educación matemática es básicamente de carácter teórico ya que su principal objetivo ha sido presentar una nueva manera de analizar los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación de la matemática empleando nuevas herramientas epistemológicas. Una de esas herramientas es la función semiótica concebida como la dependencia entre el texto y sus componentes y entre estos componentes entre si. Se trata de las correspondencias (relaciones de dependencia o función) entre un antecedente (expresión, significante) y un consecuente (contenido o significado), establecidas por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

2.4.- Trayectoria Didáctica (Proyecto Didáctico)

Godino, Batanero y Font (2006) modelizan la enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático como un proceso estocástico multidimensional compuesto de seis subprocesos (epistémico, docente, discente, mediacional, cognitivo y emocional), con sus respectivas trayectorias y estados potenciales. En cada contexto se define una trayectoria muestral como la secuencia particular de funciones o componentes en la enseñanza de un contenido matemático que ha tenido lugar a lo largo del tiempo y donde se propone la siguiente clasificación:

1) *Trayectoria epistémica*: Es la distribución a lo largo del tiempo de la enseñanza de los componentes del significado institucional implementado. El EOS distingue seis estados posibles, según el tipo de entidad que se estudia en cada momento:

E1: Situacional (situaciones): se enuncia un ejemplar de un cierto tipo de problemas.

E2: Actuativo (acciones): se aborda el desarrollo o estudio de una manera de resolver los problemas.

E3: Lingüístico (lenguaje): se introducen notaciones, representaciones gráficas, entre otros.
E4: Conceptual (conceptos): se formulan o interpretan definiciones de los objetos que entran en juego.
E5: Proposicional (proposiciones): se enuncian e interpretan propiedades de un objeto matemático.
E6: Argumentativo (argumentos): se justifican las acciones adoptadas o las propiedades enunciadas.

La enseñanza de cualquier contenido matemático, no es un hecho que tenga lugar una sola vez, sino que se repite numerosas veces en circunstancias similares (el mismo profesor repite el contenido en diferentes secciones o en semestres sucesivos). En estas repeticiones habrá ciertas regularidades, pero también variaciones imprevisibles. Cada proceso de instrucción implementado con ocasión de la impartición del curso en cuestión dará lugar a una trayectoria epistémica que puede representarse en un diagrama cartesiano "configuración epistémica vs. tiempo". Si se observan "n" clases se puede representar sobre el mismo diagrama cartesiano "n" trayectorias epistémicas y se estará en condición de asignar probabilidades de ocurrencia de cada estado, probabilidades de paso de un estado a otro, así como plantear frecuencias de ocurrencias de sucesos y frecuencias sobre los tiempos de permanencia en cada estado (estadística de tiempo).

2) *Trayectoria docente*: distribución de las funciones/tareas/acciones docentes a lo largo del proceso de instrucción.
P1: Planificación: diseño del proceso, selección de los contenidos y significados a estudiar (construcción del significado pretendido y de la trayectoria epistémica prevista).
P2: Motivación: creación de un clima de afectividad, respeto y estímulo para el trabajo individual y cooperativo, a fin de que se implique en el proceso de instrucción.

P3: Asignación de tareas: dirección y control del proceso de estudio, asignación de tiempos, adaptación de tareas, orientación y estímulo de las funciones del estudiante.

P4: Regulación: fijación de reglas (definiciones, enunciados, justificaciones, resolución de problemas, ejemplificaciones), recuerdo e interpretación de conocimientos previos necesarios para la progresión del estudio, readaptación de la planificación prevista.

P5: Evaluación: observación y valoración del estado del aprendizaje logrado en momentos críticos y resolución de las dificultades individuales.

P6: Investigación: reflexión y análisis del desarrollo del proceso para introducir cambios en futuras implementaciones del mismo, así como la articulación entre los distintos momentos y partes del proceso de estudio.

3) *Trayectorias discentes*: distribución de las funciones/acciones desempeñadas por los estudiantes (una para cada estudiante)

A1: Aceptación del compromiso educativo, adopción de una actitud positiva al estudio y de cooperación con los compañeros.

A2: Exploración, indagación, búsqueda de conjeturas y modos de responder a las cuestiones planteadas.

A3: Recuerdo, interpretación y seguimiento de reglas (conceptos y proposiciones) y del significado de los elementos lingüísticos en cada situación.

A4: Formulación/comunicación de soluciones a las situaciones o tareas propuestas, ya sea al profesor, a toda la clase o en el seno de un grupo.

A5: Argumentación y justificación de conjeturas (al profesor o los compañeros).

A6: Recepción de información sobre modos de hacer, describir, nombrar, validar.

A7: Demanda de información: estados en los que los alumnos piden información al profesor o a otros compañeros (e.g. cuando no entienden el significado del lenguaje utilizado o no recuerdan conocimientos previos necesarios).

A8: Ejercitación: Realización de tareas rutinarias para dominar las técnicas específicas.

A9: Evaluación: Estados en los cuales el alumno realiza pruebas de evaluación propuestas por el profesor, o de autoevaluación.

4) *Trayectoria mediacional*: representa la distribución de los recursos tecnológicos utilizados (libros, apuntes, materiales elaborados por los profesores en forma ostensiva, software, etc.)

5) *Trayectorias cognitivas*: cronogénesis de los significados personales de los estudiantes.

6) *Trayectorias emocionales*: distribución temporal de los estados emocionales (interés, compromiso personal, afectos, sentimientos de autoestima, aversión, entre otros) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

7) *Trayectorias ecológicas*: distribución de las actividades tomando en consideración la institución, la sociedad y todos los demás condicionantes del entorno.

Cada una de estas trayectorias implica la realización de un proceso estocástico, puesto que el proceso de instrucción tiene características no deterministas. Incluso aunque la planificación haya sido cuidadosa, siempre hay elementos aleatorios que producen cambios en cada una de las trayectorias muestrales. Por tal motivo es necesario identificar y caracterizar los estados del sistema y las trayectorias o secuencias de estados de cada una de las facetas.

Godino y Batanero (1994), entre los diversos trabajos que dedican a la enseñanza de la matemática, proponen una agenda de investigación que se puede describir en términos de tres tipos diferentes de problemáticas, atendiendo a la finalidad del estudio ontosemiótico tal como se detalla en la siguiente síntesis esquemática:

Vertientes del enfoque ontosemiótico.

1) **Semiometría** (Caracterización): Es la determinación de los significados sistémicos (institucionales y personales).
2) **Ecología** (Interacción): Es el estudio de las condiciones de soporte de un objeto, su dependencia de otros objetos y el papel que desempeña en relación a los restantes objetos del sistema.
3) **Dinámica** (Evolución): Es el análisis del cambio o fluctuaciones representativas de los distintos elementos estructurales del significado de un objeto en el transcurso del tiempo.

En esta reflexión teórica se realizará un estudio de tipo dinámico. Como los sistemas dinámicos no lineales complejos se trabajan con mayor facilidad utilizando los recursos de la epistemología de la complejidad en esta investigación se procesará la información empleando bucles recursivos, gráficos radiales, gráficos de líneas (para la modelización de los estados), cuadros esquemáticos y árboles de bifurcación.

2.5.- Criterios de Idoneidad Didáctica: La Minimización de los Conflictos Semióticos

La expresión “criterio de idoneidad” es una herramienta teórica fundamental del EOS, entendida como la articulación coherente y sistemática de todos los procesos implicados en la enseñanza, aprendizaje y evaluación de la matemática. Comprender la complejidad de los criterios de idoneidad/adecuación no implica reducir lo complejo a lo simple. Godino (2002) señala que la idoneidad global de un proceso de instrucción (planificado o bien efectivamente implementado) se debe valorar teniendo en cuenta los seis criterios de idoneidad siguientes:

1) *Idoneidad epistémica (representatividad)*: Describe el grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia. (e.g. la enseñanza del cálculo del área de una región plana no acotada puede limitarse al aprendizaje de un procedimiento o aplicación

de algoritmos (baja idoneidad) o tener en cuenta los diferentes tipos de integrales impropias y las situaciones contraintuitivas que se pueden presentar (alta idoneidad)).

2) *Idoneidad cognitiva (proximidad)*: Expresa el grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados. En la idoneidad cognitiva se pone en juego los procesos psicológicos superiores como los sistemas de conocimiento a los que recurre el sujeto para representar la realidad en su memoria. Un proceso de enseñanza y aprendizaje con un alto grado de idoneidad cognitiva seria, en el estudio ya mencionado del cálculo de áreas de regiones planas no acotadas, que el profesor realizara una evaluación diagnóstica para saber si la mayoría de los estudiantes saben evaluar límites, conocen las formas indeterminadas relacionadas con infinito y en caso de no ser así, comenzar el proceso de instrucción aclarando dudas al respecto.

3) *Idoneidad mediacional (disponibilidad)*: Se refiere al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje (retroproyectores, video beam, laboratorios de computación, material didáctico, rotafolios, calculadoras graficadoras). En la educación matemática emergente se trabaja con campos virtuales, simbólicos, a partir de escenarios simulados, en perspectivas que no son el fiel reflejo de la naturaleza sino que la abstraen. Las coordenadas espaciotemporales son modificadas por las tecnologías emergentes: muchos programas de cálculo simbólico, v gr. Derive ™ , Mathgraph, Maple, son recursos de alta potencialidad para resolver problemas ya que el software permite identificar relaciones, formular modelos matemáticos y comprobar resultados. La adecuación del material didáctico permite descubrir hasta que punto ese material es capaz de ayudar a construir en el alumno el sentido (o significado parcial) para su propio desenvolvimiento. (e.g. si el profesor dispone de una página web donde

coloca información relativa al estudio del contenido temático planificado, el proceso instruccional que se apoya en este recurso tiene potencialmente mayor idoneidad que otro que se base exclusivamente en una clase magistral empleando marcadores de colores y pizarra acrílica).

4) *Idoneidad emocional (implicación)*: Describe el grado de implicación (interés y motivación) de los estudiantes en el proceso de estudio. La idoneidad emocional está relacionada tanto con factores que depende de la institución como de factores que dependen básicamente del alumnado y de su historia escolar previa (e.g. tendría idoneidad emocional alta el proceso basado en el uso de situaciones problemas que sean de interés para los estudiantes).

5) *Idoneidad interaccional (negociación)*: Expresa el grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver los conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje. El encuentro del profesor con el alumno, la comunicación real, la comprensión mutua, de modo que fluya eficazmente el sentido de las palabras y de las actitudes entre ambos (e.g. en las clases de preparaduría al disminuir el número de alumnos asistentes se logra una alta idoneidad interaccional ya que son los estudiantes los que plantean los ejercicios y se toman en cuenta las dificultades durante el proceso).

6) *Idoneidad ecológica (adaptación)*: Se refiere al grado de adaptación curricular, socio-profesional y conexiones intra e interdisciplinares. El objetivo es reconocer en la idoneidad educativa la realidad, con todas sus conexiones y sobre todo con las conexiones humanas y sociales. La educación matemática ecologizada implica que en lugar de aislar el proceso educativo se considere la relación eco-organizadora con el entorno. (e.g. tendría idoneidad ecológica alta el proceso basado en el uso de situaciones problema relacionados con otras áreas del saber: economía, contabilidad, estadística, cálculo financiero, entre otras).

Godino (2002) introdujo los criterios de idoneidad en el EOS con el propósito de describir, analizar y explicar fenómenos específicos relacionados a los procesos de instrucción matemática. Este aspecto tiene concordancia con lo expresado con Wittgenstein (citado por Martínez, 2002a) cuando, utilizando la metáfora del engranaje, considera que la legitimidad o justificación de un juego de lenguaje se basa en su integración con actividades vitales. Un juego de lenguaje es como un sistema oculto de ruedas dentadas, si las ruedas engranan unas con otras y con la realidad, el lenguaje está justificado; pero aunque engranen unas con otras, si no engranan con la realidad, el lenguaje carece de base.

3.- Teoría de las Representaciones Semióticas

En esta investigación, cuya pretensión es el acercamiento comprensivo del conflicto semiótico como punto crítico en la cronogénesis de los significados personales matemáticos, se hace necesaria la ubicación de la plataforma de la teoría de las representaciones semióticas (TRS) para explicar las dificultades que presentan los alumnos en la conversión entre los distintos registros semióticos. Lo que se presenta a continuación es una síntesis de los aspectos de esta teoría que, para esta investigación, se consideran más relevantes. No se pretende considerar todos los significados que hay detrás de las nociones que conforman la TRS, sino describir el marco conceptual que da lugar a algunas de las categorías de análisis que se utilizaran en el estudio ontológico-semiótico de esta indagación.

La teoría fue desarrollada por Duval (1995) quien definió las **representaciones semióticas** como producciones constituidas mediante el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación que tiene sus propias restricciones de significado y funcionamiento. Las representaciones semióticas, según él, son completamente necesarias en la actividad matemática, porque sus objetos no pueden percibirse directamente y deben, por consiguiente, ser representadas. Es más, las representaciones semióticas no sólo son un medio de externalizar las representaciones mentales para comunicar, sino que ellas también son esenciales para la actividad cognoscitiva de pensar. De hecho, ellos juegan un papel en las representaciones mentales en vías de desarrollo, logrando las funciones cognoscitivas diferentes (la objetificación, el cálculo, entre otros), así como en producir conocimiento. Duval enfatizó la distinción entre **semiosis** (la comprensión o producción de una representación semiótica) de **noesis** (la comprensión conceptual de un objeto), mientras afirma que los dos actos no pueden separarse en los procesos cognoscitivos verdaderos.

En tal sentido y con base en la revisión de una variada documentación, Duval (1995) señala tres actividades cognitivas relacionadas con los sistemas de representación externa (semióticos): la formación de representaciones, el tratamiento de las mismas y su conversión.

a) La formación de representaciones semióticas consiste en seleccionar un conjunto de caracteres o de signos dentro de un sistema semiótico, para representar las características principales de un objeto. Esta actividad incluye la asignación de nombres, la construcción de imágenes esquemáticas de los objetos o la codificación de relaciones o propiedades pertinentes a una transformación de los mismos.
b) El tratamiento de las representaciones consiste en transformarlas en otras que están expresadas en el mismo sistema semiótico. Esta actividad se realiza en general cuando se responde a una pregunta o se resuelve una situación-problema.
c) La conversión de las representaciones consiste en la transformación de una representación en otra, que está expresada en un sistema semiótico diferente. Corresponden a esta actividad la traducción, la ilustración, la transposición, la interpretación, la codificación, entre otras. Esta última actividad requiere poner en correspondencia las unidades elementales que nutren, complementan y conforman cada una de las dos representaciones, la inicial y la final. Cuando existe correspondencia término a término la conversión inversa genera la representación inicial y la conversión suele ser automática; a esta situación se le llama congruencia de las representaciones. Cuando esto no ocurre se requiere la

reorganización de la representación inicial para generar la representación final en el registro semiótico diferente y la conversión inversa no genera la representación inicial. Este segundo caso se denomina incongruencia de las representaciones y puede ocasionar problemas en la realización de la conversión.

En la comprensión significativa de los conocimientos matemáticos están involucrados procesos de traducción entre registros así como procesos de conversión al interior de un mismo registro. De acuerdo con Duval, un proceso de traducción es más que una simple codificación-decodificación entre registros; lo cual permite detectar aquellos conocimientos en los que los alumnos solo han desarrollado un aprendizaje memorístico y aquellos en los cuales han construido redes semióticas más complejas.

En la TRS se considera que la comprensión integral de un concepto se basa en la coordinación de al menos dos registros de representación y esta coordinación se pone de manifiesto por medio del uso rápido y espontáneo de la actividad cognitiva de conversión, logrando articulaciones entre los diferentes tipos o categorías de registros de representación semiótica:

a) *Registro analítico*: Se conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra de funciones.
b) *Registro numérico*: Empleado en tablas de valores, resultados experimentales cuantitativos, guarismos. Generalmente los estudiantes emplean este registro como una herramienta intermedia entre el registro algebraico y el gráfico, es decir, solo para localizar puntos en un plano, a partir de una representación algebraica y no como una representación por sí misma.
c) *Registro gráfico*: Diagramas cartesianos, diagramas de Venn, grafos, entre otros. Se conecta con las potencialidades conceptualizadoras de la visualización.
d) *Registro algebraico*: Empleado en la aritmética generalizada (Fórmulas y ecuaciones)

e) *Registro verbal*: Es el lenguaje cotidiano, común o natural. Es la capacidad lingüística de las personas y es básica para interpretar y relacionar los demás registros. Es el más importante y el modelo para entender el resto.

f) *Registro geométrico*: Representado con figuras, pictogramas. El sistema de representación gráfico se refiere principalmente a gráficas dentro del plano cartesiano, mientras que el sistema de representación geométrico se refiere a representaciones de geometría plana o del espacio, pero sin referencia a ejes de coordenadas.

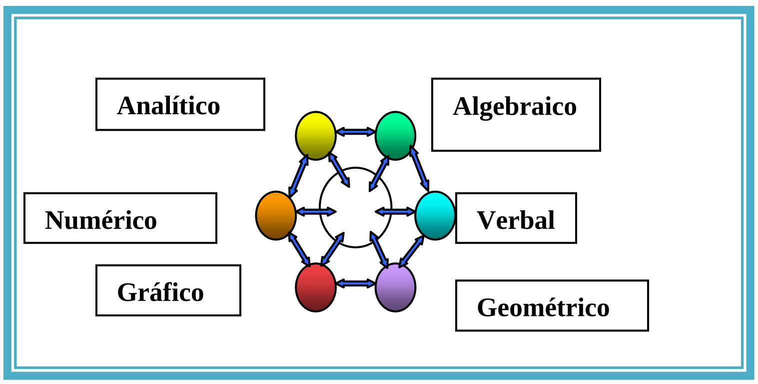


Figura 2. Visión sistémica de los registros de presentación ostensiva del lenguaje matemático. ***Fuente:*** Elaboración propia

Como puede apreciarse en la figura anterior, los elementos del sistema están en íntima conexión que retroalimenta a cada uno de los nodos. Todos conservan una relación de recíproca interdependencia. Aunque la figura muestra un cierto grado de disociación entre los puntos nodales, la realidad es que conforma un todo indisociable cuya esencia se sustenta en la realidad circular y sin la cual sería difícil comprender la elevada complejidad ontológica y semiótica de la formación progresiva de los significados de los objetos matemáticos.

Dentro de este nudo referencial, la enseñanza de la matemática implica una necesaria concepción hexagonal que permita, en cada situación problemática, la interacción entre los diversos registros de representación semiótica: verbal, numérica, gráfica, algebraica, analítica y geométrica para la obtención de la solución.

Existe congruencia cuando un estudiante puede definir en lenguaje cotidiano o natural una recta, definir formalmente una recta como el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que pasan por dos puntos fijos, asociar a cada número real un múltiplo más una constante ($x \rightarrow mx + b$), emplear la expresión algebraica $y = mx + b$, construir una tabla de valores basada en la expresión simbólica y finalmente representarla en un diagrama coordenado indicando su pendiente (m) o el cociente del incremento vertical entre el horizontal y el punto de corte con respecto al eje de las ordenadas (b).

Duval menciona que en los estudiantes no se da la conversión entendida como comercio entre dos registros, esto es, como paso de un registro semiótico a otro, sino una coordinación de dos o más registros en los que, en lugar de conversión, más bien hay una intensificación de uno o dos de ellos, quedando los demás activos, aunque funcionando con menos intensidad.

Duval (1995) insiste que la enseñanza privilegia la formación y el tratamiento de las representaciones semióticas dejando de lado a la conversión. Cuando esto ocurre o cuando la enseñanza ha privilegiado un registro semiótico frente a otros, los conocimientos aprendidos quedan limitados a dicho registro (aprendizaje mono registro). El problema de los conocimientos aprendidos de esta forma es que no pueden ser movilizados o transferidos para ser usados en otro contexto diferente a aquél en el que fueron aprendidos y que incluya además, registros semióticos diferentes. En contraposición, un aprendizaje centrado en la conversión de las representaciones y por ende en la coordinación de diferentes tipos de registros semióticos produce una comprensión efectiva e integradora, que posibilita la transferencia de los conocimientos aprendidos y genera resultados positivos en las macro-tareas de producción y comprensión como lectura, escritura y resolución de problemas.

En cuanto a la utilización y comprensión de las representaciones semióticas por parte de los estudiantes, ellos pueden tener los siguientes problemas:

- Cuando analizan varias representaciones se centran en una sola de ellas (la más familiar y concreta) y en sus características superficiales (no las relevantes conceptualmente).
- Igualmente, cuando usan diferentes representaciones tienen dificultades en su coordinación e integración y sólo realizan conexiones entre ellas cuando se enfrentan al proceso de resolución de situaciones-problemas.

Al respecto, Duval considera que la conversión entre registros presenta poca dificultad si entre ambos hay congruencia de unidades significantes. En cambio, si no se da la congruencia, simplemente no se da la conversión entre registros y entonces la coordinación habrá que buscarla en la identificación de usos de los mismos. Es decir, la complejidad cognitiva de la conversión es irreducible en el sentido de que los fenómenos de no congruencia son inherentes a la propia matemática y permiten explicar la posible carencia de coordinación entre registros de representación semiótica y por lo tanto muy importantes en la naturaleza del conocimiento matemático.

La noción de representación y registro semiótico usado por Duval hace alusión, según el EOS, a un tipo particular de función semiótica representacional entre objetos ostensivos y objetos no ostensivos mentales. La noción de función semiótica generaliza esta correspondencia a cualquier tipo de objetos y, además, contempla otro tipo de dependencia entre objetos (instrumental y componencial).

4.- Aproximación a la Complejidad

Dado que el EOS es un enfoque todavía en proceso de construcción se consideró pertinente articularlo con la perspectiva del pensamiento complejo de Morin (1990, 1999a, 2000, 2002, 2003) ya que algunos de los constructos teóricos citados necesitan ser completados desde el paradigma científico de la complejidad. Para comenzar, se considera conveniente diferenciar la simplicidad de la complejidad. Desde el punto de vista etimológico simplicidad significa *plegado una vez* mientras que la palabra complejidad es de origen latino, proviene de *complectere*, cuya raíz *plectere* significa trenzar, enlazar. El prefijo *com* añade el sentido de la dualidad de elementos opuestos que se enlazan íntimamente. Por lo tanto se puede interpretar como un tejido de constituyentes heterogéneos inseparablemente asociados. La tensión constante entre orden y caos se llama complejidad. La complejidad expresa la imposibilidad de definir de manera simple el mundo que nos rodea. No se puede resumir en una palabra clave, en una ley o en una receta que exprese de una manera sencilla el problema de estudio. Morin (1990) plantea que la complejidad es un tejido de eventos, acciones, interacciones, retroacciones, determinaciones, azares que constituyen el universo fenomenológico.

El paradigma de la complejidad es emergente porque rompe con los esquemas y marcos de referencia existentes y establece nuevos tipos de relación con la realidad, por tal razón, parece nacer del futuro más que del pasado. El paradigma no es reciente ya que algunos pensadores como Heráclito con su célebre frase “Nadie se baña dos veces en el mismo río”, Alfred North Whitehead y Bergson sostuvieron la imagen de que el mundo era un flujo, un movimiento, un proceso de continuo cambio. Según Briggs y Peat (1989) la complejidad nace de interacciones muy sencillas y simples y el desorden de la incertidumbre funcional de tales interacciones de tal manera que a mayor complejidad aumentan los niveles de incertidumbre. Según este paradigma la complejidad se puede clasificar en:

Complejidad estructural: corresponde al conjunto de las definiciones descriptivas que pueden hacerse de un sistema al repertorio de sus elementos.

Complejidad funcional: corresponde al uso, a la finalidad de los elementos que entran en la composición del conjunto. La complejidad funcional se traduce en un modo de uso sujeto a ciertos grados de libertad. Estas dos dimensiones son las coordenadas que en el capítulo VII permitirán establecer el papel que juega el conflicto semiótico en la dinámica de los significados personales de los objetos matemáticos.

Un sistema complejo no se puede dividir en partes, es dinámico, cambiante, dialógico, no puede ser detenido para ser estudiado, ya que la complejidad es sinónimo de vitalidad, de vida cambiante en todo momento. Para estudiar un sistema complejo es necesario comprenderlo, de interactuar con él, de volverse objeto y sujeto al mismo tiempo. En esta conciencia está implícita una creciente atención a las fluctuaciones aleatorias y en consecuencia al papel que desempeña la incertidumbre en la evolución de los sistemas complejos y a menos que las condiciones iniciales puedan especificarse con infinita precisión, dichos sistemas se tornan rápidamente impredecibles.

La matemática puede interpretarse como un sistema complejo porque su potencial de desarrollo es ilimitado y no puede determinarse con el grupo finito de ramas matemáticas conocidas hasta el momento. Adicionalmente contiene muchos subórdenes diferentes de grado más bajo como las distintas reglas lógicas que se aplican para la demostración de los teoremas. Por ejemplo, dentro de las estructuras de un teorema están contenidas las estructuras de los axiomas, lemas y corolarios. Ninguno de estos subórdenes es independiente a pesar de su complejidad ya que se halla condicionado por características en la demostración del teorema. El orden lógico, semántico y consistente del lenguaje matemático (en sus diversos registros semióticos) contiene una complejidad que no puede predecirse ni aprenderse de una forma mecánica. Aunque en algunos objetos matemáticos puedan reconocerse formas repetitivas determinadas, es posible que la estructura cambie en algún otro punto. Un aspecto fundamental a ser considerado es el significado. Un objeto matemático solo será comprensible para un individuo con conocimientos previos. Si una persona carece de este background, el objeto no será más que un conjunto de signos sin ningún sentido. En conclusión el orden global del objeto matemático pertenece al lenguaje matemático como a la persona que lo usa.

5.- El Pensamiento Complejo

Pensar significa estar concentrado, fijarse bien, imaginar. Etimológicamente el verbo latino *cogito* “pensar” significa “sacudir juntos”. Pensar es procurar entender la realidad y esto es solo posible si se tienen los medios para interpretarla. Para Espinoza y Torretti (2004) pensar es crear nuevos conceptos o estructuras que permitan actualizar la inteligibilidad en potencia de la naturaleza lo cual tiene consonancia con lo expresado por Martínez (2002a), quien acota que pensar es la suprema función del hombre, y a través de este ejercicio resuelve los problemas que la vida le plantea. Pero, para que la mente trabaje, necesita una buena dosis de intenso aprendizaje, que se concreta en el uso claro y preciso de los términos del área en estudio y una notable libertad interior y osadía personal.

Sin embargo De Bono (1986, 1990) considera que pensar es un conjunto de habilidades, actitudes, intenciones, percepciones y técnicas donde el gran cambio se produce cuando se deja de considerar como parte de la inteligencia del individuo y se juzga como una cuestión de habilidad, hábito y actitud. En otras palabras su uso frecuente se convierte en un proceso internalizado y automático. Para Morin (1999b) el pensamiento es una actividad específica del espíritu humano que se despliega en la esfera del lenguaje, de la lógica y de la conciencia.

El pensamiento es una combinación o asociación de dos o más ideas previas pero en una nueva yuxtaposición compleja de tal manera de descubrir una relación entre las mismas de la cual no se estaba consciente. El pensamiento complejo se refiere específicamente a la propuesta de Morin (1990) de transitar hacia una reforma del pensamiento que se proponga superar las maneras de producir saber que reducen el conocimiento del todo y de las partes y lo descontextualizan, asumiendo la preeminencia de una causalidad universal y avanzar hacia una forma de pensar que acepte el reto de la incertidumbre.

El pensamiento complejo es una transformación esencial de nuestro punto de vista, es la reorganización repentina del modo de concebir un problema teniendo como reglas fundamentales el intercambio de argumentos y la discusión crítica. La complejidad se reconoce por la necesidad de relacionar el objeto a su entorno, siendo por lo tanto un pensamiento vinculante.

6.- Los Principios Dinámicos del Pensamiento Complejo

Para Morin (1999c) hay siete principios guía del pensamiento complejo, complementarios e interdependientes entre si, los cuales son explicados a continuación:

6.1.- Principio Sistémico u Organizativo:

Morin (1999c:144) se apoya en el imperativo cognoscitivo del matemático y filósofo francés Blaise Pascal, quien hace tres siglos consideraba "*Como todo es causado y causante, ayudado y ayudante, mediato e inmediato y como todo se mantiene por un vínculo natural e insensible que relaciona a los más alejados y a los más diferentes, considero que es imposible conocer las partes sin conocer el todo y viceversa*". La ciencia siempre ha intentado comprender la naturaleza reduciendo las cosas a sus partes integrantes.

Las totalidades no pueden ser comprendidas por medio del análisis, el pensamiento complejo no acepta la separación entre el análisis y la síntesis. Al mismo tiempo que busca analizar los elementos componentes de la realidad estudiada, tiene como una característica esencial descubrir relaciones entre los hechos y las ideas, buscando la síntesis de los conocimientos. Aunque el análisis (la parte) y la síntesis (el todo) son dos operaciones antagónicas, están ligadas entre sí inseparablemente, no puede existir una sin la otra. Cuando se resuelve una situación-problema, mentalmente pueden separarse algunos datos aislados, pero al mismo tiempo se establecen relaciones y dependencias entre ellos, dando una imagen global de su solución.

El análisis es un método útil para resolver problemas o para determinar los elementos o subsistemas que forman parte de un sistema mayor. El análisis sirve para conocer. En cambio la síntesis sirve para comprender. La única forma de saber cómo funciona un sistema y cuáles son sus propiedades emergentes es verlo en acción como un todo. El término análisis significa literalmente *resolución* de donde en virtud de su conjugación con síntesis toma éste último en matemática el sentido de progresión frente a la regresión que efectúa el análisis. Y es en la ciencia de relaciones donde se establece que el análisis y la síntesis son métodos o procesos operatorios entre si conjugados mediante la inversión del sentido direccional.

6.2.- Principio Holográmico:

También llamado principio de inclusión. Morin (1990) aclara que las partes son el reflejo del todo y viceversa y cualquier cambio en una parte repercute en las demás y en el todo y cualquier cambio en el todo repercute en cada una de las partes. En otras palabras el todo está inscrito o engramado en las partes, como una especie de reflejo.

Bajo esta perspectiva todos los elementos del universo mecanocuántico forman parte de un sistema único, por lo que existe un continuo de relaciones con todo lo demás. El universo es un todo complemente ensamblado y cada parte contiene las características del universo. Basado en esto, existe la posibilidad de una acción lejana influya simultáneamente en todos los puntos del espacio sin que exista comunicación entre ellos. Todo lo que hace una persona afecta a los demás.

Este último aspecto coincide con la teoría del Bootstrap propuesta por Geoffrey Chew, citado por Bohm y Peat (1988), según la cual no existe ningún elemento constitutivo de la materia, ningún bloque básico que estructure el mundo material, sino una red de relaciones subatómicas, donde cada partícula sólo existe como parte del proceso de interrelación con el resto de partículas, sin que sea posible localizar fragmentos independientes de materia. Cada partícula estaría conformada por el resto de las partículas. En esta investigación se utilizará el principio holográmico para la construcción del significado del infinito matemático.

6.3.- Principio de Realimentación:

Un bucle de realimentación es una disposición circular de elementos conectados causalmente, en la que una causa inicial se propaga alrededor de los eslabones sucesivos del bucle, de tal modo que cada elemento tiene un efecto sobre el siguiente, hasta que el último *realimenta* el efecto sobre el primer eslabón en que se inicio el proceso. Para Capra (1998) la consecuencia de esta disposición es que el primer eslabón se ve afectado por el último, lo que se traduce en la autorregulación de todo el sistema, al verse modificado el estímulo inicial a lo largo de cada recorrido por el circuito. En otras palabras la realimentación permite corregir errores y ajustar desviaciones en el sistema.

Como indica Salazar (2004) para conocer la realidad no se puede renunciar ni al todo ni a las partes; la complejidad de las relaciones se establecen entre el todo y las partes. La unión de las diversas partes constituye el todo, que a su vez retroactúa sobre los diversos elementos que lo constituyen, confiriéndoles propiedades de las que antes carecían. La relación del todo con las partes no es meramente acumulativa, es copartícipe. La realimentación reforzadora se presenta cuando los cambios registrados en todo el sistema se realimentan para amplificar el cambio original. Implica que cuando una variable aumenta, también lo hace la otra (o bien cuando una disminuye, también disminuye la otra). La realimentación negativa, de compensación o neutralizadora, se da cuando los cambios registrados en todo el sistema se oponen al cambio original para amortiguar el efecto, implica una relación inversamente proporcional.

La realimentación convierte el aprendizaje de la matemática en un macroproceso, en un conjunto de operaciones mentales generales que constituyen la esencia de la estructura y procesamiento de la información, los cuales funcionan de forma automática y son comunes a todos los seres humanos aunque están desarrollados en diferentes grados de acuerdo con las potencialidades heredadas y las oportunidades del contexto espacio-temporal.

6.4.- Principio de Recursividad:

Un bucle de realimentación corresponde a una determinada clase de proceso no lineal conocido como iteración (del latín *iterare,* repetir sucesivamente) en el que una función opera reiteradamente sobre sí misma. La idea de bucle es de circulación, circuito, rotación, procesos retroactivos que aseguran la existencia y la constancia de la forma. Involucra la circulación de los conocimientos. Los procesos y elementos vuelven sobre sí mismos en bucles, rizos o cascadas de espirales creativas. Un proceso recursivo es aquel cuyos productos son necesarios para la producción del proceso. En este sentido se rompe con el pensamiento lineal causa-efecto ya que los efectos producen causas y las causas producen efectos.

Cuadro 1. Interpretación de la relación causa/efecto desde diferentes perspectivas

Perspectiva	Interpretación
Mecanicista	Vínculo unidireccional: Causa→Efecto Antes → Después Pasado→ Presente Problema → Solución
Caótica	Causas pequeñas pueden originar grandes efectos (efecto mariposa)
Compleja	Vínculo circular: Causa ⇄ Efecto (recursividad) Causa: Factor determinante Efecto: consecuencia Las causas se encuentran en la estructura del sistema
	Las intenciones pueden causar efectos que le sean contrarios (ecología de acción)
	Las mismas causas pueden conducir a efectos diferentes o divergentes
	Los efectos de causas antagonistas son ambiguos
Sincrónica	Ocurrencia de dos eventos que no están asociados causalmente y sin embargo tienen una relación significativa. Las cosas no suceden en secuencias, sino todas juntas.

Fuente: Elaboración propia

Es coincidente lo expuesto en los renglones precedentes con lo expresado por Prigogine y Nicolis (1997) quienes establecen que los sistemas abiertos, cuando sus componentes se reorganizan, forman una nueva entidad y el sistema adquiere un orden superior más integrado y conectado que el original. Por lo tanto la recursión no es anulación sino producción, la recursión organizacional constituye una noción esencial para concebir el proceso de autoorganización, como tendencia constante y espontánea de un sistema para generar patrones de comportamiento global a partir de las interacciones entre sus partes constituyentes y a partir de las interacciones de estas con su entorno. En otras palabras la autoorganización indica que los sistemas tienen su propio dialéctico orden cambiante, con su teleología, su causalidad interna, que implica la aparición espontánea de la estructura organizada.

Tradicionalmente el proceso de enseñanza, aprendizaje y evaluación de la matemática se ha considerado en términos de causas y consecuencias (si se ejecuta x se espera que ocurra z y cuando esto sucede, ya sea al cabo de horas, días, semanas, meses e incluso años, se considera como el efecto de x y como prueba de la conexión). Esta visión concuerda con la infraestructura científica de análisis y fragmentación.

En esta investigación se adopta el principio recursivo en varios casos: (a) Los objetos personales generan los objetos institucionales, los cuales a su vez generan los objetos personales y así sucesivamente, (b) Un conflicto semiótico anuncia la búsqueda de una negociación, proceso que genera nuevas circunstancias, nuevos significados, nuevos conflictos y nuevas negociaciones, (c) Un objeto matemático tiene un carácter recursivo, en el sentido de que cada objeto está compuesto por entidades de los restantes tipos (un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos, etc).

6.5.- Principio de Autonomía/Dependencia:

Morin (1990) destaca en su obra que cuanto más autónomo se es, más se depende del entorno. Si se analiza un individuo aislado, sin relacionarlo con el mundo que le rodea, todos sus actos parecerán libres. Sin embargo al advertir la más pequeña relación entre el ser humano y el medio circundante (otra persona que hable con él, con el libro que lee, con el trabajo que realiza) cada una de estas condiciones influye sobre él y rigen por lo menos un aspecto de su actividad. La responsabilidad es la clave de la autonomía. La autonomía es fundamentalmente libertad de conciencia, de pensamiento, de expresión, libertad de investigación y libertad intelectual. La noción de autonomía humana es compleja porque depende de las condiciones culturales y sociales imperantes. Para que una persona sea ella misma, le hace falta aprender un lenguaje, una cultura, un saber pero esa autonomía se nutre de dependencia del medio, de la educación, del lenguaje, de la cultura y de la sociedad.

La autonomía mental es alimentada por la dependencia cultural, específicamente en el área matemática se considera que la enseñanza de esta disciplina incluye dentro de sus objetivos, además de aquellos relativos al aprendizaje de los contenidos y el fortalecimiento del razonamiento por parte de los educandos, una pretensión más general: desarrollar individuos *autónomos,* es decir, independientes, críticos, creativos y reflexivos y con capacidad de autoaprendizaje, pero deben, simultáneamente, ser *dependientes* (las normas aportan disciplina), comprometidos con las personas y con su entorno asumiendo responsabilidades, solidarios y capaces de colaborar con el progreso del ecosistema en el que se desenvuelven.

La intención primordial y primaria de la educación matemática es desarrollar en el alumno su propio estándar de juicio intelectual, lo cual se logra asignándole toda la responsabilidad de comprender y dándole las herramientas y experiencias necesarias para desarrollar el razonamiento abstracto. Los individuos en general constituyen su autonomía psicológica, individual, personal, a través de las dependencias que han experimentado de un sistema complejo (la familia, la institución educativa, la sociedad, entre otros).

6.6.- Principio Dialógico:

Implica la relación de dos nociones que lógicamente se oponen y se excluyen, es decir en lugar de estorbarse o anularse, actúan en conjunto como por ejemplo: algoritmo/heurística, caos/orden, análisis/síntesis, autonomía/dependencia. Para su comprensión se requiere diferenciar varios conceptos:

Lógica formal: Es la investigación de los principios y de los métodos que permiten diferenciar el razonamiento correcto del incorrecto (Burk y Díaz, 1980). En general la lógica se considera como un conjunto de reglas formales que han de ser satisfechas por el pensamiento para que se le juzgue racional.

Dialéctica: Es un modo de pensamiento que reconoce, integra y trata lo contradictorio. En un sistema cada parte influye y cambia el curso de las demás. En la lógica dialéctica las partes son comprendidas desde el punto de vista del todo. El modelo dialéctico considera el conocimiento como el resultado de una dialéctica (de un diálogo) entre el ser humano (sus intereses, valores, creencias, entre otros) y el objeto o fenómeno en estudio.

Dialógica: Es la unidad simbiótica de dos lógicas, es un modo de pensamiento que comprende simultáneamente la complementariedad y el antagonismo. En otras palabras existe dualidad en seno de la unidad. Un diálogo auténtico es un idioma de contrarios, entre partes idénticas no hay comunicación; hay monólogo. Para que exista diálogo es necesario que haya intereses contrarios. Es un diálogo con la realidad.

La palabra diálogo proviene del griego *dialogos*: *día,* a través; *logos*, palabras. Para Bohm (1988), diálogo es el libre flujo del significado a través del grupo. El arte del diálogo consiste en experimentar el flujo y contraflujo del significado y construir pensamientos relevantes. Trata de la emergencia: del nacimiento de nuevos significados y comprensiones antes ocultos. En el diálogo las personas aprenden a observar sus propios pensamientos. Un verdadero diálogo permite a los interlocutores matizar o modificar gradualmente sus opiniones y olvidar incluso a veces que idea debe atribuirse a quién. En este sentido se manifiestan las descripciones complementarias (cada una capta aspectos de la realidad que no ven las otras), válidas en diferentes contextos, y aun en el mismo contexto cuando se adoptan perspectivas diferentes.

Dos proposiciones contrarias pueden ser también complementarias. En 1927 Niels Bohr enuncio este principio de complementariedad en el campo de la física cuántica, la radiación tiene una naturaleza dual de onda-partícula, algunas propiedades de la radiación como la interferencia, difracción y polarización de la luz requieren una estructura de onda, en tanto que el fenómeno fotoeléctrico implica que la radiación se comporta como una partícula. Es decir el electrón es partícula (materia) y onda (energía) simultáneamente.

La matemática tiene una situación singular y paradójica como la mecánica cuántica. Es la obra que el espíritu humano ha desarrollado mediante sus propias fuerzas y que testimonia mejor su estructura funcional pero en contraste es una disciplina que parece ajena a un gran número de personas. En otras palabras: una creación esencialmente humana aparece a muchas personas como lejana, abstracta y compleja. Einstein y Heisenberg consideran que la matemática rigurosa no refleja la realidad sino que por el contrario se aleja de ella. Por lo tanto a la ciencia exacta hay que darle el puesto de herramienta que corresponde en el contexto de cada disciplina.

En este orden de ideas es conveniente diferenciar entre antinomia y paradoja: la antinomia, del griego *anti*, en contra y *nomos*, ley es la contradicción entre dos principios. Se emplea este término cuando dos conceptos que generan un conflicto al sugerir cada uno su contrario o el dominio de su contrario, creando así una penumbra de incertidumbre, ya que, aunque tienen pleno sentido y parecen igualmente justificados, en cierto modo trascienden la competencia de la pura razón y se presentan como insolubles en principio.

En cambio la paradoja es un término que sirve para indicar la confusión entre miembros y clase, es decir, para designar una proposición que afirma o niega algo de una *clase* de la cual ella es un *miembro*, generándose así, desde el punto de vista lógico, un enunciado que carece de significado. (e.g. La Paradoja del griego Epiménides: “Los cretenses siempre mienten”) Claramente, el cretense también debe referirse a sí mismo cuando habla de mentirosos, si dice la verdad, miente, y si miente, dice la verdad. Basándose en esta paradoja, Gödel en 1931, planteó y demostró el primer teorema de incompletitud: cualquier sistema matemático formal que contenga un mínimo de aritmética es incompleto: siempre habrá enunciados que no serán demostrables ni refutables dentro del sistema, independientemente de lo elaborado que sea éste.

En otras palabras todo sistema axiomático es totalmente incompleto y necesita un sustento referencial que escapa a él. Por ejemplo: el caso más sencillo es el teorema fundamental de la aritmética “todo número puede representarse como el producto de dos números primos” (63=3x3x7) Es decir, para demostrar un elemento como un número cualquiera necesita de un previo de mayor alcance, en este caso el producto; demostrando la suma a partir de la multiplicación, sabiendo de antemano que el producto es una suma abreviada.

El segundo teorema de incompletitud establece que ningún sistema matemático puede demostrar su propia consistencia. No se puede demostrar sin recurrir a hipótesis más fuertes que la de la propia consistencia. La lógica no puede manejar la autorreferencia, que es cuando un enunciado se refiere a él mismo. Para resolver las paradojas de autorreferencia, se requiere una perspectiva compleja o metaposición, situada fuera del marco de referencia.

6.7.- Principio de Omnijetividad:

También denominado principio de reintroducción del que conoce en todo conocimiento. El observador y lo observado conforman una sola unidad, son interdependientes. El ser humano es integrado al proceso de investigación de tal manera que no se puede trazar una línea divisoria tajante entre el proceso de observación y lo que es observado. El observador influye en lo observado y lo observado en el observador, presentándose el bucle recursivo: observador $\leftrightarrows$ lo observado.

Muchos enfoques científicos y sociales con visiones desintegradoras del ser humano, separan al observador de sus observaciones para evitar la paradoja del observador que se observa a sí mismo. Una analogía de esta paradoja la detalla muy bien Martínez (2002b) en el ojo que mira y se examina a si mismo. Si está sano, se percibirá correctamente, pero si no lo está, formará una imagen aún más distorsionada de la ya distorsionada realidad ocular.

Martínez (2002b) considera que debido a que el instrumento de medida es algo construido por el observador, es lógico que lo que se observa no es la naturaleza en sí misma, sino la naturaleza expuesta siguiendo un método de búsqueda y la teoría de ese método.

Las ideas del investigador no son reflejo de lo real, sino traducciones de lo real (Morin, 1990), se debe centrar la atención en el hombre como sujeto y no sólo como objeto de estudio. La realidad vendrá dada por la interacción de los dos componentes objeto/sujeto. Esto implica que no es posible describir, caracterizar y explicar la realidad desde una sola perspectiva porque ésta es compleja. Es necesaria la integración de muchos enfoques, de muchos aportes coherentes de diferentes participantes del proceso educativo debido a que ninguno de los aportes y enfoques individuales es completo.

Por lo tanto la pretensión inmanente es estudiar a fondo la acción del ser humano cognoscente sobre el problema que ha planteado. En este sentido se considera la matemática como una ciencia dinámica que concibe el aprendizaje como un proceso en el que el desempeño del docente y los alumnos juega un papel protagónico. De aquí nace la necesidad de recoger los datos ubicados siempre en su contexto y la importancia de recurrir a una técnica hermenéutica para interpretarlos.

7.- La Noosfera Matemática

A fin de ubicar al lector con la expresión *noosfera matemática* en este estudio doctoral, la cual se contextualiza en el nivel universitario, se presenta una aproximación conceptual de la misma, para lo cual se parte de la reflexión de Morin (2001) quien plantea que la noosfera[2] (del griego noos: mente) se concibe como la esfera del pensamiento que envuelve al hombre, como un medio que se interpone entre él y el mundo exterior permitiendo la comunicación. El individuo portador de una pretensión de trascendencia no pertenece solo a la realidad, sino que está inmerso en un universo simbólico: nada se puede experimentar o discernir que no sea por medio de formas lingüísticas, signos, símbolos, mensajes, representaciones o imágenes. Estos símbolos, inventados por el hombre, le permiten comprender, descubrir, discernir y registrar las estructuras, patrones y relaciones que se encuentran en la matemática. En la noosfera el conocimiento se organiza en sistema de

[2] Término acuñado en 1920 por el paleontólogo jesuita Pierre Teilhard de Chardin (1881-1955)

representaciones, teorías, axiomas, entre otras necesita de una nueva ciencia: la noología.

Aunado a lo anteriormente señalado, está la matemática como ciencia. La palabra matemática proviene del griego *mathema*, erudición y *tica*, arte; esto lleva a una aproximación de la definición desde el punto de vista semántico como arte de la erudición. El estudio de la matemática partió de la formulación de preguntas relativas al mundo y su desarrollo en consecuencia del deseo de comprender la naturaleza y resolver problemas prácticos. *Mathematika* era el nombre griego de las cuatro disciplinas enseñadas por los pitagóricos: aritmética, geometría, música y astronomía. En aquella época se les separó en dos ramas: discretas (aritmética y música) y continuas (geometría y astronomía) originando el *quadrivium* científico que en la época escolástica se complementaría con el *trivium*, constituido por la gramática, la dialéctica y la retórica, que en su conjunto formarían las siete artes liberales enseñadas en las escuelas medievales. La división actual en ciencias y humanidades deriva del *quadrivium* y el *trivium* llevando el principio racionalista de la separación a un extremo que desdibuja la intención inicial, porque, lejos de integrar al hombre con el conocimiento, lo ha disociado en parcelas. (Jiménez, 1999).

Como lo expresa con acierto Morin (2001), la noosfera es el ámbito de la simbolización, es el medio conductor y mensajero de la mente humana que a la vez de comunicar también forma una pantalla aislante del exterior. Es un desdoblamiento transformador y transfigurador de lo real que parece confundirse con este último. Esta esfera envolvente también forma parte del ser humano y de su cultura, sin ella no podría realizarse nada de lo que es humano. En la actividad de pensar se integran otras funciones mentales: los signos, señales y símbolos del exterior los cuales actúan como un elemento desencadenante, que pone en marcha la actividad mental. La percepción funciona como una fuente que provoca el pensamiento.

Cuando se resuelve un problema matemático la mente busca en la memoria los datos y las representaciones apropiadas pero lo hace comparando el planteamiento del mismo con la estructura cognoscitiva previa, la cual activa los registros antecedentes pertinentes y las soluciones dadas a problemas anteriores parecidos que a su vez son reorganizados y transformados en forma de proposiciones de solución al nuevo problema planteado.

A través de los sistemas de símbolos, la representación humana es capaz de prolongar la intuición mediante la teoría. Esta explica lo perceptible complejo en términos de lo imperceptible simple. Los objetos matemáticos se expresan mediante un conjunto de símbolos, en un lenguaje abstracto, universal y por tal motivo son aptas como lenguaje del conocimiento, como instrumento principal de la transdisciplinariedad.

8.- Características del Discurso Moriniano

Morin es un pensador multidisciplinar y su estudio de la complejidad se basa en la teoría de la información, la teoría general de sistemas, la cibernética en los procesos de autoorganización biológica y el orden a partir de la aleatoriedad. Morin propone la idea de una conciencia universal que abre la posibilidad de concebir como unidad compleja y dialógica a todos los integrantes del Universo. Su obra resulta relevante por su interés actual en la reforma del sistema de enseñanza donde procura ayudar a los docentes a reordenar las materias para darles un sentido (ver la unidad en la multiplicidad) y reencontrar el placer de la docencia. Precisamente el gobierno francés le encargó la reforma del sistema educativo en dicho país. A continuación se señalan las principales características poliédricas del discurso moriniano. Se considera pertinente justificar el uso de esta terminología por cuanto, una vez aclarada, permitirá en el capítulo VII utilizar el lenguaje de la complejidad para explicar el papel que juega el conflicto ontosemiótico en la dinámica de los significados personales de los objetos matemáticos.

Resemantización de términos: La redefinición de expresiones la realiza para lograr una auténtica comprensión de la complejidad empleando vocablos con prefijos, sufijos, desinencias, marcas y combinaciones. Morin considera que la habilidad general de pensar mejora si se conoce a profundidad la semántica del idioma utilizado.

Enciclopedización: Morin ha desarrollado como investigador un camino de reflexión global, sobre la vida y el conocimiento. Su trabajo analiza los fenómenos multidimensionales de la sociedad y de la humanidad en su totalidad y en su complejidad. Por tal motivo maneja información multivariada de diversas disciplinas: biología, antropología, semántica, neurobiología, entre otras.

El juego de palabras: El autor está interesado en el balance y la inversión de los vocablos: el predicado se vuelve sujeto y el sujeto en predicado. Con flechas retroalimentantes genera un movimiento circular y el pensamiento se desencadena de una manera recursiva. El uso de retruécanos (figura que consiste en cambiar el orden de los términos de una frase para construir otra que contraste con la anterior e.g. *los límites de la conciencia y la conciencia de los límites).*

Formación de macroconceptos: Un aspecto importante del pensamiento es la capacidad para organizar diferentes estímulos en conceptos, categorías de objetos, sucesos o personas. Esta capacidad le permite al individuo ordenar un mundo multidimensional lleno de objetos y sucesos aislados. Definir un término es dar su significado en otros términos que se suponen conocidos. Los conceptos no se definen jamás por sus fronteras, sino a partir de su núcleo. El lenguaje, las imágenes y los conceptos son los tres elementos más importantes del pensamiento complejo. Los conceptos ayudan a pensar más eficientemente sobre las cosas y establecer cómo se relacionan entre sí. Los conceptos también dan significado a las experiencias nuevas. Morin es un pensador fertil en patrones o pautas de significación y con muchas ideas nuevas para generar macroconceptos (modelos muy complejos e.g. Auto-trans-meta-sociología). En los macroconceptos es válido el principio del contexto que cita Gottlob Frege el cual establece que “no se debe preguntar nunca por el significado de una palabra aislada, sino sólo en el contexto de una proposición”. De igual forma Ludwig Wittgenstein en su obra *Trataus logico-philosophicus* acota el carácter limitante y finito de toda definición y de todo término.

Imágenes, metáforas y analogías: Como sostenía Aristóteles *Lo más grande a que se puede llegar es a ser un maestro de la metáfora, ésta es la marca del genio,* Martínez (2002a). Como las metáforas permiten conectar las ideas de nuevas formas para que puedan surgir nuevos conocimientos, Morin emplea las imágenes para describir, caracterizar y explicar fácilmente las ideas complejas y abstractas.

Es el pensador que actualmente retrata mejor la realidad: Gran parte de su obra se relaciona con la ciencia y la incertidumbre del conocimiento y donde propone una nueva alianza del hombre con la naturaleza y del hombre consigo mismo, posibilitada por la metamorfosis que hoy experimenta la razón científica.

La serie de cinco volúmenes, elaborada por más de treinta años, tiene como punto de partida *La Naturaleza de la Naturaleza* o el problema del método, luego analiza el problema de la vida (*La vida de la vida)* la organización de lo viviente dentro de la biosfera. Los libros tres y cuatro del método están referidos a los comportamientos fenoménicos de espíritu: *El conocimiento del conocimiento y Las Ideas* y en su último libro *La humanidad de la humanidad* trabaja sobre el problema del ser humano.

9.- Antecedentes del Conflicto Semiótico

Numerosos investigadores (Brousseau (1983), Chevallard, Bosch y Gascón (1997), Blázquez (1998), Muñoz y Velarde (2000), Socas (1997), Radatz (1980) y Rico (1993)) han abordado la problemática de la disparidad entre el significado de un objeto matemático logrado por un estudiante y el significado institucional de referencia. Algunos empleando el nombre de obstáculos, otros el de errores, han enriquecido esta área del conocimiento. Una explicación detallada del significado de cada una de estas expresiones es lo que se intentará seguidamente.

9.1.- Conflicto Semiótico Vs. Obstáculo

Uno de los aspectos básicos en toda investigación es comprender adecuadamente el material conceptual específico en el área del conocimiento estudiado. El constructo *obstáculo* fue introducido por primera vez por el filósofo francés Bachelard (1993) en el contexto de las ciencias experimentales bajo la denominación de obstáculo epistemológico, siendo trasladado al campo de la educación matemática por Brousseau (1983). En la teoría de las situaciones didácticas (TSD), Brousseau indica que un obstáculo es una idea que, en el momento de la formación de un concepto, fue eficaz para enfrentar los problemas precedentes, pero que se revela como un fracaso cuando se trata de aplicar a un nuevo problema.

Un ejemplo clásico en la enseñanza de la matemática, en el que se elige al comienzo un elemento de significado intensivo estricto y luego este es perfeccionado, es el caso de la recta tangente a una curva. En bachillerato se trabaja con la tangente a una circunferencia, la que puede definirse como una recta perpendicular a un radio de la circunferencia por un punto de ella (D1) o como una recta que intercepta a una circunferencia en un solo punto (D2). A nivel universitario se necesita definir, por ejemplo la recta tangente a una parábola y obviamente D1 no es apropiada ya que la parábola no tiene radios. Aunque D2 es apropiada para la parábola, no funciona para el gráfico de la función $y = x^3-x$ en el punto (0,0) ya que la recta tangente corta al gráfico en el punto (0,1), lo que determina que ninguno de esos atributos sean atributos críticos del concepto de recta tangente a una curva.

Este ejemplo evidencia que el obstáculo no es más que una barrera o impedimento para aprendizajes sucesivos. El obstáculo no es fruto de la ignorancia, sino que es el resultado de un conocimiento precedente, un conocimiento que ha tenido éxito, que ha producido resultados positivos pero que no resiste la prueba de hechos más circunstanciales o más generales. En cambio el conflicto semiótico, como ya se ha mencionado con anterioridad, es cualquier disparidad, discordancia o desajuste entre los significados o contenidos, atribuidos por una misma expresión por dos sujetos en interacción comunicativa.

El idioma chino tiene un carácter que representa la palabra obstáculo: una brizna de hierba que al brotar de la tierra se topa con una limitación. Para la mentalidad asiática el signo que involucra al cielo y la tierra, señala el primer encuentro entre ambos que se ve afectado por dificultades. En los periodos de formación (educación) suele haber dificultades. Tales inconvenientes surgen de la plenitud de aquello que se debate por lograr su forma. Todo se halla en movimiento y por eso, a pesar de los obstáculos existentes, hay perspectivas de éxito siempre que la persona persevere en procura del mismo. De manera análoga también hay un símbolo para la palabra conflicto: el signo superior cuya imagen es el cielo, orienta su movimiento hacia arriba, el signo inferior-agua- conforme a su naturaleza tiende hacia abajo. Los rumbos de movimiento de las dos mitades divergen y esto da por resultado la idea de conflicto. El conflicto surge cuando alguien sintiendo que tiene la razón se enfrenta con resistencias. En ese momento se tiene que tener la disposición a la negociación, al arreglo a la mitad del camino.

En la teoría de Brousseau (1983), los obstáculos pueden ser de diverso origen, distinguiéndose tres tipos:

Ontogénico o psicogenético: Derivado de las limitaciones del alumno asociados con el momento de su desarrollo, en virtud de que cada uno genera conocimientos apropiados para sus habilidades y metas a una edad particular. Pueden ser obstáculos asociados a la comprensión de las nociones básicas y obstáculos asociados a las estrategias de razonamiento.

Didáctico: Son aquellos que se generan como producto de una elección educativa dentro de un proyecto o sistema educativo. Este tipo de obstáculo se centra en dos aspectos de la construcción del conocimiento: uno relacionado con el uso del lenguaje matemático y otro con los contextos de ejemplificación para la construcción del conocimiento.

Epistemológico: Relacionado con la dificultad intrínseca del objeto matemático y que puede ser rastreado a lo largo de la historia de la matemática, en la génesis misma de los conceptos.

De acuerdo con esta categorización, se puede acotar que algunos obstáculos son producto de la enseñanza; es decir que son generados por la manera como se enseña. Otros tienen que ver con los obstáculos de corte epistemológico que se pueden detectar mediante un análisis de la historia del conocimiento matemático. Brousseau refiere que este tipo de obstáculo es difícil de erradicar, persistirá a lo largo de la vida del individuo y lo que la instrucción puede hacer es proporcionar elementos que le permitan luchar en contra de ese conocimiento mal adaptado.

En este sentido, Chevallard, Bosch y Gascón (1997) señalan:

> *Suele haber cierta unanimidad en que los obstáculos se manifiestan mediante errores reproducibles, con cierta coherencia (no se trata de errores impredecibles y arbitrarios), persisten (siguen apareciendo después de que el sujeto haya rechazado concientemente el modelo defectuoso), resistentes (muy difíciles de modificar) y relativamente universales. En el caso de los que tienen origen epistemológico, se postula rastrear además en la génesis histórica de los conceptos en cuestión* (p.224)

Según la teoría de los obstáculos epistemológicos, la instrucción deberá promover mejores conexiones o articulaciones entre representaciones de manera que la red interna que se esté formando en el individuo le permita contrastar e intentar disminuir la fuerza de ese conocimiento detectado y señalado como obstáculo epistemológico.

Tal es la importancia del desarrollo histórico de los objetos matemáticos que se considera necesario efectuar un análisis del mismo donde se reinterprete los obstáculos epistemológicos desde el enfoque ontosemiótico de la instrucción y la cognición matemática como "conflictos semióticos". Cuando Godino categoriza los conflictos semióticos en epistémicos, cognitivos e interaccionales se observa que sigue el mismo patrón propuesto por Brousseau. En esta investigación se pretende presentar una nueva clasificación que realmente este articulada con las facetas duales del EOS.

9.2.- Consideraciones Relativas a los Errores

El error ha sido de interés para ciertos investigadores educativos (Socas (1997), Radatz (1980), Rico (1993)), quienes se han preocupado por reconocer el valor del mismo o han pretendido cambiar la visión que se tiene de él en la enseñanza de la matemática, puesto que el error es considerado para algunos teóricos como parte inseparable del proceso de aprendizaje donde sugieren diagnosticar y tratar seriamente los errores de los estudiantes. De acuerdo con el diccionario de la Real

Academia de la lengua Española (1992, p. 514) el error (del latín errare: caminar a la ventura, divagar, y, en sentido figurado, alejarse del camino recto) es un concepto equivocado o juicio falso, una acción desacertada o equivocada o una cosa hecha erradamente. En el plano socio-cognitivo-educativo el error es considerado como un equívoco grave que tiende a penalizarse, sancionarse o calificarse como un acto disfuncional. (Blázquez ,1998).

9.2.1.- Destejiendo el Error Según la Optica Moriniana

En este apartado se presentan las implicaciones del error según la visión de Morin (2000) quien desde la singularidad del pensamiento complejo sostiene que los errores forman parte del conocimiento, postulando que no hay fuente última del conocimiento ni verdades absolutas. Este autor categoriza los errores de la siguiente forma:

a) Errores mentales: Que se derivan del proceso de traducción/reconstrucción propia a todo conocimiento (falsa percepción).
b) Errores intelectuales: Interpretados también como errores lógicos o incoherencias. Es la tendencia de resistir a la información no conveniente o que no se puede integrar.
c) Errores de la razón: Si la racionalidad no mantiene su vigilancia autocrítica caerá en la racionalización.

Es aquí cuando entra en juego la acción y el conocimiento, ya que según Morin (1999a) se implican uno al otro, están unidos pero son distintos uno del otro, lo que significa que la simultaneidad de las posibilidades del conocimiento está el riesgo de cometer errores. El autor mencionado afirma "El diálogo con la incertidumbre, que caracteriza la estrategia del conocimiento, comporta la posibilidad del error por falta, ignorancia o mala suerte" (p.73).

9.2.2.- Investigación Didáctica sobre los Errores

Erróneo se dice de aquel proceso operatorio que trastorna contenidos de conocimiento. El error se diferencia de la ignorancia en que esta es no conocimiento; es la ausencia de relaciones y operaciones sobre contenido alguno de conocimiento. (Muñoz y Velarde, 2000). El error se ejerce sobre un material ya dado -las integrales impropias, por ejemplo-; conlleva siempre contenidos de conocimiento, pero en su manipulación conceptual los trastorna y los ensambla incorrectamente, de manera que no se ajustan entre sí.

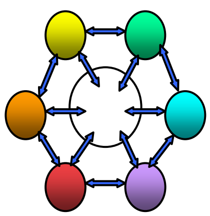
Como afirma Socas (1997), las dificultades en el aprendizaje de la matemática son debidas a múltiples situaciones que se entrelazan entre sí y que van desde una deficiente planificación curricular hasta la naturaleza propia de la matemática, que se manifiesta en sus simbolismos y en los procesos de pensamiento, pasando por el desarrollo cognitivo de los alumnos, así como por sus actitudes afectivas y emocionales. Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculo y se manifiestan en los alumnos en forma de errores.

Para este autor no debe entenderse al error únicamente como resultado de la falta de un conocimiento o una distracción, sino que debe ser considerado como evidencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado, aún cuando sus orígenes puedan ser diferentes. El análisis de los errores cometidos por los alumnos en su proceso de aprendizaje provee de una valiosa información acerca de cómo se construye el conocimiento matemático; por otro lado constituye una excelente herramienta para relevar el estado de conocimiento de los alumnos, imprescindible a la hora de realimentar los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación con el fin de mejorar los resultados.

Varios investigadores han elaborado clasificaciones de los errores en el aprendizaje de la matemática, ya sea por su naturaleza, su posible origen o su forma de manifestarse. Entre ellos, Radatz (1980) expone la siguiente:

a) *Errores debidos a dificultades en el lenguaje*: Se presenta en la utilización de conceptos, símbolos y vocabulario matemático, y al efectuar el pasaje del lenguaje corriente al lenguaje matemático.
b) *Errores debidos a dificultades para obtener información espacial:* Aparecen en la representación espacial de una situación matemática o de un problema geométrico.
c) *Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos:* Son los cometidos por deficiencias en el manejo de algoritmos, procedimientos, símbolos y conceptos matemáticos.
d) *Errores debidos a asociaciones incorrectas o a la rigidez del pensamiento:* Son causados por la falta de flexibilidad en el pensamiento para adaptarse a nuevas situaciones; comprenden los errores por perseveración, los errores de asociación, los errores de interferencia, los errores de asimilación.
e) *Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes:* Son producidos por aplicación de reglas o estrategias similares en contenidos diferentes.

A manera de cierre de los antecedentes del conflicto semiótico, es ilustrativo citar a Morin (1990) cuando afirma que "el pensamiento complejo no resuelve los problemas pero constituye una ayuda para la estrategia que puede resolverlos" (p.26). No existen pasos a modo de receta de cocina que permitan erradicar los errores en matemática, lo que si se puede es trabajar con procesos de reflexión durante la construcción progresiva de los conocimientos matemáticos.



CAPITULO III
CONSTRUCCIÓN DEL HOLOSIGNIFICADO DE INFINITO

Ningún pensamiento como el del infinito ha turbado tan profundamente el espíritu humano, ni ninguna otra idea ha estimulado tan intensamente su intelecto.
David Hilbert

CAPITULO III

CONSTRUCCIÓN DEL HOLOSIGNIFICADO DE INFINITO

1.- Introducción

En este capítulo se aborda la construcción del significado holístico del objeto infinito matemático, tal como se planteó en una de las pistas de itinerario descritas en el primer capítulo de este documento, lo cual implicó la realización de las siguientes actividades:

a) Un estudio epistemológico para describir y fundamentar el origen, la evolución y las aplicaciones del infinito, así como un estudio histórico sobre cómo se construyó este objeto matemático. Estas indagaciones aportarán referencias sobre el grado de dificultad potencial del conocimiento que se pretende examinar ya que las dificultades y obstáculos surgidos históricamente en la formación de los conceptos se reproducen, con cierta frecuencia, también en los alumnos. Cornu (1983) señala que, si ciertamente se presenta esta situación, se puede pensar que ciertos pasos comunes y ciertas circunstancias que, permitieron en la historia superar la dificultad, pueden dar indicios o pistas para poner a punto situaciones que hoy en día, posibilitaran a los alumnos afrontar dichos conflictos.
b) Una investigación didáctica donde se analizan y condensan las principales producciones generadas en el área de la educación matemática relacionadas con el infinito (Tall (1992), D'Amore (1996b), Penalva (1996), Waldegg (1996), Turégano (1996), Garbin y Azcárate (2002) y Sacristán (2003)).
c) Una revisión de los textos pre-universitarios y universitarios frecuentemente utilizados en el cálculo diferencial e integral en las ciencias administrativas y

contables de la Universidad de Carabobo con la finalidad de fijar el significado institucional de referencia y caracterizar su complejidad ontosemiótica en sus diferentes facetas: ostensiva, extensiva, intensiva, actuativa y validativa. Es conveniente señalar que no se incluye el material didáctico elaborado por los docentes de la Facultad, ya que se detectó que los enunciados, teoremas y ejercicios incluidos son tomados directamente de algunos de los libros de texto analizados por lo que la diferencia no es significativa. Para el análisis y comparación de los libros estudiados se recurrió al constructo "configuración epistémica" del EOS evidenciándose su potencia como herramienta de análisis y comparación de textos.

Los elementos de significado más representativos del infinito constituirán la base para delimitar el tipo de problemas que se incorporaran en el cuestionario y en el capítulo titulado "Significados personales puestos en juego por los alumnos durante la recolección de la información", se comparará el significado institucional de referencia con los significados que el grupo seleccionado de estudiantes universitarios desarrolló en el momento de resolver los cuestionarios, con la finalidad de detectar los conflictos semióticos de ciertos objetos matemáticos asociados con el *infinito*.

2.- Análisis Epistemológico del Infinito Matemático

El holosignificado de *infinito* no se puede construir sólo consultando los libros de texto de cálculo porque, por una parte, se encuentra el conocimiento matemático terminado y pulido con una apariencia perfecta, inequívoca y rigurosa, ocultando las dificultades y obstáculos que han hecho evolucionar el objeto matemático hasta institucionalizarlo y por otra parte, los textos portan concepciones de la noosfera del sistema educativo, de la idiosincrasia de los autores y otros significados que se inducen por la inserción de objetos didácticos para convertir el conocimiento en saber educativo.

Los estudios de tipo epistemológico ocupan un lugar fundamental en la reflexión de los investigadores interesados por el aprendizaje de la matemática ya que por un lado, permite diferenciar los métodos, las representaciones, el contexto y los conceptos asociados a la noción en una época histórica a partir del trabajo realizado por los matemáticos representativos y por otro lado, ayudan a comprender las dificultades, conflictos y malentendidos en el uso de los objetos matemáticos durante los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación de la ciencia exacta.

Con el término *infinito* se designa a un objeto matemático no ostensivo que en el contexto cotidiano denota algo muy grande, ilimitado o imposible de contar. El concepto de infinito ha sido el principal protagonista de dos de las mayores revoluciones en la historia matemática: la creación del cálculo infinitesimal y la teoría (transfinita) de conjuntos. La palabra infinito proviene del latín *infinitus*, que significa que no tiene ni puede tener fin ni término. El origen del símbolo ∞ es incierto, dado que su forma se asemeja a la curva lemniscata (del latín lemniscus, cinta) se ha sugerido que representa un lazo cerrado. También se cree posible que la forma provenga de símbolos alquímicos o religiosos (ciertas representaciones de la serpiente Ouroboros o los ojos de Dios que todo lo ven). En la literatura matemática, John Wallis es el primero en usar el símbolo ∞ para representar al infinito en su tratado "De sectionibus conicus" de 1655. La representación del concepto *infinito* tiene una relación formal con el sentido del orden de las letras en el alfabeto griego. En ese entonces no se usaba la figura cerrada sino abierta en uno de sus extremos para aparentar un pez. Los griegos asignaron el primer lugar en su alfabeto a α (alfa) por ser precisamente lo divino el lugar que merecía en su cosmogonía. El infinito ha representado para el hombre la lucha por discernir lo eterno, lo que apresa su voluntad enfrentada a la incomprensión de lo que no puede dominar (Allen, 1993).

Los orígenes de la noción de *infinito* en matemática se remontan y entroncan a Pitágoras (aprox. 569-500 A.C.). Los pitagóricos practicaban filosofía, misticismo y matemática, tres áreas que para ellos estaban inextricablemente relacionadas, mientras sostenían la firme convicción de que todo conocimiento matemático revela un invisible ángulo de la realidad. Entre otras creencias defendidas por los pitagóricos sobre los significados de cada número particular destaca la función que para ellos jugaba el número uno como generador inductivo de todo el sistema numérico, lo cual permite deducir que tenían una noción clara del llamado infinito potencial: dado cualquier número, por más grande que sea, siempre se puede obtener un número mayor simplemente sumándole la unidad.

En el siglo V A.C. el filósofo griego Zenón de Elea (495-435 A.C.) enunció las paradojas que lo han inmortalizado. En ellas trató de probar la imposibilidad del movimiento partiendo de la premisa de un espacio infinitamente divisible. Dichas aporías o paradojas pueden ser tratadas de forma natural (desde la formalización del concepto de límite) a través de la representación de convergencia de una serie infinita. Aquí también es la noción de infinito potencial la que juega el rol protagónico en contraposición al infinito actual, el cual tradicionalmente fue rechazado por matemáticos y filósofos hasta finales del siglo XIX.

La tradición matemática siempre había utilizado el infinito potencial en la forma que inauguraron Eudoxio (408-355 A.C.) y Arquímedes (287-212 A.C.), quienes para el cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas aplicaban el carácter potencial del infinito, no sólo para manipular cantidades arbitrariamente grandes, sino también en la consideración de cantidades extremadamente pequeñas, aquellas que aún siendo positivas pueden hacerse tender a cero en el límite.

Santo Tomás de Aquino negó la existencia de conjuntos infinitos argumentando que si se pudiese concebir simultáneamente todos los elementos de un supuesto conjunto infinito, podrían ser contados uno a uno, con lo que inevitablemente serían un número finito y se produciría una contradicción. Santo Tomás negaba la existencia del infinito en acto fuera de Dios, aduciendo para probar su tesis un argumento basado en la omnipotencia de Dios: Dios puede hacer lo que quiera, pero el hacer provoca la existencia de lo que es hecho, por lo cual no puede darse en todo y para todo sin límites aquello que produzca contradicciones (Crespo, 2005).

Mucho antes de Gauss, se dio la primera aparición conocida aunque tenue del infinito actual por intermedio de Galileo Galilei (1564-1642) quien dedujo la existencia de una correspondencia uno a uno entre los elementos del conjunto de números naturales $\{1,2,3,\ldots\}$ y aquellos llamados cuadrados perfectos $\{1,4,9,16,25\ldots\}$ Tal correspondencia puede ser presentada por la función $f(n)=n^2$. De esta manera al número 1 le corresponde el mismo 1, al número 2 le corresponde el 4, al 3 el 9 y así sucesivamente. Quedaba plasmado un hecho en apariencia paradójico: existen tantos cuadrados perfectos (los cuales constituyen un subconjunto propio de los números naturales) como números naturales.

En términos de la matemática actual, la correspondencia uno a uno usada por Galileo cumple con dos propiedades fundamentales que de hecho sirven para definir e identificar a todas las correspondencias de este tipo, también llamadas funciones biyectivas. La primera de tales propiedades consiste en que para todo par de elementos m y n del dominio de la función (en el presente ejemplo, para todo par de números naturales) se cumple que: $f(m) \neq f(n)$. La segunda propiedad es que todo elemento del conjunto de llegada de la función (en este caso el conjunto de los números cuadrados) es alcanzado por un elemento del dominio a través de la función. Esto significa que si m es el cuadrado de un número, existe un número natural n tal que $f(n) = n^2 = m$ dado m cuadrado, el número $n = (m)^{1/2}$ es el número natural que lo alcanza a través de la función f.

Cuando entre dos conjuntos existe una función biyectiva se dice que ambos tienen la misma cardinalidad, indicando con esto que ambos conjuntos tienen la misma cantidad de elementos, como es intuitivo dada la definición de correspondencia uno a uno o función biyectiva. Utilizando este lenguaje, lo que Galileo publicó en 1638 se traduce en la afirmación de que el conjunto de números naturales tiene la misma cardinalidad que un subconjunto propio. Es decir, se negaba el principio de que el todo es mayor que sus partes; principio no aplicable en realidad por estar lidiándose con un todo infinito.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) escribió en sus “Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano” lo siguiente: *Propiamente hablando, es verdad que hay una infinidad de cosas, es decir, que siempre hay más de las que podemos designar*. *Pero si se les toma como auténticos todos, entonces no hay número infinito, ni línea ni cualquier otra cantidad que sea infinita, como es fácil demostrar*. En rigor, el verdadero infinito sólo está en lo absoluto, que es anterior a toda composición y no está formado por adición de partes.

Aunque Leibniz en su creación del Cálculo Infinitesimal utilizó ampliamente al igual que Newton y sus antecesores griegos el infinito potencial, queda evidenciada su opinión con respecto al infinito actual, opinión que refleja el conocimiento establecido de su tiempo. En matemática no se dio ningún otro acercamiento al concepto de infinito hasta el siglo XIX cuando Bernard Bolzano (1781-1848), influenciado por los trabajos de Eudoxio y Galileo, vislumbró nuevas luces sobre la naturaleza de la infinitud. Bolzano comenzó por preguntarse si la propiedad aparentemente paradójica que había descubierto Galileo con respecto a conjuntos discretos (tales como el conjunto de números naturales, en donde está determinado cuál es el sucesor de cada elemento) también podía darse en conjuntos continuos sobre la recta real. Encontró efectivamente que se podía establecer una correspondencia uno a uno entre un intervalo de la recta y un subintervalo incluido en el mismo. En este sentido definió la función f(x)=2x, sobre el dominio cerrado [0,1]. La función es una bisección o correspondencia uno a uno entre su dominio y su conjunto de llegada, el intervalo cerrado [0,2], que a su vez contiene el dominio [0,1] como un subconjunto propio.

El infinito es una propiedad susceptible de ser atribuida a objetos que pueden ser contados o medidos. Algunas ideas surgen claramente del abordaje que realiza Bolzano del infinito.

a) Una multiplicidad es infinita si todo conjunto finito es sólo una parte de ella.

b) Si un matemático encuentra una cantidad mayor que cualquier número finito de unidades que ha elegido, la llamará infinitamente grande.

c) Si es tan pequeña que cualquier multiplicación finita es menor que la unidad tomada, la llamara infinitamente pequeña.

d) Aparte de estos dos tipos de infinitud y de las cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas de orden superior que se basan en esta idea, no existe para la matemática otro tipo de infinitud.

Bolzano, al referirse al infinito actual, lo denomina "mal infinito" y al infinito potencial lo llama " infinito como cantidad variable" (Crespo, 2005).

Surgió así en 1851 la publicación póstuma "Las paradojas del infinito" donde Bolzano se convertía en el primer matemático en defender la existencia del infinito actual, expresando que éste podía ser introducido en matemática de manera consistente, libre de contradicciones. Sin embargo es sólo hasta el trabajo solitario de treinta años de George Cantor (1845-1918) que se logró transformar casi todas las áreas de la matemática. Entre sus primeras contribuciones Cantor formalizó la definición de conjunto infinito. Se dice que un conjunto A es infinito si y sólo si existe una correspondencia uno a uno entre x y algún subconjunto propio S contenido en A ($S \subset A$).

Se trata precisamente de la negación del principio de que el todo es mayor que sus partes, principio válido sólo en conjuntos finitos. En estos términos, Galileo y Bolzano habían demostrado formalmente que el conjunto de números naturales y el conjunto de números reales contenidos en cualquier intervalo de la recta real son conjuntos infinitos. Pero en 1874, Cantor dio un decisivo paso adicional demostrando lo impensable hasta ese momento: la existencia de varios "tamaños" u órdenes de infinitud.

Cantor probó que es imposible establecer una correspondencia uno a uno entre el conjunto de números naturales y el conjunto de números reales entre el cero y el uno. En otras palabras, los números reales de dicho intervalo (y de hecho, de cualquier intervalo) no pueden ser etiquetados en una lista indefinida hasta el infinito de la forma A_1, A_2, A_3, K. Por lo tanto, la cardinalidad del continuum, la cantidad de puntos en cualquier segmento de recta real, es superior a la cantidad infinita de números naturales. Cantor designó con la letra aleph $\aleph$, la primera del alfabeto hebreo, y con un subíndice 0 [$\aleph_0$ (alef subcero)], al cardinal de cualquier conjunto que se pueda poner en biyección con el conjunto de los números naturales. En este caso se dice que el conjunto tiene potencia $\aleph_0$ y se denomina numerable. A $\aleph_0$ se lo llama número transfinito (Allen, 1993).

Al menos en el contexto matemático, la existencia de una entidad puede ser argumentada por su consistencia con el resto de las construcciones matemáticas ya establecidas. En este sentido, para Cantor era perfectamente consistente que el proceso de contar elementos de conjuntos finitos fuese extendido a elementos de conjuntos infinitos, como entidades completas y acabadas, a través de funciones biyectivas.

El estudio epistemológico de la noción de infinito permite reconocer que su génesis y proceso de institucionalización fue bastante difícil y controvertido y que la forma en que la comunidad matemática lo manipuló en cada época da origen a las diferentes facetas que generan la complejidad de este objeto matemático. Además se advierte que el conocimiento matemático no es el resultado de un proceso continuo y progresivo; por el contrario, la evolución del infinito matemático requiere de momentos de ruptura con conocimientos anteriores, se aprecian avances, retrocesos, desvíos, retornos dependiendo de las dificultades por vencer y obstáculos por superar en cada época.

2.1.- Algunos Aspectos de Consideración en el Estudio del Infinito

En un intento por discernir los elementos que subyacen en el concepto infinito y que afectan las maneras en que se concibe dicho objeto matemático se identifican los siguientes aspectos:

a) Existencia de diferentes tipos de infinito: El término infinito tiene múltiples significaciones según los diferentes contextos en los que se usa, ya sea para señalar un proceso, para identificar un atributo o como un objeto:

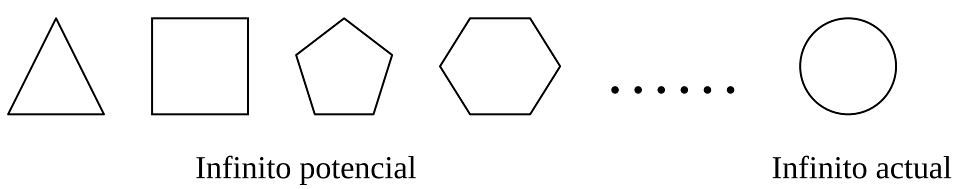
- Naturaleza dual del infinito: infinito potencial vs. Infinito actual (proceso vs. objeto).

Infinito potencial: La noción de infinito potencial se centra en la operación reiterativa e ilimitada, por muy grande que sea un número natural siempre se puede concebir uno mayor. La concepción de este infinito corresponde a una interpretación teleológica del infinito. El infinito potencial está vinculado a la reiteración de un proceso que nunca finaliza, dando lugar a numerosos problemas y paradojas, desde la de Aquiles y la tortuga a la de Zenón, sobre la imposibilidad del movimiento. Esta concepción del infinito potencial es la que está relacionada con la noción de límite.

Ambos conceptos sólo existen como tendencia, como posibilidad (en potencia), ya que los dos son inaccesibles, lo que implica que no deben considerarse como sinónimos de expresiones infinitas e ilimitadas (Ruiz, 2003).

Infinito actual: La noción de infinito actual está asociada a la imagen de totalidad, de completez y de unidad (Waldegg, 1996). Un proceso (potencialmente infinito en sus orígenes) se considera ahora acabado y los límites alcanzados. De manera intuitiva, si se considera los números múltiplos de 27 y los números naturales, ambos son infinitos, aunque "parece" que el primero es 27 veces más pequeño que el segundo, sin embargo ambos son infinitamente grandes. En términos lógicos se podría decir que el segundo está contenido en el primero y, teniendo el postulado de Euclides, que establece que el todo es mayor que las partes, ambos infinitos deberían ser distintos, pero no lo son, pues tienen el mismo tamaño. Se denomina tamaño de un conjunto a su cardinal, y el cardinal de ambos conjuntos es el mismo, como demostró Cantor.

Se reconoce que ambos tipos de infinito están relacionados puesto que el infinito actual es un proceso infinito terminado. Por ejemplo, si se considera una secuencia de polígonos regulares en los que se va aumentando el número de lados, se comienza con un triángulo equilátero, luego un cuadrado, un pentágono, un hexágono y así sucesivamente donde la circunferencia es el polígono regular con un número infinito de lados.



- Lo infinitamente grande (hiperreal) y lo infinitamente pequeño (infinitesimal)
- Conjuntos infinitos de diferente potencia: en particular conjuntos numerables vs. no numerables.

b) La importancia del contexto y situación matemática: El infinito se encuentra en una diversidad de contextos y ramas de la matemática: desde la geometría hasta la teoría de conjuntos, pasando por los conceptos de sucesiones, series y límites. Cada contexto y situación afectan la interpretación del infinito. Existen aproximaciones al infinito mediante representaciones geométricas o a través de procesos que pueden ser descritos en términos algebraicos (como en el caso de notaciones tales como $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$).

c) Procesos iterativos y recursivos: La noción de repetición es fundamental en el desarrollo del concepto del infinito. Matemáticamente la noción de iteración se relaciona con recursividad. Un algoritmo recursivo contiene intrínsecamente un número indefinido de iteraciones: es potencialmente infinito. Desde la perspectiva de la teoría APOS-acción, proceso, objeto y esquema (Dubinsky et al., 2005) con los conceptos que involucran procesos iterativos infinitos, una acción consiste en la ejecución de un número pequeño de iteraciones; la repetición de esta acción se interioriza en un proceso que una persona puede encapsular en un objeto ejecutando acciones sobre él. Cuando un individuo concibe el límite como inalcanzable y tiene una concepción de infinito potencial, posee un significado *proceso* de esos conceptos matemáticos.

d) Naturaleza del objeto matemático: Se deben discriminar dos concepciones matemáticas relacionadas con el infinito: lo discreto (e.g. los números naturales) y lo continuo (e.g. los números reales).

El estudio anterior ha mostrado que el infinito es uno de los objetos más importantes de la ciencia exacta a través del interés mostrado por ilustres productores del conocimiento matemático y que ha tenido un lento desarrollo dentro de la matemática e incluso en su enseñanza. Durante este crecimiento ha sufrido transformaciones progresivas según se ha ido ampliando el campo de problemas asociados. Regresando al objeto de esta investigación, se dice que un alumno comprende lo que es el infinito matemático cuando reconoce sus propiedades y los diversos registros de representación semiótica, lo puede relacionar con otros objetos matemáticos y lo usa en toda la variedad de situaciones-problema propuestas. A la interrogante ¿Qué es el objeto matemático *infinito*? o ¿Qué significa o representa la expresión *infinito*? se propone como respuesta: el sistema de prácticas (discursivas y operativas) que realiza una persona (significado personal), compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problema en los cuales aparezca una acción proyectada en lo posible pero no realizada.

3.- Investigación Didáctica sobre el Infinito

Para la realización de esta investigación que intenta producir una reflexión teórica sobre la naturaleza y el papel que juega el conflicto semiótico en la cronogénesis de los significados personales matemáticos se seleccionaron algunos expertos que, en diferentes momentos y empleando distintos enfoques y aproximaciones epistemológicas, han estudiado las dificultades y errores en la resolución de problemas donde el infinito está implícito. Este recorrido permitirá identificar, no solo los aspectos esenciales que definen y caracterizan el objeto matemático tomado como ejemplo ilustrativo de la investigación, sino también identificar otros elementos y consideraciones que fungen como unidades de anclaje significativo para la comprensión e interpretación del primero.

Mención especial merecen los trabajos de Fischbein (1987) quien se interesó no solo por la formación del concepto formal de infinito, sino por la aparición de intuiciones parciales sobre los procesos infinitos y por el efecto de la instrucción, organizando y evaluando experimentos de enseñanza de conjuntos infinitos. Según Fischbein, se debe comprender que en matemática se usan conceptos y proposiciones cuya validez ha sido establecida lógicamente y no empíricamente, y a veces se aceptan hechos que contradicen la forma natural de pensamiento, fuertemente arraigado, que impone la necesidad de un cuidado didáctico especial (Por ejemplo explicar por qué $5^0 = 1$ o $0!=1$).

Otra investigación de relevancia se tiene en Tall (1992) quien elaboró una teoría cognitiva relacionada con la transición del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado y donde estudia las inconsistencias entre el infinito cardinal de Cantor y las intuiciones. Recomienda el uso de entrevistas clínicas para determinar las creencias de los estudiantes sobre la naturaleza de los conceptos matemáticos y propone el estudio del infinito a través del *infinito medida* mediante el uso de los infinitesimales.

D'Amore (1996b) realizó una investigación sobre el sentido del infinito (estimaciones de cardinales transfinitos realizados intuitivamente) con grupos de estudiantes de diversas nacionalidades (colombianos, suizos e italianos) tanto a nivel secundario como universitario. A partir de entrevistas clínicas analizó varias categorías: el infinito visto como un número, el fenómeno de aplastamiento (considerar que todos los conjuntos infinitos son equipotentes entre si) y la divergencia entre el infinito aprendido en la escuela y la propia imagen mental. Este autor llega a la conclusión de que el sentido del infinito existe, pero que puede ser alcanzado sólo en casos extremadamente específicos. Señala que las dificultades que actualmente presentan los estudiantes en la comprensión de este objeto matemático son las mismas que afrontaron los matemáticos de la antigua Grecia. Adicionalmente presenta una bibliografía *in progress* de más de 280 títulos de investigaciones con interés histórico, epistemológico, filosófico y didáctico.

Penalva (1996) realizó una indagación exhaustiva y sistemática sobre las concepciones y dificultades de comprensión que algunos estudiantes con distinta formación tienen asociados al concepto de número cardinal de un conjunto infinito. Esto lo logra analizando la evolución de tales concepciones en la interacción en una situación de enseñanza, empleando mapas cognitivos para facilitar el estudio de las relaciones conceptuales de cada estudiante, así como la evolución de las mismas, poniendo de manifiesto las concepciones erróneas en cada entrevistado.

El propósito de la investigación de Waldegg (1996) fue la de medir la coherencia de las respuestas de los estudiantes ante situaciones vinculadas a los conjuntos infinitos, administrando un cuestionario a 95 alumnos de bachillerato del área de fisicomatemática (15-18 años). Llega a la conclusión de que las nociones intuitivas son un obstáculo para aceptar los conceptos formales (infinito actual).

Turégano (1996), en su estudio con alumnos de secundaria sobre las contradicciones que presentan las construcciones intuitivas del infinito con sus conceptualizaciones, encuentra que los esquemas de pensamiento son más de orden finitista que infinitista, la aceptación de los procesos infinitos como algo definido y acabado presenta dificultades y la imagen del infinito potencial es el mayor obstáculo con que se encuentran los estudiantes para concebir un proceso infinito como algo definido y acabado. El infinito actual se acepta en mucho menor grado y como algo que involucra indeterminación.

Un estudio posterior es el de Garbin y Azcárate (2002), quienes identifican las inconsistencias e incoherencias que manifiestan los alumnos de 16-17 años en relación con sus esquemas conceptuales asociados al concepto *infinito actual*, contextualizados en problemas expresados en lenguajes matemáticos diferentes: verbal, geométrico, gráfico, algebraico y analítico. Su trabajo contribuye al debate de la problemática del infinito en su dualidad potencial-actual. Como instrumentos de recogida de datos utiliza dos cuestionarios administrados a 80 alumnos de 2° de bachillerato de tres centros educativos categorizándolos según las líneas de coherencia previamente establecidas.

Una interesante investigación que combina el concepto de infinito y paradoja es la de Sacristán (2003), en la que se trabajó procesos infinitos en un ambiente de exploración computacional con el fin de ayudar a los estudiantes a experimentar diversos contextos y construir diversas representaciones externas del concepto e interactuar con ellas. Particularmente, exploró algunas sucesiones y series infinitas mediante figuras geométricas recursivas, específicamente, la curva de Koch (copo de nieve) que condujo a los estudiantes a una paradoja: el perímetro infinito está formado por segmentos de longitud cero, al decir: la longitud de cada segmento era dada por la fórmula $1/3^n$, un valor que se aproxima a cero a medida que n crece.

En este momento es pertinente aclarar que todos los autores consultados coinciden en que los estudiantes suelen presentar: (a) Una comprensión lábil del infinito matemático, (b) Una marcada generalización de propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos, (c) En muchos casos apelan a significados contradictorios y (d) Tienen serias dificultades de conceptualización cuando se enfrentan con problemas que implican esta noción de elevada complejidad ontosemiótica, por lo que interesa señalar los siguientes aspectos:

1) Esas investigaciones tienen como eje organizador la reflexión sobre el infinito actual.
2) En este documento doctoral se utilizan las integrales impropias como contexto para la recolección de información (la mayoría de los investigadores emplean como situación-problema variaciones de la paradoja de Zenón de la divisibilidad infinita en distintos registros de representación semiótica, límites de sucesiones y series infinitas trasladándolos a experiencias empíricas).
3) El aporte que se pretende desarrollar, respecto a los trabajos citados, es que se dirige al estudio de la dinámica de los significados de los objetos personales matemáticos incorporando el pensamiento complejo en el análisis realizado.
4) En la actual investigación se abandona la noción de intuición por significado personal no formal o simplemente significado convencional, entendido como el significado regularmente asociado a una expresión.

4.- Determinación del Significado Institucional de Referencia del Infinito

Con el estudio epistemológico reseñado en los párrafos anteriores se ha buscado resaltar la variedad de investigaciones realizadas, desde marcos teóricos diferentes, relacionados con el infinito matemático. De igual forma se encontró información dedicada específicamente a la intuición del infinito matemático donde se hacen aportaciones al conocimiento de los significados personales expresados por los estudiantes. Además se pone de manifiesto lo intuitivamente contradictorio que resulta ser este concepto y se evidencian conflictos semióticos en los ejercicios/problemas/actividades en que está presente esta noción.

En esta sección se aborda con detalle el significado institucional del infinito matemático presentado en los libros universitarios, dedicados a ese subsistema educativo y tipo de alumno para cumplir con uno de los objetivos específicos planteados. El propósito es identificar aquellos elementos de significado más importantes del infinito que aparecen en algunos textos utilizados en los cursos de cálculo para estudiantes de ciencias administrativas y contables. Se tomará ese significado como referente institucional, que al compararlo con los significados personales puestos en juego por los alumnos entrevistados, servirá de base para la identificación de los conflictos semióticos implicados en la transición del pensamiento matemático elemental al pensamiento matemático avanzado.

En esta investigación se interpretará el *infinito* como una entidad abstracta que emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas. La muestra de libros de texto se ha elegido en base a los siguientes criterios:

a) La exposición de los conocimientos de una forma clara, diagramada, con gráficos, ejemplos didácticos, aplicaciones y ejercicios recomendados a los alumnos.
b) El reconocido prestigio de su autor dentro del cálculo infinitesimal y la geometría analítica y su experiencia docente.
c) El número de ediciones del libro o el hecho de que haya sido traducido a otros idiomas.
d) Su utilización por la mayoría de los profesores de Matemática I y Matemática II en los encuentros educativos.
e) El hecho de que no requiere un nivel avanzado de conocimiento en matemática para su lectura.

En estos libros se ha analizado los capítulos referidos a: conjuntos no acotados, límites, formas indeterminadas relacionadas con infinito, integrales impropias de segunda especie y áreas de regiones planas no acotadas limitadas por curvas en coordenadas cartesianas. Se ha llevado a cabo un análisis de contenido aplicando los siguientes pasos: (a) Una primera lectura, clasificando el contenido en definiciones y propiedades; representación gráfica, tipos de problemas y (b) Organizando la información en cuadros con el fin de tener una información resumida que permitirá realizar una comparación con los significados manifestados por los agentes participantes.

En este contexto de reflexión los libros seleccionados para el estudio son los siguientes:

Texto I: Dávila, A. et al.(1996). *Introducción al cálculo.* Venezuela: McGraw-Hill.

Texto II: Thomas, G. (1959). *Cálculo infinitesimal y Geometría Analítica.* Madrid: Aguilar.

Texto III: Stewart, J. (1986). *Cálculo.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Texto IV: Edwards, C. (1994). *Cálculo con geometría analítica.* México: Prentice Hall.

Texto V: Leithold, L. (1982). *El Cálculo.* México: Harla.

Texto VI: Larson, R. et al. (1995). *Cálculo y geometría analítica.* Vol. I. España: McGraw-Hill.

Texto VII: Budnick, F. (1990). *Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales.* México: McGraw-Hill.

Texto VIII: Stein, S. (1982). *Cálculo y geometría analítica.* México: McGraw-Hill.

Texto IX: Baldor, A. (1981). *Álgebra.* Madrid: Cultural Centroamericana, S.A.

En lo que sigue se describen los elementos de significado extensivos, intensivos, ostensivos, actuativos y validativos de objetos donde el infinito está implícito, usualmente utilizados en la enseñanza a licenciados en administración y contaduría en una muestra representativa de libros de texto destinada a estos estudiantes.

4.1.- Elementos de Significado Extensivos

Problemas en los que el infinito matemático está implícito.

De los libros de texto se han extraído los siguientes tipos diferenciados de problemas, que en su conjunto definen los contextos, situaciones o problemas relativos al infinito matemático y que permiten construir el holosignificado relacionado con los elementos extensivos. A tal efecto se escogieron algunos ejemplos para ayudar al lector a comprender esta categorización:

a) Conjuntos no acotados

Un primer tipo de problemas en donde surge la noción de infinito matemático es el de conjuntos no acotados. El siguiente es un ejemplo típico de esta clase de problemas.

Realice la representación en la recta real del siguiente conjunto

$A = \{x \in \Re \,/\, x \in (2,\infty)\}$

b) Formas indeterminadas relacionadas con el infinito

Una segunda clase de problemas es el estudio de las formas indeterminadas relacionadas con el infinito. A continuación se reproduce un ejemplo de un problema que se plantea en los libros de texto vinculado con las indeterminaciones ∞/∞.

Evaluar $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x^2 + 1}$

c) Integrales impropias

Un tercer tipo de problemas, que tiene estrecha relación con los dos anteriores, es el de las integrales impropias, entendidas estas como aquellas integrales que no cumplen con alguna de las hipótesis del Teorema Fundamental del Cálculo: (a) El integrando debe ser continuo $\forall\ x \in [a,b]$, (b) El intervalo de integración debe estar acotado. El siguiente es un ejemplo de este tipo de problemas.

Evaluar $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

d) Área de regiones planas no acotadas

Una cuarta clase de problemas es la interpretación geométrica de las integrales impropias: el cálculo del área de regiones planas no acotadas limitadas por curvas continúas en coordenadas cartesianas. A continuación se trascribe un ejemplo de este tipo de problemas.

Calcular el área bajo la curva $y = 1/x^2$ *con* $x \in [1,+\infty)$

Contextos en los que el Infinito Matemático está Implícito.

Los contextos principales donde intervienen objetos matemáticos relacionados con el infinito son el estadístico, el económico y el demográfico. La no utilización de contextos podría inducir al alumno pensar que los objetos matemáticos son entes abstractos que no tienen aplicabilidad en la cotidianidad.

4.2.- Elementos de Significado Intensivos

A continuación se describe brevemente como es introducida la noción de *infinito* en varios de los textos analizados:

Elementos intensivos del Infinito Matemático

Texto II pag.12	Se usa el símbolo ∞ para representar el infinito. En las operaciones del álgebra y en las transformaciones de cálculo no se puede operar con este símbolo como se opera con los números o las variables.
Texto IV Pag. 4	El símbolo ∞, que denota infinito, es simplemente una convención de notación y no representa a un número real. La recta real no tiene extremos en infinito. El uso de este símbolo es motivado por la descripción breve y natural. Por ejemplo $[2, \infty)$ equivale a $x \geq 2$ o $(-\infty, 1)$ equivale a $x < 1$. (Sin embargo la primera notación tiene mayor valencia instrumental ya que permite plantear operaciones que no se pueden realizar con la segunda).
Texto V Pag.7	Usaremos el símbolo $+\infty$ (más infinito o infinito positivo) y el símbolo $-\infty$ (menos infinito o infinito negativo); sin embargo, se debe tener cuidado de no confundir estos símbolos con números reales, ya que no obedecen las propiedades de estos últimos.
Texto III Pag. 5	La expresión (a,∞) denota al conjunto de todos los números que son mayores que "a", así que el símbolo ∞ simplemente indica que el intervalo se extiende indefinidamente en la dirección positiva.
Texto IX Pag. 231	El símbolo ∞ se llama infinito y no tiene un valor determinado; ∞ no es una cantidad, sino el símbolo que usamos para expresar, abreviadamente el principio anterior.
Texto I Pag. 10	El conjunto Z es un conjunto infinito $\{-\infty, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., +\infty\}$ Al escoger un número entero en la recta, siempre es posible encontrar un sucesor lo cual se indica con puntos suspensivos sugiriendo que sigue indefinidamente.

Texto III Pag. 219: El símbolo ∞ no es un número, pero la expresión $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ a menudo se lee en la forma "El límite de f(x), cuando x tiende a a es infinito" o "f(x) se vuelve infinito cuando x tiende a a".

Es oportuno señalar que Acevedo (2007) considera a las expresiones "tiende", "límite por la derecha", "aproximarse por la izquierda" como metáforas fosilizadas, en el sentido que la institución matemática las considera como expresiones literales y no es conciente de su origen metafórico. Es más, dichas expresiones no tienen expresiones alternativas si no se quiere utilizar un lenguaje "impreciso", lo que indudablemente contribuye a generar conflictos semióticos de tipo lingüístico.

Adicionalmente, de los nueve textos consultados cinco presentan aclaratorias sobre el símbolo infinito, alertando al estudiante de que no se trata de un número y como no se puede operar con el infinito de la misma forma que con los números reales entran en juego las indeterminaciones:

Elementos intensivos del Objeto Indeterminación

Texto I Pag. 228: Es una expresión cuyo valor no se puede establecer en forma directa y que depende del límite específico en el cual se presenta.

Texto IX Pag. 232: Interpretación de la forma 0/0. Considerando esta forma como el cociente de la división de 0 (dividendo) entre 0 (divisor), tendremos que el cociente de esta división tiene que ser una cantidad tal que multiplicada por el divisor 0 reproduzca el dividendo 0, pero cualquier cantidad multiplicada por cero da cero; luego 0/0 puede ser igual a cualquier cantidad. Así pues la expresión 0/0 es un valor indeterminado

Se incluye el significado institucional de referencia del objeto matemático *indeterminación* porque se tiene la impresión de que los alumnos relacionan incorrectamente *infinito* con *indeterminado* (conflicto semiótico de tipo conceptual).

4.3.- Elementos de Significado Ostensivos

Para la explicación de los elementos ostensivos se empleará la siguiente notación:

r^m: registro semiótico (m = 1,2,3,...)

R^m: representación semiótica

Un ejemplo adaptado al objeto matemático de esta investigación, a partir de la función f(x) = 3/(x-2) es el siguiente:

1) Registro semiótico verbal (r^1): La función crece sin tope (crece sin límite, crece indefinidamente) cuando x tiende o se aproxima[3] progresivamente a 2 por la derecha.

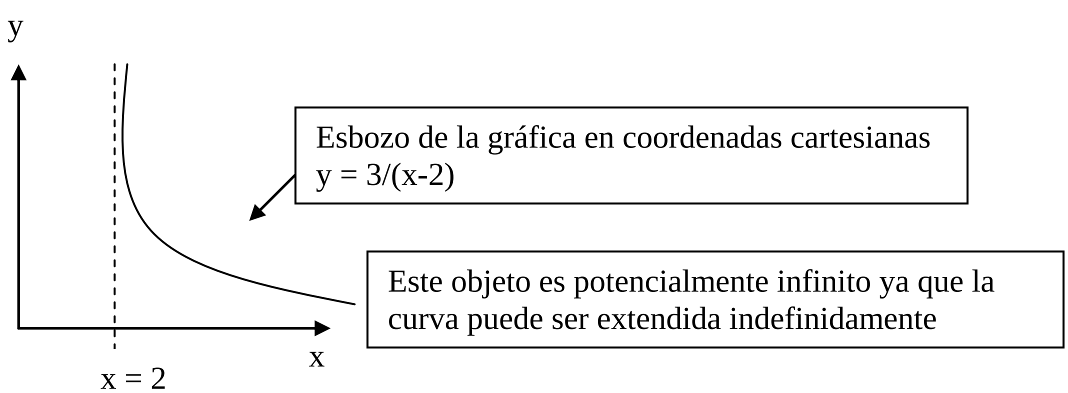
2) Registro semiótico numérico (r^2): Aproximación a 2 con valores mayores que 2 ($x \to 2^+$)

x	3,0	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001	2,00001
f(x)	3	6	30	300	3000	30000	300000

Esta tabla recoge algunos valores de la función racional y = 3/(x-2) en diferentes puntos cercanos o próximos a 2 (El estudiante hace una conjetura de la tendencia a infinito a partir de un número pequeño de puntos)

3) Registro semiótico analítico (r^3): $\lim_{x \to 2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty$

4) Registro semiótico gráfico (r^4): En un diagrama cartesiano:



5) Registro semiótico geométrico (r^5): El área comprendida entre la curva y = 3/(x-2), el eje "x" y a la derecha de la recta vertical x =2 es infinita.

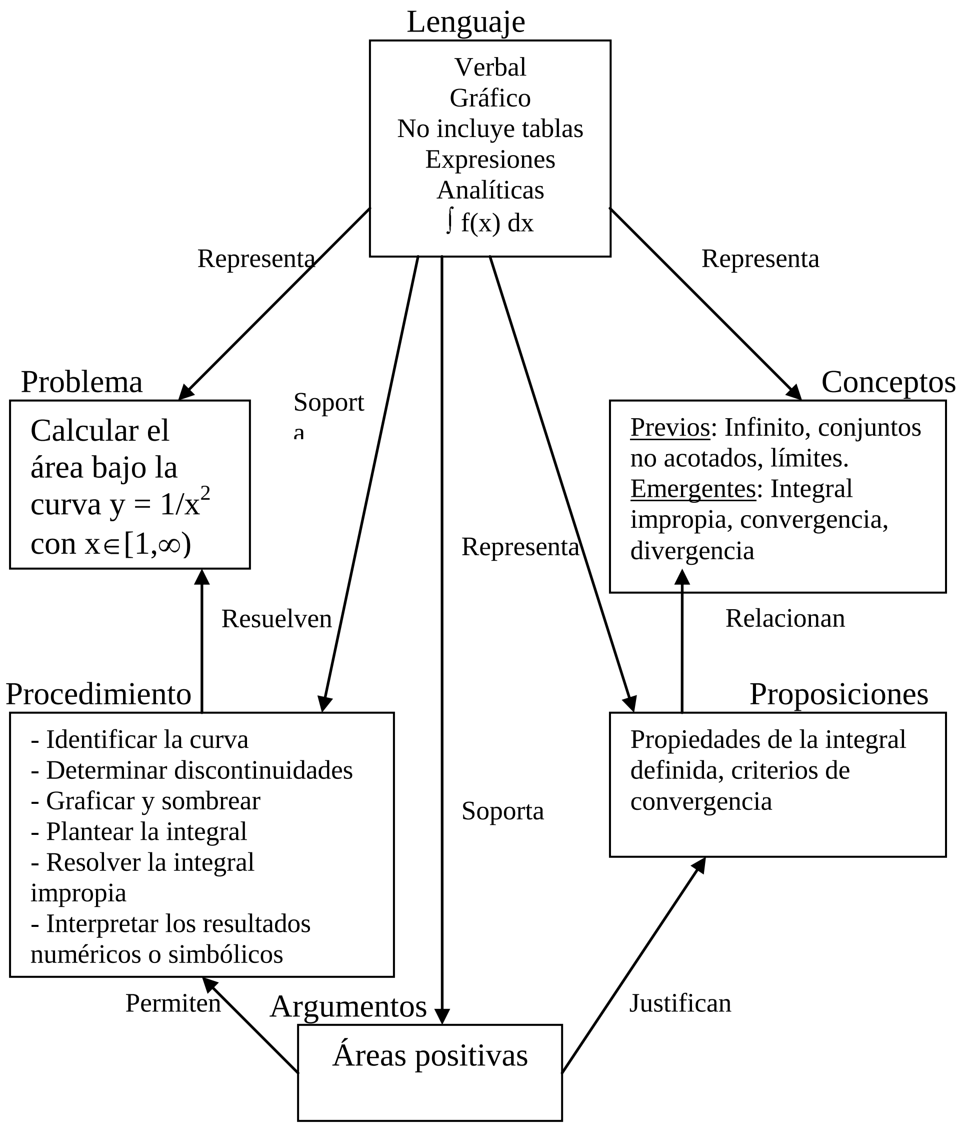
[3] El proceso de aproximación a una cantidad dada es un proceso potencialmente infinito.

4.4.- Elementos de Significado Actuativos

La mayor parte de los libros presentan técnicas concretas para resolver los problemas planteados, que son objeto de enseñanza en forma explícita o implícita. De nuevo en estos elementos actuativos se ponen en relación diferentes elementos ostensivos e intensivos con los problemas (elementos extensivos) en que se aplican.

Como en el cuestionario se van a utilizar ciertos objetos matemáticos en donde el *infinito* está implícito se consideró conveniente incluir en esta parte de la investigación una configuración epistémica del tema de cálculo de áreas de regiones planas no acotadas por curvas continuas en coordenadas cartesianas propuestas en el texto III.

Figura 3. Configuración epistémica asociada al cálculo de áreas de regiones planas no acotadas



Fuente: Figura basada en Godino (2006)

…odino (2002) y muestra las diferentes conex… …ntidades matemáticas. La situación-problema de calcular el área de la región plana bajo la curva $y = 1/x^2$ para todo x mayor o igual a uno, implica la conversión de varios tipos de registros semióticos: verbal, gráfico, analítico. Sin embargo, en el texto consultado el registro numérico en forma tabular no aparece reflejado. Para la resolución de la actividad se requieren conocimientos previos: conjuntos no acotados, límites infinitos y la definición de la integral como el límite de una suma surgiendo conceptos emergentes: integral impropia, convergencia y divergencia. Indudablemente que tales elementos intensivos se vinculan con las propiedades de la integral definida, los criterios de convergencia, el teorema fundamental del cálculo y otros argumentos relacionados que permiten formular un procedimiento o algoritmo para calcular el área de esa región plana no acotada: Identificar la curva, determinar si la función presenta una discontinuidad esencial en el intervalo de integración mediante el cálculo del dominio, graficar y sombrear el área de la región, plantear y resolver la integral impropia.

4.5.- Elementos de Significado Validativos

De los elementos validativos incluidos en el significado de referencia, se prescinde de las demostraciones formales porque la mayoría de los alumnos no poseen los elementos básicos matemáticos que sirven de apoyo para una validación formal.

El siguiente cuadro presenta una comparación entre los nueve textos seleccionados. Cada fila presenta un aspecto considerado para realizar el análisis de contenido. Así por ejemplo, ningún libro de texto consultado diferencia el infinito potencial del actual.

Cuadro 2. Comparación de Textos

	Textos								
Descripción	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Indica la definición de infinito (elemento intensivo)	x	v	v	x	x	v	x	v	v
Diferencia el infinito potencial del actual	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Presenta la conversión entre el registro verbal y el analítico en los ejercicios de límite	v	v	v	v	v	v	x	v	x
Incluye el tema de las integrales impropias	v	v	v	v	v	v	x	v	x
Presenta ejercicios contextualizados a las	x	x	x	v	v	x	x	x	x

ciencias administrativas y contables (elementos extensivos)									
Explica por qué el área bajo una curva infinita puede ser finita	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Incluye definición de indeterminación (elemento intensivo)	v	x	x	x	x	x	x	x	x
Incluye definición de infinitésimo	x	v	x	x	x	x	x	x	x
Introduce todos los registros de representación semiótica e invita al lector a practicar conversiones de un registro a otro	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Fuente: Elaboración propia. Leyenda: x: No; v: Si.

En los textos analizados, pese a su presentación organizada y coherente:

1) No se hace una diferenciación entre el infinito potencial y el infinito actual. Es decir, no se enfatiza en el estudio de la diferencia entre la operación reiterativa de que dado un número natural siempre es posible concebir uno mayor y otra a la existencia de varios infinitos, de distintos tamaños basada en la teoría transfinita de conjuntos. La falta de distinción de estas dos nociones se puede configurar en un conflicto semiótico en la construcción de otros objetos matemáticos que involucren dichas nociones.
2) No se proponen ejemplos/problemas/actividades cuyo objetivo sea la conversión entre los diversos registros de representación semiótica: verbal-analítico, analítico-numérico, numérico-gráfico, gráfico-geométrico. Con el agravante de que la conversión de unos sistemas a otros requiere un aprendizaje específico.
3) No se ofrecen explicaciones de situaciones contraintuitivas o paradójicas donde el infinito este implícito. Por ejemplo: ¿Por qué el área bajo una curva de longitud infinita puede tener un valor finito? La implicación es que se podría pintar el área bajo esa curva con una cantidad finita de pintura pero ninguna cantidad de pintura alcanzaría para trazar dicha curva. (Dualidad potencial/actual del infinito). En el texto IV (p. 519) expresan "*Tal vez le sorprenda que tal área realmente puede ser finita, y aquí mostraremos cómo determinar tales áreas; es decir, cómo evaluar integrales impropias*" pero no proporcionan argumentos por qué ocurre este

fenómeno. Esta cuestión será tratada en dos preguntas del cuestionario en la fase de recolección de información.

4) No se presenta la definición de *indeterminación*, solo se desarrolla una tipología y se sugiere el procedimiento de resolución. Es decir, se le otorga prioridad a los elementos actuativos que a los intensivos.
5) Tratan de imponer un único punto de vista que privilegia la resolución de problemas "tipo" produciendo un significado institucional restringido si se contrapone a un análisis conceptual y epistemológico de las nociones involucradas.
6) Si se quiere que los alumnos aprecien la utilidad y alcance de la matemática en la cotidianidad, seria necesario mostrar en los textos los diferentes campos de problemas situados a la profesión. Se observa que no existen suficientes actividades/problemas/ejemplos contextualizados a las ciencias administrativas y contables de las integrales impropias. Es decir, no hay suficientes actividades/problemas/ejemplos expuestos y propuestos sobre el valor presente de una anualidad perpetua, la función de densidad de probabilidad y valor esperado.
7) No se explica la definición de los objetos sino que se presenta operacionalmente o como un proceso. Por ejemplo, la definición delta-épsilon de límite de una función (Definición de Weierstrass) está planteada en términos de proceso y no en términos de objeto.
8) No se promueve la construcción de significados a través de actividades cognitivas fundamentales vinculadas a la semiótica (representación, tratamiento, conversión).
9) Ofrecen pocas situaciones no matemáticas que permitan a los alumnos conocer el infinito matemático en sus múltiples relaciones y concatenaciones contextuales, especialmente en correspondencia con situaciones de la cotidianidad. (Deficiencia en los elementos extensivos).

Del análisis anterior, se concluye que la primera impresión que se tenía sobre el significado institucional pretendido es que se presenta incompleto y confuso dejando al estudiante la realización de la conversión de los distintos registros de representación semiótica.

5.- La Dinámica del Significado de Infinito en las Carreras de Ac-Cp de la Universidad de Carabobo

En la figura 4 se presenta la dinámica del significado del objeto matemático no ostensivo *infinito* en los estudiantes de las carreras de AC-CP de FaCES-UC. Como se puede apreciar los alumnos parten con una noción de *infinito* coincidente con el significado parcial dado en la cotidianidad (sin fin, muy grande – en sus variadas manifestaciones semánticas). Se denomina significado parcial porque está sujeto a mejora como consecuencia de un proceso permanente y dinámico de negociación y conciliación de significados. En la asignatura Introducción a la Matemática, primer peldaño que el estudiante del nivel medio enfrenta en su ingreso a la universidad, se identifican y caracterizan los conjuntos no acotados, y allí es donde surge el primer conflicto semiótico porque el símbolo ∞ lo interpretan como un número y le dan un tratamiento algebraico, dicho malentendido se propaga a las siguientes asignaturas de corte cuantitativo. En Matemática I siguen trabajando con esta noción en el cálculo de límites al infinito, asíntotas y las formas indeterminadas.

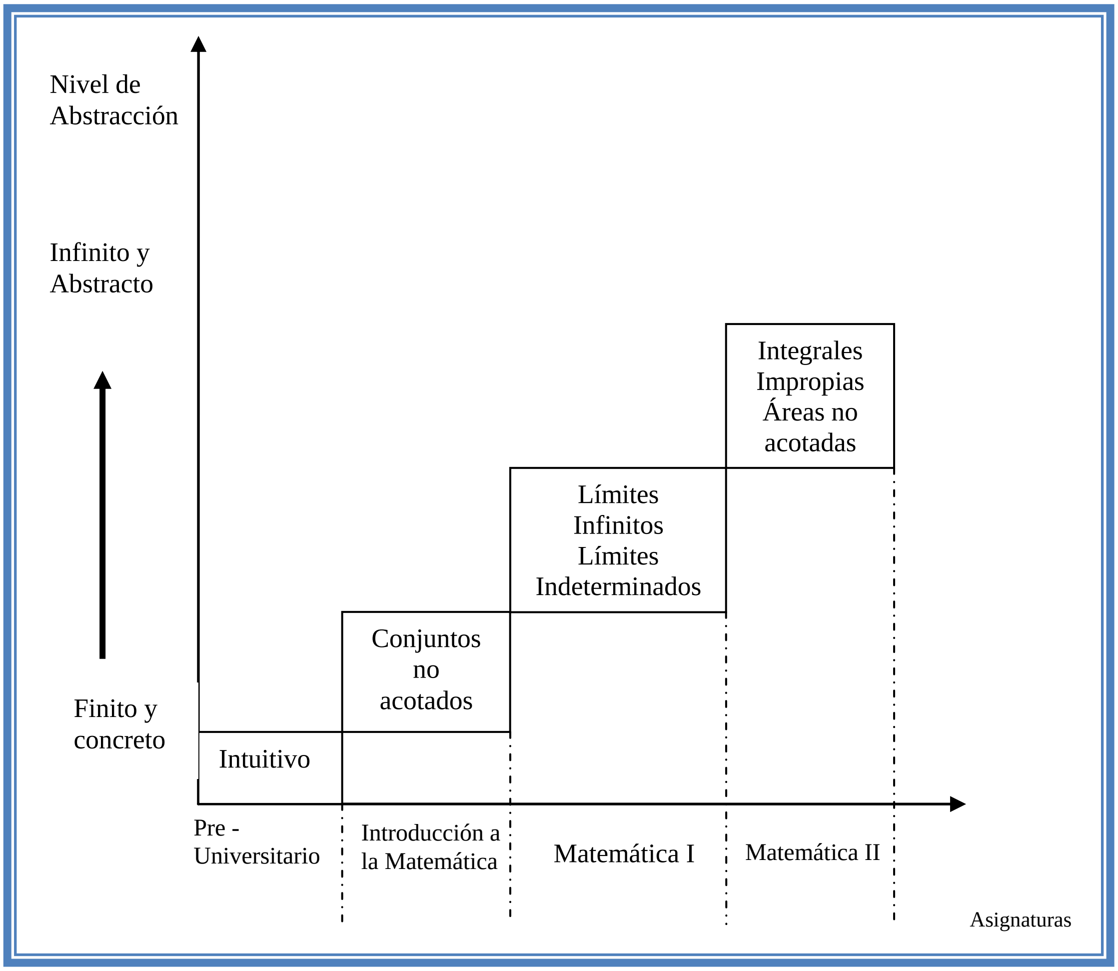


Figura 4. Dinámica del objeto infinito. ***Fuente:*** Elaboración propia

En la asignatura Matemática II emplean la noción de límite cuando tienen que calcular integrales impropias de segunda especie y su aplicación geométrica en el cálculo de áreas de regiones planas no acotadas limitadas por curvas en coordenadas cartesianas (aquí se presenta otro conflicto semiótico ya que no proporcionan argumentos para explicar por qué el área bajo una curva infinita puede tener un valor finito, o en otras palabras cómo es factible rellenar con pintura una región plana de una curva infinita). Esta es la última matemática que tiene que cursar. Luego trabajan tanto en Estadística I con poblaciones infinitas como en Estadística II con la formulación matemática de la función de densidad de probabilidad y valor esperado. En los problemas de aplicación la significación de que una variable tienda a infinito se enseña en forma diferente, interpretándose que dicha variable es lo suficientemente grande con respecto a otra variable, de tal manera que al comparar una con la otra, la segunda puede ser despreciada con respecto a la primera. Se puede inferir entonces que el término *infinito* designa a un macrosistema de prácticas operativas y discursivas que progresivamente se va enriqueciendo a medida que avanza el proceso de estudio de la matemática.

Con la figura anterior también se pretende ilustrar que de las operaciones más elementales se avanza hacia operaciones más abstractas, de lo finito se avanza hacia el infinito. Los alumnos van adquiriendo mayor confianza en los contenidos formales y cada vez menos se apoyan en los significados adquiridos en la cotidianidad.

6.- Análisis Microscópico de los Libros de Texto

Para Godino, Batanero y Font (2006), los tres tipos de entidades primarias consideradas (extensivas, intensivas y ostensivas) juegan el papel de expresión y contenido en la trama compleja de funciones semióticas, resultando por tanto nuevos tipos de funciones. En concreto se ha utilizado la técnica y la notación que se propone en Font (1999). Para el proceso de análisis se considerará como expresión o contenido solamente la faceta extensiva-intensiva del lenguaje matemático y, además se destacará el carácter ostensivo que tiene dicho lenguaje.

Teniendo en cuenta la información aportada se presenta un resumen de las funciones semióticas en el siguiente cuadro basado en Font (1999):

	Ext	Int	Not
Ext	FS1	FS2	FS3
Int	FS4	FS5	FS6
Not	FS7	FS8	FS9

Ext:extensiva
Int: intensiva
Not: ostensiva
FS: función semiótica

FS1: FS relaciona una entidad extensiva con otra entidad extensiva

FS2: FS relaciona una entidad extensiva con la entidad intensiva a la cual pertenece

FS3: FS relaciona una entidad extensiva con un signo que la representa

FS4: FS relaciona una entidad intensiva con una entidad extensiva

FS5: FS define una entidad intensiva de manera diferente

FS6: FS relaciona una entidad intensiva con un signo que la representa

FS7: FS relaciona un signo con la entidad extensiva que representa

FS8: FS relaciona un signo con la entidad intensiva que representa

FS9: FS cambia la notación de una entidad (extensiva o intensiva)

A continuación se ilustra con ejemplos de cálculo de áreas:

1) Si las palabras "área de una región plana no acotada" se relaciona con el dibujo de una curva en coordenadas cartesianas, se tiene una función semiótica con una expresión ostensiva y contenido extensivo.
2) Si las palabras "área de una región plana no acotada" se relaciona con las palabras "interpretación geométrica de una integral impropia de segunda especie" se tiene una función semiótica con una expresión ostensiva y un contenido intensivo.
3) Si las palabras "área de una región plana no acotada" se relaciona con $\int_0^\infty f(x)dx$ se tiene una función semiótica con una expresión ostensiva y contenido notacional.
4) Si se relaciona "interpretación geométrica de una integral impropia de segunda especie" con las palabras "área de una región plana no acotada" se tiene una función semiótica con una expresión intensiva y un contenido notacional.
5) Si se toma "interpretación geométrica de una integral impropia de segunda especie" y se relaciona con el dibujo de una curva en coordenadas cartesianas se tiene una función semiótica con una expresión intensiva y un contenido extensivo.
6) Si se tiene un área de una región plana y se relaciona con "esto representa el área de una región plana" se tiene una función semiótica con una expresión extensiva y un contenido intensivo.
7) Si se ve el dibujo de una curva en coordenadas cartesianas, se tiene una función y se relaciona con el dibujo de otra curva en coordenadas cartesianas, se tiene una función semiótica con una expresión extensiva y un contenido extensivo.

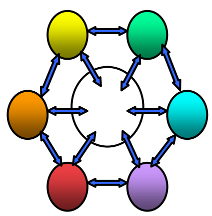
Los objetos matemáticos normalmente son clases de objetos que pertenecen a clases que los contienen. Las entidades matemáticas pueden ser consideradas como objetos o como clases de objetos, según el contexto. Esta clasificación de las entidades matemáticas en extensivos, intensivos y notacionales resulta muy práctica ya que se puede aplicar tanto a las representaciones ostensivas (dominio de lo público) como a las mentales (dominio de lo privado).

7.- A Modo de Conclusión

El análisis teórico se organizó en base a tres componentes: la epistemológica, la cognitiva y la instruccional. Esto permitió tener una visión compleja de la problemática de la brecha entre el objeto personal y el institucional. La dimensión epistemológica permitió conocer las dificultades que enfrentaron los hombres a lo largo de la historia en la construcción de los significados asociados al infinito matemático. Este conocimiento brindó información acerca de los obstáculos y dificultades que enfrentan los estudiantes cuando abordan objetos matemáticos donde el infinito está implícito. Por tal razón se decidió dar una mirada histórica desde el pensamiento de Pitágoras hasta las aportaciones de Cantor. Esta revisión tomó la historia como fuente para obtener posibles interpretaciones de los conflictos ontosemióticos puestos en juego por los alumnos.

La componente epistemológica y la instruccional aparecen interrelacionadas en la reflexión teórica compleja. El estudio de los elementos de significado ostensivos, intensivos, actuativos del infinito, a que tipo de problemas prácticos responden y que tipo de herramientas fueron utilizadas para resolverlos, permitiran realizar una comparación con las prácticas operativas y discursivas puestas en juego durante la etapa de recolección de información.

En la componente cognitiva se incluyeron diversos aspectos teóricos que fueron elegidos para dar interpretación sobre las dificultades que tienen la mayoría de los estudiantes para comprender ciertos objetos matemáticos en donde el infinito está implícito. Se abordaron diversos marcos teóricos, pero el estudio se centró en el EOS (Godino, 2006), en la TRS (Duval, 1995) y particularmente en el pensamiento complejo (Morin, 1999c) para ofrecer una explicación compleja de la problemática planteada.



CAPITULO IV
LA METÓDICA

El método es un discurso, un ensayo
prolongado de un camino que se piensa
Edgar Morin

No puedo dudar de que dudo,
por lo tanto, pienso. Si pienso, luego existo.
René Descartes (1596 – 1650)

Lo importante es no dejar de preguntar
Albert Einstein

CAPITULO IV

LA METÓDICA

1.- Introducción

En este capítulo se presenta la metodología que indica el camino transitado para el desarrollo de la Tesis Doctoral. En la estructuración del mismo se han incluido los siguientes aspectos: la modalidad de la investigación y su especificidad, el análisis ontológico-semiótico como técnica para determinar significados institucionales y personales y sus interrelaciones, la descripción de los atributos que caracterizan a los participantes en la investigación y su contexto, las técnicas y los instrumentos de selección de significados: el proceso de construcción del cuestionario, el análisis a priori de los ítems, los objetivos y el guión de la entrevista semiestructurada y el proceso de elaboración de las redes semánticas. Finalmente se incluyen los procesos de triangulación que se pretenden ejecutar, las técnicas de presentación de la información y la validez de contenido y la confiabilidad del estudio.

Los métodos de investigación son subsidiarios de los problemas planteados y éstos a su vez dependen de los instrumentos teóricos con los cuales se analiza la actividad educativa objeto de estudio. En este caso en particular el marco teórico referencial toma en cuenta la faceta cognitiva puesta en juego en los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación de la matemática, introduciendo elementos ontológicos y semióticos adaptados a los objetivos de la investigación educativa.

La elección de la metódica de investigación es fundamental para toda elaboración cognoscitiva por lo tanto depende de la elucidación previa del problema epistemológico estudiado. Además en base a la intención rectora de este trabajo, que pretende producir una reflexión teórica sobre la naturaleza y el papel que juega el conflicto semiótico de tipo cognitivo en la cronogénesis de los significados personales de los objetos matemáticos, la determinación de la metodología que corresponde aplicar incluye analizar la obra de Morin (1999a, 1999b, 2000, 2001, 2002) condensada en los cinco volúmenes del “Método”.

2.- Modalidad de Investigación y su Especificidad

Esta investigación se desarrolló en el escenario de las ciencias sociales, por cuanto se indagaron aspectos vinculados, en lo general, con la realidad educativa en el área de la matemática y en particular con el conflicto semiótico implicado en la noesis de los objetos matemáticos. Esto condujo a desarrollar una actividad de campo que pretendió, en todo momento, obtener la mayor cantidad de información o de datos pertinentes para poder describir, comprender, entender e interpretar la problemática de la brecha entre el objeto personal y el institucional.

En función a estos indicadores, Martínez (2002b) señala que las investigaciones cualitativas tratan sobre el estudio de un todo integrado que forma o constituye una unidad de análisis y que hace que algo sea lo que es un producto determinado, de donde se deriva que estas consisten en describir detalladamente las situaciones naturales e interpretar sensiblemente la vida social y cultural de quienes participan y buscan el significado, la comprensión de la realidad para significarla, a nivel personal, mediante la recopilación de información de primera fuente, es decir, de los participantes en términos de sus experiencias, acciones, engramas, pensamientos y reflexiones.

Esta búsqueda de significados es posible, gracias a la inserción del investigador en el ámbito de estudio. Las investigaciones cualitativas conciben al investigador como participante incorporado de manera explícita en su objeto de estudio. Adicionalmente las investigaciones cualitativas por sus características no privilegian una metódica sobre las demás sino posibilitan el uso de aquella, según los propósitos o la intencionalidad de la investigación a fin de que sea la más adecuada para el abordaje del tema objeto de estudio.

3.- Análisis Ontológico-Semiótico como Técnica para Determinar Significados Institucionales y Personales y sus Interrelaciones

El análisis ontológico-semiótico es un procedimiento que permite caracterizar tanto los significados sistémicos (o praxeológicos) de un objeto matemático como los significados elementales puestos en juego en un texto matemático. El análisis ontológico-semiótico ayuda a formular hipótesis sobre puntos críticos de la interacción entre los diversos agentes en los cuales pueden haber lagunas o vacíos de significación. Godino (2002) señala que para aplicar esta técnica se requiere disponer de los textos con la planificación del proceso instruccional, transcripciones del desarrollo de las clases, entrevistas y respuestas escritas a las pruebas de evaluación aplicadas.

Este análisis consiste en descomponer la actividad matemática del texto en unidades y subunidades llamadas unidades semióticas. Cada una de las unidades está caracterizada por contener alguno de los seis tipos de funciones semióticas clasificadas atendiendo al plano de contenido (significado). Una primera clasificación de las unidades de análisis semiótico de un texto matemático es la siguiente:

Unidades iniciales: apartados o secciones del texto.

Unidades primarias: conformada por las distintas oraciones o sentencias que componen la crónica del proceso de estudio y que son numeradas correlativamente para su referencia.

Unidades elementales: términos y expresiones que designan uno de los seis tipos de entidades elementales (problemas, lenguaje, propiedades, conceptos, argumentos y procedimientos).

Unidades secundarias: combinación de dos o más unidades primarias.

El análisis ontológico semiótico se sistematizó en tres momentos en los cuales se asumieron los criterios presentados por Godino (2002), en el desarrollo de las siguientes fases:

1) Exposición del texto y unidades primarias de análisis.
2) Identificación de las componentes y unidades elementales.

3) Identificación de los conocimientos que entran en juego y conflictos semióticos potenciales.

En el EOS se habla de análisis a priori (o potencial) cuando dicha técnica se aplica a un texto que registra una actividad matemática que tiene que realizar un estudiante y de análisis a posteriori cuando el texto corresponde al protocolo de respuestas de los alumnos en interacciones efectivas.

Según la mayor o menor profundidad del estudio ontológico-semiótico, se pueden considerar otros dos tipos de análisis: uno, más amplio, centrado fundamentalmente en la identificación de las entidades puestas en juego, y otro, más pormenorizado, centrado fundamentalmente en la identificación de las funciones semióticas que se establecen entre las diferentes entidades y facetas duales por parte de los distintos sujetos, en el que el sujeto pasa a primer plano. El primer tipo de análisis, que se puede denominar "grueso" o "macroscópico", a pesar de su potencia explicativa, presenta limitaciones importantes y es insuficiente cuando se considera también la cognición de las personas. El segundo tipo de análisis permite un mayor refinamiento gracias a la introducción de las cinco facetas duales que contempla el EOS, y especialmente por la consideración de las facetas expresión-contenido, intensivo-extensivo y elemental-sistémico.

Para realizar este segundo tipo de análisis ontológico-semiótico denominado microscópico, se descompone el texto en unidades de análisis y se estudian las funciones semióticas establecidas. Dicha descomposición no es única sino que depende del propio investigador, quien debe efectuar la que mejor explique las relaciones dialógicas existentes entre las entidades presentes. Algo similar puede decirse de la descomposición en subunidades. El paso de una subunidad a otra subunidad se describe con las funciones semióticas.

4.- La Hermenéutica Implicada en la Investigación

La hermenéutica (del griego *hermeneuein*, interpretar), es el arte de interpretar y comprender conjuntos simbólicos hablados o escritos (Hurtado y Toro, 2001). Es una disciplina dedicada a la interpretación de textos, fijando su verdadero sentido, comprendiendo y explicando, al mismo tiempo que se mantiene la singularidad de lo interpretado dentro del entorno del cual forma parte. La hermenéutica es el método más apropiado para la comprensión en las ciencias humanas, porque permite realizar una especie de lectura dentro de éstos, por los alcances posteriores, sujetos a multiplicidad de interpretaciones que dejan una impronta que puede analizarse posteriormente.

Gadamer (2002, orig. 1960), quien fundamentó y organizó la hermenéutica desde la corriente de Heidegger, considera que es "la herramienta de acceso al fenómeno de la comprensión y de la correcta interpretación de lo comprendido" (p.63). Siguiendo a Gadamer, la hermenéutica es una filosofía, es la búsqueda ontológica del sentido humano: hacia donde vamos, el por qué, el cómo y cuáles evidencias o indicios se van encontrando en el camino. Este mismo autor señala:

> *No existe un método hermenéutico. Todos los métodos descubiertos por las ciencias pueden dar frutos hermenéuticos, si se aplican correctamente. La hermenéutica no significa tanto un procedimiento cuanto la actitud del ser humano que quiere entender a otro o que como oyente o lector quiere entender una manifestación verbal. Siempre es, entender a un ser humano, entender este texto concreto. Un intérprete que domina todos los métodos de la ciencia sólo los aplicará para hacer posible la experiencia del poema para su mejor comprensión*. (p.79)

Por su parte Habermas (1982) considera a la hermenéutica como una vía crítica para llegar a la esencia del pensamiento haciendo énfasis en la interpretación de códigos lingüísticos que envuelven el sentido presente en la lengua, a través de la racionalidad humana.

Una característica importante de la hermenéutica es que permite una multiplicidad de sentidos en su interpretación, múltiples significados que han dado origen al vocablo *polisemia*. La sutileza que ha sido asociada a la hermenéutica es la capacidad de traspasar el sentido superficial para llegar al sentido más profundo, encontrando el sentido auténtico que tiene que ver con la intención del autor.

Lo anteriormente planteado permite acotar que en la interpretación hay tres elementos: El texto que tiene que ver con el significado que encierra y que transmite;

el autor quien le da un contenido significativo al texto y el intérprete que a través de un código descifra el contenido significativo que le dio el autor, no perdiendo la conciencia de que tanto autor como intérprete colocan en el análisis su propia subjetividad.

La hermenéutica hace que un texto ubicado en su contexto particular sea descontextualizado para ser analizado e interpretado y luego posteriormente a través de un proceso de reconstrucción de lo analizado nuevamente se contextualice, esto ocurre así porque la hermenéutica es el acto interpretativo, es la comprensión del texto mismo. El sentido hermenéutico y la metodología de uso para la comprensión de los conflictos semióticos son necesarios dentro del contexto de esta investigación. En concordancia el uso del lenguaje es fundamental en el método hermenéutico, básico en toda interpretación.

4.1.- Del Círculo Hermeneútico a la Espiral Hermeneútica

El círculo hermenéutico (Dilthey, 1976) toma en consideración: el entendimiento, la explicación y la aplicación. La realidad se percibe como un todo, luego para entenderla mejor se desglosa en sus elementos constituyentes para proceder a la comprensión analítica, luego se realiza la aplicación de lo así conocido y entonces proceder a reunificar el todo con el que inicialmente se comienza el análisis, cerrándose de esta manera el círculo hermenéutico. La hermenéutica participa de lo caótico ya que define una relación compleja de efectos intencionales y no intencionales que la hacen siempre una acción incumplida, es decir, que toda interpretación es siempre infinita y en permanente cambio.

La espiral ascendente hermenéutica implica tres momentos: la comprensión, la interpretación y la aplicación, va cambiando de dirección a cada paso y vuelve siempre a la misma posición, pero elevándose de nivel: en cada vuelta aumenta la riqueza de la descripción, el nivel de penetración y la profundidad de la comprensión de la estructura estudiada y de su significado, según se aprecia en la siguiente figura:

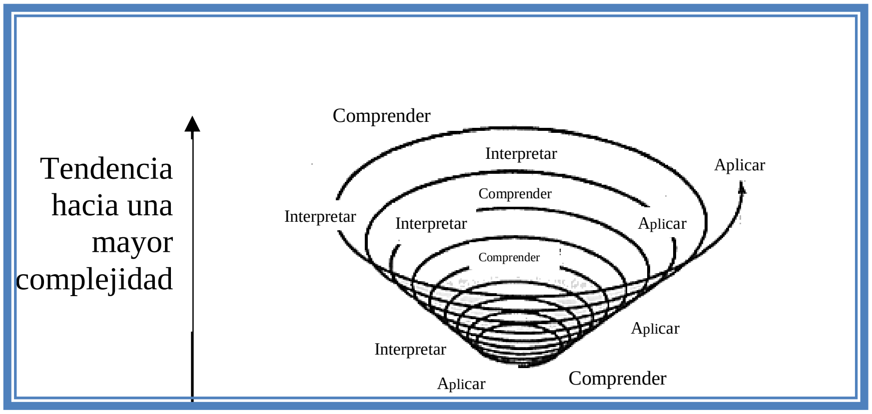


Figura 5. La espiral ascendente hermenéutica. ***Fuente:*** Elaboración propia basado en Gadamer (2002)

El momento de la comprensión se fundamentó en la construcción del documento doctoral, elaborado a partir de las fuentes primigenias: el pensamiento complejo, la teoría de las representaciones semióticas y el enfoque ontosemiótico de la instrucción y la cognición matemática. Fue un movimiento complejo del todo a las partes y de las partes al todo en el que se configuró el discurso a partir de la comprensión analítica. En el momento de la interpretación se le dio una significación al EOS explicando las diversas situaciones que se presentan en el fenómeno en estudio. El momento de la aplicación lo constituirá la construcción del sistema de nociones teóricas sobre la naturaleza, origen y significados del conflicto semiótico. En este momento se realizará una validación de los enunciados interpretados, trazando una nueva perspectiva en la dinámica de los significados personales de los objetos matemáticos, producto del trabajo intelectual y práctico de la investigadora con el objeto del conocimiento.

5.- Descripción General del Contexto Académico

De acuerdo con el EOS, expuesto en el capítulo II, una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva a la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen (Godino y Batanero, 1994).

El centro académico donde emerge el objeto de estudio de interés fue la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales, campus Bárbula de la Universidad de Carabobo. De esta facultad egresan cuatro tipos de profesionales: administradores comerciales, contadores públicos, economistas y licenciados en relaciones industriales. El departamento responsable de la administración de la asignatura fue el de Matemática, Estadística y Técnicas Cuantitativas, en donde son cursadas las materias instrumentales cuantitativas necesarias para la sólida formación de contadores públicos y administradores comerciales, ya que las modernas teorías de economía y finanzas descansan en conceptos cada vez más sofisticados de análisis matemático.

La asignatura donde se recolectó la información fue "Matemática II" (código AC1101) cuya prelación es Matemática I del ciclo básico. Es una materia obligatoria de tres unidades crédito y prerrequisito para cursar las tres estadísticas, cálculo financiero y técnicas cuantitativas. Se imparte semanalmente en todos los turnos (diurno, vespertino y nocturno), cuatro horas académicas de cuarenta y cinco minutos cada una (dos horas de teoría y dos horas de práctica). Se enseña la teoría para que el alumno domine los conceptos de cálculo integral y álgebra matricial y desarrolle la habilidad competitiva de su aplicación y se imparte práctica mediante la ejemplificación y ejercitación propia del método activo permitiendo al estudiante el logro de un aprendizaje sustancialmente significativo, actividad que va a contribuir a la articulación del conocimiento matemático.

Pertenece al tercer semestre de las carreras de administración comercial y contaduría pública. Su objetivo terminal es desarrollar habilidades y destrezas del pensamiento analítico y que el estudiante sea capaz de aplicar los distintos métodos y técnicas de cálculo integral y álgebra matricial, por lo que el alumno deberá contar con habilidades de entrada específicas tales como: álgebra elemental, trigonometría, técnicas de graficación y cálculo diferencial. Adicionalmente deberá tener noción de lo infinitamente grande (hiperreal) y lo infinitamente pequeño (infinitesimal).

Esta asignatura está organizada en tres bloques temáticos: (I) La integral indefinida, (II) La integral definida y (III) Álgebra matricial. Cada unidad se estructura en varios aspectos llamados objetivos, contenidos, estrategias metodológicas, bibliografía básica y evaluaciones. La investigación realizada se centró en la unidad II específicamente en el cálculo de las integrales impropias y su aplicación geométrica en la determinación de áreas de regiones planas no acotadas limitada por curvas en coordenadas cartesianas y sus diversas aplicaciones en las ciencias administrativas y contables. Adicionalmente es conveniente señalar que en el currículo de AC-CP no se incluye sucesiones ni series.

La información utilizada para el estudio semiótico-complejo corresponde al lapso académico 1S-2008 comprendido entre los meses de Abril y Agosto de 2008. La sección escogida fue la 61 cuyo horario es: Martes de 3:50 a 5:10 pm. y Jueves de 2:00 a 3:30 pm. El aula asignada fue la 1510 que está ubicada en el quinto piso del edificio de aulas. Dicha salón tiene una superficie de 80 metros cuadrados con capacidad para 70 estudiantes.

6.- Intérpretes de Signos Involucrados en la Investigación

La selección de los estudiantes se realizó en función a las características del objeto de interés de la investigación, por lo tanto, se suscribió al carácter intencional, es decir, no se realizó bajo ningún criterio estadístico, simplemente se tuvo en cuenta su disponibilidad a colaborar y a ser grabados, priorizando en la profundidad de las entrevistas más que en la extensión de las mismas. Estos aspectos sustentan la reducción de la amplitud numérica de los individuos, así como también, su escogencia. Los intérpretes de signos de este estudio constituyen una totalidad escogida intencionalmente, usando varios criterios con el fin de optimizar el proceso de investigación: (1) Posibilidad de encuentros adecuados para recoger la información, (2) Factibilidad de un diálogo fluido propio de una relación de confianza y cordialidad y (3) Diversidad en los estilos de razonamiento.

Los intérpretes de signos seleccionados cursantes de “Matemática II” son adultos jóvenes, de ambos géneros (proporción 3:1 a favor de las mujeres), con edades comprendidas entre los 17 y 35 años, con similar formación académica en cálculo diferencial e integral de una variable, muchos con responsabilidades familiares, laborales y dedicación parcial al estudio. Se les aclaró que se trata de una investigación al margen del curso y por consiguiente sin ninguna repercusión en sus calificaciones.

7.- Instrumentos de Selección de Significados

Con la finalidad de recabar información sobre la naturaleza y el papel que juega el conflicto semiótico en la cronogénesis de los significados personales de los objetos matemáticos se diseñó y administró un instrumento a los estudiantes de "Matemática II", el cual estuvo constituido por un cuestionario estructurado con ítems de selección simple, con resolución de ejercicios o problemas sobre conjuntos no acotados, limites al infinito, integrales impropias y áreas de regiones planas no acotadas limitadas por curvas en coordenadas cartesianas. Una vez que los estudiantes completaron los cuestionarios, se realizaron entrevistas individuales semiestructuradas para obtener información adicional sobre algunas respuestas de los cuestionarios escritos. El formato de la entrevista brindó la oportunidad de un dialogo para ampliar, repensar y modificar sus respuestas y también para indagar a profundidad sobre puntos que no estaban del todo claro en el cuestionario. En conclusión, el cuestionario permitirá un acercamiento comprensivo a la práctica operativa del estudiante y la entrevista permitirá determinar si comprende las operaciones realizadas y por qué las hace.

Resumen de los instrumentos de selección de significados empleados en esta investigación

1) *Cuestionario*

a) Tipo: Cerrado
b) Número de ítems: 12
c) Tipo de ítems: Selección simple. Cada pregunta solo presenta una opción de respuesta correcta de tal manera que la elección es suficientemente informativa para los objetivos planteados.

d) Tiempo estimado de solución: Máximo 20 minutos.
e) Condiciones de presentación: Sin ningún tipo de material de apoyo, ni calculadora.
f) Peso relativo de los objetivos: Todos con la misma importancia.
g) Número de participantes: 5
h) Formato de grabación: Audio casette con notas complementarias.

2) *Entrevista individual*

a) Tipo: Semiestructurada basada en el cuestionario, en la que el entrevistado no sólo interactúa con la investigadora, sino también con el conjunto de situaciones planteados.
b) Tiempo estimado de aplicación: Máximo 60 minutos.
c) Razón de su aplicación: (1) Corroborar que las respuestas dadas en el cuestionario se correspondiesen con los significados personales puestos en juego y no a una confusión o impulso accidental al momento de responder, (2) Indagar las razones por las cuales el alumno responde de una manera y no de otra, independientemente si la respuesta coincide con el significado institucional de referencia.
d) Número de participantes: 5

3) *Redes semánticas*

a) Tiempo estimado: 5 minutos.
b) Número de palabras definidoras: 10
c) Carácter individual.
d) Número de participantes: 30
e) Razón de su aplicación: Identificar, no sólo el significado que el grupo seleccionado de estudiantes asigna a dos entidades matemáticas: infinito e indeterminación, sino también averiguar las relaciones que establecen con otras expresiones que en matemática son palabras reservadas (imaginario, no existe, etc.).

7.1.- Descripción del Cuestionario

Los objetivos perseguidos al momento de elaborar el cuestionario fueron los siguientes:

1) Disponer de un instrumento en el que, en un corto lapso (veinte minutos), se pudiera recoger información que permitiera realizar una aproximación a la comprensión que muestran los alumnos en relación con la mayor cantidad posible de elementos de significado relacionados con el infinito.
2) Describir y caracterizar los significados o sentidos puestos en juego en las situaciones problemáticas (incluyendo las diferentes formas de representación semiótica).
3) Detectar los conflictos señalados en la clasificación descrita en el primer capítulo de esta investigación.
   a) Conflictos semióticos producto de vacíos de significación: (1) aprendizaje deficiente de los conocimientos previos, (2) aplicación incorrecta de procedimientos o algoritmos.
   b) Conflictos semióticos asociados a actitudes afectivas y emocionales negativas hacia la matemática.
   c) Conflictos semióticos asociados a la conversión entre registros semióticos dentro y fuera de un mismo sistema de representación.
   d) Conflictos ontosemióticos: los que están asociados a la naturaleza abstracta y compleja de los objetos matemáticos.
4) Estimar la proporción de alumnos en el grupo seleccionado que muestran una comprensión mínima de un cierto número de elementos de significado conexos con el infinito.
5) Comparar el grado de dificultad entre los diversos elementos de significado y mostrar las características en la comprensión.

Las preguntas escogidas son similares a las que suelen usarse en los exámenes tradicionales con una redacción más apropiada para el estudio ontosemiótico, con el fin de explorar y caracterizar con mayor profundidad las nociones que los agentes participantes manejan y su evolución. A continuación se describe el proceso de construcción del cuestionario y el análisis de su contenido.

7.1.1.- Proceso de Construcción del Cuestionario

En el proceso de elaboración del cuestionario se siguieron una serie de recomendaciones tomadas de Osterlind (1989) y Thorndike (1989):

a) Se delimitó el contenido a evaluar con el cuestionario construido a partir del análisis de los diversos elementos de significado institucional de referencia asociados a la noción de *infinito*.
b) Se especificó el formato de los ítems. Se decidió que fuesen de selección simple. Esta decisión se tomó teniendo en cuenta que se deseaba incluir un número relativamente amplio de ítems para cubrir el máximo de elementos de significado.
c) Se elaboró una colección de ítems inicial a partir del cual se desarrolló el cuestionario. El orden escogido fue arbitrario y no responde a niveles de complejidad ni a características particulares de contenido.

Una de las características del cuestionario es que los estudiantes tenían que contestarlo sin previo aviso (es decir sin prepararse con anterioridad) y abarcó contenidos de las asignaturas: Introducción a la Matemática, Matemática I y Matemática II. Durante la aplicación del cuestionario, se les pidió a los estudiantes que realizaran todas las anotaciones posibles en el documento, con el fin de acceder a las expresiones de sus estrategias o de técnicas de solución implementadas en cada situación-problema. En esta actividad el alumno tenía que reflexionar y responder sin la intervención del profesor, en tiempo prefijado de veinte minutos. Se elaboraron 12 ítems de acuerdo con la terminología de los programas vigentes de las asignaturas antes mencionadas y se redactaron como preguntas de selección simple.

Una vez que se llegó a un cuestionario que parecía cubrir el contenido pretendido, se procedió a homogeneizar la redacción y a cambiar el contexto cuando éste no fuese familiar al alumno. Adicionalmente se hicieron pruebas de legibilidad y comprensión de los enunciados, con algunos alumnos voluntarios modificando la redacción en los casos que fue necesario.

En la redacción de los enunciados se tuvieron en cuenta los aspectos indicados por Brent (1989): Se evitó detalles innecesarios, se incluyó relevancia de las preguntas formuladas para el estudio, nivel de lectura adecuado, brevedad, claridad y falta de ambigüedad, que la respuesta fuera razonable para el alumno y pudiera darla, se evitó suposiciones implícitas, nivel apropiado de abstracción y se trató que las preguntas tuvieran el mismo significado para todos los estudiantes. El cronograma de actividades se presenta a continuación:

1) Aplicación del cuestionario al primer intérprete (12/05/2008)
2) Aplicación del cuestionario al segundo intérprete (19/05/2008)
3) Aplicación del cuestionario al tercer intérprete (26/05/2008)
4) Aplicación del cuestionario al cuarto intérprete (02/06/2008)
5) Aplicación del cuestionario al quinto intérprete (15/06/2008)
6) Entrevista semiestructurada al primer intérprete (12/05/2008)
7) Entrevista semiestructurada al segundo intérprete (19/05/2008)
8) Entrevista semiestructurada al tercer intérprete (26/05/2008)
9) Entrevista semiestructurada al cuarto intérprete (02/06/2008)
10) Entrevista semiestructurada al quinto intérprete (15/06/2008)
11) Administración de las redes semánticas (20/06/2008)

El cuestionario empleado debía cumplir ciertas condiciones mínimas de calidad para garantizar el éxito de la investigación por lo que se determinó su validez de contenido y confiabilidad. Con base en las pautas de Álvarez y Jurgenson (2003) y Bisquerra (1989) se sometió el cuestionario al juicio independiente de cinco expertos en el área de matemática con títulos de maestría en educación matemática y doctorado en didáctica de la matemática, quienes consideraron que no necesitaba cambios ni modificaciones.

7.1.2.- Elementos de Significado Institucional Previstos en el Cuestionario

En la construcción del cuestionario se aplicaron los siguientes elementos de significado:

a) *Elementos extensivos*: Problemas de cálculo de áreas de regiones planas no acotadas.
b) *Elementos ostensivos:* Tabla de valores, gráficas, representaciones símbólicas.
c) *Elementos actuativos*: Cálculo de áreas, cálculo de integrales impropias, procedimiento de resolución de indeterminaciones relacionadas con el infinito.
d) *Elementos intensivos:* Tipos de integrales impropias, conjuntos no acotados, criterios de convergencia.
e) *Elementos validativos:* Análisis, aplicación de propiedades. De los elementos validativos incluidos en el significado de referencia, se prescinde de las demostraciones formales porque la mayoría de los agentes participantes no poseen los elementos básicos matemáticos que sirven de apoyo para una validación formal.

7.1.3.- Análisis Descriptivo e Interpretativo de los Ítems

La comprensión personal de los objetos matemáticos, donde el infinito está implícito, será inferida mediante el análisis de las prácticas realizadas por los estudiantes en la resolución de tareas problemáticas o ítems de evaluación que estén asociados con el *infinito*. En esta sección se realiza un análisis detallado, ítem a ítem, de todos los contenidos incluidos en el estudio y se analizan los conflictos semióticos potenciales. En el enunciado se marca entre paréntesis y en negrita la opción correcta. (El cuestionario tal como fue administrado a los alumnos se presenta en el Anexo G).

CUESTIONARIO

Instrucciones: A continuación se ofrecen doce enunciados. Escoja la alternativa correcta y explique la razón de su selección.

Ítem 1. El siguiente conjunto A= $\{x \in \Re \,/ x \in [1, +\infty)\}$ se traduce en:

(a) x es un número real tal que x pertenece al conjunto desde el número 1 hasta el número infinito.

(b) conjunto de los números reales mayores que 1.

(c) conjunto de los números reales mayores o iguales a 1. **(correcto)**

(d) conjunto de los números reales desde el número 1 hasta el número infinito.

En este ítem se analiza el manejo de un intervalo semiabierto. Para su resolución se requiere convertir el registro de representación algebraico en verbal.

Los distractores evalúan las siguientes dificultades:

(a) Error en el enunciado al indicar número infinito. Un conflicto semiótico muy frecuente es darle tratamiento numérico al infinito.

(b) Error al indicar números mayores que uno.

(c) Es la opción correcta.

(d) Error en el enunciado al indicar número infinito.

Ítem 2. Calcular $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1}$

(a) 0

(b) $+\infty$

(c) $-\infty$

(d) No existe **(correcto)**

Resolución a priori: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1}$ No existe ya que $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$

Los límites laterales son diferentes por lo tanto el límite no existe.

Observaciones:

1) En este ítem se busca saber si el estudiante aplica adecuadamente el teorema de la unicidad del límite: Un límite existe en un punto x_o y es igual al número L si y sólo si los límites laterales existen y son iguales a L (elemento intensivo).
2) Para su resolución se requiere reconocer, diferenciar y utilizar el registro de representación analítico de límites.
3) Se enfatiza en la capacidad del estudiante para utilizar con precisión el procedimiento matemático de cálculo de límites (elemento actuativo), lo cual significa que siga los pasos del algoritmo en el orden correcto, efectúe la operación de un modo adecuado y obtenga el resultado correcto.

Los distractores evalúan las siguientes dificultades:

(a) Considerar que el cociente 1/0 tiende a cero.

(b) Los estudiantes, por lo general, asignan un significado actuativo al límite: una simple sustitución, es decir, se considera el límite como el valor que toma la función en el punto que se está analizando, sin importar si la función es continua o no. No realizan un análisis del comportamiento de la función en las vecindades que contiene al punto, lo cual constituye un reflejo de considerar el proceso al infinito como una simple sustitución.

(c) Omitir el teorema de la unicidad del límite.

(d) Es la opción correcta.

Ítem 3. Determinar $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$

(a) $+\infty$ **(correcto)**

(b) $-\infty$

(c) 0

(d) No existe

Los estudiantes asignan a la palabra límite el significado dado en la cotidianidad: algo que no es posible superar (barrera infranqueable) o el último término de un proceso.

Los distractores evalúan las siguientes dificultades:

(a) Es la opción correcta.

(b) Error en la evaluación del límite.

(c) Error al indicar que 1/0 tiende a cero.

(d) Considerar que el símbolo ∞ representa “no existe”

Ítem 4. El valor de 1/0 es:

(a) No está definido (**correcto**)

(b) $+\infty$

(c) 0

(d) 1

Es imposible efectuar este cociente ya que no puede encontrarse ningún número x que multiplicado por 0 de 1; en efecto, x por 0 siempre es 0.

Un conflicto semiótico muy frecuente es confundir el cálculo de este cociente numérico con la evaluación de un límite. Esta situación no solo se presenta en los alumnos sino inclusive en el significado institucional de referencia. En la prueba interna de aptitud académica aplicada por FaCES en el 2009 en el cuadro de fórmulas básicas trigonométricas se señala que: tg 90° es ∞ (ver Anexo H).

Los distractores evalúan las siguientes dificultades:

(a) Es la opción correcta.

(b) Evaluar dicho cociente como si fuera un límite, esta fue la razón de incluir esta pregunta en el cuestionario.

(c) Error al considerar que 1/0 = 0

(d) Error al considerar que 1/0 = 1

Ítem 5. El área bajo la curva $y = 1/x^2$ con $x \in [1, +\infty)$ es:

(a) $+\infty$

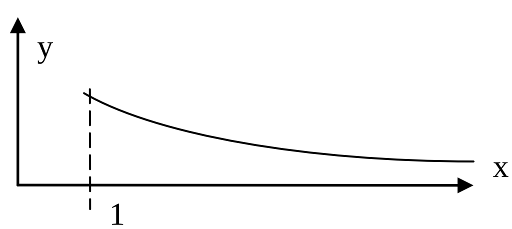
(b) 1 (**correcto)**

(c) 0

(d) No existe

En este inciso se pretende determinar las prácticas operativas que forman parte del significado personal del objeto integral impropia, interpretada como la herramienta matemática para medir el área de una región plana no acotada limitada por una curva continua en coordenadas cartesianas, a través de la expresión "área bajo la curva". Para contestar esta pregunta el estudiante tiene que activar la siguiente configuración cognitiva:

a) Identificar la curva que limita el área plana no acotada:
   Hipérbola equilátera.
b) Determinar si la función presenta una discontinuidad esencial en el intervalo mediante el cálculo del dominio.
   Dominio: En el registro verbal: Todos los valores de x diferentes de cero. En el registro algebraico: $\Re$-{0}
c) Realizar un gráfico aproximado en diagrama cartesiano (que incluya asíntotas verticales y horizontales) y sombrear la región que está entre la curva $y = 1/x^2$, el eje "x" y a la derecha de la recta vertical $x = 1$.



d) Graficar el diferencial de integración (rectángulo característico). En este caso en particular lo más conveniente es un rectángulo vertical.
e) Plantear la integral impropia.

$$A=\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx$$

f) Resolver la integral impropia de segunda especie empleando la regla de Barrow.

$$A=\lim_{b\to+\infty}-\frac{1}{x}\Big|_1^b$$

g) Evaluar los límites de integración. En este caso la integral es convergente y como representa el área bajo la curva debe ser un número positivo.

$$A=-\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b}-1\right)= \text{- (0 -1) = 1}$$

h) Interpretar el valor numérico obtenido como la medida de un área (ua: unidades de área o unidades cuadradas).

A = 1 unidad de área

Como se observa esta pregunta requiere la utilización de varios registros de representación semiótica, buscando la emergencia del concepto integral impropia convergente. Una de las dificultades encontradas en la mayoría de los cuestionarios fue la conversión entre la expresión algebraica y la gráfica.

Los distractores evalúan las siguientes dificultades:

a) Considerar que si la curva es infinita el área también es infinita.

b) Es la opción correcta.

c) Imposible que el área bajo una curva sea cero.

d) Considerar que el símbolo ∞ representa "no existe"

Ítem 6. Evaluar $\int_1^{\infty} e^{-x}dx$

(a) +∞

(b) 1/e (**correcto**)

(c) 0

(d) – 1/e

El tipo de actividad matemática requerida en este ítem es el recuerdo, interpretación y seguimiento de reglas aprendidas en el curso de “Matemática II” para la resolución de integrales impropias de segunda especie. Para contestar esta pregunta el estudiante tiene que activar la siguiente configuración cognitiva:

a) Determinar si la función presenta una discontinuidad esencial en el intervalo con el cálculo del dominio del integrando:
   Dominio: Conjunto de los números reales.
b) Identificar el tipo de integral impropia (elemento intensivo):
   Integral impropia de segunda especie.
c) Resolver la integral indefinida:

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$$

d) Evaluar la integral impropia aplicando la regla de Barrow, lo cual implica la transformación en una integral en donde el límite superior es un parámetro variable al que se hace crecer a infinito; es decir, el problema se transforma en otro equivalente de una aplicación del cálculo de límites al infinito:

$$I = \lim_{b \to +\infty} -e^{-x}\Big|_1^b = -\lim_{b \to +\infty}(e^{-b} - e^{-1}) = -(0 - \tfrac{1}{e}) = \frac{1}{e}$$

e) Decidir si la integral es divergente o convergente en base al resultado del límite:
   La integral es convergente
   Los distractores evalúan las siguientes dificultades:

(a) Considerar que si la integral tiene el límite superior no acotado (∞) la evaluación de la misma es infinita.

(b) Es la opción correcta.

(c) Los alumnos tienden a sustituir los valores extremos de la integral impropia y no calculan las integrales utilizando procesos límite, sino generalizan la regla de Barrow sustituyendo directamente los extremos de la integral en la variable, aun cuando uno de los límites de integración sea infinito.

(d) Error

Ítem 7. El área bajo una curva de longitud infinita puede ser:

(a) cero
(b) un valor finito (**correcto**)
(c) imaginaria
(d) negativa

Observaciones:

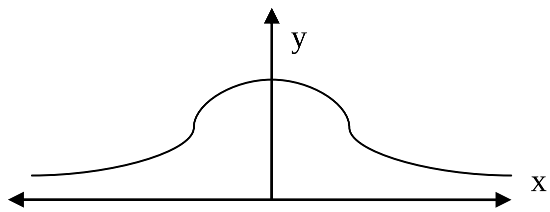
a) En este ítem se pretende analizar si se comprende que una suma infinita de diferenciales puede tener un valor numérico finito, estableciéndose una conexión entre la representación algebraica y gráfica del concepto infinito.
b) La dificultad que surge se deriva de la presencia simultánea de diversos elementos dentro de un mismo proceso (lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño).
c) Aunque la pregunta está propuesta en el registro verbal, se pretende observar si los alumnos utilizan los registros algebraico y/o gráfico para abordarla.

Los distractores evalúan las siguientes dificultades:
(a) Imposible que el área bajo una curva sea cero.
(b) Es la opción correcta.
(c) Confundir un objeto no ostensivo con un valor imaginario.
(d) Imposible que el área bajo una curva sea un valor negativo.

Esta pregunta está relacionada con la número cinco ya que si esta fue contestada correctamente el estudiante se dará cuenta que el área bajo una curva de longitud infinita puede tener un valor finito.

Ítem 8. El área limitada por la función $y = 1 / (1+x^2)$ y el eje x para todo $x \in \Re$ es:
(a) $+\infty$
(b) π (**correcto**)
(c) $-\infty$
(d) $\pi/2$

Resolución a priori: Dominio: Conjunto de los números reales, como el intervalo de integración no está acotado es una integral impropia de segunda especie.



$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a \to -\infty} arctgx\Big|_a^0 + = \lim_{b \to +\infty} arctgx\Big|_0^b$$

$$A = \lim_{a \to -\infty} (arctg(0) - arctg(a)) + \lim_{b \to +\infty} (arctg(b) - arctg(0)) = 1 - (-\tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{2} - 1 = \pi$$

Este reactivo es un ejemplo de un tipo de problema de modelización matemática: la determinación del área de una región plana mediante la interpretación geométrica de una integral impropia de segunda especie que implica el manejo de un intervalo de integración no acotado. Esta pregunta también requiere la utilización de varios registros de representación semiótica.

Los distractores evalúan las siguientes dificultades:

(a) Considerar que si la curva es infinita el área bajo la misma también es infinita o en otros términos, tendencia muy marcada a considerar que una curva encerrará un área infinita si y solo si la región plana es cerrada y acotada [En palabras de González-Martín (2005) ligación a la compacidad].

(b) Es la opción correcta.

(c) Error al evaluar los límites de integración.

(d) Error al evaluar los límites de integración.

Ítem 9. Evaluar $\int_0^{\infty} senx\, dx$

(a) 0

(b) 1

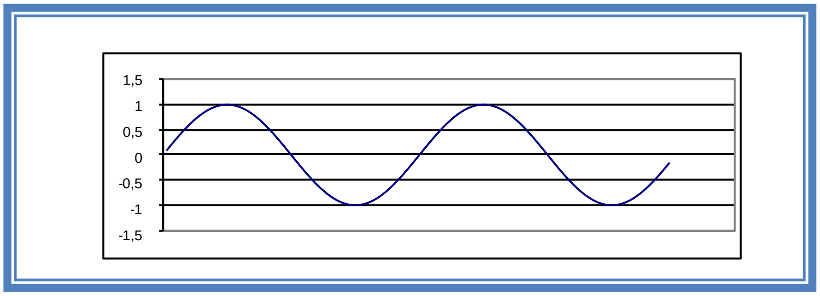
(c) No existe (**correcto**)

(d) infinito

Se estudia el reconocimiento de una integral impropia que diverge por oscilación.

$\int_0^\infty senx\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b senx\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\cos x\right]_0^b = \lim_{b\to\infty}(1-\cos b)$ No existe por lo tanto

$\int_0^\infty senx\,dx$ diverge debido a la oscilación de la función seno.



Gráfica de la función y = sen(x) (Elemento ostensivo)

Las integrales impropias pueden ser divergentes por dos razones: cuando el límite tiende a infinito y cuando el límite no existe por oscilación.

Los distractores evalúan las siguientes dificultades:

(a) Error al evaluar los límites de integración.

(b) Error al evaluar los límites de integración.

(c) Es la opción correcta.

(d) Considerar que si la integral tiene el límite superior no acotado (+∞) el resultado también es infinito.

Es interesante observar que en esta pregunta los alumnos prefieren trabajar exclusivamente en el registro algebraico, cuya respuesta seria más fácil si se planteara en el registro gráfico.

Ítem 10. La expresión ∞-∞ es:

(a) cero

(b) indeterminada (**correcto**)

(c) no existe

(d) uno

En este caso se pretende indagar sobre la comprensión de una expresión indeterminada relacionada con el infinito. Un conflicto semiótico muy frecuente es el desconocimiento de la definición de indeterminación y remitirse exclusivamente a los tipos de indeterminación.

Los distractores evalúan las siguientes dificultades:

(a) Interpretar el infinito como un número.

(b) Es la opción correcta.

(c) El concepto de indeterminación es construido de manera incorrecta.

(d) Error

Ítem 11. El siguiente conjunto $A=\{x \in \Re \, / x \in [0,1]\}$ tiene:

(a) 100 números

(b) infinitos números (**correcto**)

(c) 2 números

(d) 1000000000 números

El ítem se basa en el desarrollo decimal infinito de un número real (Se asume que el alumno está familiarizado con los convenios de representación de los números en la recta real)

Los distractores evalúan las siguientes dificultades:

(a) Error al manejar el continuo.

(b) Es la opción correcta.

(c) Considerar que el conjunto es entero.

(d) Considerar muchos números.

Ítem 12. En el campo de los números reales:

¿Cuál conjunto es más grande? ¿$[0,1]$ o $(-\infty,+\infty)$?

(a) $[0,1]$

(b) $(-\infty, +\infty)$ (**correcto**)

(c) los dos conjuntos tienen infinitos elementos

(d) imposible decidir

En este ítem los alumnos necesitan un sistema complejo de objetos institucionales no ostensivos (conjuntos no acotados, comparación de conjuntos infinitos), así como de un sistema de ostensivos asociados. La cardinalidad de un conjunto infinito depende de su extensión, en el sentido gráfico un segmento largo tiene más puntos que un segmento corto.

Los distractores evalúan las siguientes dificultades:

a) Error

b) Es la opción correcta.

c) Presencia del fenómeno de aplastamiento.

d) Error

Se observa el fenómeno de "aplastamiento" descrito por D'Amore (2006b): la mayoría de los estudiantes responde que todos los conjuntos infinitos son equipotentes (tienen el mismo número de elementos).

Frecuentemente se admite la noción de infinito como una posibilidad de extensión sin límite: los números naturales forman un conjunto infinito ya que si se pretendiera fijar un límite bastaría sumar uno a tal límite para obtener un número mayor (infinito potencial). Pero la extensión sin límite es sólo una forma del infinito. Existe también la posibilidad de encerrar infinitos elementos en un espacio limitado, por ejemplo un segmento de recta. Si se toma el segmento de 0 a 1, el centro del segmento corresponderá a 1/2 partido el segmento en 2 de esta manera se pueden dividir ambos por la mitad para obtener puntos correspondientes a ¼ y ¾. Con las cuartas partes obtenidas se puede hacer una nueva subdivisión por la mitad y así sucesivamente. Se puede hacer lo mismo con las terceras partes, con las quintas partes, con las sextas partes y así sucesivamente. Pero aún imaginando haber terminado de colocar todas estas infinitas partes, se puede demostrar que quedarán tantos huecos sin identificar en el segmento que son aún más de los que se ha llenado produciendo un infinito más grande que otro infinito (infinito actual). Esto lleva a la conclusión de que el todo no es mayor que las partes o empleando el axioma griego "el todo es mayor que cada una de las partes" sólo se cumple para conjuntos finitos.

Los resultados que se obtengan del cuestionario pondrán de manifiesto la gran diversidad de elementos que el alumno debe usar para resolver los problemas y las tareas planteadas. En otras palabras, el alumno debe reconocer los campos de problemas donde el infinito matemático está implícito, elegir un registro de representación semiótica y operar mediante una serie de procedimientos que producen resultados algebraicos, numéricos o gráficos. Estos resultados han de ser interpretados adecuadamente, estableciendo correspondencias semióticas pertinentes entre los objetos matemáticos y sus propiedades. Finalmente, debe ser capaz de articular todos estos elementos por medio de una argumentación lógica y coherente.

7.2.- Los Objetivos y el Guión de la Entrevista Semiestructurada

El propósito fundamental de las entrevistas individuales semiestructuradas fue profundizar en los aspectos que no quedaron claros en las respuestas dadas en el cuestionario cerrado y complementar la información de algunos aspectos que no fueron considerados en el instrumento. Además de que se usó un guión de entrevista, se formularon otras preguntas, con el fin de aclarar dudas manifestadas en las repuestas de los estudiantes, las cuales fueron respondidas cordialmente por éstos. Los objetivos específicos pretendidos con la realización de las entrevistas semiestructuradas, consistieron en recabar información sobre la dinámica de los significados personales sobre el término *infinito* y el manejo adecuado de algunos objetos matemáticos que están vinculados con esta entidad matemática. El hecho de que sean semiestructuradas permite que, a medida que éstas progresen el diálogo se pueda matizar, redirigir la información requerida o, en caso de necesidad replantear otras preguntas.

Preguntas formuladas durante la entrevista individual

1) Relacionadas con conjuntos no acotados.

   a) ¿Qué es el infinito?

   b) ¿Cuáles conceptos relacionas con el infinito?

   c) ¿Qué significa para ti la notación $x \in [1,\infty)$?

Estas preguntas están articuladas con los ítems 1 y 11 del cuestionario.

2) Relacionadas con la comparación de conjuntos infinitos.

a) En el campo de los números reales ¿Cuál conjunto es más grande? ¿[0,1] o (-∞,+∞)?

Esta pregunta está articulada con el ítem 12 del cuestionario.

3) Relacionadas con las formas indeterminadas.

a) ¿Qué es una indeterminación?

b) ¿Te acuerdas más o menos que explicación dio el profesor sobre la indeterminación ∞/∞?

c) ¿Por qué ∞- ∞ no es cero?

Estas preguntas están articuladas con los ítems 3 y 10 del cuestionario.

4) Relacionadas con el teorema de la unicidad del límite.

a) ¿Qué diferencia existe entre el infinito y la expresión “no existe el límite”?

b) ¿Recuerdas el teorema de la unicidad del límite?

c) ¿Por qué se dice que 1/0 no está definido y en cambio $\lim_{x\to 0} (1/x)$ no existe?

Estas preguntas están articuladas con los ítems 2 y 4 del cuestionario.

5) Relacionadas con las integrales impropias.

a) ¿Qué es una integral impropia?

b) ¿Cuáles son las razones por las que una integral impropia puede ser divergente?

Estas preguntas están articuladas con los ítems 6 y 9 del cuestionario.

6) Relacionadas con áreas de regiones planas no acotadas.

a) ¿El área bajo una curva puede ser cero?

b) ¿Por qué el área bajo una curva de longitud infinita puede tener un valor finito?

c) ¿Crees que se ha producido una evolución entre el significado que le dabas al infinito en “Introducción a la matemática” y el que actualmente tienes?

Estas preguntas están articuladas con los ítems 5,7 y 8 del cuestionario.

La investigadora anticipó los tipos de preguntas que debía hacer, aunque no necesariamente se formularon de la misma forma a todos los entrevistados y se realizaba a cada persona por separado, condición fundamental para evitar la contaminación de las respuestas de unos con otros. Cada entrevista grabada en audio y posteriormente transcrita tuvo una duración aproximada de sesenta minutos. Se escuchó a los entrevistados con paciencia procurando lograr un ambiente de negociación de significados agradable y tranquilo, empleando un lenguaje adecuado para los estudiantes y aclarando el carácter anónimo de su colaboración.

En atención a lo indicado previamente, la trascripción literal de las entrevistas en donde se exponen los significados puestos en juego y los conflictos semióticos que fueron detectados y que están asociados a la noción de infinito, se detallan en el Anexo B en donde se enumeraron las páginas y las líneas del texto para el fácil manejo posterior. Se destacan las preguntas de la investigadora denotadas con la letra (I) en negritas y la respuesta discursiva de los estudiantes denotados con la letra (A) acompañadas de un número para diferenciar cada estudiante. Los subrayados añadidos constituyen información complementaria /adicional / aclaratoria planteada por la investigadora. Adicionalmente se mantuvieron las pausas, énfasis, dudas, expresiones, giros idiosincrásicos y léxico jergal de los agentes participantes.

Luego de un proceso de lectura cuidadosa y repetida de las entrevistas se subrayaron las palabras y frases cuyo significado es relevante y sustancialmente significativo al tema de interés investigativo y que develan, en primera aproximación, los significados que poseen, construyen y negocian los alumnos sobre conjuntos no acotados, comparación de conjuntos infinitos, límites infinitos, formas indeterminadas, integrales impropias y cálculo de áreas de regiones planas no acotadas limitadas por curvas en coordenadas cartesianas. Después se organizaron las unidades de información (frases u oraciones) en tablas de acuerdo a la similitud de su contenido y se ubicaron en función de las dimensiones del tema objeto de estudio.

7.3.- La Explicitación de las Redes Semánticas

Para Álvarez y Jurgenson (2003) el método de recolección de información de las redes semánticas constituye un procedimiento híbrido debido a su utilidad para recolectar datos tanto desde el paradigma cuantitativo como para la investigación cualitativa. Se utilizó este método como una forma de aproximarse al significado que tienen los estudiantes sobre el objeto matemático denominado infinito. El método intenta proporcionar una explicación del problema de las relaciones entre los nodos conceptuales que constituyen la estructura básica de la red. Para lograrlo, los estudiantes participantes en la investigación realizan fundamentalmente dos tareas:

1) Definen el objeto matemático investigado con diez palabras o frases sueltas.
2) Jerarquizan las palabras considerando la importancia que cada palabra tiene en función del objeto matemático investigado.

Se empleó el siguiente formato para la recolección de información:

Palabra: ______________________________

Palabras definidoras	Jerarquías	
	1	
	2	
	3	
	4	
	5	

Con este formato se conmina a los estudiantes que escriban las diez palabras en la columna de la izquierda, y luego, que en la columna de la derecha vuelvan a escribirlas, pero jerarquizándolas del 1 al 10. Posteriormente se procede a la obtención de los cuatro valores o resultados principales, con los cuales se analiza la información generada por los alumnos en la investigación. Estos valores se describen a continuación:

Valor J: Constituye un indicador de la riqueza semántica de la red. Para su obtención, únicamente hay que contar el total de palabras definidoras.

Valor M total (VMT): Este valor resulta de la multiplicación de la frecuencia de aparición por la jerarquía obtenida para cada una de las palabras definidoras. Es un indicador del peso semántico de cada una de las palabras definidoras obtenidas.

Conjunto SAM: De acuerdo con el procedimiento propuesto en la técnica original (Figueroa, 1981) arbitrariamente se decidió que el conjunto SAM era el grupo de las quince palabras definidoras que hubieran obtenido los mayores valores M totales.

Valor FMG: Este valor se obtiene para todas las palabras definidoras que conformaron el conjunto SAM, por medio de una sencilla regla de tres, tomando como punto de partida que la palabra definidora con el valor M más grande representará el 100 %. Este valor constituye un indicador, en términos de porcentajes, de la distancia semántica entre las diferentes palabras definidoras que conformaron el conjunto SAM. Así que el valor M total más alto representa la total cercanía que ese concepto tiene con el objeto matemático en estudio. En este sentido, mediante el cálculo de los demás valores, se obtendrá en términos de proporción, la distancia que tiene cada una de las palabras definidoras respecto al tema objeto de estudio.

Se tomaron en consideración las siguientes recomendaciones para aplicar esta técnica:

1) La actividad debe realizarse en forma estrictamente individual e independiente.
2) Todos los participantes deben realizar adecuadamente la jerarquización, ya que ésta representa la parte que precisamente distingue al procedimiento de la técnica de asociaciones libres.
3) Respecto al tiempo asignado para las tareas, en estudios previos se ha reportado que éste no constituye un factor que tenga un efecto importante en su ejecución. Sin embargo, se recomienda que no se den más de cinco minutos para la definición de cada palabra (primera tarea) y no más de dos minutos para la jeraquización (segunda tarea).

Finalmente es conveniente destacar, que la propia dinámica que orientará la investigación propuesta en relación al papel que juega el conflicto semiótico en la evolución de los significados personales de los objetos matemáticos, determinará la incorporación de cualquiera de los métodos al servicio de las ciencias sociales, con el propósito de cumplir con las pretensiones planteadas en el estudio.

Las redes semánticas permitirán responder a las siguientes preguntas: ¿Cuál es el significado de infinito que tiene un estudiante del tercer semestre de AC-CP? ¿Este objeto matemático le recuerda al alumno conocimientos previos? ¿Le evoca procedimientos específicos? ¿Relaciona su significado con otros objetos matemáticos (conjuntos, límites, indeterminaciones, entre otros)? ¿Confunde infinito con ilimitado? ¿Confunde terminológicamente las palabras: infinito e indeterminado? ¿El infinito existe? ¿Cuál es la diferencia entre “muy grande” (en sus diferentes acepciones semánticas) e infinito? Las redes semánticas permitirán determinar el conjunto de elementos de significado sobre el infinito matemático, mostrando la complejidad ontosemiótica y la multitud de objetos que los alumnos deben integrar para lograr una comprensión completa del mismo.

8.- Los Procesos de Triangulación Aplicados en la Investigación

Siguiendo a Cohen y Manion (1990, p. 331), la triangulación es *"el uso de dos o más métodos de recogida de datos en el estudio de algún aspecto del comportamiento humano"*. De acuerdo con Cerda (2000) la triangulación es una garantía para impedir que se acepte con demasiada facilidad la validez de las impresiones iniciales para lo cual se utilizan múltiples fuentes, métodos e investigadores con la intención de ampliar el ámbito, densidad y claridad de los constructos desarrollados en el curso de la investigación y corregir los sesgos que aparecen cuando el fenómeno es examinado por un solo observador, con una técnica y desde un solo ángulo de observación.

Según la fuente, se dan diferentes tipos de triangulación. Bisquerra (1989) establece cinco tipos de triangulación:

1) **Triangulación de información**: Se recogen datos de diversas fuentes para su contraste, incluyendo diversidad: (a) temporal: se recogen datos en distintos momentos para comprobar si los resultados son constantes, (b) espacial: se contrastan datos recogidos de distintas partes para comprobar las coincidencias, (c) personal: se utilizan distintas persona o grupos para contrastar los resultados.

2) **Triangulación de investigadores**: Se utilizan distintos observadores para comprobar que todos ellos registran lo mismo; diversos investigadores contrastan sus resultados respectivos sobre el mismo tema.
3) **Triangulación teórica**: Se trabaja sobre teorías alternativas, incluso contrapuestas, más que sobre un único punto de vista. De esta forma se pretende tener una interpretación más comprensiva del fenómeno.
4) **Triangulación metodológica**: Se aplican distintos métodos y se contrastan los resultados para analizar las coincidencias y divergencias. Se pueden utilizar distintos instrumentos y se contrasta si se llega a las mismas conclusiones.
5) **Triangulación múltiple**: Se combinan varios tipos de triangulación: datos, observadores, teorías y metodologías. La combinación de niveles de triangulación consiste en utilizar más de un nivel de análisis (individual, social e interactivo).

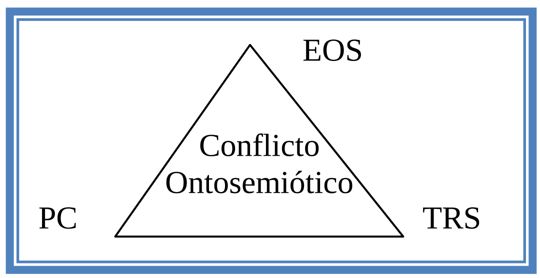


Figura 6. Triangulación teórica aplicada. ***Fuente:*** Elaboración propia

La triangulación teórica aplicada en esta investigación consistió en:

a) Describir, caracterizar y explicar las herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico (EOS)
b) Entender la complejidad semiótica de los objetos matemáticos a partir del pensamiento complejo (PC) y poder incorporar constructos como "borrosidad en la cronogénesis", "holosignificado", "la indeterminación en la conversión de los registros semióticos" y "la no-linealidad signo-significado". Esta nueva racionalidad en el abordaje de las herramientas del EOS, donde se integren las partes en un todo así como también la reentrada del todo en las partes, permitirá

comprender los elementos de significado en su interrelación, recursividad, organización, diferencia, oposición y complementariedad.

c) Utilizar la teoría de las representaciones semióticas (TRS) para explicar los conflictos semióticos asociados a la conversión de registros semióticos.

Esta triangulación permitirá realizar una aproximación teórica del conflicto ontosemiótico.

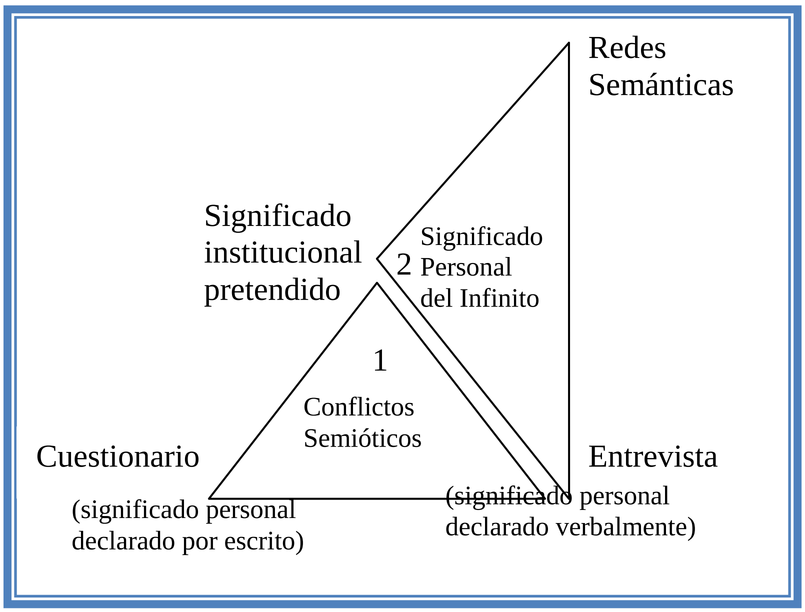


Figura 7. Triangulaciones metodológicas aplicadas en esta investigación

Fuente: Elaboración propia

La primera triangulación metodológica aplicada en esta investigación consistió en:

a) Identificar y caracterizar el significado institucional pretendido para el objeto matemático no ostensivo *infinito* a partir de una muestra representativa de textos universitarios.

b) Administrar a un grupo de estudiantes un cuestionario donde tenían que definir conceptos, efectuar operaciones, argumentar verdad o falsedad de proposiciones, realizar comprobaciones, demostrar y resolver problemas.

c) Como el cuestionario no muestra la extensión, profundidad y poliformismo de los conflictos semióticos ni el por qué de los mismos, se realizaron entrevistas semiestructuradas para completar la información sobre el contenido temático tratado, pedir más detalles a los estudiantes, incidir sobre algún punto especialmente interesante y aclarar algunas respuestas sobre los objetos matemáticos puestos en juego.

Esta triangulación permitirá analizar las concordancias y diferencias entre el significado personal logrado y el significado institucional implementado.

La segunda triangulación metodológica consistió en:

a) Identificar el subsistema de prácticas relacionadas con el *infinito* efectivamente implementadas en la institución.
b) Construir la red semántica del *infinito* en base a las diez palabras definidoras jerarquizadas por los estudiantes.
c) Comparar la red semántica con la información aportada durante las entrevistas semiestructuradas.

Esta triangulación permitirá determinar las prácticas discursivas que forman parte del significado personal del infinito.

Antes de plantear esta investigación se había llevado a cabo una experiencia piloto denominada investigación previa (Vanegas, 2008a, 2008b). De este estudio exploratorio se revisó la metodología, los instrumentos de selección de significados y análisis de éstos, y se corrigieron y completaron aquellos aspectos que así lo requerían. Se realizó la investigación con nuevos y mayor número de participantes y se construyeron nuevas categorías.

9.- Técnicas de Presentación de la Información

Para representar algunos de los aspectos estudiados vinculados con el papel que juega el conflicto semiótico en la cronogénesis de los significados de los objetos matemáticos, se incorporaron en el estudio algunas técnicas gráficas del paradigma de la complejidad que permiten exponer y describir sucintamente ciertos elementos del conflicto semiótico para facilitar su comprensión como los bucles recursivos y los diagramas de bifurcación. La introducción de estas técnicas en el trabajo, no solamente servirá de apoyo al texto, sino que también permitirá exponer de una manera clara y coherente el discurso doctoral.

10.- La Tetralogía en la Validez de Contenido y Confiabilidad del Estudio

En cuanto a la validez y a la confiabilidad del estudio, estos son términos muy marcados del paradigma cuantitativo y es conveniente acotar que en la investigación cualitativa se tiene una concepción diferente. En las ciencias sociales un objeto de estudio es reconocido importante cuando se demuestra que cumple con dos requisitos o condiciones necesarias: ser conocible y ser portador de conocimientos. Strauss (1994) sostiene, además que el modelo por el que se rigen las ciencias sociales deben ser tomados de las ciencias naturales desde el punto de vista epistemológico se considera a la sociedad como equivalente a la naturaleza, por lo que es preciso descubrir sus leyes naturales y perennes.

Validez Interna

(a) En el Anexo A se insertaron conceptos clave para aclarar el significado de los términos empleados en el discurso doctoral, (b) Los resultados obtenidos fueron congruentes con la realidad observada, (c) Las reflexiones finales se apoyaron en la información obtenida, (d) Las comparaciones fueron sistemáticas, (e) Se contrastaron las opiniones de la investigadora con la de otros especialistas en educación matemática y (f) Los datos fueron revisados en diferentes momentos de la experiencia.

Validez Externa

(a) Se analizaron las perspectivas de otros especialistas en el área, (b) No se introdujeron elementos extraños al escenario natural de trabajo y (c) Se emplearon constructos teóricos (de naturaleza sistémica-pragmática) que pueden ser aplicables en cualquier contexto académico de condiciones similares.

Confiabilidad Interna

(a) Los tres estudios (cuestionarios, entrevistas individuales semiestructuradas y redes semánticas) dieron luces sobre los diferentes significados parciales que los agentes interpretantes asignaron al objeto matemático en estudio, (b) Se tomaron en cuenta las opiniones de otros investigadores sobre el uso de los instrumentos de selección de significados y (c) Se procuró incluir toda la información relacionada con el cuestionario, las entrevistas y las redes semánticas para favorecer la posibilidad de que sean cuestionadas las conclusiones obtenidas como producto de ese análisis. Para que ese cuestionamiento sea posible por parte de cualquier interesado en hacerlo, se incluye en el Anexo B la trascripción completa de las entrevistas realizadas y en el Anexo D los datos para la construcción de las redes semánticas.

Confiabilidad Externa

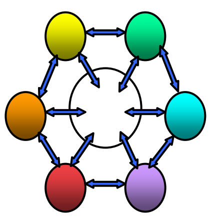
(a) Los datos recogidos son de buena calidad ya que fue rigurosa la elaboración de los instrumentos de observación y (b) Los métodos de selección de significados fueron precisos y exhaustivos.

Adicionalmente Santos y Sánchez (1996) indican ciertos criterios convencionales para otorgar validez y confiabilidad a los estudios cualitativos en el área matemática.

a) **Credibilidad**: Este aspecto se refiere al grado en que los resultados obtenidos en el estudio representan o revelan los significados que los estudiantes tienen del objeto indagado. Para alcanzar este criterio, cada categoría o resultado identificado en el análisis debe ser soportado y contextualizado con varios ejemplos tomados de la información (entrevistas, observaciones de clase, cuestionarios…).
b) **Transferencia**: Este criterio se refiere a la aplicabilidad del estudio en otros contextos o coordenadas espacio-temporales.
c) **Dependencia**: La naturaleza de los datos y los procedimientos empleados determinan la dependencia del estudio. Investigaciones similares desempeñan un papel importante en la selección de los instrumentos de recolección de

información. En este trabajo, al diseñar el cuestionario primero se recurrió a la opinión de la tutora de esta tesis, luego a la opinión de un grupo de profesores del Seminario Doctoral Permanente en FaCE-UC que simultáneamente son docentes de matemática en diferentes ámbitos y finalmente se sometió a la opinión de un grupo de expertos en educación matemática interesados en aspectos semióticos, asistentes al VI Congreso de Investigación de la UC (Vanegas, 2008b).

d) **Confirmación**: Cualquier persona relacionada con la educación matemática con cierta familiaridad con el enfoque ontosemiótico de la instrucción y la cognición matemática debe estar de acuerdo con la naturaleza de los resultados.



CAPITULO V
SIGNIFICADOS PERSONALES PUESTOS EN JUEGO POR LOS ALUMNOS DURANTE LA RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

La imaginación es más
importante que el conocimiento.
Albert Einstein

CAPITULO V

SIGNIFICADOS PERSONALES PUESTOS EN JUEGO POR LOS ALUMNOS DURANTE LA RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN

1.- Introducción

En las páginas anteriores se detallaron los aspectos metodológicos de esta investigación: características generales, intérpretes de signos, contexto, instrumentos y procesos de triangulación. En este capítulo se explícitan los significados personales puestos en juego por los alumnos durante la recolección de información; en su estructuración se ha incluido el análisis e interpretación de los resultados de los tres instrumentos aplicados: el cuestionario, la entrevista semiestructurada y las redes semánticas con su respectiva triangulación. Las evidencias o indicios de orden empírico y las emanadas de la revisión de textos y de otras investigaciones expuestas en los capítulos precedentes proporcionaran los elementos y consideraciones necesarias para realizar en el próximo capítulo una reflexión teórica sobre la dinámica de los significados personales de los objetos matemáticos y el papel que juega el conflicto semiótico en este aspecto.

2.- Análisis E Interpretación de los Resultados del Cuestionario

Al plantear en el capítulo I las pistas de itinerario para desarrollar la investigación, se indicó que una de las pretensiones era diseñar instrumentos de selección de significados para explorar, describir y caracterizar los conflictos semióticos asociados con el significado del objeto matemático no ostensivo denominado infinito. En este apartado se indican los resultados globales, tanto en lo que se refiere a ítems aislados, como a la puntuación total del cuestionario. Los resultados fueron expresados mediante el análisis de las respuestas correctas en primer lugar y luego la clasificación de las prácticas personales no válidas desde el punto de vista de la institución.

Cuadro 3. Porcentaje de respuestas obtenidas

Ítem \ Alternativa	a	b	c	d	NR	ítem correcto
1	40	0	40	20	0	c
2	60	0	0	40	0	d
3	80	0	20	0	0	a
4	60	20	0	0	20	a
5	20	0	0	0	80	b
6	0	80	0	0	20	b
7	0	40	0	0	60	b
8	0	40	0	0	60	b
9	20	0	20	0	60	b
10	0	100	0	0	0	b
11	0	80	20	0	0	b
12	0	20	60	20	0	b

NR: no responde a la interrogante planteada

En el ítem 1 del cuestionario, el estudiante tuvo que analizar un intervalo semiabierto (éxito alcanzado en un 40%); el ítem 2 lo enfrenta con el teorema de la unicidad del límite - elemento intensivo (éxito: 40%); en el reactivo 3 se le pidió evaluar el límite funcional en un punto donde la función tiende a infinito (éxito: 80%); en la pregunta 4 se le interrogó si conocía el resultado del cociente 1/0 (éxito: 60%). El ítem 5 implicó el cálculo (elemento actuativo) del área bajo una curva en un intervalo de integración no acotado, ninguno de los estudiantes respondió correctamente ya que tenían que utilizar varios registros semióticos para encontrar la respuesta; en el reactivo 6 el estudiante tenía que evaluar una integral impropia de segunda especie convergente (éxito: 80%); en la pregunta 7 se tenía que decidir, de las cuatro alternativas propuestas, el valor del área bajo una curva de longitud infinita (40% de respuestas correctas). El ítem 8 implicó el cálculo del área bajo el gráfico de una función en la recta real (éxito: 40%); en el reactivo 9 el alumno tenía que evaluar una integral impropia de segunda especie que diverge por oscilación (éxito: 20%). En la pregunta 10 se le interrogó si conocía el valor de la expresión ∞-∞, con el resultado satisfactorio de que todos los agentes participantes contestaron correctamente. En el ítem 11 se pidió determinar el tamaño del conjunto real [0,1] (éxito: 80%) y finalmente en el reactivo 12 se interroga, en el campo de los números reales, cual conjunto es más grande [0,1] o $(-\infty,+\infty)$ (éxito: 20%).

La pregunta 5, relativa al cálculo del área de la región plana limitada por la curva $y = 1/x^2$ para todo número mayor igual a uno, fue la de mayor dificultad del cuestionario ya que no fue contestada correctamente por ninguno de los alumnos. Se esperaba un mayor porcentaje de aciertos ya que el contenido temático pertenece a la asignatura que en ese momento estaban cursando.

El carácter dicotómico de la valoración correcto/incorrecto permite la utilización sistemática de procedimientos estadísticos. El siguiente cuadro presenta los índices de dificultad que tienen los ítems del cuestionario (porcentaje de respuestas correctas). Cada fila indica la respuesta correcta (v) o incorrecta (x) dada por cada uno de los entrevistados así como el porcentaje de respuestas correctas globales. Por ejemplo, el ítem 5 fue respondido incorrectamente por todos los alumnos.

Cuadro 4. Porcentaje de respuestas coincidentes con el significado institucional pretendido

Sujeto / Ítem	A1	A2	A3	A4	A5	% Correctas
1	x	x	v	x	v	40
2	x	v	x	v	x	40
3	x	v	v	v	v	80
4	v	v	x	v	x	60
5	x	x	x	x	x	0
6	x	v	v	v	v	80
7	x	x	v	v	x	40
8	v	x	x	v	v	40
9	x	v	x	x	x	20
10	v	v	v	v	v	100
11	v	v	v	x	v	80

12	x	x	v	v	v	60
% correctas	25	58.3	58.3	66.7	58.3	68.34

Fuente: Elaboración propia a partir de los cuestionarios. Leyenda: x: incorrecto, v: correcto

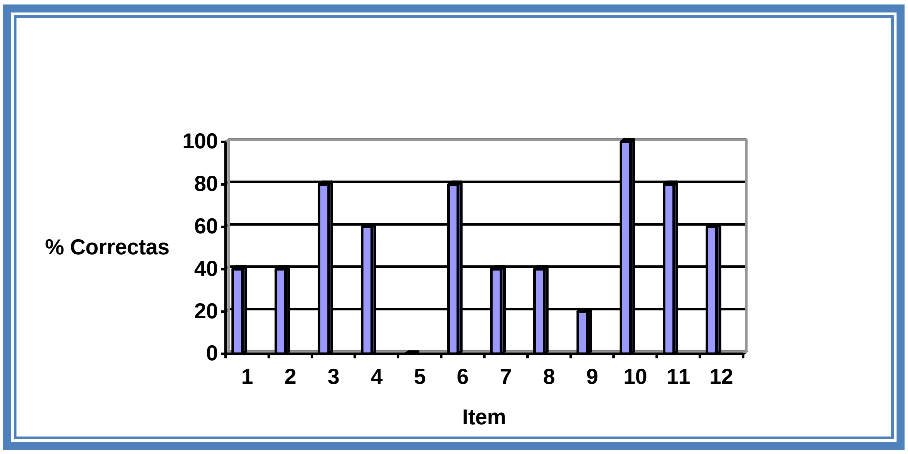


Figura 8. Descripción gráfica de la distribución del porcentaje de respuestas correctas

Los estudiantes respondieron correctamente a la mayoría de las preguntas del cuestionario administrado. Pero claramente se evidencia la dificultad de los alumnos con el componente discursivo del significado sistémico de los objetos matemáticos.

Conflictos semióticos potenciales:

1) Otorgar un tratamiento numérico al infinito.
2) Aplicar incorrectamente el teorema de la unicidad del límite.
3) Interpretar incorrectamente un número imaginario.
4) Confundir una integral impropia divergente donde el límite es infinito con una integral impropia divergente por oscilación.

2.1.- Análisis de los Registros Semióticos Empleados en el Cuestionario

El siguiente cuadro presenta los registros de representación semiótica utilizados en el cuestionario. Cada fila presenta un ítem, cada columna un entrevistado. Así por ejemplo, el ítem 10 relativo a la comprensión de la expresión indeterminada ∞-∞ fue respondido por todos los alumnos empleando un registro de representación verbal.

Cuadro 5. Registros de representación semiótica utilizados en el cuestionario

Ítem	Intérprete					Significado institucional de referencia
	A1	A2	A3	A4	A5	
1	CS	CS	An	CS	An	An
2	CS	An	CS	An	Cs	An
3	CS	An	An	An	An	An
4	An	An	CS	An	CS	V
5	NR	NR	CS	NR	CS	Mu
6	CS	An	An	An	An	An
7	NR	NR	V	V	CS	V
8	NR	An+Gr	An	An	An+Gr	Mu
9	NR	An+Gr	CS	CS	CS	Mu
10	V	V	V	V	V	V
11	CS	V	V	CS	V	V
12	CS	V	V	CS	V	V

Algebraico (Al), Geométrico (Ge), Gráfico (Gr), Verbal (V), Numérico (Nu), Analítico (An), No responde a la interrogante planteada (NR), Conflicto semiótico (CS), Múltiples registros semióticos (Mu)

Del análisis de los cuestionarios se desprenden ciertas evidencias:

1) Los estudiantes utilizaron mayoritariamente el registro de representación analítico.
2) Tienen dificultad para convertir un registro analítico en gráfico.
3) Manejan un restringido número de registros semióticos y en todos los cuestionarios aparecen máximo dos registros de representación semiótica.
4) Prefieren realizar cálculos algebraicos que interpretar resultados.

Se esperaba que las respuestas de los estudiantes quedaran clasificadas en las entidades primarias que se marcan en la siguiente figura:

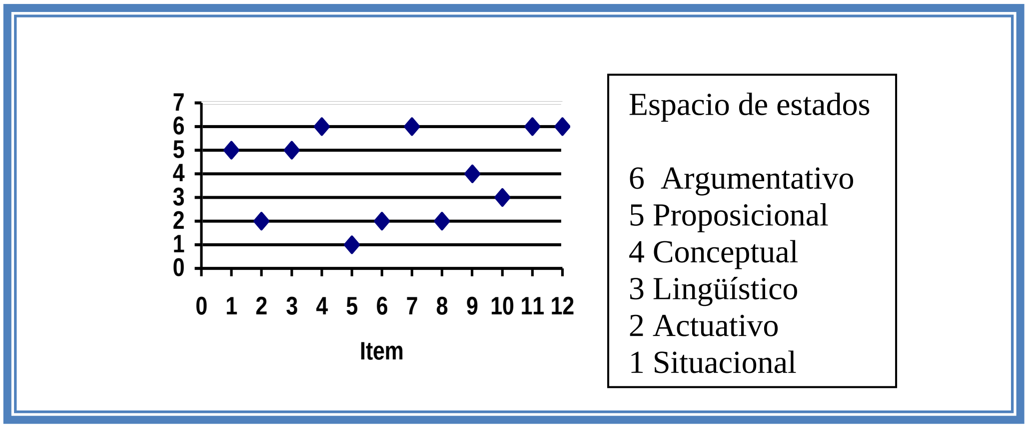


Figura 9*.* Trayectoria Epistémica

En el eje horizontal numerado del 1 al 12 aparecen las doce preguntas del cuestionario; en el eje vertical numerado del 1 al 6 los elementos de significado evaluados en el cuestionario: Al número 1 se le asignó el elemento situacional, al 2 el actuativo, al 3 el lingüístico, al 4 el conceptual, al 5 el proposicional y al 6 el argumentativo. En los ítems 1 y 3 del cuestionario se incluyeron elementos de significado de tipo proposicional, en los ítems 2, 6 y 8 elementos de tipo actuativo, en los ítems 4, 7, 11 y 12 elementos de tipo argumentativo, en el ítem 5 un elemento de tipo situacional, en el ítem 9 un elemento de tipo conceptual y finalmente en el ítem 10 un elemento de tipo lingüístico.

3.- Análisis e Interpretación de las Entrevistas

En aras del declarado principio de privacidad con el que se hicieron las entrevistas semiestructuradas se omitieron los nombres de los involucrados en la investigación empleándose un código de identificación tal como se señala en el siguiente cuadro:

Cuadro 6. Identificación de los entrevistados

Código de Identificación	Característica	Índice Académico	Páginas en el Anexo B
A1	Estudiante de bajo rendimiento	10.7	1-5
A2	Estudiante de alto rendimiento*	15.4	6-9

A3	Preparadora*	16.2	10-14
A4	Estudiante de rendimiento promedio	11.3	15-19
A5	Estudiante de alto rendimiento* (proviene de ingeniería)	16.4	20-23
I	Investigadora	-	1-23

* Estudiantes considerados excelentes para la matemática

En lo sucesivo se utilizará la siguiente nomenclatura: (Alumno: Página: Línea). Por ejemplo (A3:10:2) indica que la práctica discursiva es manifestada por la preparadora (A3) en la página 10, línea 2 de la trascripción literal de las entrevistas incluidas en el Anexo B.

Para realizar el análisis y la interpretación de las entrevistas se segmentó la información en episodios; porciones de la trascripción de longitud variable que contienen verbalizaciones de uno de los sujetos o el diálogo entre la investigadora y uno de los alumnos entrevistados. La longitud de las unidades de análisis es variable. Su contenido se centra en torno a un elemento intensivo o validativo (concepto o argumento).

En el siguiente cuadro de doble entrada se presenta la ubicación de los ítems en las trascripciones para cada uno de los entrevistados. Cada fila representa un ítem del cuestionario con la página y línea donde puede ser ubicado. Así por ejemplo A2 responde el ítem 4 en la página 2 entre las líneas 30 y 40 y en la página 3 entre las líneas 1 y 2. Este cuadro se incluye para facilitar al lector la búsqueda en las trascripciones de las verbalizaciones sobre cada ítem del cuestionario.

Cuadro 7. Ubicación de los ítems en las entrevistas

Ítem	A1		A2		A3		A4		A5	
	Pag.	Líneas	Pag.	Líneas	Pag.	Líneas	Pag.	Líneas	Pag.	Líneas
1	1	8-26	6	14-35	10	17-40	15	4-25	22	6-17
2	1 2	27-40 1-25	6 7	36-41 1-17	11	2-32	15	26-32	20	8-25
3	2	26-29	7	18-20	11	33-34	19	2-3	23	12-13
4	2 3	30-40 1-2	7	21-31	11	34-41	15 16	33-40 1-6	20	26-33
5	3	3-12	7 8	32-40 1-36	12	3-40	16	7-32	21	5-40
6	3	13-20	8	37-41	14	33-34	17	1-4	23	14-15
7	3 4	21-40 1-15	9	1-32	14	35-36	17	5-40	20 21	34-40 1-4
8	3	23-34	9	33-34	13	21-28	18	3-15	23	16-17
9	4	16-35	9	35-36	10	4-16	16	33-40	22	18-40

10	4 5	36-40 1-3	9	37-38	14	37-38	18	16-22	23	18-19
11	5	4-9	9	39-40	13	29-35	18	23-39	23	3-4
12	5	10-18	9	41-42	13 14	36-40 1-8	18 19	39-40 1	23	5-11

Fuente: Elaboración propia

Dado que el cuestionario gira alrededor de diversos objetos matemáticos que involucran la noción de infinito potencial, se consideró importante identificar y caracterizar el significado del objeto personal *infinito* puesto en juego durante la entrevista. En el siguiente cuadro se agruparon las verbalizaciones de los entrevistados cuando se les solicitó que dieran una interpretación de lo que cada uno de ellos entendía por la noción de infinito.

Cuadro 8. Práctica discursiva que forma parte del significado personal del objeto infinito

Alumno	Pag.	Línea	**Práctica discursiva que forma parte del significado personal del objeto infinito**	**Divergencias Interpretativas**
A1	1	22	Es como… o sea… no tiene… no se le puede asignar un valor a eso, o sea va más allá de lo que uno pueda determinar.[4]	El infinito es incuantificable
A2	6	27	¿Infinito?... Algo que no…que no tiene fin.	Sin fin
A3	10	34	El infinito lo veo yo como un símbolo, un símbolo que me dice que no es un intervalo cerrado, sino que hay algo más allá pero igual no se puede contabilizar, sino lo que me está mostrando es que hay algo más pero igual no no no… es tangible sino que más bien es como una especie de símbolo.	El infinito como indeterminado
A3	13	25	El infinito no es un número sino un símbolo que me indica que es un número bastante grande pero que igual no lo podemos contabilizar, porque no se que valor es infinito.	El infinito como un número muy grande
A4	15	16	¿Qué es el infinito? Algo que no tiene…esteee…como le digo…no tiene restricción…pues…más lejos de lo real.	Sin restricción
A5	20	23	Ok…Eeeeh…regresándonos a lo que es el infinito yo lo veo como una especie de número imaginario porque es algo que tenemos que plantearnos, un valor aproximado, me lo tengo que imaginar.	El infinito como un número imaginario

[4] Las frases se transcribieron exactamente como aparecen en las grabaciones; el uso de los puntos suspensivos recalca las pausas del sujeto y tiene la intención de dar sentido a las frases orales que, como sucede en numerosas ocasiones, no son evidentes.

I	10	39	Es una abstracción, que no se puede trabajar ni como un número ni como una variable. Es una abstracción porque cualquier número que tú te imagines le puedes sumar uno más y se va haciendo más grande, más grande, más grande.	El infinito como proceso Abstracción

De la anterior trascripción se puede observar, entre otros, los siguientes hechos significativos:

1) Para estos agentes interpretantes el infinito es un número que sólo es posible en la imaginación, dado lo grande que es. La repetición de la palabra imaginario indica que el sujeto le asigna a este objeto un carácter no ostensivo (en el sentido de que es un objeto que no se puede presentar directamente si no es mediante ciertos ostensivos).

2) Las prácticas discursivas se caracterizaron por respuestas titubeantes o frases apenas coherentes para tomarlas como intentos de respuesta, con el agravante de que cuando se les solicitaba una profundización acerca de sus propias declaraciones la confusión aumentaba considerablemente.

3) Se presentan conflictos semióticos de precisión porque el infinito es un término que presenta varias acepciones dependiendo del contexto en el que participa, siendo el significado dado en la cotidianidad el que prevaleció en las entrevistas.

4) En líneas generales los entrevistados declaran como significado personal del infinito una entidad numérica que no puede ser precisada, que ciertamente difiere del significado institucional de referencia y que no aparece claramente explicitada en los libros de texto consultados.

- El significado personal del objeto *valor imaginario* surgió del estudio del ítem 7, en el cual se pretende determinar si el alumno comprende que una suma infinita de diferenciales puede tener un valor numérico finito. Es interesante observar la discordancia con el significado institucional de referencia:

Significado personal del objeto valor imaginario

> *Como…como decir…como que no exista, como que yo no lo pueda ver (…) no es esa la palabra…imaginario es que no este ahí. Que no lo vea ahí. (A1:3:37)*

Por ejemplo la raíz cuadrada de menos uno es un número imaginario (A2:9:21)

Seria algo como que… matemáticamente no tendría solución. Algo que yo me pueda imaginar (se echa a reír) me confunde profe. Un número imaginario es la raíz cuadrada de menos uno. Una raíz no puede ser negativa(*). (A4:17:17)
Es una operación matemática en el cual el resultado no existe en la realidad por ejemplo la raíz cuadrada de menos dos. (A5:19:23)
Ojo, el número si existe pero pertenece a otro campo, el de los números complejos. Los ingenieros electricistas trabajan con esos números. Realmente el desarrollo de las calculadoras, computadoras y otros artefactos electrónicos se debe al uso de los números complejos porque los fenómenos eléctricos se explican mejor con los números complejos que con los números reales. Para ellos son unos números familiares. (I:17:21)

(*) Este es un conocimiento fuertemente arraigado, adquirido y memorizado durante su formación matemática.

Un elemento que emerge con fortaleza es que los conceptos previos no están bien fundamentados, precisamente porque no hay una articulación entre los diferentes registros. La conceptualización implica una coordinación de registros de representación semiótica (Duval, 1995), libre de contradicciones (Hitt, 2001).

El análisis que se presenta a continuación se realiza pregunta a pregunta y no alumno a alumno, aunque es pertinente hacer la observación que, desde un principio, se planteó la alternativa de un análisis paralelo de cada uno de los sujetos entrevistados.

- Con relación al grado de dificultad de los doce ítems del cuestionario, los estudiantes opinaron que eran problemas de una dificultad moderada y explicitaron las razones que sustentan su calificación:

¿Cómo te pareció el cuestionario?

Me pareció muy bueno porque ahí es donde uno empieza a pensar y buscar la lógica. (A1:1:2)
Bien. (A2:6:13)

El cuestionario se entiende todo, lo que he tenido siempre esa duda en realidad, por lo menos cuando tengo que evaluar un seno o coseno en el infinito. (A3:10:2)
Me gusto porque tiene cosas raras. Por lo menos lo del seno. Aclare muchas dudas que tenia. Pues. Donde me quede más que todo fue en el área porque no pude asociar el área con la integral. (A4:19:11)
Me puso a pensar bastante. (A5:18:2)

- Un aspecto a considerar fueron los significados iniciales o previos (Matemática I): Se constata deficiencias en los conocimientos necesarios para abordar límites infinitos. Olvidan los teoremas que no utilizan frecuentemente.

¿Te acuerdas del teorema de la unicidad del límite?

De eso no me recuerdo muy bien, no recuerdo exactamente (A1:2:18)
Ahorita no me acuerdo bien (A2:7:13)
No, no profe yo vi Matemática I hace bastante tiempo (A3:11:24)
Un número entre cero por la derecha y cero por la izquierda ya me tiende a más o menos infinito (A4:15:29)
Un poquito…Que el…No realmente no (A5:18:25)
El límite existe siempre y cuando los dos límites laterales coincidan (I:2:19)
(…) el límite por la derecha te da un resultado y si lo evalúas por la izquierda te da otro. Tu razonamiento está bien pero no te apoyaste en un concepto matemático y ahí es donde se inician los conflictos semióticos. (I:7:15)

La frase «no me acuerdo» se repite a lo largo de las entrevistas.

- Con respecto a los conocimientos previos en Matemática II:

¿El área bajo una curva puede ser cero?

Esa no la plantee porque no la entendí. Yo entiendo que esta pregunta tiene mucha relación con… (A1:4:17)

Gráficamente Ok, es cero (A2:9:14)

Ah bueno, matemáticamente es cero, pero hay un poquito (A3:12:36)

Cero no, puede tender a cero porque nunca va a tocar el eje (A4:17:13)

No… es imposible que sea exactamente cero (A5:19:1)

Ojo, tiende a cero pero no es exactamente cero. Es imposible que el área de cero. Siempre se va a poder dibujar un rectángulo muy pequeñito…(I:9:15)

Se constata más deficiencias en el manejo de lo infinitamente pequeño (infinitesimales) que con lo infinitamente grande.

¿El área bajo una curva de longitud infinita puede ser finita?

No la realice porque tenía muchas dudas en esta pregunta…(A1:3:23)

No (A2:9:6)

Debe ser porque la gráfica se va acercando más al eje x, entonces como le estamos aplicando un límite entonces yo puedo decir que tiende a un valor finito, porque cada vez se está haciendo como más pequeña (A3:12:12)

No (A4:16:23)

Entonces los límites de integración deberían ser finitos (A5:21:4)

Fíjate que la curva tiene una particularidad: a medida que x crece sin límite la curva se va aproximando al eje x pero sin llegar a cortarlo (…) La que está contribuyendo al valor del área son los rectángulos más grandes (…) Entonces tiene sentido que una curva que tiene longitud infinita tenga un área de valor finito. (I:16:24)

3.1.- Análisis de los Patrones Subyacentes de Conflicto Semiótico

El análisis en profundidad de las trascripciones de las entrevistas evidencia lo siguiente:

a) Empleo de palabras cotidianas de una manera inapropiada en el contexto matemático:

Expresión incorrecta del alumno

...desintegro la integral (A3:13:22)

... cuando yo meto el uno aquí (A2:6:40)

Esta broma es una parábola (A2:7:40)

...Derive arriba y derive abajo...(A3:11:5)

b) Serias carencias en el componente discursivo para comunicar los significados personales de los objetos matemáticos, con una marcada dificultad para concatenar los argumentos. Respuestas incompletas, confusas e incoherentes. Frases o expresiones inadecuadas.

Práctica discursiva manifestada por (A1:1:22)

Es como...o sea...no tiene...no se le puede asignar un valor a eso...

c) Ciertas respuestas correctas tienen como base significados personales erróneos. Es decir, resultados correctos están acompañadas de conflictos semióticos de tipo algorítmico y de razonamientos mal estructurados.
Manifiestan la primera idea que se les ocurre sin reflexionar al respecto:

Práctica discursiva

I:¿Cuál es el valor de uno entre cero?   (I:2:30)

A1: No existe. Porque yo por ejemplo cuando voy a tomar...este...un número y lo divido entre cero en la calculadora me da como un error.

d) Se apropian de los objetos matemáticos. Ramos (2005) señala que los alumnos cuando hablan de sus objetos personales utilizan el discurso en primera persona mientras que cuando hablan de los objetos institucionales utilizan el discurso en tercera persona. A título de ejemplo se reproducen a continuación algunas prácticas discursivas:

Práctica discursiva

Yo lo veo… (A2:7:5)
Lo veo yo como un símbolo… (A3:10:34)

e) Ejecutan procedimientos pero no proporcionan argumentos para justificar su realización. En la terminología ontosemiótica: Ponen en juego elementos actuativos sin el apoyo de elementos validativos. En los siguientes diálogos se manifiesta esta situación:

Práctica discursiva

I: ¿Y negativa?   (I:9:27)
A2: No, no puede haber área negativa.
I: ¿Por qué?
A2: Bueno, lo que yo recuerdo que uno calcula el área no le puede dar un negativo. El área tiene que dar un número mayor que cero.

I: …¿coseno de más infinito?   (I:22:28)
A5: Debería dar infinito.
I: ¿Por qué?
A5: Porqueeeee…Eeeeeh….

Algunos alumnos aplican propiedades o algoritmos porque sus profesores les han enseñado que "así se hace" o "porque me lo enseñaron así" sin poder elaborar una explicación para lo que están haciendo.

Práctica discursiva

Porqueeeeeeee...yo lo veo así como lo que vimos allá en el pasado, que esto es una indeterminación. (A1:4:38)

Y dado que un objeto matemático puede ser estudiado desde una variedad de significados, el que se privilegia es el significado actuativo.

f) Empleo de analogías, entendida como la habilidad para hacer comparaciones y buscar similitudes y que conduce a nuevas formas de ver un problema conectando dos o más universos disímiles con la finalidad de comprender un fenómeno A mediante B.

Práctica discursiva manifestada por A5

El infinito es…como el ciclo del agua que se repite, se repite y se repite (A5:25:20)*

Es como buscarle una…una especie de balanza…como no está muy a la derecha ni muy a la izquierda (A5:18:19)

Imaginármelo como una sabana en el espacio que se va ampliando (A5:24:23)*

Me imagine la función seno: yo subo y bajo (A5:20:24) [Metáfora orientacional. Acevedo (2007)]

(…) para nosotros son como raros, como si no existieran (A5:17:27)

* Al referirse a la noción de infinito lo hacen en términos de un objeto con propiedades físicas.

Relacionan la práctica matemática con situaciones no matemáticas de la cotidianidad.

g) Incapacidad para afrontar las condiciones de incertidumbre cognitiva. Se evidencia por el alto índice de inseguridad (no se sienten seguros de que la respuesta dada sea la correcta o responden con otra pregunta).

La inseguridad es la incapacidad de afrontar la incertidumbre.

Práctica discursiva

I: (…) ¿Cuál es la base de este rectángulo? (I:8:27)
A2: [en voz más baja] ¿No sería cero?
I: Prácticamente tiende a cero…

I: (…) Por lo tanto ¿A cuanto tiende el límite? (I:2:1)
A1: (Duda durante unos segundos) ¿Aquí no sigue siendo cero por la derecha? [La alumna mientras realiza esta pregunta señala con su portaminas la parte del cuestionario en el que se hallan los cálculos]

h) Imprecisión en el lenguaje utilizado: Emplean incorrectamente las notaciones y nomenclaturas de la matemática. Convierten incorrectamente las expresiones en lenguaje natural a símbolos matemáticos. A continuación se presentan dos ejemplos de expresiones inválidas en el sistema de representación analítica para las integrales impropias:

Prácticas de naturaleza operatoria o procedimental no válidas

1) $\int_{1}^{\infty} e^{-x}dx \quad \int e^{-x}dx \quad \int \frac{1}{e^{x}}dx \quad 1\int e^{x}dx \quad e^{x}+C \quad e^{\infty}=\infty$

2) $\int_{0}^{\infty} senxdx \quad \int senxdx \quad -\cos x + C \quad -\cos\infty$

i) En las prácticas discursivas se percibió un esfuerzo de búsqueda de significado. La confusión fue un elemento de este proceso de búsqueda y se expresó en situaciones en las que los agentes interpretantes cambiaban de opinión sobre un contenido matemático o asumían posiciones tentativas.

Práctica discusiva

I: (…)¿Por qué la integral da uno? ¿Está malo? (I:8:16)
A2: Si
I: ¿Si?
A2: (Abre los ojos en gesto de asombro[5]) No
(Risas al unísono)
A2: No, no está malo
I: Vamos a utilizar el método exhaustivo de Arquímedes (…)

Este punto se corrobora en otro segmento de la entrevista en el que la investigadora refiriéndose a las áreas imaginarias, le pregunta explícitamente a A4 que es un número imaginario:

Práctica discusiva manifestada por (A4:17:17)

A4: Seria algo como que…matemáticamente no tendría solución. Algo que yo me pueda imaginar (se echa a reír) me confunde profe (…)

[5] En el EOS no sólo son importantes las prácticas verbales sino también las gestuales.

Se trató de poner en dificultad a los entrevistados con el fin de:

1) Detectar hasta que punto habían realmente construido de manera personal el conocimiento.
2) Facilitar de que se percataran por si mismos de la existencia de conflictos semióticos, como un elemento de avance en la construcción de un significado personal más cercano al significado institucional de referencia.
3) Facilitar la toma de conciencia acerca de las contradicciones.

Estas prácticas discursivas manifiestan el grado de convencimiento demostrado por los estudiantes en relación con las respuestas dadas en el cuestionario.

j) Dificultad en la conversión de registros semióticos de diferentes sistemas de representación sometidas a unas determinadas reglas (sintácticas, semánticas y pragmáticas): Realizan el estudio analítico de una función (dominio, asíntotas, corte con los ejes, entre otros) pero no logran realizar la representación gráfica. Dada la importancia de este aspecto, será tratado con mayor profundidad en el capítulo titulado “Aporte teórico”.
k) Tendencia muy marcada a considerar que si una curva tiene longitud infinita entonces el área bajo la misma también es infinita:

Práctica discursiva manifestada por (A2:8:12)

Ok, lo que pasa es que lo vi así: como tiende a más infinito pensé que el resultado seria más infinito. Como no resolví la integral…

Como se puede apreciar en las líneas anteriores, la intuición del alumno en el caso de una integral (que es una suma infinita) parece decir: “Si se aumenta el número de diferenciales entonces la suma debe ser infinita”.

l) Hay una desviación del uso legítimo de la palabra "imaginario", ya que lo que tendría sentido sería decir es que es un objeto matemático no ostensivo.
m) Imprecisiones en los elementos validativos (argumentos que sirven para justificar o validar las soluciones).
n) Manejo de significados personales no formales (intuición: facultad de comprender un problema instantáneamente sin realizar un razonamiento)

Práctica discursiva manifestada por I

Entonces ¿Por qué será que intuitivamente se ve que el área es infinita y analíticamente se obtiene que el área es uno? (I:12:10)

I: Intuitivamente el área bajo esta curva ¿Cuál es?
A2: Intuitivamente seria un área infinita. (I:8:6)

o) Muchos no entienden el enunciado de la pregunta. La comprensión de los requerimientos de una situación problema implica que el estudiante le atribuya un significado, por lo tanto hay un vacío de significación.

p) Manejo de metáforas dinámicas.

Práctica discursiva manifestada por (A1:1:21)

(...) que va desde uno hasta más infinito

La estudiante emplea un esquema de imagen que sugiere una organización espacial, como un camino con un comienzo (desde) y con un horizonte (el infinito). La visión dinámica de los intervalos se sustenta fundamentalmente en la proyección metafórica del esquema del camino, lo cual contribuye a considerar incorrectamente al infinito como un número.

Adicionalmente se registraron en las transcripciones 61 episodios con códigos relacionados con conflictos semióticos (CS) que se presentan en el siguiente cuadro:

Cuadro 9. Categorización de los conflictos semióticos

Alumno	CS	**Descripción**
A1	1	No entiende el enunciado de la pregunta
	2	Error al expresar que 1/0 = 0
	3	Conflicto en la evaluación del límite por la derecha o por la izquierda
	4	Inseguridad en la evaluación del límite
	5	No recuerda el teorema de la unicidad del límite
	6	Confunde el cálculo de un valor numérico con la evaluación de un límite
	7	No entiende el enunciado de la pregunta
	8	Planteamiento analítico del área bajo una curva (conversión de registros)
	9	Planteamiento analítico del área bajo una curva (conversión de registros)
	10	No entiende el enunciado de la pregunta
	11	No entiende lo que significa curva de longitud infinita (Confusión entre objeto y proceso)
	12	Confusión entre el corte con los ejes y lo que representa un valor imaginario
	13	Dice que "Imaginario es que no este ahí. Que no lo vea ahí"

Cont. ***Cuadro 9***

	14	Confunde un objeto matemático no ostensivo con valor imaginario
	15	Responde con otra pregunta: denota inseguridad
	16	No entiende el enunciado de la pregunta
	17	Llega a un resultado correcto realizando razonamientos incorrectos
	18	No ofrece argumentos para justificar una indeterminación
	19	Dice que “No es una expresión que yo pueda decir 1-1 sino que puede tener infinitos valores” refiriéndose a la indeterminación ∞-∞
A2	20	Aprensión ante el cuestionario. No desea ser evaluada
	21	Dice que “No me pare a leer cada una (…) sino que hice un sondeo”
	22	No ofrece argumentos para sustentar la respuesta dada
	23	Da a entender que el infinito es un número
	24	Automáticamente al ver el símbolo ∞ lo interpreta como un número
	25	No ofrece argumentos para sustentar la respuesta dada
	26	Imprecisión en la verbalización: debería decir “al sustituir el uno en el denominador”
	27	No recuerda el teorema de la unicidad del límite
	28	No ofrece argumentos para sustentar la respuesta dada
	29	Trató de contestar la pregunta mentalmente
	30	Trató de contestar la pregunta mentalmente
	31	No sabe como graficar $y=1/x^2$
	32	Cambia de posición y entra en contradicción
	33	Responde con otra pregunta: denota inseguridad
	34	Llega al resultado correcto pero realizando un razonamiento incorrecto porque evalúa la integral impropia sin previamente haber calculado la primitiva
	35	Cambia de posición y entra en contradicción
A3	36	Error: Dice que “Uno entre cero es indeterminado”
	37	Repite el mismo error anterior
	38	Dificultad para manejar infinitésimos
	39	Imprecisión en la verbalización. Dice “ Es como un conjunto de números que existen pero no…como que no son reales”
	40	No entiende el enunciado de la pregunta (Vacío de significación)
	41	Interpreta mal el enunciado de la pregunta
A4	42	No ofrece argumentos para sustentar la respuesta dada
	43	No ofrece argumentos para sustentar la respuesta dada
	44	No entiende el enunciado de la pregunta (Vacío de significación)
	45	Dificultad para manejar infinitésimos
	46	Dice “El infinito no existe”
	47	Confunde el dominio con el rango de una función
	48	No entiende el enunciado de la pregunta (Vacío de significación)
	49	No sabe interpretar una curva de longitud infinita
	50	Cambia de posición y entra en contradicción
	51	Imprecisión en la verbalización. Dice “Imaginario…sería algo como matemáticamente no tendría solución”
	52	Imprecisión en la verbalización. Dice “En esos infinitos números puede entrar un número imaginario”
	53	Marca una opción pero piensa que la respuesta correcta es otra
A5	54	Imprecisión en la verbalización. Dice “El cero como tal no está ni para allá ni para acá”
	55	No recuerda el teorema de la unicidad del límite
	56	No entiende el enunciado de la pregunta (Vacío de significación)
	57	Asocia dos registros de representación semiótica diferentes
	58	No ofrece argumentos para sustentar la respuesta dada
	59	No ofrece argumentos para sustentar la respuesta dada
	60	No ofrece argumentos para sustentar la respuesta dada
	61	No ofrece argumentos para sustentar la respuesta dada

En base a esta información se realizó un conteo de los conflictos semióticos según su tipo obteniéndose lo siguiente:

Cuadro 10. Conflictos semióticos más frecuentes

Descripción	Frecuencia
No entiende el enunciado de la pregunta (Vacío de significación)	8
No recuerda el teorema de la unicidad del límite	3
Incertidumbre cognitiva (Responde con otra pregunta)	2
No ofrece argumentos para sustentar la respuesta dada	9
Imprecisión en la verbalización	4
Cambia de posición y entra en contradicción	3
Llega a resultados correctos realizando razonamientos incorrectos	2
Error procidemental	2

A1 tiene 19 CS ; A2 tiene 16 CS ; A3 tiene 6 CS ; A4 tiene 12 CS ; A5 tiene 8 CS.

4.- Comparación entre las Respuestas del Cuestionario y de la Entrevista

El siguiente cuadro de doble entrada presenta la comparación entre los dos instrumentos aplicados en esta investigación y las discrepancias encontradas para cada ítem del cuestionario. Cada fila representa la respuesta dada tanto en el cuestionario como en la entrevista por cada uno de los participantes. Así por ejemplo, en el ítem 3 hay concordancia entre lo escrito en el cuestionario y lo manifestado durante las entrevistas para todos los estudiantes con excepción del primer alumno (A1) cuya respuesta es incorrecta por aplicar una operación no válida desde el punto de vista de la institución.

Cuadro 11. Comparación entre las respuestas dadas en el cuestionario y la entrevista

Ítem	A1		A2		A3		A4		A5	
	C	Entrevista	C	Entrevista	C	Entrevista	C	Entrevista	C	Entrevista
1	x	Dudas	x	Razonamiento incorrecto	v	Correcta	x	Error en la interpretación	v	Correcta
2	x	Malentendido 1/0 =0 Uso de calculadora	v	Razonamiento incompleto	x	Procedimiento incorrecto Aplicó L´Hôpital	v	Razonamiento correcto	x	Razonamiento incorrecto
3	x	Operación no válida	v	Correcta	v	Correcta	v	Correcta	v	Correcta
4	v	Correcta	v	Bucle con la 3	x	Error $1/0=\infty$	v	Bucle con la 2	x	No la entendió
5	NR	No la hizo, no hizo gráfico ni integral	NR	Dificultad en el gráfico	x	No hizo gráfico	NR	No la hizo	x	Procedimiento incorrecto Error en la regla de Barrow
6	x	No emplea reglas sintácticas. Problemas al resolver la integral	v	Procedimiento incorrecto. Evalúa la integral sin tener la primitiva	v	Correcta	v	Razonamiento correcto	v	Razonamiento correcto

Cont. ***Cuadro 11***										
7	N	No la hizo pero marca la opción correcta	v	Bucle con la 5	v	Razonamiento correcto	v	Conflicto semiótico	x	Bucle con la 5
8	N	No la hizo pero marca la opción correcta	v	Correcta	x	Incompleta No hizo gráfico	v	Problema al hacer la conversión de registros semióticos	v	Correcta
9	N	No la entendió. No emplea reglas sintácticas	v	Correcta	x	Confusión en la evaluación del coseno en infinito	x	Dudas Confunde dominio con rango	x	Expresa "Ahí parece que tengo el mismo error de siempre"
10	v	Correcta pero no sabe explicar porque	v	Correcta	v	Correcta	v	Correcta	v	Correcta
11	x	Razonamiento incorrecto	v	Correcta	v	Correcta	x	Dudas. Marca una cosa pero piensa otra	v	Correcta
12	x	Razonamiento incorrecto	v	Correcta	v	Correcta	x	Expresa "Ahora que entendí la 11 se que conteste mal la 12"	v	Correcta

Leyenda: C: Cuestionario, x: incorrecta, v: correcta, NR: no responde a la interrogante planteada

A partir del cuadro anterior se pueden apreciar los siguientes hechos:

1) Los estudiantes respondieron por escrito al cuestionario de modo rápido, sin entrar demasiado en los detalles; por ejemplo, no especificaron en modo completo el verdadero motivo de rechazo de alguna de las alternativas. Pero verbalmente, con preguntas oportunas durante las entrevistas, se logró captar la razón de esta situación.
2) Se observa la poca relación existente entre las respuestas del cuestionario con las ofrecidas durante la entrevista. Es decir, los alumnos marcan una opción aunque su razonamiento indique que la respuesta es otra.
3) A pesar de los estudiantes entrevistados obtuvieron un buen rendimiento en el cuestionario (68,38% de respuestas correctas) los resultados de la entrevista confirman las dificultades que presentan estos alumnos en la comprensión de ciertos objetos matemáticos donde el infinito potencial está implícito: conjuntos no acotados, comparación de conjuntos infinitos, límites infinitos, formas

indeterminadas, integrales impropias y el cálculo de áreas de regiones planas no acotadas limitadas por curvas continuas en coordenadas cartesianas.

4) El análisis de los razonamientos de los alumnos en las entrevistas permite tomar conciencia tanto de la complejidad semiótica del cuestionario, como de las relaciones dialécticas entre los significados institucionales (puestos en juego en el texto) y los significados personales. La complejidad se manifestó por el hecho de que cada término o expresión debió ser interpretada al menos implícitamente por el estudiante y que en unos casos la interpretación requirió recordar un convenio establecido previamente, pero en otros fue necesario movilizar un significado sistémico previamente elaborado.

5.- Análisis e Interpretación de los Resultados de las Redes Semánticas

Las redes semánticas constituyeron una herramienta conveniente para determinar los significados que los estudiantes atribuyen al objeto *infinito*, ya que permitieron indagar y examinar en profundidad muchas de las dificultades que presentan los alumnos en la comprensión del significado de dicho objeto matemático. Las instrucciones, el primer vaciado de datos por participante y el cálculo del valor M total se muestran en el Anexo D.

El siguiente cuadro presenta el primer vaciado de las expresiones jerarquizadas por cada alumno en el formato suministrado. Por razones de espacio disponible tuvo que fragmentarse en dos cuadros. Cada fila contiene el grupo de palabras definidoras del infinito para cada alumno participante. Así por ejemplo, el alumno número dos considera como palabras definidoras del infinito: indefinido, no tiene límite, inexacto, desconocido, sin fin, signo, matemático, múltiple, inagotable e inalcanzable.

Cuadro 12. Primer vaciado de las expresiones jerarquizadas por cada alumno

Alumno	1	2	3	4	5
1	Muy grande	Máximo	Indeterminado	Interminable	Sin fin
2	Indefinido	No tiene límite	Inexacto	Desconocido	Sin fin
3	Indefinido	Incalculable	Consecuente	Impreciso	Inalcanzable
4	Número	Real	Indeterminado	No tiene límite	Indefinido

Cont. ***Cuadro 12***

5	Universo	Límite	Continuidad	Real	Inagotable
6	No tiene límite	Sin fin	Inalcanzable	Matemática	Número
7	Indefinido	Real	Universo	Símbolo	Número
8	Ilimitado	Sin fin	Infinitesimal *	Universo	Más allá
9	Símbolo	Espacio	Fin	Vacío	Número
10	Indefinido	Sin fin	Inagotable	Indeterminado	Dimensional
11	Incalculable	Siempre	Eterno	Lejano	Inimaginable
12	Inmenso	Muy grande	Real	Función	Área
13	Número	Nunca se acaba	Sin fin	Largo	Extenso
14	Sin fin	Sucesivamente	No termina	No tiene límite	Inalcanzable
15	Abstracto	Lógico	Universo	Indeterminado	Ilimitado
16	Elemento	Cantidad	Todo	Mayoría	Conjunto
17	Sin fin	Incalculable	No tiene límite	Extremo	Sin medida
18	Número	Incalculable	Sin fin	Universo	Desconocido
19	No tiene límite	Muy grande	Amplitud	Número	Sumatoria
20	No tiene límite	Imaginario	Número	No existe	Matemática
21	Muy grande	Lejano a cero	Indeterminado	Número	Real
22	Demasiado	Incalculable	Innumerable	Inmenso	Cifras
23	No tiene límite	Sin fin	Universo	Real	Totalidad
24	Muy grande	Inimaginable	Imposible de ver	No se conoce	Lejanía
25	Sin fin	Lejano	Número	No se ve	No termina
26	Ilimitado	Sin fin	Indeterminado	Incalculable	Sin medida
27	Ilimitado	Inalcanzable	Lejano	Interminable	Continuo
28	Muy grande	Indeterminado	Sin fin	Indefinido	No tiene límite
29	Lejano	Sin valor	Invisible	No termina	Innumerable
30	Sin fin	Indeterminado	Perpetuo	Oculto	Inmenso

* Solo una de las treinta personas emplea la palabra infinitesimal como descriptor del objeto infinito. Adicionalmente, el significado parcial del infinito relativo a la cardinalidad no aparece reflejado en ninguno de los dos cuadros.

Continuación Cuadro 12. Primer vaciado de las expresiones jerarquizadas por cada alumno

Alumno	6	7	8	9	10
1	Último	Número	Inagotable	Inexacto	Imaginario
2	Signo	Matemático	Múltiple	Inagotable	Inalcanzable
3	Persistente	Imaginario	Irreal	Abstracto	Universo
4	Imaginario	Expresión	Ilimitado	Sin fin	Abstracto
5	Entero	Conjunto	Área	Totalidad	Símbolo
6	Cantidad gigante	Bastante	Demasiado	Mucho	Muy grande
7	Área	No tiene límite	Inagotable	Indefinido	Sin fin
8	Inexacto	Ínfimo	Prolongado	Degradación	Inimaginable
9	Cálculo	Función	Conjunto	Amplitud	Grandeza
10	Abstracto	Incomprendido	Sin establecer	Desconocido	Incalculable
11	No encontrado	Diferente	Conjunto	Oculto	El más allá
12	Desconocido	Incalculable	Ilimitado	Número	Sin fin
13	Existente	Secuencia	Inmenso	Perdurable	Permanente
14	Continuo	Perpetuo	Sin fin	No se ve	Oculto
15	Concepto	Teórico	Matemática	Dominio	Segmento
16	Continuo	Número	Siempre	Eterno	Distancia

Cont. ***Cuadro 12***

17	Número	Dios	Unión	Muy grande	Eterno
18	Conocimiento	Amor	Vida	Sumatoria	Incierto
19	Eterno	Sin medida	Símbolo	Sin fin	Vacío
20	Área	Conjunto	Derivada	Sin fin	Inexacto
21	Máximo	Inagotable	Desconocido	Impreciso	Múltiple
22	Límite	Muchísimo	Número	Extenso	Inalcanzable
23	Inagotable	El todo y la nada	Sin respuesta	Indefinido	Mucho
24	Incalculable	Sin alcance	Extenso	Sin explicación	Largo
25	Imaginario	Continuo	Incalculable	Valor	Indeterminado
26	Enorme	Extenso	Sin fronteras	Sin barreras	Invisible
27	Sucesivo	Progresivo	Universo	Cadena	Invisible
28	Incalculable	Inalcanzable	Imaginario	Abstracto	Ilimitado
29	Demasiado	Abstracto	Indeterminado	Universo	Dios
30	Extenso	Inalcanzable	Máximo	Interminable	Consecuente

En el análisis de estos cuadros se encuentra una diversidad de palabras definidoras de *infinito*, por lo que parece razonable pensar que hay una multiplicidad de significados de este objeto matemático.

En el siguiente cuadro se presentan los valores FMG (el porcentaje relativo de cada palabra). Así, la expresión “Sin fin” obtuvo el valor M total más elevado, es el 100% y aplicando una regla de tres simple se obtienen los porcentajes de las otras palabras.

Cuadro 13. Conjunto SAM para Infinito

Conjunto SAM obtenido para el objeto infinito		
Conjunto SAM 15 Palabras definitorias	Valor M Total	Valores FMG Porcentaje relativo entre las palabras
Sin fin	117	100 %
No tiene límite	74	63 %
Muy grande	68	58 %
Incalculable	66	56 %
Universo	49	42 %
Inalcanzable	44	38 %
Ilimitado	39	33 %
Indeterminado	38	32 %
Indefinido	36	31 %
Abstracto	21	18 %
Más allá	16	14 %
Inimaginable	16	14 %
Interminable	15	13 %
Eterno	14	12 %
Imaginario	13	11 %

A partir de este cuadro se construye un gráfico radial de los valores FMG para el objeto matemático no ostensivo *infinito*. Finalmente con el gráfico se realiza la interpretación de la información de significados que la red semántica ha revelado.

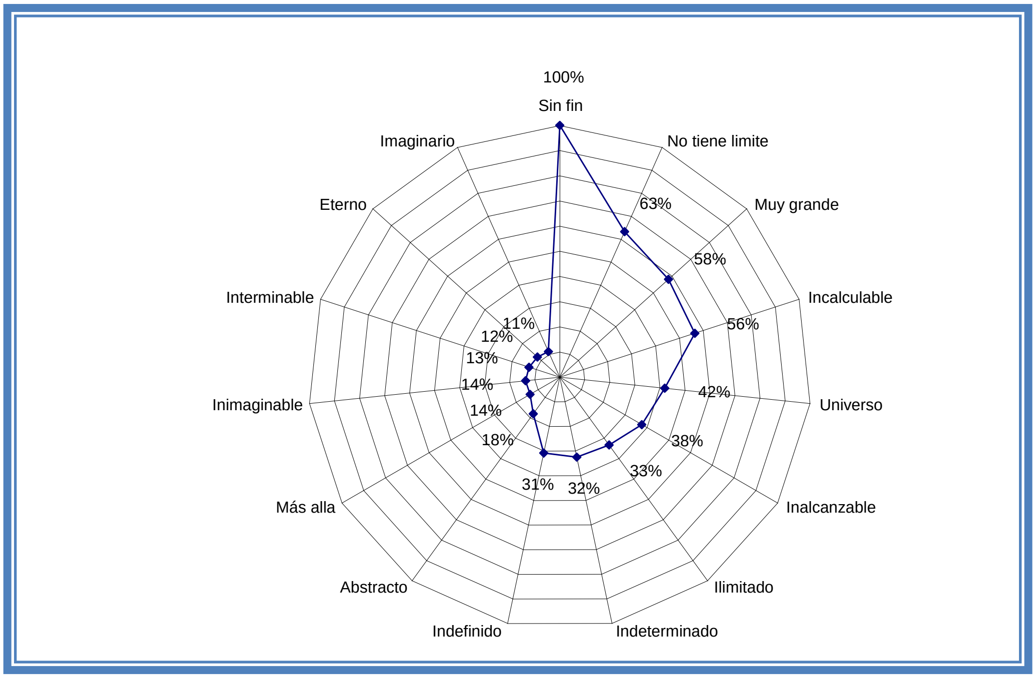


Figura 10. Representación gráfica de los descriptores de infinito

Fuente: Elaboración propia a partir de las expresiones jerarquizadas

Interesa resaltar que esta red semántica se asemeja a una compleja telaraña, en la que cada palabra forma parte de otra red más amplia o se une además por medio de cadenas de asociación a otros descriptores.

El análisis en profundidad de este gráfico radial pone en evidencia que:

1) La noción de infinito coincide con el significado parcial dado en la cotidianidad en sus varias manifestaciones semánticas: la ausencia de límites o fronteras, la falta de conclusión o de término de un proceso que se repite o que progresa indefinidamente. Bajo esta significación, el infinito es, literalmente, lo que no tiene fin, lo que siempre se puede continuar (infinito temporal).

2) El significado del infinito no está visiblemente delineado, existiendo una predisposición a corresponder el mismo a elementos físicos de espacio-tiempo (universo, más allá, eterno).
3) Asocian el significado de infinito con otros términos que en matemática son palabras reservadas (indeterminado, indefinido, imaginario).
4) En el contexto matemático *infinito* y la expresión *no tiene límite* no son sinónimos (ver definición de infinito potencial en § 3.1.1[6]) .
5) Algunos abordan el concepto de infinito desde la teología, lo relacionan con la religión, con el poder divino, con Dios. El halo de misterio que rodea al infinito se remonta desde la Edad Media por lo que comúnmente se le vincula directamente con la divinidad.
6) Del análisis de las redes semánticas y el estudio histórico realizado en el capítulo III, se puede establecer una cierta relación entre los descriptores de *infinito* comunicados por los estudiantes y los significados que aparecieron en el desarrollo histórico. Así por ejemplo las expresiones "sin fin" y "no tiene límite" pueden considerarse próximos al significado intuitivo planteado en la antigua Grecia e inclusive con afirmaciones realizadas en 1831 por Carl Gauss:

> *El infinito no es más que un modo de hablar en el que se mencionan en el sentido propio, aquellos límites a los que ciertas razones se pueden aproximar tanto como se desee, mientras que a otras se les permite crecer sin límite* (Crespo, 2005, p.31).

El análisis presentado en los párrafos anteriores revela la complejidad del infinito y pone en evidencia los conflictos semióticos de los agentes interpretantes con este objeto matemático. La complejidad se refleja en la variedad y heterogeneidad de significados que en las redes semánticas los estudiantes desarrollaron para esta noción. Esta heterogeneidad tiene que ver con los diversos elementos de significado que se pueden proponer (extensivos, ostensivos, actuativos,

[6] Para facilitar la lectura de las referencias cruzadas a otros lugares del documento se utiliza la notación § c.a.s, donde c se refiere al capítulo, a al apartado y s a la sección. De esta manera la referencia §3.1.1 se refiere a la primera sección, del primer apartado del tercer capítulo.

intensivos y validativos). Las dificultades, producto de esta complejidad, se manifestaron en el desarrollo parcial del significado de infinito por parte de los estudiantes. Ningún alumno llegó a presentar un significado de infinito coincidente con el referente institucional.

Cuadro 14. Comparación entre las respuestas dadas en la entrevista y en las redes semánticas

INFINITO			
Significado sistémico institucional*	**Significado manifestado en las entrevistas**	**Significado manifestado en las redes semánticas**	
Reiteración interminable	No se puede asignar un valor	No tiene límite	Universo
Proceso sin fin	Sin fin	Sin fin	Inalcanzable
Acción proyectada en lo posible pero no realizada	Símbolo que no se puede contabilizar	Incalculable	Indeterminado
	Sin restricción	Muy grande	Indefinido
	Número imaginario	Imaginario	Más allá
	Abstracción	Abstracto	Inimaginable
		Ilimitado	Interminable
			Eterno

* Obtenido en el capítulo III de este documento

En la comparación entre los objetos personales puestos en juego durante las entrevistas y en las redes semánticas se encuentran implícitas cuestiones que conviene hacer explícitas:

a) El hecho de que las argumentaciones del alumnado exhibieran tantas ambigüedades y confusiones permiten señalar que existen grandes limitantes frente al significado del objeto matemático denominado infinito.

b) En lo que se refiere a los significados que asignan los estudiantes al *infinito* es difícil realizar una categorización por la sutileza de este objeto matemático. Esto se refleja por ejemplo en los estudios de D’Amore (1996b), Tall (1992), Garbin y Azcárate (2002) en los que las clasificaciones realizadas son dispares, aunque hay una conclusión unánime de la dificultad en la comprensión de este concepto en los últimos años de la educación secundaria y en los primeros años de carrera universitaria.

Las redes semánticas también se aplicaron para determinar el significado que, el grupo de estudiantes seleccionados, atribuyen al objeto matemático *indeterminación*. Los cálculos de los valores necesarios para la construcción del gráfico radial se detallan en el Anexo E.

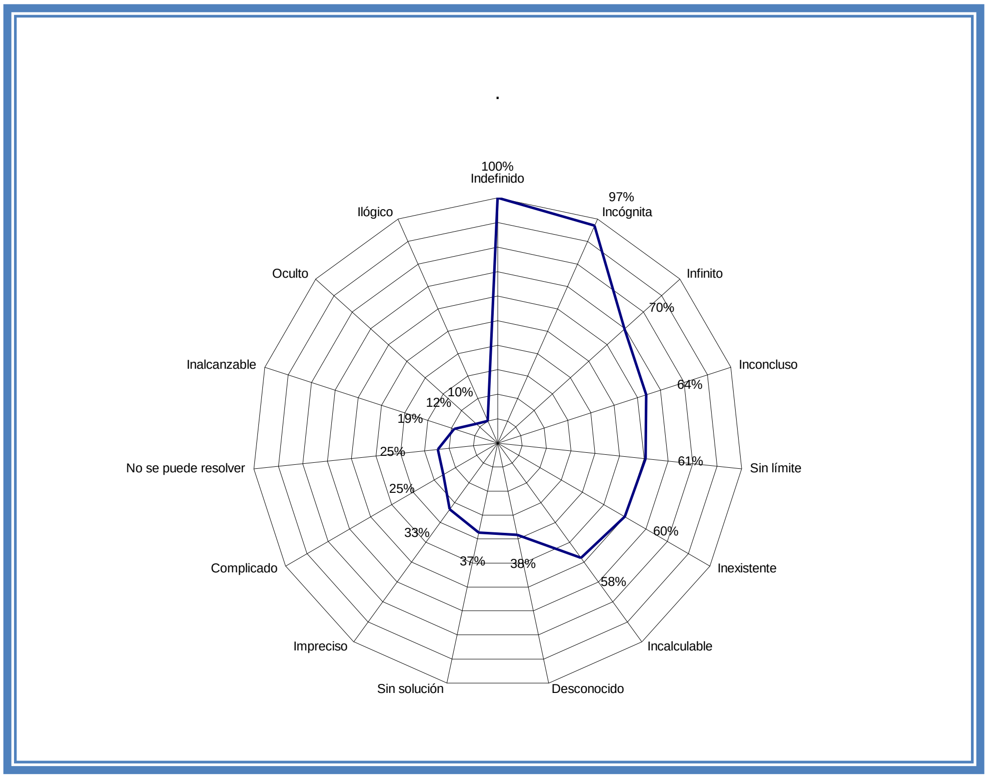
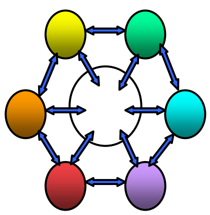


Figura 11. Representación gráfica de los descriptores de Indeterminación

Fuente: Elaboración propia a partir de las expresiones jerarquizadas

Aquí se evidencia el carácter recursivo y complejo del conocimiento matemático. Cuando se solicitó la definición de indeterminación apareció un sistema en el que de nuevo se ponen en juego los restantes tipos de objetos matemáticos (incógnita, infinito, entre otros) y la trama de relaciones que los encadenan. Estas respuestas indican la necesidad de poner atención al significado que las palabras tienen para los estudiantes en contextos específicos.

Para finalizar este capítulo solo se resalta que la principal expectativa de la actual investigación es que las herramientas teóricas del EOS articuladas con el pensamiento complejo permitan describir e interpretar la naturaleza de los conflictos ontosemióticos implicados en la comprensión de ciertos objetos matemáticos en donde el infinito potencial está presente y por lo tanto permitan describir y caracterizar las causas de carácter ontosemiótico y cognitivo que producen discordancias entre los significados personales y los institucionales.



CAPITULO VI

MODELIZACIÓN DE LOS ESPACIOS DE ESTADO Y TRAYECTORIAS DE LOS SIGNIFICADOS PERSONALES PUESTOS EN JUEGO

Los problemas importantes no pueden
resolverse con el mismo nivel de
pensamiento con que los hemos creado.
Albert Einstein

El futuro será de aquellos que sepan
descubrir las variables que llevan al caos
Ilya Prigogine

CAPITULO VI

MODELIZACIÓN DE LOS ESPACIOS DE ESTADO Y TRAYECTORIAS DE LOS SIGNIFICADOS PERSONALES PUESTOS EN JUEGO

1.- Introducción

Con la información obtenida en el capítulo anterior se pretende, en este momento, modelizar los espacios de estado y las trayectorias de los significados puestos en juego durante la fase de recolección de información y así cumplir con uno de los objetivos planteados al inicio de esta investigación. En este sentido se puede considerar que un espacio de estado es un recurso de representación esquemática de las trayectorias de los significados manifestados por los agentes participantes. Es decir, un espacio de estado es un gráfico de líneas que enlaza los diferentes significados (argumentativo, proposicional, conceptual, lingüístico, actuativo y situacional) y en donde es posible representar los conflictos ontosemióticos. Entonces, en los diagramas de estado se puede identificar la trama de funciones semióticas (expresiones, contenidos y códigos interpretativos) que se establecen en los procesos de comunicación entre los agentes participantes (la investigadora y los alumnos).

Es conveniente aclarar que los espacios de estado no muestran la estructura cognitiva completa de un individuo, sino que simplemente son un medio, a partir del cual se puede ampliar y avanzar en el análisis de los significados que el estudiante atribuye a determinados objetos matemáticos y en las relaciones que establece entre ellos.

Por lo tanto los diagramas de estado permiten visualizar: (a) Cuál es la práctica del significado personal que se está realizando en un momento dado y ver su evolución a lo largo del tiempo, (b) Los puntos de conflicto ontosemiótico, (c) La compleja interacción entre el docente y los alumnos, (d) Discernir posibles patrones en la evolución de los objetos personales.

2.- Proceso de Construcción de los Espacios de Estado

Después de transcribir las entrevistas se construyeron unos formatos donde se visualizan los estados cognitivos y la interacción verbal entre el docente y el alumno.

Cuadro 15. Formato para la construcción de los espacios de estado

Línea	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Conflicto semiótico															
Argumentativo															
Proposicional															
Conceptual															
Lingüístico															
Actuativo															
Situacional															
Pregunta del docente															
Argumento del docente															

El orden de los estados cognitivos fue establecido por la investigadora, resultando de las necesidades de la investigación.

Descripción del formato

La parte superior lleva:

a. Titulo: Cronogénesis

b. Pag. __ de ___ con lo cual se indica el número total de hojas que contiene el diagrama de estado.

c. Identificación del entrevistado.

d. La fecha de elaboración del diagrama

El cuerpo del formato está dividido en varias columnas. En la primera columna se colocó el plano de contenido del objeto matemático empleado por el estudiante (argumentativo, proposicional, conceptual, lingüístico, actuativo y situacional), las confusiones o dudas detectadas, las preguntas y argumentaciones realizadas por la docente. En las siguientes columnas se presentan las líneas de trascripción de la entrevista (ver Anexo B), esto con la finalidad de que exista coherencia entre la entrevista y la trayectoria cognitiva. Estos estados y trayectorias permitirán indicar donde se presentan los puntos críticos: los conflictos semióticos.

Una x en una celda dada indica que, en esa línea de la entrevista, el agente interpretante ha empleado una faceta particular.

La identificación de los estados y las trayectorias se efectuó utilizando una matriz donde la información obtenida en las entrevistas semiestructuradas fue categorizada de la siguiente forma:

Trayectoria epistémica: La modelización propuesta en términos de trayectorias y estados permite describir con detalle los fenómenos de cronogénesis

0 Pregunta del docente

1 Concepto emitido por el docente

2 Argumento del docente

3 Situación-problema planteado por el alumno

4 Elemento actuativo planteado por el alumno

5 Elemento lingüístico planteado por el alumno

6 Concepto planteado por el alumno

7 Procedimiento planteado por el alumno

8 Argumento planteado por el alumno

Dado que los objetos matemáticos tienen varias facetas: lingüística, conceptual, actuativa, situacional, argumentativa y proposicional entonces es factible categorizar los conflictos semióticos en:

a) Conflicto semiótico lingüístico
b) Conflicto semiótico conceptual
c) Conflicto semiótico actuativo
d) Conflicto semiótico situacional
e) Conflicto semiótico argumentativo
f) Conflicto semiótico proposicional

3 Diagramas de Estado

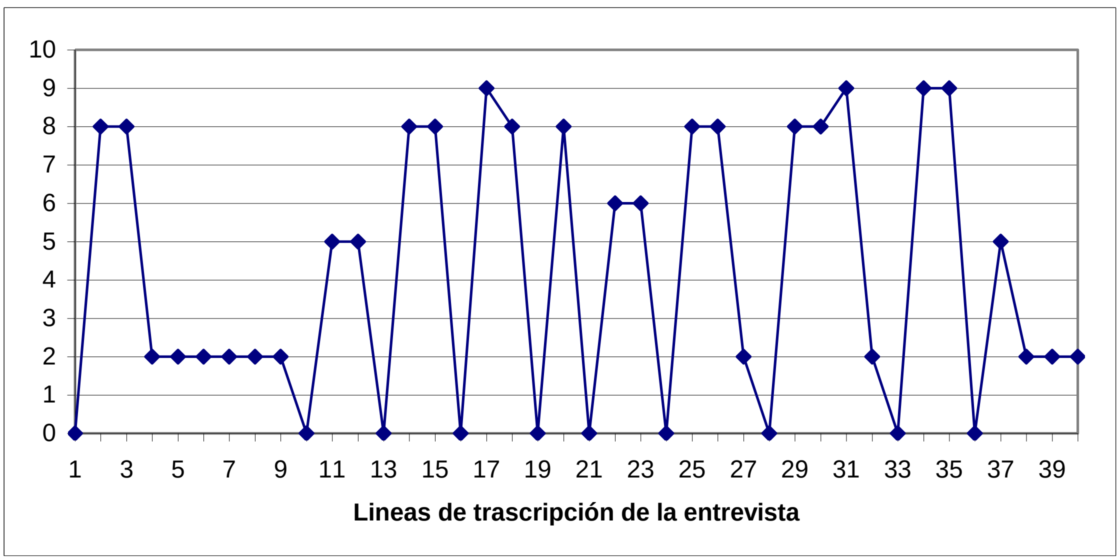


Figura 12. Cronogénesis pag. 1 (A1)

La cronogénesis de la página 1 muestra la interacción verbal entre A1 y la docente, indica que tiene 40 líneas, la docente realizó 10 preguntas (líneas 1,10,13,16,19,21,24,28,33 y 36), se detectaron tres conflictos semióticos: CS1, CS2 y CS3 (líneas 17,31,34 y 35).

Práctica discursiva (pag 1)

I: ¿Cómo te pareció el cuestionario?
A1: Me pareció muy bueno porque ahí es donde uno empieza a pensar y buscar la lógica.
I: Lo primero que vamos a hacer es que tú me digas todas las dudas que tuviste, vamos a ir analizando cada pregunta por separado porque fíjate que yo no quiero establecer si las respuestas son correctas o incorrectas. No es la idea. Ni que te voy a asignar una nota. Quiero analizar los argumentos que utilizaste para resolver los ejercicios. En la primera pregunta te dan un conjunto perteneciente a los reales tal que x pertenece al intervalo abierto $[1, \infty)$ ¿Qué respuesta marcaste como correcta?
A1: La (a), x es un número real tal que x pertenece al conjunto desde el número uno hasta el número infinito
I: ¿Por qué no escogiste la (c)?
A1: Es que la (c) dice que es el conjunto de los números reales mayores o iguales a uno, no lo veo (objeto personal) que es uno nada más, sino que lo veo de uno a más infinito
I: ¿Por qué no pudiera ser la (c)?
A1: Tengo dudas porque… se dice que todos los números pertenecen desde uno hasta más infinito.
I: Vamos con la notación ¿Qué significa el corchete?
A1: Qué es cerrado, que va desde uno hasta más infinito.
I: Pero en el item (a) habla del número infinito ¿Qué interpretas como infinito?
A1: Es como… o sea… no tiene… no se le puede asignar un valor a eso, o sea va más allá de lo que uno pueda determinar. (Imprecisión en la definición)
I: Pero, ¿consideras que es un número?
A1: Puede llevar muchos números (existencia de un conflicto semiótico de tipo cognitivo) pero en sí no lo veo como un número en específico.
I: En la segunda pregunta te piden calcular el límite cuando x tiende a uno de la función uno sobre x menos uno ¿Cuál escogiste?
A1: La (a) porque yo determine que si el límite de uno entre x menos uno. Agarre (expresión incorrecta) el número uno y lo plantee aquí en la x. Entonces dije uno menos uno es cero y el número uno entre cero es cero (conflicto semiótico).
I: Vamos a analizar tu argumento. Al plantear el límite cuando x tiende a uno por la derecha de uno sobre x menos uno. ¿Cuánto te da ese límite?
A1: Eso es lo que me tiene enredada. ¿Aquí no debería ser cero por la derecha? No se si es cero por la derecha o se toma cero por la izquierda. No se.
I: ¿Cuál número tomarías a la derecha de uno?
A1: Dos, tres, todos esos números.
I: Ojo, muy próximo a uno, por ejemplo 1,00001. Vamos a realizar la operación en la calculadora. 1,00001 menos 1 es 0,00001. Si dividimos 1 entre 0,00001 nos da 10000 es decir me da un número muy grande. Cuando se divide uno entre un

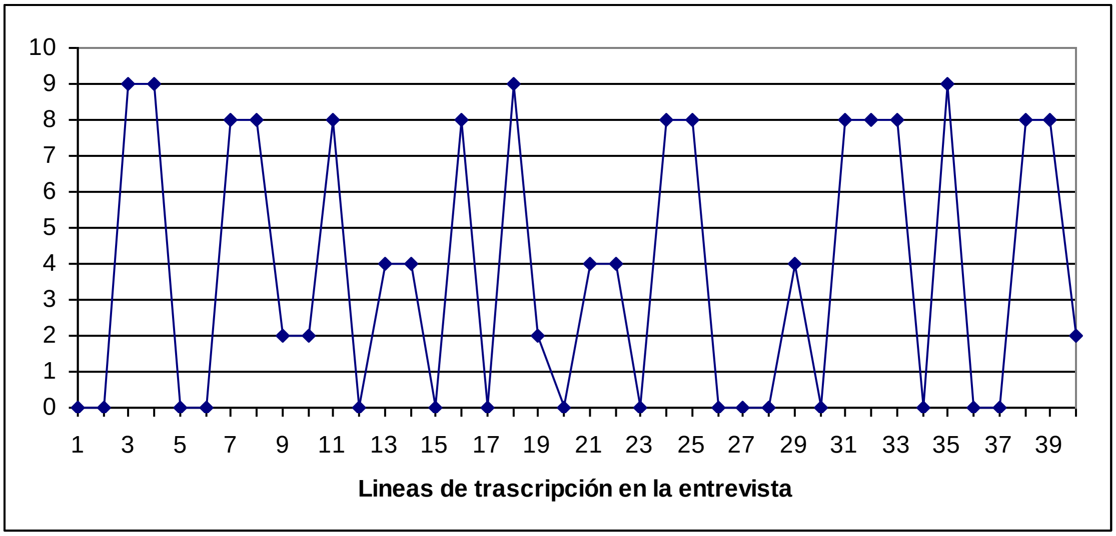


Figura 13. Cronogénesis Pag. 2 (A1)

La cronogénesis de la página 2 muestra la interacción verbal entre A1 y la docente, indica que tiene 40 líneas, la docente realizó 11 preguntas (líneas 1,2,5,6,12,15,17,20,23,26,27,28,30,34,36 y 37), se detectaron tres conflictos semióticos: CS4, CS5 y CS6 (líneas 3,4,18 y 35).

Lin	Práctica discursiva (pag 2)
1	número muy pequeño nos da un número muy grande. Por lo tanto ¿A cuanto
2	tiende el límite?
3	**A1**: ¿Aquí no sigue siendo cero por la derecha? (Responde con otra pregunta.
4	Inseguridad)
5	**I**: Vamos a analizarlo nuevamente. Uno menos uno es cero y uno sobre cero.
6	¿Tiende a?
7	**A1**: Ahí sigue siendo igual a cero, tiende más allá de cero (problema para
8	comunicar el significado personal de los objetos matemáticos)
9	**I**: Ahora vamos a analizar el otro límite lateral: límite cuando x tiende a uno por
10	la izquierda. Haz el mismo razonamiento.
11	**A1**: Ahora busco un número menor que uno, que en este caso seria 0,00001
12	**I**: ¿Por qué no utilizas mejor 0,9999?
13	**A1**: (Realiza la operación en la calculadora) Ahora da un número muy grande
14	pero negativo. Seria menos infinito.
15	**I**: Analiza los dos límites ¿Son iguales?
16	**A1**: No, porque uno tiende a más infinito y el otro tiende a menos infinito.
17	**I**: ¿Te acuerdas del teorema de la unicidad del límite?

18	**A1**: De eso no me recuerdo muy bien, no recuerdo exactamente.
19	**I**: El límite existe siempre y cuando los dos límites laterales coincidan
20	¿Coinciden los dos límites laterales?
21	**A1**: No, entonces el límite no existe. Por lo tanto la respuesta correcta es la
22	opción (d).
23	**I**: ¿Por qué?
24	**A1**: Porque cuando evalúas por la derecha y por la izquierda los límites no son
25	iguales y para que exista el límite, los límites laterales deben ser iguales.
26	**I**: Vamos a analizar la pregunta 3, límite cuando x tiende a cero por la derecha de
27	uno sobre x. ¿Tienes dudas? Quiero entender porque se producen esas dudas
28	[Nuevamente realiza la operación en la calculadora]
29	**A1**: Da un número muy grande por lo tanto tiende a más infinito.
30	**I**: Vamos con la número 4. ¿Cuál es el valor de uno entre cero?
31	**A1**: No existe. Porque yo por ejemplo cuando voy a tomar…este un número y lo
32	divido entre cero en la calculadora me da como un error. Por lo tanto ese número
33	no existe. Todo número dividido no no…
34	**I**: Entonces ¿Por qué en el ejercicio anterior si existía?
35	(Se queda pensativa)
36	**I**: ¿Qué diferencia observas entre la pregunta 3 y la 4? ¿Por qué en la 3 la
37	respuesta es más infinito y en la 4 es no existe?
38	**A1**: Porque aquí no me están especificando si es por la derecha o por la
39	izquierda. Porque no me la están planteando como un límite.
40	**I**: Es decir en la pregunta 3 estamos evaluando un límite y en la 4 un cociente de

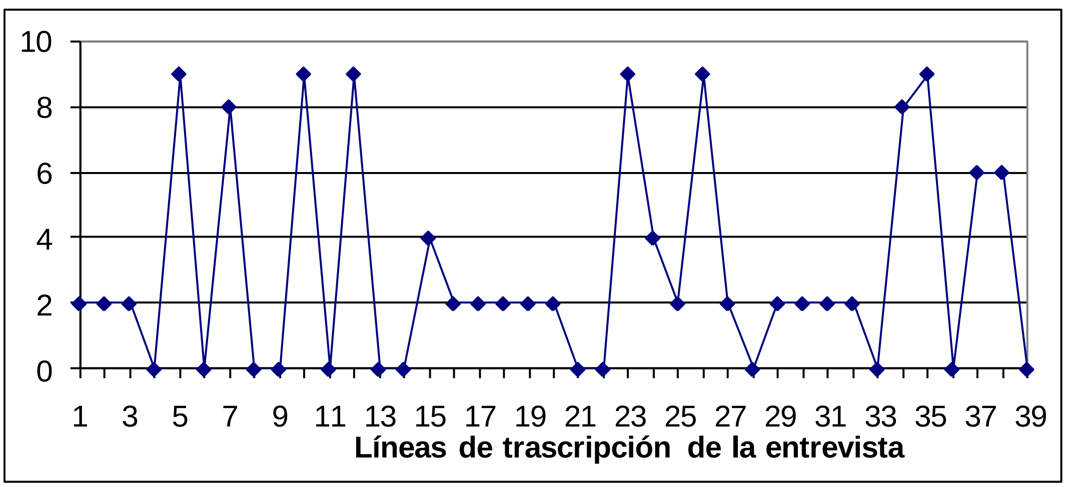


Figura 14. Cronogénesis Pag 3 (A1)

La cronogénesis de la página 3 muestra la interacción verbal entre A1 y la docente, indica que tiene 39 líneas, la docente realizó 10 preguntas (líneas 4,6,8,9,11,13,14,21,22,28,33,36 y 39), se detectaron seis conflictos semióticos: CS7, CS8, CS9, CS10, CS11 y CS12 (líneas 5,8,12,23,26 y 35).

Práctica discursiva (pag 3)
dos números. Fíjate que en este cuestionario estamos avanzando en el grado de complejidad. La primera es de introducción a la matemática, las otras tres de Matemática I y ahora llegamos a una pregunta de “Matemática II”. El área bajo la curva de $y = 1/x^2$ para todo x mayor o igual a uno.
A1: No la plantee porque tengo dudas ahí.
I: ¿Cuáles?
A1: Porque al aplicar $y = 1/x^2$ yo veo que es más infinito, hacia arriba.
I: Leamos desde el principio, el área bajo la curva ¿Cómo planteas matemáticamente el área bajo una curva?
A1: Eso es lo que me ha costado. Esa parte.
I: ¿No se plantea como integral definida?
A1: Es que no se como plantearla
I: ¿No viste la relación entre el área y la integral impropia? En la número 6 se pide evaluar la integral definida.
A1: Le saque la integral a esto (No coloca “los signos de puntuación” a las expresiones matemáticas. Adicionalmente comete un error de concepto porque saca el uno del integrando y pasa el exponencial al numerador. No sigue una lógica en la resolución de la integral. Tiene problemas al resolver la integral como procedimiento) Vamos a analizar las dificultades que tuviste son problemas de tipo teórico.
I: Vamos a seguir con la número 7. ¿El área bajo una curva de longitud infinita puede ser…?
A1: No la realice porque tenía muchas dudas en esta pregunta y también en la número 8. Una curva que tiene longitud infinita (la dibuja).
I: No es que tienda al infinito sino que tiene longitud infinita.
A1: Es que eso es lo que no entiendo del ejercicio.
I: ¿Qué interpretas que algo tiene longitud infinita? (Imprecisión de la docente en la realización de la pregunta) Que es muy largo ¿Verdad? ¿Cuales funciones conoces que tengan longitud infinita? (Dibuja una parábola convexa, una cúbica) Entonces una función no acotada tiene longitud infinita. Entonces fíjate en las respuestas. La primera es cero (El área bajo una curva de longitud infinita no puede ser nula, sin embargo ella duda en la respuesta). La segunda un valor finito ¿Puede dar un valor que se pueda medir? ¿El área bajo una curva puede ser imaginaria?
A1: En este caso no, porque si tenemos varios valores no puede ser imaginario (Confusión entre el corte con los ejes y lo que representa un valor imaginario)
I: ¿Qué interpretas tú como imaginario?
A1: Como… como decir… como que no exista, como que yo no lo pueda ver… pues.
I: Entonces ¿La raíz cuadrada de menos uno no existe?
A1: No tanto como que no exista. No es esa la palabra. Sino por ejemplo aquí

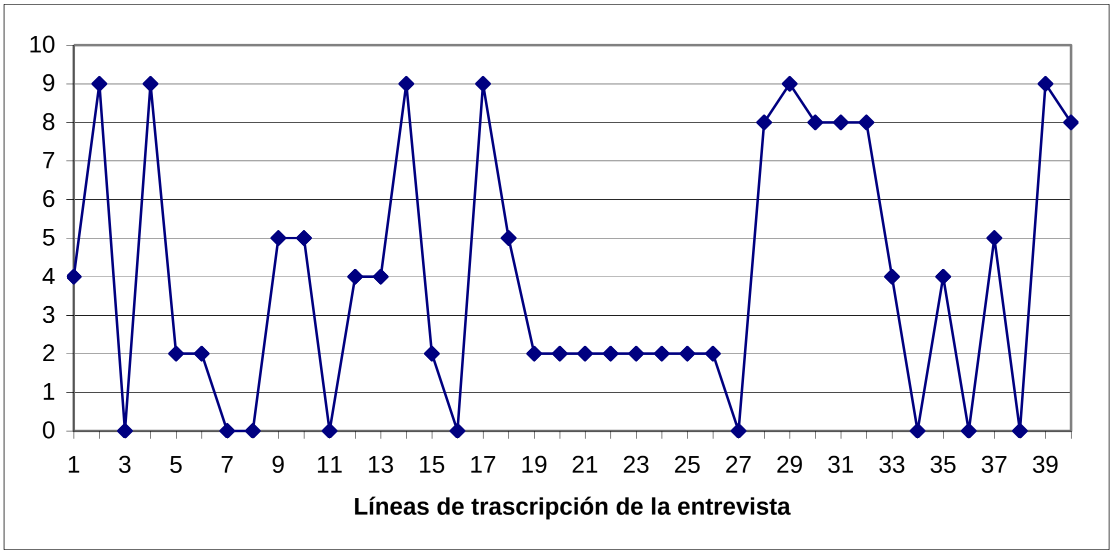


Figura 15. Cronogénesis Pag. 4 (A1)

La cronogénesis de la página 4 muestra la interacción verbal entre A1 y la docente, indica que tiene 40 líneas, la docente realizó 8 preguntas (líneas 3,7,8,11,16,27,34,36 y 38), se detectaron seis conflictos semióticos: CS13, CS14, CS15, CS16, CS17 y CS18 (líneas 2,4,14,17,29 y 39).

Lin	**Práctica discursiva (pag 4)**
1	(señala el corte de la parábola con el eje x) en este punto me lo va a decir.
2	Imaginario es que no este ahí. Que no lo vea ahí (conflicto semiótico).
3	**I**: ¿Qué diferencia existe entre imaginario y que tu lo puedas apreciar? (Se queda
4	callada). Lo que estoy tratando de analizar son esos conceptos tan abstractos.
5	Fíjate que todo el cuestionario está relacionado con el infinito. Porque considero
6	que es uno de los conceptos más difíciles que tienen los estudiantes para
7	apropiarse de él. ¿Cómo puedo diferenciar algo imaginario del área finita? (Se
8	queda callada) Vamos a ver la otra alternativa: ¿el área bajo una curva puede ser
9	negativa? (Ella dibuja una parábola cóncava en el cuarto cuadrante.).
10	**A1**: Yo me recuerdo que había curvas que daban negativas.
11	**I**: ¿Cómo por ejemplo…?
12	**A1**: Las que van más abajo, las que van más abajo. (Indica hacia abajo. La
13	mayoría de las preguntas me las respondía con otra pregunta, eso denota falta de
14	seguridad en lo que está diciendo)
15	**I**: La función como tal tiene imágenes negativas pero el área encerrada es
16	positiva. Vamos a pasar a la siguiente pregunta.
17	**A1**: Esa no la plantee porque no la entendí. Yo entiendo que esta pregunta tiene
18	mucha relación con…

I: Con relación a la pregunta 9 se pide que evalúes una integral para todo número mayor o igual a cero de la función seno de x. (Omite la separación entre las proposiciones matemáticas) Recuerda que la matemática es un lenguaje que tiene su sintaxis, sus signos de puntuación para separar oraciones y eso no lo estas colocando. Cuando escribes una carta empleas los signos de puntuación para que el lector te entienda. Aquí pasas de una integral definida a una integral indefinida, sin dar una explicación. Bien, olvidando esto calculas la primitiva y evalúas el límite y escribes que no existe. Es correcto. Ahora explícame ¿Por qué no existe?
A1: Porque es una trigonométrica: el coseno de infinito no se puede determinar (Llega a un resultado correcto realizando razonamientos incorrectos) En cambio si fuera un número si lo pudiera determinar pero yo lo veo así como para determinarlo. Es por eso que no puedo decir que es más infinito o menos infinito porque la trigonométrica no se evalúa en un número. El infinito no lo puedo colocar en la calculadora
I: ¿Y algo que se aproxime al infinito?
A1: Escribiría un número de muchas cifras.
I: Vamos con la pregunta 10 ¿A qué es igual la expresión infinito menos infinito?
A1: Indeterminado.
I: ¿Por qué no es cero?
A1: Porqueeeeeeee….yo lo veo así como lo que vimos allá en el pasado, que esto es una indeterminación (A pesar de tener un nivel adecuado de manipulación

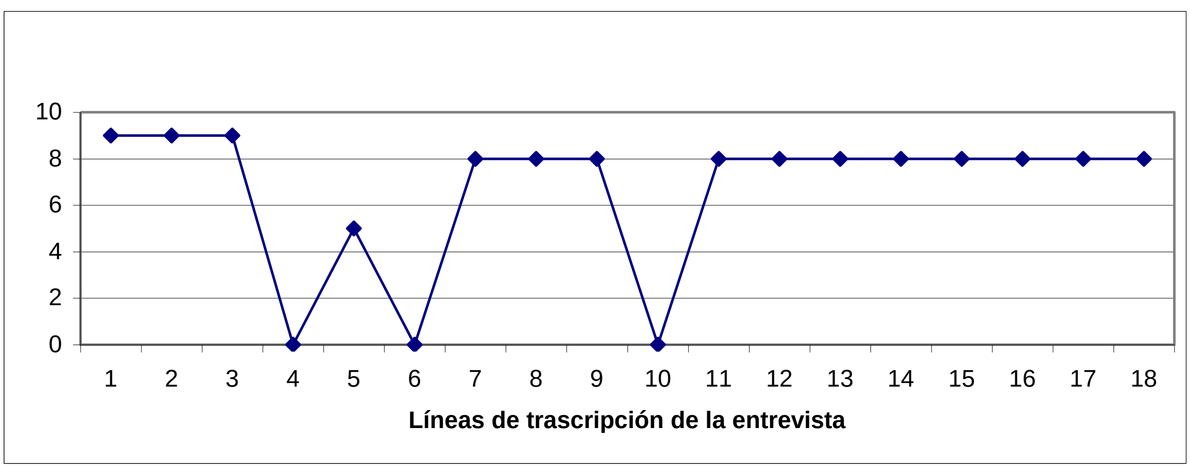


Figura 16. Cronogénesis Pag. 5 (A1)

La cronogénesis de la página 5 muestra la interacción verbal entre A1 y la docente, indica que tiene 19 líneas, la docente solo realizó 3 preguntas (líneas 4,6 y 10), se detectó un solo conflicto semiótico: CS19 (líneas 1,2 y 3). La mayor parte de la intervención la realizó A1 empleando un elemento de tipo argumentativo.

Práctica discursiva (pag 5)
<u>simbólica, presenta algunas fallas en la interpretación de ciertos resultados de las operaciones ejecutadas</u>) Porque esta no es una expresión que yo pueda decir 1-1 sino que puede tener infinitos valores (conflicto semiótico: infinitos valores).
I: ¿Qué contestaste en la pregunta once?
A1: Yo puse dos, esta mañana lo analice bastante.
I: ¿Por qué?
A1: Porque no puedo decir que son infinitos números porque va solo de 0 a 1, no podría decir que son muchos números. Entonces cuando estaba leyendo la última pregunta me puse a analizarla nuevamente.
I: ¿Qué contestaste en esa última pregunta?
A1: En la última pregunta conteste la (b) porque de menos infinito a más infinito hay muchísimos valores en cambio aquí (señala el intervalo [0,1]) va de cero a uno. Observo que de menos infinito a más infinito es más grande. También tuve dudas porque también puedo decir que los dos conjuntos tienen infinitos valores. Claro yo lo veo a simple vista Ok. Son solo dos números. Si no tomo en cuenta eso (Señala el símbolo $\Re$) Pero yo al pasar aquí no puedo tomar este conjunto (señala la opción a) porque me estaría contradiciendo con la pregunta anterior. Ok, lo analice desde otro punto vista, ambos tienen infinitos números.
I: Bien, con esto podemos dar por terminada la entrevista, muchas gracias por tu colaboración.

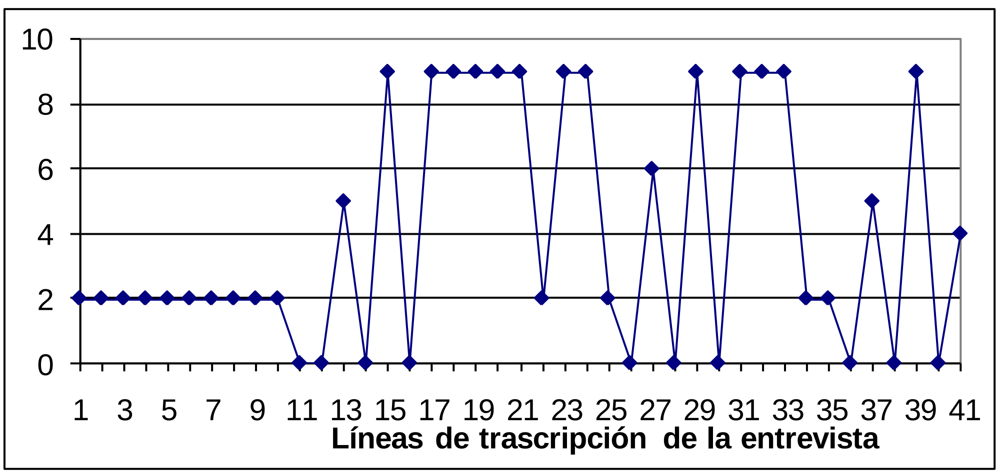


Figura 17. Cronogénesis Pag. 6 (A2)

La cronogénesis de la página 6 muestra la interacción verbal entre A2 y la docente, indica que tiene 41 líneas, la docente realizó 9 preguntas (líneas 11,12,14,16,26,28,30,36,38 y 40), se detectaron seis conflictos semióticos: CS20, CS21, CS22, CS23, CS24 y CS25 (líneas 15,17,18,19,20,21,23,24,29,31,32 y 33).

Práctica discursiva (pag 6)

I: Mi objetivo es analizar la forma en que los estudiantes resuelven los problemas, las fallas, los errores, los conflictos semióticos, en el momento de contestar este cuestionario. Fíjate que el mismo tiene preguntas tanto de Introducción a la matemática, Matemática I y “Matemática II” y todas están relacionadas con el concepto infinito. Es un concepto muy abstracto. Yo he notado que los estudiantes tienen dificultad a la hora de aplicar el concepto infinito en este tipo de problemas. Tú eres una buena estudiante que quedaste en el grupo de talento universitario (reforzamiento positivo). También se lo voy a aplicar a las preparadoras para analizar el tipo de razonamiento empleado en cada ejercicio. La idea no es determinar las repuestas correctas o incorrectas sino el procedimiento de resolución. ¿Está bien? (Responde afirmativamente con la cabeza)

I: ¿Cómo te pareció el cuestionario?

A2: Bien.

I: Empecemos con la primera pregunta. ¿Cuál alternativa escogiste?

A2: [Piensa…] La (d)

I: ¿Por qué?

A2: (Abre notablemente los ojos y se queda callada) Primero porqueee….hice un sondeo de todas así pues, no me pare…no me pare a leer cada una así como tal, sino que hice un sondeo. (Se aprecia una aprensión ante el cuestionario. No desea ser evaluada realmente por la investigadora porque quiere aparentar ciertas cualidades o competencias que no posee).

I: Primero hiciste un sondeo.

A2: ¡Aja!!. Exacto. Pues quizás no me detuve en cada alternativa. Si yo creo que…la tome porque… (Se queda callada largo tiempo).

I: Fíjate que allí hay una palabra clave. Si escogiste la (d) aparece la expresión “número infinito” ¿Qué interpretas tú como infinito?

A2: ¿Infinito?... Algo que no…que no tiene fin.

I: Pero ese algo ¿Qué tipo de objeto es?

A2: En este caso un número.

I: Lo interpretas como un solo número ¿Hasta el número infinito?

A2: No, es la (c) tiene sentido porque son los números mayores o iguales a uno (Muchos alumnos automáticamente al ver el símbolo infinito lo interpretan como un número)

I: Cualquier número que imagines por más grande que sea siempre le puedo sumar uno y se puede crear un número superior a él. Vamos con la siguiente pregunta, te piden evaluar un límite ¿Cuál alternativa escogiste?

A2: La (d): No existe.

I: ¿Por qué?

(Se queda un rato largo callada)

I: ¿Realizaste algún cálculo para obtener la respuesta?

A2: No, no hice ningún cálculo, lo hice mentalmente. Cuando yo meto el uno

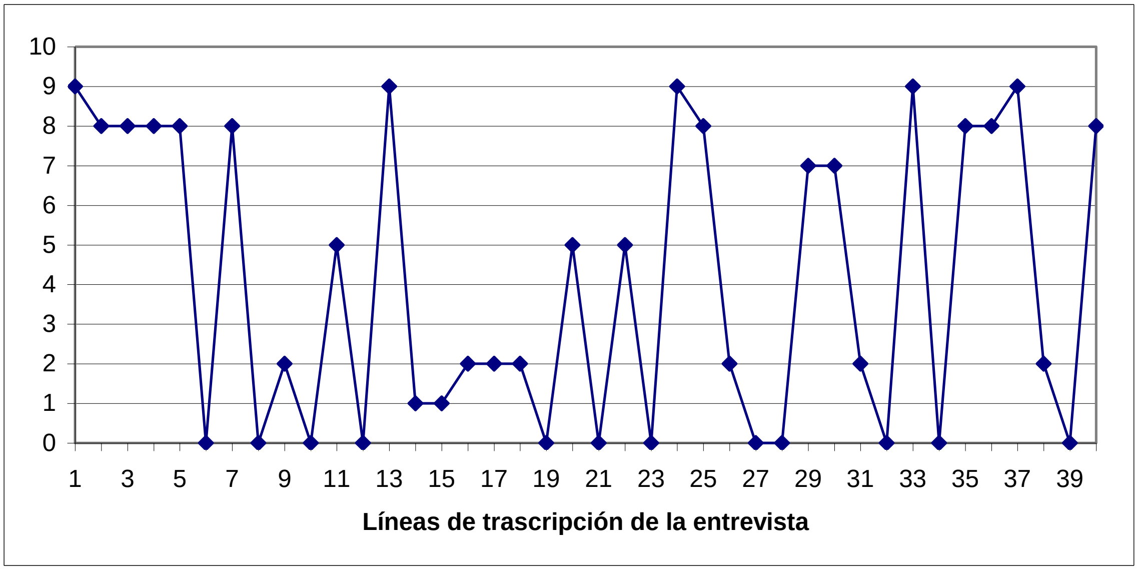


Figura 18. Cronogénesis Pag. 7 (A2)

La cronogénesis de la página 7 muestra la interacción verbal entre A2 y la docente, indica que tiene 40 líneas, la docente realizó 11 preguntas (líneas 6,8,10,12,19,21,23,27,28,32,34 y 39), se detectaron cinco conflictos semióticos: CS26, CS27, CS28, CS29 y CS30 (líneas 1,12,24,33 y 37).

Lin	**Práctica discursiva (pag 7)**
	abajo (Imprecisión en la verbalización: debería decir al sustituir el uno en el denominador. Muchos hasta utilizan palabras soeces: esta broma) me da cero entonces uno entre cero es infinito. Pero yo digo que no existe porque… no coloque más infinito porque aquí no me dicen si es el uno por la izquierda o si es el uno por la derecha. Yo lo veo (yo lo entiendo) desde ese punto de vista…no se.
	I: ¿Y si en el cuestionario apareciera por la derecha o por la izquierda…?
	A2: Ahí seria más o menos infinito.
	I: En ese resultado ¿No hay algo implícito? Yo estoy de acuerdo con tu razonamiento, pero creo que le falta algo adicional que tú aprendiste en Matemática I: el teorema de la unicidad del límite ¿Lo viste?
	A2: Si.
	I: ¿De que trata ese teorema?
	A2: “Ahorita” no me acuerdo bien.
	I: Para que el límite exista necesariamente los límites laterales tienen que ser iguales. Como muy bien dices, el límite por la derecha te da un resultado y si lo evalúas por la izquierda te da otro. Tu razonamiento está bien pero no te apoyaste en un concepto matemático y ahí es donde se inician los conflictos

semióticos. Pasemos a la tercera pregunta, allí te piden evaluar otro límite ¿Cuál fue tu respuesta?
A2: La opción (a) más infinito.
I: Bien, en la siguiente pregunta, te piden el valor de uno entre cero
A2: Marque la opción (a): no existe
I: ¿Por qué?
(Se queda callada por largo tiempo)
A2: Yo coloque: uno entre cero es infinito, pero…
I: Yo soy la que tengo una duda y quiero que tu me la ayudes a resolver ¿Por qué en la tres marcaste infinito y en la cuatro no existe? ¿Qué diferencia existe entre la pregunta tres y la cuatro?
A2: Aquí (señala la pregunta 3) me están diciendo un límite cuando tiende a cero en cambio aquí (señala la pregunta 4) me dice el valor de uno entre cero.
I: Muy bien. Es diferente evaluar una tendencia a calcular un valor numérico. Bien. Vamos a ver la pregunta cinco.
A2: No la conteste.
I: ¿Por qué? ¿Qué te paso? ¿No trataste de plantear un gráfico?
A: No, trate de realizarlo mentalmente. Bueno, pues. Esta pregunta pertenece a “Matemática II”, debería responderla porque se supone que yo ya pase por eso… Esteee… (Se queda callada por largo tiempo).
I: Vamos a tratar de analizar esta pregunta. Empecemos con la curva $y = 1/x^2$ ¿Qué forma tiene en un diagrama coordenado?
A2: Esta broma es una parábola.

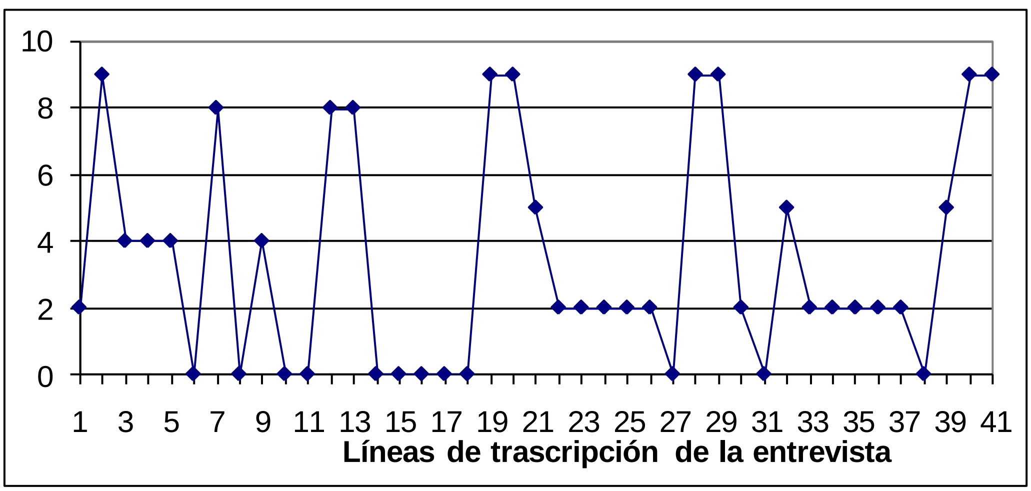


Figura 19. Cronogénesis Pag. 8 (A2)

La cronogénesis de la página 8 muestra la interacción verbal entre A2 y la docente, indica que tiene 41 líneas, la docente realizó 7 preguntas (líneas 6,8,10,11,14,15,16,17,18,27,31 y 38), se detectaron cuatro conflictos semióticos:

CS31, CS32, CS33 y CS34 (líneas 2,19,20,28,29,40 y 41). La mayor parte de la participación es de la docente.

Práctica discursiva (pag 8)
I: No, no puede ser una parábola al estar expresada como una función racional.
A2: Correcto (Se queda callada durante largo tiempo).
I: Se grafica en un papel. Se sombrea el área buscada. (Una de las primeras dificultades fue el gráfico de la función. No sabía identificar la forma que tenia. Segunda dificultad: sombrear el área).
I: Intuitivamente el área bajo esta curva ¿Cuál es?
A2: Intuitivamente seria un área infinita.
I: ¿Cómo demostrarías matemáticamente eso? (Realiza la operación matemática en un papel resolviendo la integral impropia y obtiene 1) {No tiene problemas para seguir el procedimiento}¿Qué diferencia observas entre el resultado matemático y el intuitivo?
A2: Ok, lo que pasa es que lo vi así, como tiende a más infinito pensé que el resultado seria más infinito. Como no resolví la integral.
I: ¿Cómo se lo explicarías a un alumno? Tú que ya aprobaste la materia y fueras la preparadora y viniera un alumno y te dijera: “Bueno, ¿Qué locura es está?” Si veo que el área pareciera infinita ¿Por qué la integral da uno? ¿Está malo?
A2: Si.
I: ¿Si?
A2: (Abre los ojos en gesto de asombro) No.
(Risas al unísono)
A2: No, no está malo
I: Vamos a utilizar el método exhaustivo de Arquímedes, el aproximaba el área bajo la curva a la suma de las áreas de todos los rectángulos. Fíjate que la curva que estamos analizando es asintótica es decir se aproxima al eje x pero sin llegar a cortarlo. ¿Qué área debería tener este rectángulo? (la investigadora señala un rectángulo muy pequeño, la alumna se queda pensando por un largo tiempo) Analízalo como lo haría Arquímedes ¿Cuál es la base de este rectángulo?
A2: ¿No seria cero? (cuando contesta con otra pregunta, denota inseguridad o está a la defensiva)
I: Prácticamente tiende a cero. Entonces si la base es cero y la altura es muy pequeña ¿Cuál seria el área de ese rectángulo?
A2: Cero.
I: Prácticamente cero. Estos rectángulos son tan pequeños que prácticamente su área es cero y los que “colaboran” en el área son los grandes, es el área que tiende a uno. El área de los rectángulos pequeñitos no colabora, no influye, no aporta área. Es por eso que el área es uno. Esta es la explicación de por qué intuitivamente se piensa que es infinito pero analíticamente se tiene uno (Wittgenstein indicaba que cuando se intente describir el significado de una palabra- un objeto matemático en nuestro caso- se piense en como se explicaría a

40	un extranjero o, mejor aún, a un niño) Bien. Vamos con la siguiente pregunta
41	¿Cuál alternativa escogiste?
42	**A2**: La (b) (Al dar la alumna la explicación se observa que llega al resultado
43	correcto pero realizando un razonamiento incorrecto porque evalua la integral
44	impropia sin previamente haber calculado la primitiva)

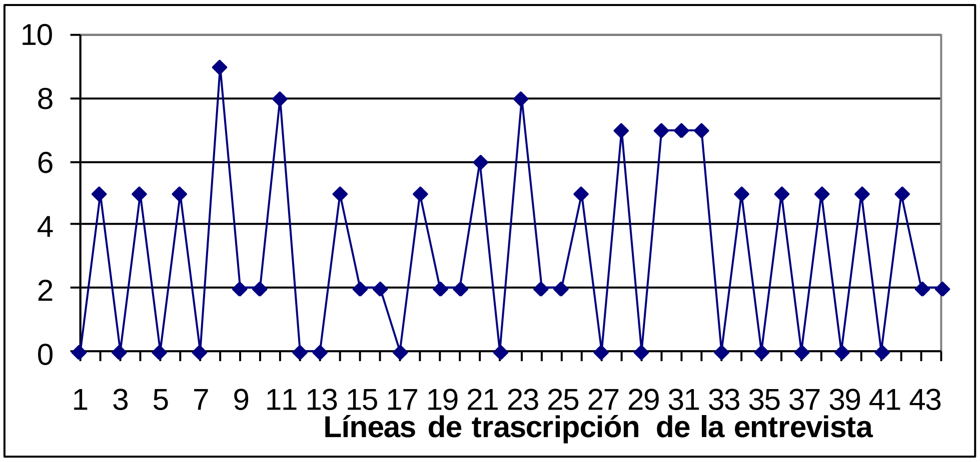


Figura 20. Cronogénesis Pag. 9 (A2)

La cronogénesis de la página 9 muestra la interacción verbal entre A2 y la docente, indica que tiene 44 líneas, la docente realizó 14 preguntas (líneas 1,3,5,7,12,13,17,22,27,29,33,35,37,39 y 41), solo se detectó un conflicto semiótico: CS35 (línea 8). En A2 predomina el componente lingüístico.

Lin	**Práctica discursiva (pag 9)**
1	**I**: En la 7, que es una pregunta netamente teórica ¿Qué alternativa escogiste?
2	**A2**: La (b).
3	**I**: ¿Por qué no escogiste la (a)?
4	**A2**: Lo que pasa es que leí mal, creía que decía un valor infinito.
5	**I**: ¿Puede dar un valor finito?
6	**A2**: No.
7	**I**: ¿Cómo que no?
8	**A2**: Aaaaah, Ok, si, si, si tiene razón.
9	**I**: Fíjate que en el ejercicio 5, la longitud de 1/x con x perteneciente [1, +∞) es
10	infinita y el área bajo la curva es uno.
11	**A2**: Si puede dar entonces un valor finito.
12	**I**: ¿Por qué no cero? Vamos a ir descartando alternativas ¿Por qué no puede dar
13	cero?
14	**A2**: Gráficamente Ok, es cero.
15	**I**: Ojo, tiende a cero pero no es exactamente cero. Es imposible que el área de
16	

cero. Siempre se va a poder dibujar un rectángulo muy pequeñito. ¿Por qué el área no puede ser imaginaria? ¿Qué interpretas como área imaginaria?

A2: ¿Imaginaria?

I: Por supuesto en matemática porque si me voy a otro contexto por ejemplo en la literatura, una novela imaginaria, no tiene basamento real.

A2: Por ejemplo, la raíz cuadrada de menos uno es un número imaginario.

I: ¿Pudiera hablarse de áreas imaginarias?

A2: No creo, pues no creo que pueda hablarse de áreas imaginarias

I: Estas en el campo de los números imaginarios. Pero en este caso la base y la altura de los rectángulos es finita, es un número real.

A2: No puede ser.

I: ¿Y negativa?

A2: No, no puede haber área negativa.

I: ¿Por qué?

A2: Bueno, lo que yo recuerdo que uno calcula el área no le puede dar un negativo. El área tiene que dar un número mayor que cero. El área de esta oficina. El piso de la oficina es un rectángulo tiene un largo y un ancho. Tiene un área.

I: La pregunta # 8

A2: La opción correcta es la (b)

I: Bien, la pregunta # 9

A2: La opción correcta es la (c)

I: Bien, la pregunta # 10

A2: La opción correcta es la (b)

I: Bien, la pregunta # 11

A2: La opción correcta es la (b)

I: Bien, y finalmente la pregunta # 12

A2: La opción correcta es la (c)

I: Bien, con esto podemos dar por terminada la entrevista, muchas gracias por tu colaboración.

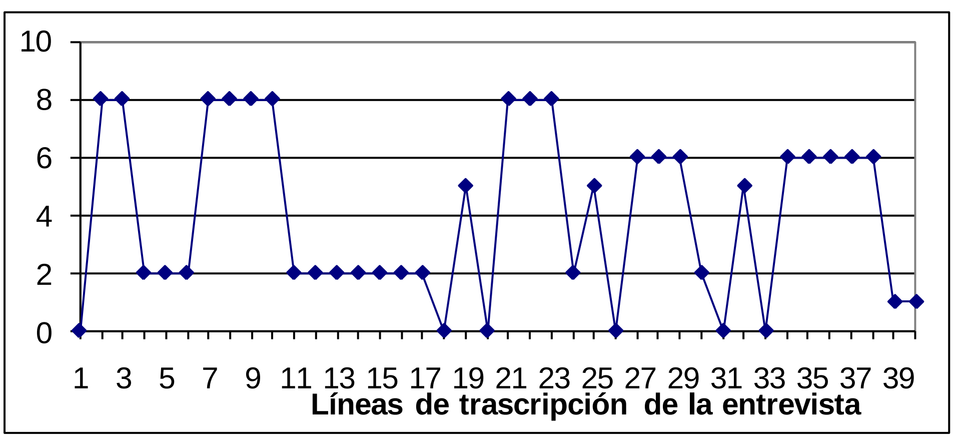


Figura 21. Cronogénesis Pag. 10 (A3)

La cronogénesis de la página 10 muestra la interacción verbal entre A3 y la docente, indica que tiene 40 líneas, la docente realizó 6 preguntas (líneas 1,18,20,26,31 y 33), no se detectaron conflictos semióticos. A3 argumenta más que A1 y A2.

Práctica discursiva (pag 10)
I: ¿Cómo te pareció el cuestionario?
A3: El cuestionario se entiende todo, lo que he tenido siempre esa duda en realidad, por lo menos cuando tengo que evaluar un seno o coseno en el infinito.
I: Entonces arranquemos con la pregunta número nueve porque me interesa saber las dudas que tienes. Allí esta planteada una integral impropia entre cero y más infinito de seno de x.
A3: La resolví pero entonces el coseno de infinito, el coseno siempre me da valores que oscilan entre uno y menos uno, entonces si yo evalúo de cero a más infinito siempre me van a dar esos dos valores, en realidad no se si en realidad diverge. Le coloque que no existe.
I: Efectivamente la integral diverge, el límite no existe por oscilación. Porque por lo que tú muy bien dices la función coseno está oscilando. Existen dos tipos de divergencia: cuando el límite tiende a infinito y cuando el límite no existe por oscilación como en este caso. (Existe una divergencia entre lo hablado y lo escrito, lo escrito es riguroso, es formal, en cambio lo hablado es ambiguo porque se trata de que el alumno entienda lo explicado). Vamos a analizar la primera para ir siguiendo el orden del cuestionario. En la primera pregunta te dan un conjunto entre uno y más infinito. ¿Qué alternativa escogiste?
A3: La opción (c)
I: ¿Por qué no escogiste la (a)?
A3: La pensé también, números reales que pertenezca al conjunto del número uno hasta el número infinito, pero como no me decían justamente que contenía el uno, no la escogí, preferí escoger la que decía mayores o iguales a uno.
I: Pero fíjate que en esta proposición aparece la expresión “un número infinito”.
A3: Si también.
I: ¿Qué interpretas como infinito?
A3: Que está incluido todos los decimales,… o sea desde el uno hasta el infinito positivo incluyendo los que están comprendidos, es decir, entre uno y dos, o los que están comprendidos…bueno… el infinito también no dice mucho.
I: Creo que no me has entendido la pregunta, fíjate que aparece la expresión “número infinito”. ¿Tú interpretas que el infinito es un número?
A3: Ah, no.
I: ¿Qué es para ti el infinito?
A3: El infinito lo veo yo como un símbolo (repetición de la expresión “yo lo veo” (objeto no ostensivo), adicionalmente la persona se apropia de los objetos matemáticos), un símbolo que me dice que no es un intervalo cerrado, sino que

37	hay algo más allá pero igual no se puede contabilizar, sino lo que me está
38	mostrando es que hay algo más pero igual no no no es tangible sino que más bien
39	es como una especie de símbolo.
40	**I**: Es una abstracción, que no se puede trabajar ni como un número ni como una
41	variable. Es una abstracción porque cualquier número que tú te imagines le puedes

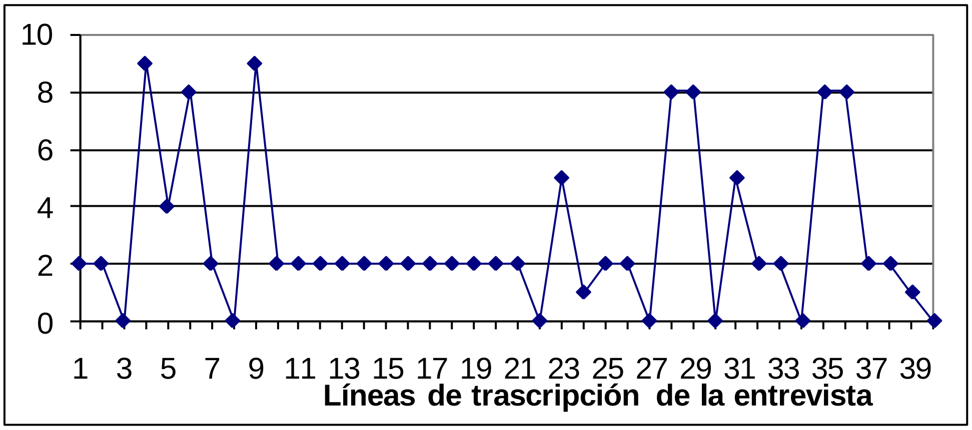


Figura 22. Cronogénesis Pag. 11 (A3)

La cronogénesis de la página 11 muestra la interacción verbal entre A3 y la docente, indica que tiene 40 líneas, la docente realizó 7 preguntas (líneas 3,8,22,27,30,34 y 40), se detectaron dos conflictos semióticos: CS36 y CS37 (líneas 4 y 9). Excesiva participación de la docente (Desde la línea 10 hasta la 21).

Lin	**Práctica discursiva (pag 11)**
1	sumar uno más y se va haciendo más grande, más grande, más grande. Estoy de
2	acuerdo contigo, vamos con la siguiente. Te piden evaluar este límite cuando x
3	tiende a uno. ¿Qué procedimiento seguiste?
4	**A3**: Primero lo evalué, y me da uno entre cero que es indeterminado (<u>conflicto</u>
5	<u>semiótico</u>) entonces lo que hice fue aplicarle L'Hopital y derive arriba y derive
6	abajo, como la derivada de una constante es cero, cero entre un número es cero.
7	**I**: Tenemos un problema con este razonamiento. Vamos nuevamente a sustituir,
8	uno menos uno es cero. ¿Uno sobre cero es?
9	**A3**: Eeeeh…Indeterminado.
10	**I**: No, no es indeterminado. Recuerda las indeterminaciones son cero sobre cero,
11	infinito sobre infinito, infinito menos infinito y hay tres más donde hay que hacer
12	transformaciones para poder aplicar L´Hopital. Vamos a analizarlo nuevamente,
13	uno menos uno, cero. Uno sobre cero. Infinito. Pero tampoco sirve ese
14	razonamiento ¿Por qué? Fíjate que aquí x tiende a uno, pero no establecen si es
15	uno por la derecha o si es uno por la izquierda. Ahora te pregunto ¿Qué hubiera
16	pasado si aquí te coloco que tiende a uno por la derecha? Uno por la derecha

17	menos uno, cero por la derecha, uno sobre cero por la derecha más infinito
18	(<u>observo que si yo estudiara con el lenguaje coloquial no entendería</u>
19	<u>absolutamente nada, debe existir un puente entre el lenguaje coloquial y el</u>
20	<u>lenguaje riguroso</u>) Si en cambio hubiera sido uno por la izquierda, daría cero por
21	la izquierda y uno sobre cero por la izquierda menos infinito. Entonces fíjate que
22	los límites laterales son diferentes.
23	¿Tú te acuerdas de Matemática I, el teorema de la unicidad del límite?
24	**A**: No, no profe yo vi Matemática I hace bastante tiempo.
25	**I**: Vamos a tratar de recordar: Para que este límite exista, los límites laterales
26	tienen que ser iguales, entonces fíjate que por un lado te da más infinito y por el
27	otro menos infinito, entonces el límite como tal no existe. La respuesta correcta
28	es la (d). ¿Tú no viste Matemática I aquí en la Universidad de Carabobo?
29	**A3**: No, no porque yo vengo de San Cristóbal, hice equivalencia por
30	Matemática I, de lógica pase directo a "Matemática II".
31	**I**: ¿Allá si estabas estudiando contaduría?
32	**A3**: No ingeniería informática.
33	**I**: Ah, Ok, vamos con la número cuatro ya que la tercera la contestaste
34	correctamente y tiene relación con la segunda. El valor de uno sobre cero
35	contestaste más infinito ¿Por qué?
36	**A3**: Porque tenia el concepto de que uno entre cero es más infinito. Se me había
37	olvidado analizar por la derecha o por la izquierda.
38	**I**: Pero… aquí tenemos una diferencia. Estoy de acuerdo que aquí tú me digas
39	que es más infinito porque estas evaluando un límite en cambio aquí estas
40	calculando un valor numérico. Si en una calculadora realizas la operación uno entre cero, te aparece error. Entonces, ¿Cuál debería ser la respuesta? No está definido. Vamos…

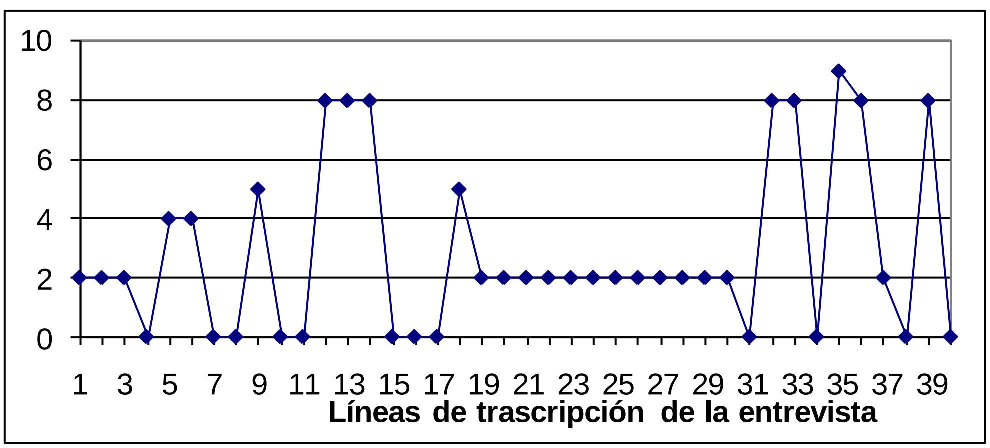


Figura 23. Cronogénesis Pag. 12 (A3)

La cronogénesis de la página 12 muestra la interacción verbal entre A3 y la docente, indica que tiene 40 líneas, la docente realizó 8 preguntas (líneas

4,7,8,10,11,15,16,17,31,34,38 y 40), se detectó un solo conflicto semiótico: CS38 (línea 35). Excesiva participación del docente (Desde la línea 19 hasta la 30).

Lin	**Práctica discursiva (pag 12)**
1	con la siguiente pregunta. Fíjate que las preguntas están mezcladas, unas
2	pertenecen a Introducción a la matemática, otras a Matemática I y la que viene a
3	continuación es de “Matemática II”. Veamos la número 5, colocas 1. Es la
4	respuesta correcta ¿Cómo llegaste a ese resultado?
5	(La alumna explica el procedimiento correctamente pero no presenta la solución
6	gráfica, se le solicita que realice el gráfico, el cual plantea correctamente) Así a
7	simple vista, sin la parte analítica ¿Cual debería ser el área bajo curva para todo
8	número mayor a cero?
9	**A3**: Infinito también.
10	**I**: Entonces ¿Por qué será que intuitivamente se ve que el área es infinita y
11	analíticamente se obtiene que el área es uno?
12	**A3**: Debe ser porque la gráfica se va acercando más al eje x entonces como le
13	estamos aplicando un límite entonces yo puedo decir que tiende a uno, porque
14	cada vez se esta haciendo como más pequeña.
15	**I**: Estoy de acuerdo con tu razonamiento, pero le falta algo. ¿De donde proviene
16	la noción de área? ¿Como nosotros en las clases de teoría les explicamos a los
17	estudiantes la noción de área? ¿Basándonos en que?
18	**A3**: En los diferenciales.
19	**I**: Los diferenciales son rectángulos que tienen una base muy pequeña y la altura
20	coincide con la función. Fíjate que a medida que te vas corriendo hacia más
21	infinito los rectángulos son cada vez más pequeños, más chiquititos. Asumamos
22	que todos los rectángulos tienen la misma base pero su altura se está haciendo
23	cada vez más pequeñita. Entonces el área de un rectángulo es base por altura. El
24	área de estos rectángulos es prácticamente cero, prácticamente no contribuyen al
25	área total. El área que realmente está dando contribución es la que proviene de
26	los rectángulos más grandes. Cuando realizas la suma de esos infinitos
27	rectángulos el área tiende a uno. En la otra pregunta no tuviste problema. Sin
28	embargo las otras estudiantes no la contestaron, las preguntas que más le
29	costaron estaban relacionadas con el cálculo de áreas no acotadas, yo creía que
30	como la materia estaba más fresquita lo iban a contestar con mayor facilidad.
31	Vamos con la pregunta 7. ¿Por qué el área bajo una curva no puede ser cero?
32	**A3**: Porque un área no puede ser cero, un área es algo que estamos midiendo. Si
33	fuera cero indicaría que no hay área.
34	**I**: Imagínate que yo pongo aquí desde cien hasta más infinito ¿El área es cero?
35	(Se ríe)
36	**A3**: Ah bueno, matemáticamente es cero, pero hay un poquito.
37	**I**: Se aproxima a cero, pero no es que exactamente sea cero. Fíjate como dice la
38	pregunta ¿Es exactamente cero?
39	**A3**: No.
40	**I**: Bien, buen razonamiento ¿El área puede ser imaginaria?

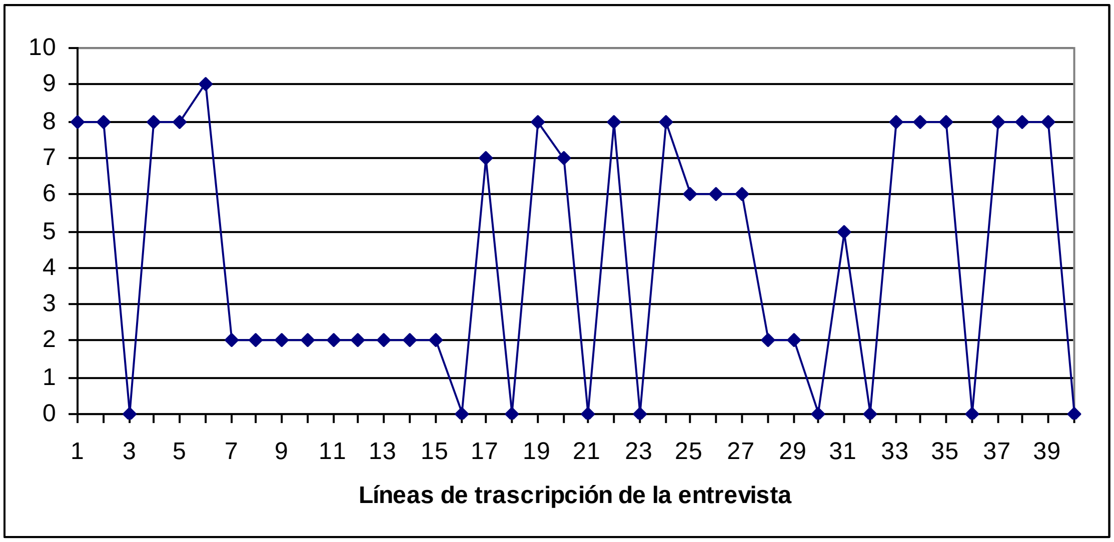


Figura 24. Cronogénesis Pag. 13 (A3)

La cronogénesis de la página 13 muestra la interacción verbal entre A3 y la docente, indica que tiene 40 líneas, la docente realizó 9 preguntas (líneas 3,16,18,21,23,30,32,36 y 40), se detecta un solo conflicto semiótico: CS39 (línea 8) que fue negociado por la docente (desde la línea 7 hasta la 15).

Práctica discursiva (pag 13)
A3: Para mi, nunca. El área siempre tiene que ser un valor positivo y tiene que ser que se pueda medir. Un valor imaginario, no.
I: ¿Qué es para ti un valor imaginario?
A3: Es por ejemplo cuando aparecen raíces negativas. El valor existe pero nooooo…Es como un conjunto de números que existen pero no…como que no son reales. (Se rie).
I: Los ingenieros electricistas trabajan con esos números, pero para nosotros en las ciencias administrativas y contables solo nos interesan los números reales. Por eso es que los estudiantes cuando uno les grafica una parábola en el primer cuadrante y se les pide que busquen los cortes de la parábola con el eje x se enredan, porque les da un número imaginario y automáticamente te dicen no existe. El número como tal si existe pero en otro campo, en el campo de los números complejos, lo que no existe son los puntos de corte de la parábola con el eje x. Los estudiantes tienden a tener esa confusión y eso es precisamente lo que estoy analizando. (<u>Asocian imaginario a lo que no se puede ver</u>). Veamos la siguiente pregunta ¿El área puede ser negativa?
A3: El área nunca es negativa, "profe".
I: ¿Por qué?
A3: Como lo vemos aquí (señala el gráfico) es la suma de áreas de rectángulos.

Nunca me puede dar un número negativo.

I: Pasemos a la número 8. El área limitada por esta curva. ¿La graficaste?

A3: No, simplemente desintegre la integral.

I: Ahora la expresión infinito menos infinito ¿Por qué no es cero?

A3: En la clase contestan que es cero porque el infinito lo interpretan como si fuera un número. El infinito no es un número sino un símbolo que me indica que es un número bastante grande pero que igual no lo podemos contabilizar, porque no se que valor es infinito.

I: Una indeterminación siempre está relacionada a un límite de funciones. Habría que tomar en consideración la ley de los grandes números. Vamos a pasar a la siguiente. ¿Cuál escogiste?

A3: La opción (b)

I: ¿Por qué?

A3: Porque me dicen que son los números reales, me va a incluir el cero y el uno y todos los números entre ellos, el 0,1, el 0,2. Y en cuanto a los decimales puedo incluir infinitos decimales.

I: La última pregunta. De estos dos conjuntos ¿Cuál es más grande?

A3: Yo conteste que era imposible decidir, yo no se cuantos números hay entre uno y dos, igual no se cuantos números hay entre más infinito y más infinito. Es decir puede haber infinitos números aquí e infinitos números allá.

I: ¿Cuál infinito es más grande?

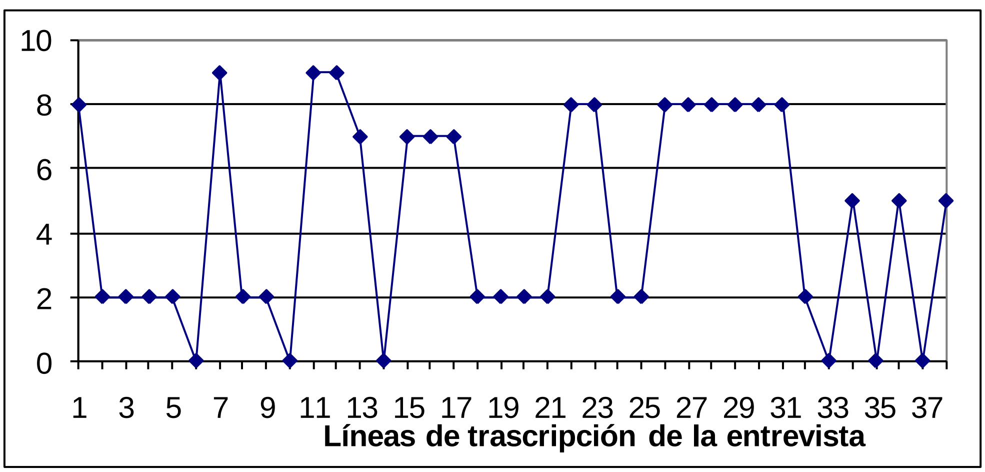


Figura 25. Cronogénesis Pag. 14 (A3)

La cronogénesis de la página 14 muestra la interacción verbal entre A3 y la docente, indica que tiene 38 líneas, la docente realizó 6 preguntas (líneas 6,10,14,33,35 y 37), se detectan dos conflictos semióticos: CS40 y CS41 (líneas 7, 11 y 12).

Práctica discursiva (pag 14)

A3: Sigo considerando que es imposible de decidir.

I: Cantor, uno de los matemáticos más famosos, hizo la siguiente suposición: tomó todos los números naturales, que son infinitos, de este gran conjunto decidió tomar un subconjunto: los números pares, que también son infinitos. Entonces fíjate la paradoja: un conjunto que es infinito generó un subconjunto de infinitos números. Entonces ¿Cuál es más grande?

A3: No se puede decidir. No se cuantos números puedo tomar aquí.

I: Cualquiera que tú escojas le puedes agregar un número. Fíjate que el infinito es un concepto muy abstracto. De las preguntas planteadas en este cuestionario ¿Cuál fue la que te causó mayor confusión o duda?

A3: La última. Eeeeeh….. Esta porque la leí mal (señala la pregunta 4) pensé que era como las dos anteriores. En la pregunta 9 porque tenia la duda de la oscilación.

I: La integral impropia divergente por oscilación. ¿Cuáles otras dudas te plantean los estudiantes en la clase de preparaduria?

A3: Cuando planteamos integrales impropias y nos da cero por infinito o cero por logaritmo de cero. Ellos tienden a pensar que cualquier número multiplicado por cero es cero.

I: Es decir, no lo ven como una indeterminación. ¿Cuales son las fallas que presentan los estudiantes relacionados con infinito? El tema de cálculo de área no acotada es una de las más complicadas y sin embargo de mayor aplicabilidad en estadística y cálculo financiero.

A3: Si, porque no es tan mecánico como cuando trabajamos con las técnicas de integración.

I: Porque los estudiantes tienden a memorizar los procedimientos, como si fueran recetas de cocina. En cambio aquí hay que analizar más, es necesario graficar.

A3: Por ejemplo, ellos no saben cuanto es "e" a la más infinito y "e" a la menos infinito. Les digo «Tienen que ver la gráfica, cuando ella tiene valores negativos se va aproximando más al cero pero cuando tiene valores positivos ella va creciendo entonces "e" a la más infinito es más infinito y "e" a la menos infinito es cero». Porque cuando uno les hace la gráfica lo ven. Cuando les hago la gráfica entonces ellos como que Aaah, Ok.

I: Ahí como que darle la vuelta a la matemática para que el estudiante nos comprenda.

I: La pregunta # 6

A3: La opción correcta es la (b)

I: Bien, la pregunta # 7

A3: La opción correcta es la (b)

I: Bien y finalmente la pregunta # 10

A3: La opción correcta es la (b)

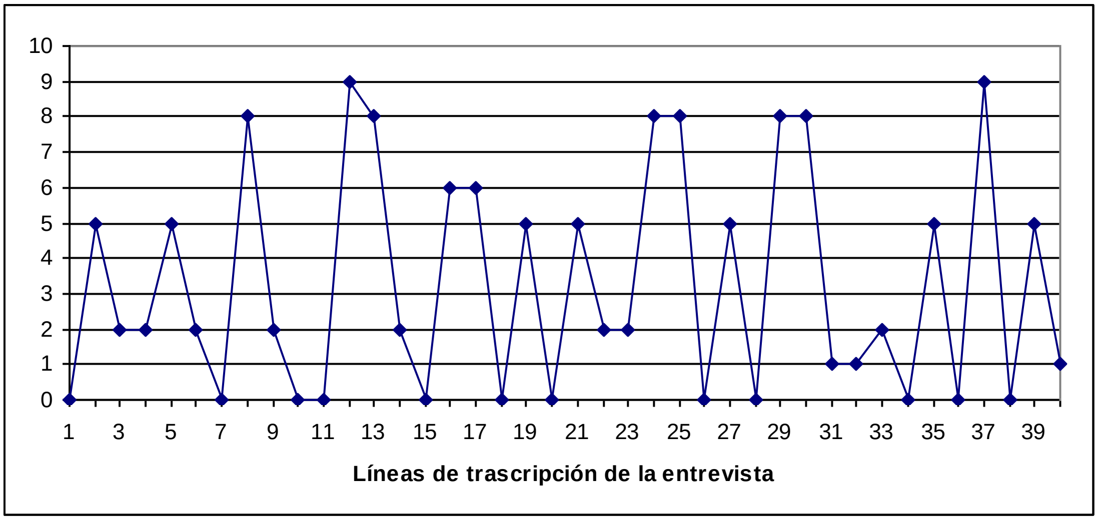


Figura 26. Cronogénesis Pag. 15 (A4)

La cronogénesis de la página 15 muestra la interacción verbal entre A4 y la docente, indica que tiene 40 líneas, la docente realizó 11 preguntas (líneas 1,7,10,11,15,18,20,26,28,34,36 y 38), se detectan dos conflictos semióticos: CS42 y CS43 (líneas 12 y 37).

Lin	**Práctica discursiva (pag 15)**
1	**I**: ¿Cómo te pareció el cuestionario?
2	**A4**: Bien.
3	**I**: Quiero que me digas las dudas que tuviste y vamos a analizar cada una de
4	ellas. Vamos con la primera.
5	**A4**: La (a).
6	**I**: Vamos a ir descartando las posibles soluciones. La (a) no puede ser porque
7	contiene la palabra infinito. ¿Qué indica el corchete?
8	**A4**: Que es mayor o igual.
9	**I**: Entonces la (b) no puede ser porque dice mayor que uno, no lo incluye, en
10	cambio la (c) si lo incluye. Entonces ¿Cuál crees que es la diferencia entre la (a)
11	y la (c)?
12	(Se queda pensando un rato)
13	**A4**: Que la (c) no tiene un límite superior.
14	**I**: Pero fíjate que aparece una palabra clave en la alternativa (a), te dicen que es
15	hasta el número infinito. ¿Qué es para ti el infinito?
16	**A4**: ¿Qué es el infinito? Algo que no tiene…estee…como le digo…no tiene
17	restricción…pues…más lejos de lo real.
18	**I**: Pero ¿Es un número?
19	**A4**: No.
20	**I**: ¿Lo interpretas como un número?

21	**A4**: No.
22	**I**: Entonces aquí habría una contradicción porque te están diciendo hasta el
23	número infinito.
24	**A4**: Me está diciendo que está acotado al infinito pero nosotros no sabemos que
25	es el infinito.
26	**I**: Vamos a analizar la pregunta #2 y calcular este límite ¿Cuál escogiste?
27	**A4**: No existe.
28	**I**: ¿Por qué?
29	**A4**: Porque un número entre cero no está definido. En cambio un número entre
30	cero por la derecha y cero por la izquierda ya me tiende a más o menos infinito.
31	**I**: Entonces allí estas aplicando el teorema de la unicidad del límite. Para que el
32	límite exista los dos límites laterales deberían ser iguales. Fíjate que la 3 tiene
33	relación con lo que estamos hablando. Vamos a analizar mejor la pregunta #4.
34	¿Cuál es el valor de 1/0?
35	**A4**: No existe.
36	**I**: ¿Por qué?
37	**A4**: La tome como el otro.
38	**I**: ¿La tomaste como el otro?
39	**A4**: Uno sobre cero, la segunda.
40	**I**: No entiendo.

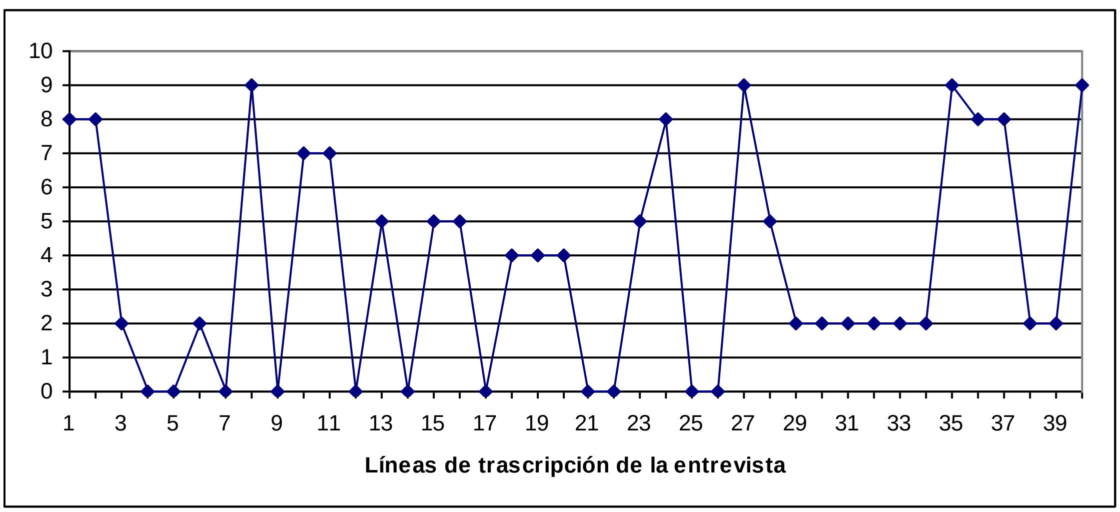


Figura 27. Cronogénesis Pag. 16 (A4)

La cronogénesis de la página 16 muestra la interacción verbal entre A4 y la docente, indica que tiene 40 líneas, la docente realizó 8 preguntas (líneas 4,5,7,9,12,14,17,21,22,25 y 26), se detectaron cuatro conflictos semióticos: CS44, CS45, CS46 y CS47 (líneas 8,27,35 y 40).

Práctica discursiva (pag 16)
A4: Usted sabe que uno sobre x menos uno seria uno sobre cero, yo dije que eso no existe.
I: Pero en el límite me tiende a infinito. Pero cuando es cero por la derecha tiende a más infinito. ¿Pero es por la presencia del límite o porque tiene que establecerse si es por la derecha o por la izquierda?
A4: Por la presencia del límite.
I: Y la pregunta 5.
A4: Esa no la pude resolver.
I: Pero ¿Qué pensaste?
A4: Ya me estaban restringiendo mi área, verdad, que iba de uno a más infinito pero tenía que buscar la función de aquí.
I: ¿Cómo determinas el área bajo la curva?
A4: Primero graficando $y = 1/x^2$
I: ¿Tienes idea de la forma de esa curva?
A4: Seria como algo así (grafica la hipérbola equilátera) Yo colocaría que el área es infinita.
I: ¿Cómo se determina analíticamente el área bajo una curva?
A4: Planteo la integral definida desde uno hasta infinito positivo de $1/x^2$ diferencial de x (Resuelve la integral y obtiene el resultado correcto que es uno). La integral converge.
I: Ahora te hago la siguiente pregunta ¿Es posible que una curva que va de uno a más infinito tenga área uno? ¿Tiene sentido que una curva infinita tenga área uno?
A: No.
I: Fíjate que la curva tiene una particularidad: a medida que x crece sin límite la curva se va aproximando al eje x pero sin llegar a cortarlo. ¿Cuál es el área de los pequeños rectángulos que se están formando aquí? (Se señala el final de la curva, se queda pensando).
A4: Cero.
I: La que está contribuyendo al valor del área son los rectángulos más grandes. La suma de los rectángulos representativos es la que te da uno. Entonces tiene sentido que una curva que tiene longitud infinita tenga un área de valor finito.
I: Todos los reales lo tradujiste en la integral como límite inferior: menos infinito y límite superior: más infinito. Por razones de tiempo vamos a pasar a la pregunta número nueve.
A4: Yo tengo una duda sobre esa. Porque a mi me dicen que el infinito no existe, el seno está definido entre -1 y 1 (conflicto semiótico: confunde el dominio con el rango de una función). Eso me dijo mi primo que es estudiante de ingeniería eléctrica, no es que no exista.
I: La función tiene máximos y mínimos. Son como los picos que están entre -1 y 1 pero la función sigue oscilando indefinidamente. Pero no es que termine en 1.
A4: ¡Aaaaah! Es que yo pensé que era de -1 a 1.

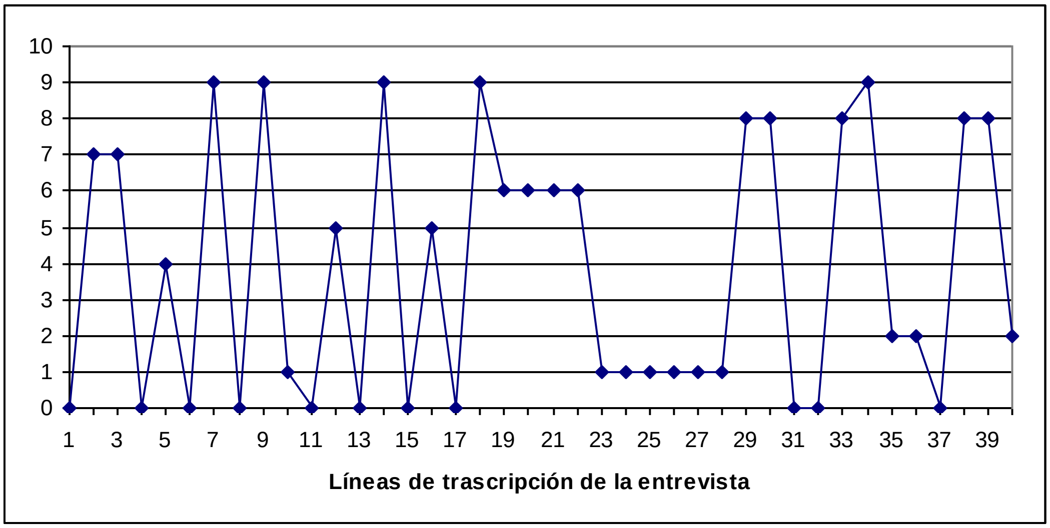


Figura 28. Cronogénesis Pag. 17 (A4)

La cronogénesis de la página 17 muestra la interacción verbal entre A4 y la docente, indica que tiene 40 líneas, la docente realizó 10 preguntas (líneas 1,4,6,8,11,13,15,1731,32 y 37), se detectaron cinco conflictos semióticos: CS48, CS49, CS50, CS51 y CS52 (líneas 7,9,14,18 y 34).

Lin	**Práctica discursiva (pag 17)**
1	**I**: Vamos con la pregunta 6. ¿Qué tipo de integral es?
2	**A4**: Es una integral impropia de segunda especie porque tiene problemas en
3	infinito.
4	**I**: ¿Qué respuesta escogiste?
5	**A4:** La 1/e (Explica el procedimiento de cálculo correctamente).
6	**I**: Vamos con la otra que parece más una pregunta de tipo teórico ¿Qué
7	escogiste?
8	**A4**: No escogí ninguna, pero…yo creo…un número finito.
9	**I**: Ok, vamos a empezar a descartar alternativas ¿Por qué no la primera
10	alternativa?
11	**A4**: ¿Qué es una curva de longitud infinita?
12	**I**: Larga, largota. (<u>Imprecisión en la docente</u>) yo me tardaría toda la vida
13	dibujándola (<u>Expresión metafórica</u>) ¿Esta área puede ser cero?
14	**A4**: Si.
15	**I**: ¿Si?
16	**A4**: Cero no, puede tender a cero porque nunca va a tocar el eje.
17	**I**: Ok, ¿El área puede dar un valor finito?
18	**A4**: Si, precisamente con el ejercicio cinco lo estamos comprobando.

I: Veamos la otra opción ¿Qué interpretas tú como imaginario?

A4: (Se queda pensando por un largo rato) Seria algo como que… matemáticamente no tendría solución. Algo que yo me pueda imaginar (se echa a reír). Me confunde "profe". Un número imaginario es raíz cuadrada de menos uno. Una raíz no puede ser negativa (<u>concepción fuertemente arraigada, no habla de números imaginarios</u>).

I: Ojo, el número si existe pero pertenece a otro campo, el de los números complejos. Los ingenieros electricistas trabajan con esos números. Realmente el desarrollo de las calculadoras, computadoras y otros artefactos electrónicos se debe al uso de los números complejos porque los fenómenos eléctricos se explican mejor con los números complejos que con los números reales. Para ellos son unos números familiares.

A4: Son naturales para ellos pero para nosotros son imaginarios, son como raros, como si no existieran.

I: Vamos con la pregunta: ¿El área bajo una curva de longitud infinita puede ser imaginaria?

A4: Si, porque me están dando infinitos números y en esos infinitos números puede entrar un número imaginario ¿O no?

I: No, porque recuerda que cuando realizamos la definición de cálculo de área empleamos los diferenciales y el área de cada diferencial es base por altura. El área bajo una curva de longitud infinita ¿Puede ser negativa?

A4: Hay funciones negativas, que están por debajo del eje x. En el cuarto cuadrante. La función techo es el eje x y la función piso es la función considerada.

I: El área no puede ser negativa. Se puede medir el largo y el ancho. Imposible de

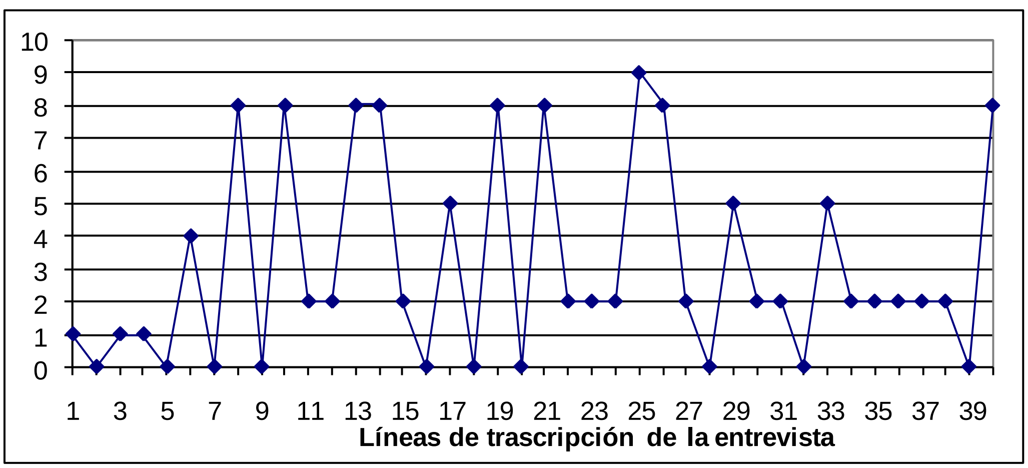


Figura 29. Cronogénesis Pag. 18 (A4)

La cronogénesis de la página 18 muestra la interacción verbal entre A4 y la docente, indica que tiene 40 líneas, la docente realizó 10 preguntas (líneas 2,5,7,9,16,18,20,28,32 y 39), se detectó un solo conflicto semiótico: CS53 (línea 25).

Práctica discursiva (pag 18)

que sea negativa. Son magnitudes físicas. Las áreas siempre son positivas. Eso es lo que yo quiero analizar en mi trabajo. ¿Por qué se presenta ese conflicto semiótico? La otra pregunta es como determinar el área bajo la curva $1/(1+ x^2)$. Esa curva es la campana de Gauss para todo x perteneciente a los números reales ¿Cómo colocar eso en la integral? (problema al hacer la conversión de registros semióticos) Por favor sombrea el área pedida ¿Dónde colocaste el primer rectángulo característico?

A4: En el infinito negativo.

I: ¿Y donde colocarías el último?

A4: En más infinito.

I: Entonces los límites de integración serían más y menos infinito. Ahora lo que tendríamos que hacer es resolver la integral impropia.

A4: A mi me habían dicho que el límite no existe pero nadie me había explicado por qué no existe.

I: Es que ese es el gran problema, que a los estudiantes no se les explica el por qué de las cosas. La otra pregunta : ¿infinito menos infinito es?

A4: Es una indeterminación.

I: ¿Por qué?

A4: Porque no puedes restar un infinito con un infinito.

I: ¿Por qué?

A4: Porque no es un número real, porque no es un número finito.

I: Porque no se puede manipular de la misma forma que a los números reales. Es una indeterminación. Vamos a pasar a la pregunta que está relacionada con el conjunto cerrado de 0 a 1.

A4: De 0 a 1 hay infinitos números. Marque esa pero en realidad pienso que es la (b) porque puedo escribir 0,1, 0,2 y luego 0,01, 0,02 y así sucesivamente.

I: Vamos a tomar el conjunto de los números naturales 1, 2, 3… ¿Cuántos números naturales existen?

A4: Infinitos.

I: Porque a cada número que tú me des yo le puedo sumar uno. De ese conjunto infinito yo puedo formar un subconjunto de los números pares 2, 4, 6… ¿De qué tamaño es el subconjunto de los números pares?

A4: Infinito.

I: De un conjunto infinito se extrajo un subconjunto infinito. Parece una paradoja que se pueda formar un subconjunto infinito. Esa misma situación está ocurriendo en el intervalo cerrado [0,1] porque es factible escribir un número con infinitos decimales. Las clases de matemática también tienen que incluir una parte teórica, para que ustedes no se dejen llevar por la intuición y realmente conozcan el resultado correcto. Ahora bien vamos con la última pregunta.

A4: Ahora que entendí la pregunta 11 se que conteste mal la 12. Ahora se que la

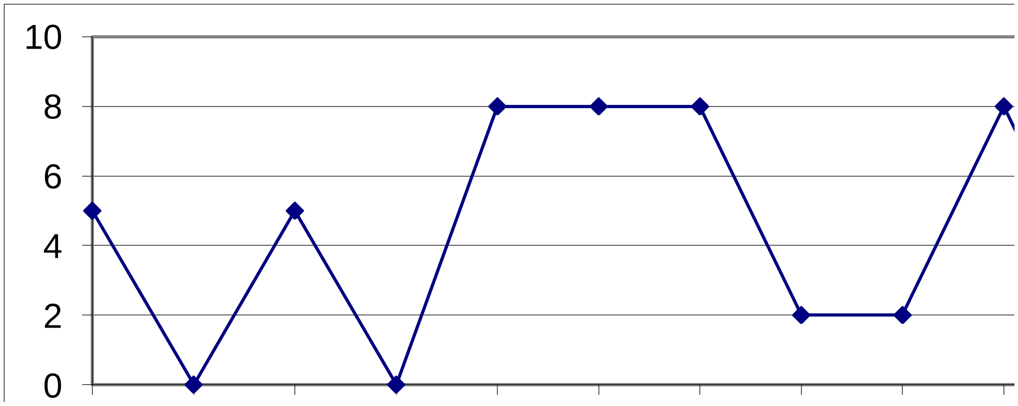


Figura 30. Cronogénesis Pag. 19 (A4)

La cronogénesis de la página 19 muestra la interacción verbal entre A4 y la docente, indica que tiene 12 líneas, la docente realizó 2 preguntas (líneas 2 y 4), no se detectó ningún conflicto semiótico.

Lin	**Práctica discursiva (pag 19)**
1	opción correcta es la (c).
2	I: La pregunta # 3.
3	**A4**: La opción correcta es la (a).
4	**I**: ¿Cómo te pareció el cuestionario?
5	**A4**: Me gusto porque tiene cosas raras. Por lo menos lo del seno. Aclare muchas
6	dudas que tenia. Pues. Donde me quede fue más que todo fue en el área porque
7	no pude asociar el área con la integral.
8	**I**: Me he dado cuenta que los problemas más difíciles eran los que estaban
9	relacionados con “Matemática II”.
10	**A4:** Es que tienden a confundir para armar la integral, de donde a donde.
11	**I**: Todos los problemas están relacionados con el infinito. Bien con esto podemos
12	dar por terminada la entrevista, muchas gracias por tu valiosa colaboración.

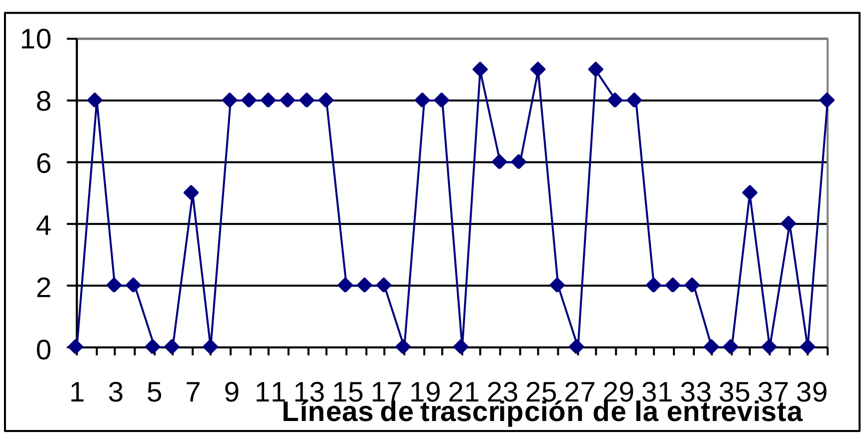


Figura 31. Cronogénesis Pag. 20 (A5)

La cronogénesis de la página 20 muestra la interacción verbal entre A5 y la docente, indica que tiene 40 líneas, la docente realizó 9 preguntas (líneas 1,5,6,8,18,21,27,34,35,37 y 39), se detectaron tres conflictos semióticos: CS54, CS55 y CS56 (líneas 22,25 y 26).

Práctica discursiva (pag 20)
I: ¿Como te pareció el cuestionario?
A5: Me puso a pensar bastante.
I: Fijate que todas las preguntas que coloque están relacionadas con el infinito. Son de varias asignaturas: Introducción a la Matemática, Matemática I y “Matemática II” ¿Cuáles fueron las preguntas que te causaron mayor dificultad, duda, ansiedad o confusión.
A5: Eeeeeeh...Bueno la de los límites…la 2, la 4, la 5 y la 6.
I: Entonces vamos a arrancar con la segunda pregunta ¿Qué opción escogiste?
A5: Eeeeeeh…cero porque cuando hablamos de límite como no me dicen, si abajo tenemos un x-1 y el x tiende a 1 entonces me quedaría 1 entre 0. Ya no estaría dividiendo entre cero sino que estaría dividiendo entre un número muy cercano a cero ¿Qué pasa? Cuando yo tengo un número y lo divido entre algo muy, muy, muy pequeño me daría una cantidad extremadamente grande que tendería a más infinito.
I: Pero también pudiera ocurrir que x tendiera a 1 por la izquierda. Si restas 1 por la izquierda menos 1 te da un cero por la izquierda. Es decir un número muy cercano a cero pero negativo. Y uno sobre cero por la izquierda también te da un número muy grande pero negativo ¿Entonces por qué me dices que es cero?
A5: (Pausa) Es como buscarle una…una especie de balanza (metáfora) como no está muy a la derecha ni muy a la izquierda.
I: Entonces ¿Por qué no lo interpretaste como que no existe el límite?
A5: El cero como tal no está ni para allá ni para acá.
I: Pero pasa algo muy importante. El límite no existe cuando los límites laterales no coinciden. ¿Te acuerdas de Matemática I el teorema de la unicidad del límite?
A5: Un poquito…Que el…No realmente no.
I: Pasemos a la pregunta 4 que es la otra pregunta donde me dijiste que tenias confusión. ¿El valor de 1 sobre 0 es?
A5: Bueno…No la respondí porque no la entendí. Pero por lógica le hubiera colocado no existe. Pero no es un valor como tal que yo pueda calcular es algo así como el mismo infinito que yo se que está ahí.
I: Pero aquí también tienes un problema porque esto no es un límite. Si pulsas en la calculadora 1 entre 0 te va aparecer en la pantalla error. Eso no está definido. La primera regla de la aritmética es que no podemos dividir entre cero. Vamos con la otra que tuviste confusión: ¿El área bajo una curva de longitud infinita puede ser? Vamos por partes ¿Qué interpretas por una curva de longitud infinita?
A5: Por ejemplo una recta.
I: ¿El área bajo esa curva puede ser cero?

38	**A5:** No.
39	**I**: ¿Por qué?
40	**A5:** Estoy suponiendo que la curva no corta al eje x, siempre va a quedar un

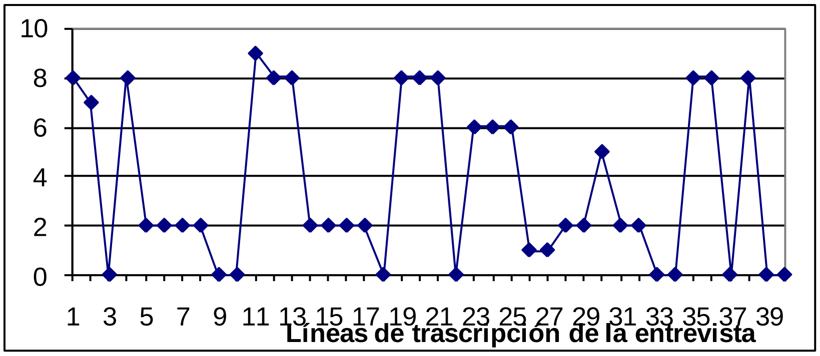


Figura 32. Cronogénesis Pag 21 (A5)

La cronogénesis de la página 21 muestra la interacción verbal entre A5 y la docente, indica que tiene 40 líneas, la docente realizó 7 preguntas (líneas 3,9,10,18,22,33,34,37,39 y 40), se detectó un solo conflicto semiótico: CS57 (línea 11).

Lin	**Práctica discursiva (pag 21)**
1	espacio entre la curva y el eje "y" siempre va a existir área. Es imposible que sea
2	exactamente cero.
3	**I**: ¿Puede ser un valor finito?
4	**A5**: Entonces los límites de integración deberían ser finitos.
5	**I**: Entonces me voy a remitir a la pregunta 5. Analicemos, te da -1. Aplicaste mal
6	la regla de Barrow, evaluaste el límite inferior y le restaste el límite superior.
7	Entonces ¿No te estás contradiciendo? Aquí tienes como ejemplo una curva de
8	longitud infinita y el área bajo esa curva es 1 un valor finito. Entonces ¿Cómo le
9	explicarías a un alumno que está cursando por primera vez "Matemática II" que
10	el área bajo una curva infinita puede tener un valor finito?
11	**A5:** (Pausa muy larga) Bueno...Gráficamente es un límite, es una aproximación.
12	Yo podría decir que es 1 porque cuando yo sume todas las áreas igual ese
13	número se me va a acercar a 1.
14	**I**: Has dibujado un conjunto de rectángulos. Pero estos rectángulos son tan, pero
15	tan pequeños que su área tiende a cero. Entonces ¿Cuál es el área que está dando
16	1? Los primeros son los que están contribuyendo a que la suma de las áreas de
17	los rectángulos nos de 1. Si hemos contestado la pregunta 5 tenemos la respuesta
18	a la pregunta 7. Ahora yo te pregunto ¿Puede ser un área imaginaria?
19	**A5**: Por lo mismo que le explique. Yo me imagino que es un área que va hacia el
20	infinito siempre va a ser un número muy grande, es algo que siempre vamos a

estar calculando.

I: ¿Qué interpretas como un valor imaginario?

A5: Es una operación matemática en el cual el resultado no existe en la realidad por ejemplo la raíz cuadrada de menos dos. Regresándonos a lo que es el infinito yo lo veo como una especie de número imaginario porque es algo que tenemos que plantearnos un valor aproximado, me lo tengo que imaginar.

I: En matemática se define un número imaginario como la raíz cuadrada de un número negativo. Es un problema de tipo conceptual porque me estás confundiendo un campo de números con algo que te estás imaginando o abstrayendo.

A5: Ok. Entiendo.

I: El área de un rectángulo se calcula multiplicando base por altura. Si se está realizando la suma de esas áreas es imposible que se obtenga un valor imaginario. Se está multiplicando un número real por otro número real ¿El área bajo una curva de longitud infinita puede ser negativa?

A5: Si pudiera ser negativa si tomamos una curva que este por debajo del eje x. Lógicamente debería dar negativo porque estoy tomando en cuenta…

I: ¿Cuál es la altura de este rectángulo?

A5: Seria un “y” negativo.

I: ¿Cómo altura lo tomarías negativo?¿Al medir con una regla ese valor sería negativo?

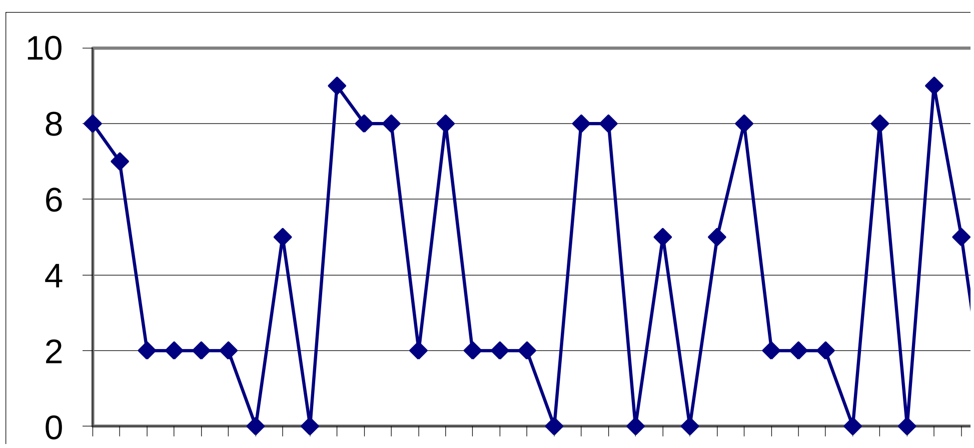


Figura 33. Cronogénesis Pag.22 (A5)

La cronogénesis de la página 22 muestra la interacción verbal entre A5 y la docente, indica que tiene 40 líneas, la docente realizó 9 preguntas (líneas 7,9,18,21,23,29,31,34 y 37), se detectaron cuatro conflictos semióticos: CS58, CS59, CS60 y CS61 (líneas 10,32,35 y 38).

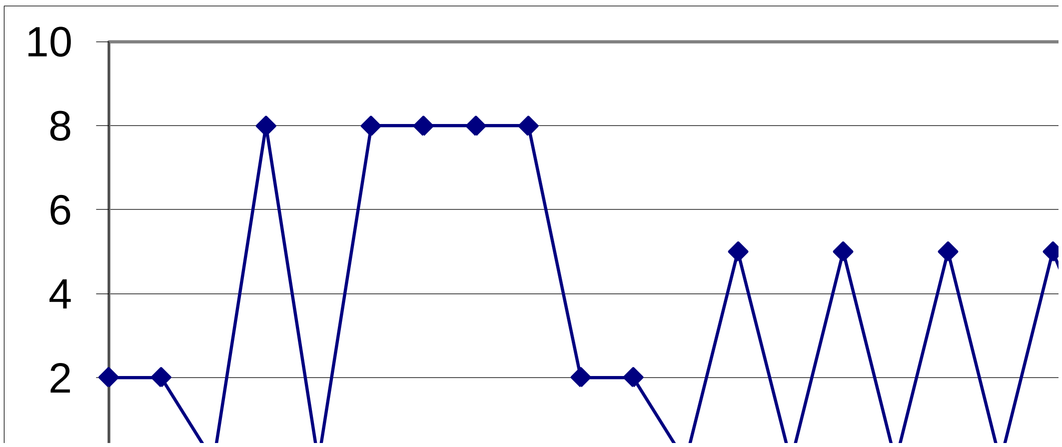


Figura 34. Cronogénesis Pag. 23 (A5)

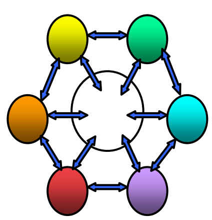
La cronogénesis de la página 23 muestra la interacción verbal entre A5 y la docente, indica que tiene 25 líneas, la docente realizó 6 preguntas (líneas 3,5,12,14,16 y 18), no se detectaron conflictos semióticos.

Lin	**Práctica discursiva (pag 23)**
1 2 3	**I**: Porque no se sabe exactamente que valor va a tomar. Hay dos tipos de integral impropia divergentes: las que al evaluar el límite, este tiende a infinito y otras que divergen por oscilación. Vamos a la pregunta 11 ¿Qué respondiste?
4	**A5**: Tiene infinitos números.
5	**I**: Ahora la 12 ¿Qué respondiste?
6 7 8 9	**A5:** Los dos son iguales. Porque igual puedo dividir los dos conjuntos en infinitos números. Ninguno es mayor que el otro. No puedo establecer que infinito es más grande que otro. Por ejemplo, entre 0 y 1 yo lo puedo dividir infinitamente, el otro conjunto también lo puedo dividir infinitamente.
10 11	**I**: Tu razonamiento es correcto. Esta pregunta entra en una rama de la matemática denominada teoría transfinita de conjuntos.
12	**I**: La pregunta # 3.
13	**A5**: La opción correcta es la (a)
14	**I**: Bien. La pregunta # 6
15	**A5**: La opción correcta es la (b)
16	**I**: Bien. La pregunta # 8
17	**A5**: La opción correcta es la (b)

I: Bien y finalmente la pregunta # 10

A5: La opción correcta es la (b)

I: Con esta pregunta terminamos la entrevista, te agradezco enormemente la colaboración que me prestaste. Uno de los objetivos es conocer el signi que le asignan al infinito, una noción matemática muy abstracta. También determinar como relacionaban este concepto con los otros contenidos cursos de matemática en la escuela de administración y contaduría de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales.



CAPITULO VII
APORTE TEÓRICO
EL PAPEL QUE JUEGA EL CONFLICTO ONTOSEMIÓTICO EN LA DINÁMICA DE LOS SIGNIFICADOS PERSONALES DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

El conocimiento es navegar en un océano de incertidumbres a través de archipiélagos de certezas
Edgar Morin

Los problemas no se solucionan con nueva información, sino ordenando lo que siempre hemos conocido.
Ludwig Wittgenstein

CAPITULO VII

APORTE TEÓRICO
EL PAPEL QUE JUEGA EL CONFLICTO ONTOSEMIÓTICO EN LA DINÁMICA DE LOS SIGNIFICADOS PERSONALES DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

1.- Introducción

En este capítulo se presenta la meta de la investigación: la explicación de la naturaleza y el papel que juega el conflicto semiótico en el sistema complejo de prácticas discursivas y operativas en las que interviene el infinito matemático, la cual se exhibe como oferta teórica de este trabajo intelectual.

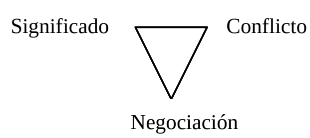
El tratamiento complejo del constructo teórico denominado conflicto semiótico permitirá clarificar esta noción introducida por Godino (2002) y sacar a la luz una cantidad de implícitos que han permanecido como variables ocultas en el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática. Es conveniente acotar que Godino plantea una tipología similar a la descrita por Brousseau (obstáculos epistemológicos, ontogénicos y didácticos) y lo que se busca en este documento doctoral es contribuir al avance teórico y fundamentación del EOS proponiendo una caracterización más completa y coherente de los conflictos ontosemióticos.

El alcance del propósito primario de este estudio ontosemiótico se materializa en la articulación de las premisas epistemológicas del conflicto semiótico y la descripción de la dinámica de los significados personales de los objetos matemáticos, empleando como punto de partida el EOS de Godino, la teoría de las representaciones semióticas de Duval y el pensamiento complejo de Morin, en expresión de discursividad teórica en el contexto de la educación matemática.

En este momento es necesario destacar la información que brinda las prácticas discursivas recogidas durante las entrevistas para ilustrar con ellas algunas consideraciones teóricas presentadas en este capítulo. A continuación se expone el resumen de la reflexión teórica propuesta:

Resumen del Aporte Teórico Propuesto

1) *Bucle de cronogénesis*: Para entender la problemática de la brecha existente entre el significado institucional de referencia y el significado personal logrado se tomará en cuenta el diálogo trinitario entre significado, conflicto y negociación para construir un bucle continuamente realimentado con conocimientos y autorreflexión según se específica a continuación:



Porque el conflicto implica la búsqueda de una negociación, proceso que genera nuevos significados, nuevos conflictos y nuevas negociaciones. Lo cual implica considerar los siguientes prolegómenos:

a) Borrosidad en la cronogénesis de los significados personales de los objetos matemáticos. La comprensión no es una suma de partes: a la comprensión no se llega por un camino lineal.
b) Relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados sistémicos que entran en juego; porque la comprensión de un contenido matemático no es la ausencia de conflictos semióticos, sino el resultado de haberlos sabido superar.

c) El bucle recursivo conflicto → negociación no es aleatorio ni imprevisible sino que es factible encontrar ciertas regularidades o patrones subyacentes que se pueden identificar y caracterizar.

2) *La complejidad de los objetos matemáticos*: Un objeto matemático tiene una multiplicidad de significados porque:

a) Su estructura conceptual es compleja, dando lugar a una pluralidad de relaciones con otros conceptos matemáticos (Elementos intensivos)
b) Hay una diversidad de modos en los que un objeto matemático y sus relaciones con otros objetos se pueden representar (Elementos ostensivos)
c) Hay una variedad de fenómenos que le dan sentido (Elementos extensivos)
d) Existe una pluralidad de procedimientos o técnicas para resolver los problemas donde interviene dicho objeto (Elementos actuativos)
e) Hay una diversidad de argumentos para justificar un objeto matemático (Elementos validativos).

3) *Naturaleza diversa del conflicto semiótico*: Se propone clasificar el conflicto semiótico en las siguientes categorías:

3.1 Conflicto de tipo epistémico

3.2 Conflicto de tipo cognitivo

3.3 Conflicto de tipo interaccional

3.4 Conflicto de tipo ontológico:

3.4.1 Lingüístico:

3.4.1.1 De precisión: Uso del lenguaje cotidiano dentro del contexto matemático

3.4.1.2 De conversión de registros semióticos:

i) Dentro de un mismo sistema de representación

ii) En sistemas de representación diferentes

3.4.2 Situacional: Significados sensibles al contexto de uso (La no-linealidad signo-significado).

3.4.3 Argumentativo

3.4.4 Conceptual

3.4.5 Proposicional

3.4.6 Actuativo

La regularidad con que aparecen los conflictos semióticos es lo que ha permitido elaborar esta categorización. Sin embargo estas categorías no son compartimentos estancos y suelen solaparse unas con otras ya que un conflicto semiótico no suele estar asociado a una única función semiótica.

4) *La imbricación del conflicto ontosemiótico con las cinco dimensiones duales contempladas en el EOS*: Partiendo de la óptica de Godino, se puede explicar el conflicto ontosemiótico a partir de las cinco facetas o dimensiones duales:

a) Personal/institucional
b) Ostensivo/ no ostensivo
c) Concreto/ abstracto
d) Expresión/contenido
e) Elemental/ sistémico

En este contexto, se observó la necesidad de ampliar estas relaciones incorporando la vinculación con la dimensión dual objeto/proceso. A cada dimensión corresponde una forma distinta de plantear el análisis de la problemática. A continuación se explican con mayor detalle todos estos aspectos tomando como ejemplo algunos extractos de las entrevistas.

2.- El Bucle de Cronogénesis

Se interpretará como un sistema abierto que se encuentra permanentemente en estado de flujo, en un equilibrio susceptible de reordenación continua. Son tres elementos entrelazados, todos arraigados en la cotidianidad:

Significado → Conflicto → Negociación

Esta representación gráfica tiene una concepción sistémica, no solo en su diagramación sino en su estructuración porque implica la realimentación con un caudal de significados entre cada uno de los elementos que conforman el bucle. Así formulado, la cronogénesis procede de una forma:

a) Dinámica: Por el hecho de que es una actividad que cambia permanentemente. Es un proceso muy complejo donde intervienen numerosos factores que pueden cambiar a diferentes estados al interactuar unos con otros.
b) Disipativa: Para que produzca la cronogénesis se necesita intercambio constante de significados (negociación de significados), un continuo proceso de cambio y una interacción permanente con el entorno.
c) Multifactorial: Afectada por una variedad de factores o parámetros.
d) Hipersensible a los significados iniciales: La generación en el tiempo del saber matemático implica realimentación y toda realimentación es muy sensible a las condiciones iniciales.

3.- Borrosidad en la Cronogénesis de los Significados Personales de los Objetos Matemáticos

Tal como se expuso en el tercer capítulo de este documento, el pensamiento complejo de Morín (1990) es una nueva concepción que busca la integración de las partes en un todo, la recursividad y la relación dialógica entre elementos aparentemente antagónicos pero que realmente son complementarios, principios que se consideran pertinentes para facilitar la comprensión de los conflictos semióticos. Por este motivo, se tomó como uno de los principales referentes teóricos para realizar esta fase de la investigación.

Godino (1996) sugiere que para analizar la comprensión es preciso responder a dos preguntas: qué comprender y cómo lograr la comprensión. También recuerda que la comprensión personal es inobservable mientras que el significado, como conjunto de prácticas, es por lo menos potencialmente observable.

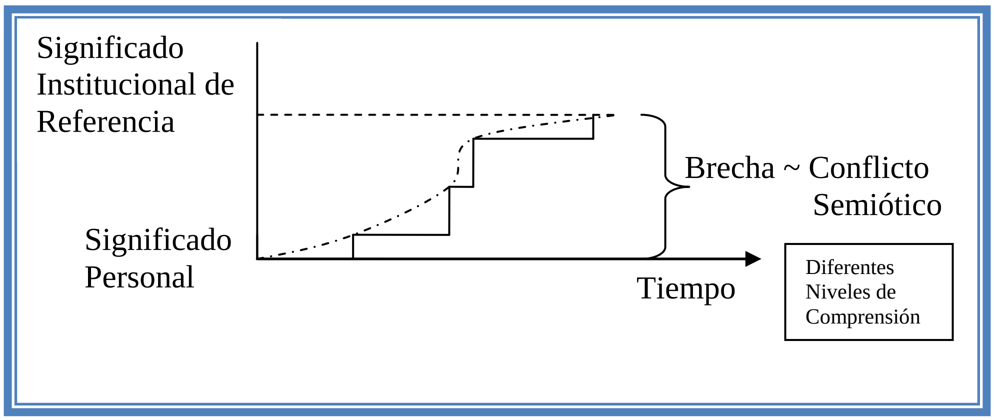


Figura 36. Dinámica de significados. Brecha existente entre el significado institucional de referencia y el significado personal logrado.
Fuente: Elaboración propia

Con la figura de la parte superior se pretende ilustrar que la comprensión alcanzada por un sujeto difícilmente será total o nula, es decir no puede reducirse a un estado dicotómico (conoce o no conoce) ni a un grado o porcentaje unidimensional sino que abarcará aspectos parciales de los diversos componentes y niveles de abstracción posibles.

Adicionalmente la figura sirve para ilustrar que la construcción, negociación y conciliación de los significados de los objetos matemáticos es un proceso no lineal, con avances y retroceso, continuidades y rupturas, en función de los obstáculos encontrados y la manera de actuar entre ellos. Es decir, la comprensión de los objetos matemáticos no necesariamente se alcanza a través de un proceso de búsqueda gradual y secuencial sino puede surgir de un cambio abrupto o una transición súbita.

Los conflictos semióticos impiden la transición de un estado de equilibrio a otro pudiendo causar estancamientos e incluso regresión en el proceso de aprendizaje.

La comprensión de una entidad conceptual matemática está condicionada por el significado dado en la cotidianidad, este significado se asoma siempre demostrando su persistencia.

4.- La Relatividad Socioepistémica y Cognitiva de los Significados Sistémicos que entran en Juego

Los significados de los objetos matemáticos y las configuraciones mediante las cuales se expresan son relativos a los contextos fenomenológicos de uso, a las instituciones educativas en que tienen lugar las prácticas y a los sujetos implicados en las mismas. Por ejemplo, es muy diferente enseñar la noción de infinito en una facultad de economía que en una facultad de educación porque en la primera hay que presentar un enfoque tal que se pueda emplear a posteriori en la administración, en la contabilidad y en la economía. En cambio en la facultad de educación hay que utilizar un enfoque más general ya que se están formando profesionales de la docencia.

Así Frege (citado por Martínez, 2002a) denominó principio del contexto "*No se debe inquirir el significado de expresiones separadas, sino que debe investigarse su significado en el contexto de las oraciones".* Lo cual coincide con el postulado Wittgensteiniano de que "el significado de una palabra está en su uso en el lenguaje".

El relativismo socioepistémico y cognitivo de los significados contradice aparentemente el carácter absoluto y universal que el matemático profesional atribuye a los objetos matemáticos. El EOS propone que para superar este dilema es necesario considerar que el matemático identifica una misma estructura formal en la variedad de objetos y prácticas (operativas y discursivas); estructura que considera como el "objeto matemático", que representa la referencia implícita de la variedad de sistemas de prácticas y objetos emergentes en los distintos contextos de uso.

5.- Naturaleza Diversa del Conflicto Semiótico según la Interacción entre los Distintas Funciones Semióticas

El pensamiento complejo permite una transición entre el paradigma cartesiano a una visión sistémica y ecológica enfatizando en la red de relaciones en la construcción, negociación y conciliación de los significados personales de los objetos matemáticos. El conflicto semiótico es de naturaleza diversa según la interacción entre los distintos componentes de las trayectorias muestrales tal como se señala a continuación:

A) Conflicto semiótico de tipo epistémico: Entendido como la disparidad entre significados institucionales. El significado institucional de referencia se presenta incompleto, confuso o poco coherente, evidenciado por:

a) El bajo nivel de análisis en el tratamiento del concepto *infinito* encontrado en la mayoría de los textos universitarios que son consultados por los estudiantes.
b) En dichos textos no se hace una diferenciación entre el infinito potencial y el infinito actual. Es decir no se hace una diferenciación entre la operación reiterativa de que dado un número siempre es posible concebir uno mayor y otra a la existencia de varios infinitos, de distintos tamaños basada en la teoría transfinita de conjuntos del matemático George Cantor.

B) Conflicto semiótico de tipo interaccional: El alto número de estudiantes por sección impide que exista una verdadera interacción docente-alumno que permita detectar dificultades o malentendidos. Adicionalmente durante las clases el docente solo maneja uno o dos registros de representación semiótica y deja al alumno la comprensión y el uso de los restantes.

C) Conflicto semiótico de tipo cognitivo: Concebido como la disparidad entre las prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto.

D) Conflicto semiótico de tipo ontológico: Conflicto asociado a la complejidad de los objetos matemáticos. Se propone organizar este tipo de conflicto en seis categorías: lingüístico, argumentativo, proposicional, actuativo, situacional y conceptual. A continuación se detalla cada uno.

5.1 Conflicto semiótico de tipo lingüístico: Que puede ser de precisión y de conversión.

i) De precisión: Está relacionado con el uso del lenguaje cotidiano en el contexto matemático.

La matemática tiene su lenguaje específico, es conciso, preciso y notablemente denso en el sentido de la gran información que ofrece: Por ejemplo [a , b) no solo denota un intervalo, sino que también indica que el conjunto contiene a “a” pero no a “b”.

La interferencia entre el lenguaje matemático y el lenguaje cotidiano crea conflictos semióticos porque se trata de explicar o interpretar situaciones matemáticas en términos de situaciones reales. En algunos casos son correctos porque facilitan la comprensión de la situación pero la mayoría de las veces dificultan la comprensión de lo que se pretende enseñar. El uso del lenguaje cotidiano en el contexto matemático tiene sus ventajas y sus inconvenientes, esto no implica renunciar a lo cotidiano sino controlar su uso. Por lo tanto uno de los principales objetivos de la educación matemática es que los alumnos comprendan y se apropien del lenguaje específico de la matemática. Pero a pesar de esta condición de precisión se halla influenciado por el lenguaje cotidiano.

ii) De conversión de registros semióticos: La construcción inadecuada de un objeto matemático se puede deber a la carencia de articulación entre diferentes registros semióticos en un mismo sistema de representación o bien en la conversión entre sistemas de representación diferentes.

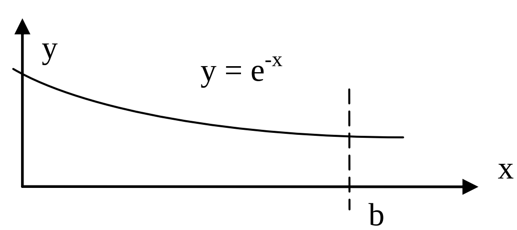
Conflicto dentro de un mismo registro: la relación entre dos signos que designan el mismo objeto dentro de un mismo registro (transformaciones sintácticas invariantes) Ejemplo: $x^{1/2} = \sqrt{x}$

Conflicto en registros diferentes: la relación entre dos signos que designan el mismo objeto perteneciente a registros diferentes (conversión entre diferentes registros).

Es conveniente acotar que si se cambia de registro semiótico, necesariamente la representación semiótica cambia, pero lo reciproco es falso, es decir, se puede cambiar de representación semiótica manteniéndose el mismo registro semiótico.

5.2 *Conflicto semiótico de tipo situacional*: Existen objetos matemáticos que no poseen más que una posible significación en cualquier contexto o situación-problema, frente a otros, que presentan varias significaciones, fenómeno conocido como polisemia (García-Carpintero, 1996). Se ilustrará esta explicación con este objeto matemático $\int_0^\infty e^{-x}dx$

1) En el contexto matemático se interpreta como una integral impropia de segunda especie convergente, porque tiende a un número finito, el cual resulta ser uno.
2) En el contexto geométrico se interpreta como el área bajo la curva $y = e^{-x}$ con $x \geq 0$. Por lo tanto, sin importar que tan grande se tome el valor de "b", el área de la región mostrada en la siguiente figura siempre se acercará a uno.



3) En el contexto estadístico se interpreta como la función de densidad de probabilidad, función que tiene como dominio el conjunto de los números reales y que satisface las siguientes condiciones:
   a) $f(x) \geq 0$ para todo número real.
   b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

   En estadística la distribución exponencial es una distribución de probabilidad continua.
4) Si x representa el tiempo, en un contexto económico, la integral representa el valor presente de una anualidad perpetua a una tasa de interés del 100 %.
5) En un contexto económico se interpreta como el superavit del consumidor. La demanda es $p = e^{-x}$, x es el número de unidades producidas.
6) En un contexto demográfico se interpreta como el decrecimiento poblacional para un tiempo lo suficientemente grande.

La No-Linealidad Signo-Significado (Relatividad de los Registros)

Cuando un sujeto interpreta o comprende un signo (o función semiótica) actúa la dualidad compleja signo- significado, es decir el signo remite a un significado. Sin embargo el determinismo en las funciones semióticas no es válido ya que la relación entre signo y significado no está dado de manera que se puedan graficar como un mapeado biyectivo. Diferentes signos pueden conducir a un mismo significado y el mismo signo puede llevar a significados diferentes. De este modo, signo y significado no están acoplados de manera no ambigua. Debido a que no son aplicables los atajos matemáticos, los efectos emergentes no se pueden predecir en detalle. Ninguna transformación mecanicista convierte el signo en significado.

5.2.1 Un signo con Varios Significados (Un objeto representante o significante puede connotar diferentes significados o sentidos) [valencia semiótica].

Habitualmente se atribuye al lenguaje matemático (concebido como un sistema de signos) un carácter absoluto y universal, sin embargo la contextualización de un problema influye en su semiosis, es decir una entidad matemática puede tener varias interpretaciones, como por ejemplo:

a) El objeto $|A|$ se interpreta como "Valor absoluto de A" en el registro escritura algebraica y "Determinante de la matriz A" en el registro escritura matricial.
b) El objeto $\wedge$ se interpreta como "Ángulo" en el registro geométrico y la conjunción "y" en el registro escritura formal de lógica.
c) El objeto $\rightarrow$ se interpreta como "Vector" en el registro de álgebra lineal e "implicación" en el registro de escritura formal de lógica.
d) El objeto (a,b) se interpreta como "Par ordenado" en el registro gráfico e "Intervalo abierto" en el registro algebraico.
e) El objeto x = a se interpreta como "Recta vertical que corta al eje x en "a", paralela al eje "y" en el registro gráfico y "Resultado de una ecuación" en el registro algebraico.

En estos casos se hablaría de conflictos semióticos por homografía: objetos matemáticos que se denotan de igual forman pero que tienen distinto significado.

5.2.2 Un mismo Significado para Diferentes Signos

En matemática existen numerosos ejemplos de símbolos distintos con el mismo significado, fenómeno denominado sinonimia. [Algunos autores mencionan que solo es un conflicto de tipo notacional]. Los contenidos matemáticos se representan mediante notaciones diferentes que ayudan a producir diferentes sentidos. Cada una de las notaciones ayuda a producir un sentido o significado que no produce todos los sentidos. Por lo tanto, comprender un contenido matemático requiere utilizar diferentes notaciones y convertir una representación semiótica en otra. A continuación se presentan varios ejemplos aclaratorios de este fenómeno:

a) ½ (escritura fraccionaria)

0,5 (escritura decimal)

5.10^{-1} (escritura exponencial) (D'Amore, 2006a)

5 E-01 (notación científica)

b) $x^{½} = \sqrt{x}$ (**) (transformación de raíces a potencias con exponentes fraccionarios). Al calcular la integral de la función $\sqrt{x}$, la segunda notación se vuelve instrumentalmente superior ya que permite realizar una operación que no se puede ejecutar con la primera (valencia instrumental u operativa):

Regla de la potencia para calcular integrales indefinidas

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{1/2}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

(**) Se considera pertinente acotar que el signo = (igual) indica que lo que se encuentra a la izquierda de este signo (primer miembro de la igualdad) y lo que se encuentra a la derecha de este signo (segundo miembro de la igualdad) son dos maneras de designar al mismo objeto, o dos escrituras diferentes del mismo.

c) $sen^{-1}x$ = arcsen x. (seno inverso o función inversa del seno)

$sen^{-1}x$ (notación norteamericana), arcsen x (notación francesa)

La notación $sen^{-1}x$ origina conflictos ya que los estudiantes confunden la función inversa con la función reciproca del seno;

cosecx = 1/ (senx) = $(senx)^{-1}$

(En los textos consultados indican que el símbolo -1 en la notación $sen^{-1}x$ no es un exponente).

d) El Eje x o eje de las abscisas es equivalente a y = 0

e) x >0 es equivalente a $x \in (0,\infty)$

f) $(Sen\ x)^2 = sen^2x$

La utilización de cada notación condiciona la práctica matemática en los diferentes marcos o contextos de uso. Adicionalmente los términos matemáticos con que se designan los conceptos tienen un significado preciso, pero éste no siempre coincide con el asignado al término en el lenguaje cotidiano. Palabras como raíz, parábola, potencia, producto, matriz, primo, factor, diferencial, integral, índice, función, entre otras tienen significados diferentes en matemática y en la cotidianidad de modo que el uso de tales objetos puede producir un

$$\text{conflicto} \rightleftarrows \text{negociación}$$

a causa de la confusión semántica implicada.

Las representaciones matemáticas ostensivas no se pueden entender de manera aislada. Una ecuación, una gráfica particular en un sistema cartesiano adquiere sentido sólo como parte de un sistema más amplio con significados y convenciones que se han establecido. Aquí es importante diferenciar entre significación que es lo que el símbolo significa, independientemente de todo eso particular y el sentido que es la imagen mental e individual que los sujetos tienen del signo.

Resumiendo, en un sistema representacional puede existir una cierta ambigüedad que afecta al conjunto de reglas sintácticas y semánticas del sistema, en cuanto puede haber excepciones a tales reglas. En la práctica, la no-linealidad se resuelve tomando en cuenta el contexto en el que el signo (la configuración, la relación simbólica o la función semiótica) aparece.

5.3 Conflicto Semiótico Argumentativo: Los alumnos tienen la tendencia a construir sus propios argumentos matemáticos para explicar sus respuestas.

5.4 Conflicto Semiótico de Tipo Proposicional: Manifestado por la tendencia muy marcada a “sobregeneralizar” espontáneamente propiedades de los objetos matemáticos.

Por ejemplo: a) En el dominio del álgebra: plantear incorrectamente la potencia de binomio.

$$(x \pm y)^n = x^n \pm y^n$$

También se presenta que los estudiantes no conciben los productos notables como una relación que puede ser usada en dos sentidos: directa para obtener un desarrollo e inversa para simplificar una expresión.

b) En el dominio del análisis: Expresar que "La derivada de un producto es el producto de las derivadas"

La proposición correcta $(uv)' = u'v + uv'$

c) "La derivada de un cociente es el cociente de las derivadas"

La proposición correcta es $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Esto pone de manifiesto que determinadas prácticas sólo son válidas en determinados contextos.

5.5 Conflicto Semiótico Conceptual: Ya que existen objetos matemáticos cuyo significado es sensible al contexto de uso. Se manifiestan al definir un objeto matemático. Por ejemplo: Confundir ecuación con función o determinante con matriz. Incluso hay alumnos que afirman que un determinante es un valor absoluto.

5.6 Conflicto Semiótico de tipo Actuativo: Manifestado por:

a) La tendencia a "sobregeneralizar" reglas y procesos (vacíos de significación). b) La aplicación incorrecta de procedimientos o algoritmos que están relacionados con la deficiencia de los significados iniciales o previos.

c) La aplicación automática de algoritmos sin constatar su pertinencia.

6.- La Imbricación del Conflicto Ontosemiótico con las Cinco Dimensiones Duales Contempladas en el Enfoque Ontosemiótico

Abordar el conflicto semiótico de tipo ontológico en su integralidad implica trascender el dualismo originalmente planteado por Godino: personal/ institucional, ostensivo/no ostensivo, concreto/abstracto, expresión/contenido y elementa/sistémico. El conflicto ontosemiótico como problemática compleja es indivisible y su comprensión requiere tomar en cuenta el tejido de las múltiples dimensiones que posibilitan su esencia y emergencia. A continuación se explican con mayor detalle estas relaciones:

6.1.- *El Conflicto Ontosemiótico Imbricado con la Dimensión Dual Personal/Institucional*

Indudablemente que esta relación viene dada por la misma naturaleza del $\text{conflicto} \rightleftarrows \text{negociación}$: la discordancia entre los significados atribuidos por una persona a un objeto matemático y el significado institucional de referencia.

6.2.- El Conflicto Ontosemiótico Imbricado con la Dimensión Dual Ostensivo/No Ostensivo (perceptible/mental)

Todo objeto matemático tiene una faceta ostensiva (perceptible) en cuanto que es reconocido tal objeto por una institución, lo que implica que se habla de dicho objeto, se le nombra y se comunica sus características a otras personas, por medio de los registros de representación semiótica: algebraico, numérico, gráfico, verbal, entre otros. Por otro lado, cualquiera de estos objetos tiene otra faceta no ostensiva (mental), cuando un sujeto es capaz de pensar e imaginar uno de estos objetos sin necesidad de mostrarlo externamente. Así un objeto ostensivo puede ser pensado, imaginado por una persona:

Práctica discursiva manifestada por (A5:20:23)

> *…regresándonos a lo que es el infinito, yo lo veo como una especie de número imaginario porque es algo que tenemos que plantearnos, un valor aproximado, me lo tengo que imaginar.*

o puede estar implícito o sobrentendido en el discurso matemático institucional.

Ejemplos: Se sobreentiende que:

- El exponente de la variable x es 1

- En el polinomio de segundo grado x^2-2x el coeficiente de x^2 es 1 y el término independiente es 0.
- En el denominador de 2 de la expresión (2 / ¾) está el 1 para poder aplicar una doble “C” y simplificar la fracción en 8/3.
- Cuando el signo √ no lleva índice se entiende que es 2.

6.3.- El Conflicto Ontosemiótico Imbricado con la Dimensión Dual Concreto/Abstracto

Otro de los factores que origina conflictos ontosemióticos es el elevado grado de abstracción y generalización del lenguaje matemático (en sus diversos registros semióticos). Entre más abstractos y contraintuitivos son los objetos matemáticos, menos contextualizados estarán y en consecuencia también serán menos significativos para el agente interpretante. El objeto matemático no ostensivo que se escogió en este estudio (*infinito*) es absurdo para un contexto real. Esta situación se puede observar claramente en las siguientes verbalizaciones:

Práctica discursiva

El infinito no lo puedo colocar en la calculadora (A1:4:32)

Hay una separación entre lo concreto y lo abstracto, el mundo real y el mundo matemático. Pareciera que en el mundo concreto el infinito no tiene cabida, no tiene sentido. Porque nadie puede pagar una cantidad infinita de dinero por un tarro de leche. Siempre va a existir un límite. Pero en el campo matemático si tiene sentido hablar de infinito, si tiene sentido ese concepto matemático. (I:25:14)*

* Esta expresión corresponde a la época en que no se conseguía la leche en polvo en los comercios. Los buhoneros llegaron a vender el producto a BsF. 50 cuando el precio estaba regulado en BsF. 7.

Existe una divergencia entre la matemática (modelo matemático) y la realidad (vida cotidiana).

Godino (2002) considera que la distinción de un objeto matemático como concreto o abstracto es esencialmente relativa dependiendo del juego del lenguaje en el que participe. Es decir, en el EOS no se plantea la distinción entre un objeto matemático concreto y un objeto real pues es de remarcar que en principio todo objeto matemático es abstracto. Hasta las nociones más simples como los números naturales son abstracciones de la mente humana. En este enfoque se plantea que es necesario motivar al estudiantado mediante ejemplos de objetos matemáticos abstractos ilustrándolos con la realidad sensible y mostrando su pragmática (aplicabilidad o lado utilitario). Por otra parte se considera pertinente señalar que a medida que el alumno se apropia de los objetos matemáticos abstractos, estos se transforman en concretos, es decir manejables y perfectamente comprendidos. En otras palabras el significado institucional de referencia es abstracto mientras que los significados personales son concretos.

6.4.- El Conflicto Ontosemiótico Imbricado con la Dimensión Dual Expresión/Contenido

Referencia y sentido según la óptica de Frege (la referencia es el objeto matemático nombrado mientras que el sentido es la manera de presentación). En el EOS se entiende el *sentido* como un significado parcial. El significado de un objeto matemático, entendido como conjunto de prácticas (discursivas y operativas), se puede parcelar en diferentes clases de prácticas más específicas que son utilizadas en un determinado contexto. Cada contexto ayuda a generar sentido pero no genera todos los sentidos. En el paradigma de la complejidad dos conceptos (como objeto y representación) generan un conflicto al sugerir cada uno su contrario o el dominio de su contrario, creándose una zona de incertidumbre, ya que, aunque tiene pleno sentido y parecen igualmente justificadas, en cierto modo trascienden la competencia de la razón pura y se presentan como insolubles en principio.

La impresión inicial de la investigadora, sobre lo que estaba sucediendo en el contexto de “Matemática II”, era que los estudiantes tenían dificultad para entender y convertir los diferentes registros de representación semiótica en los que estaba involucrado el objeto no ostensivo *infinito matemático*. Esta primera impresión había que validarla y si fuese el caso complementarla y corregirla. Para ello se recurrió a un proceso de triangulación metodológica con la pretensión de conocer cual era realmente el significado personal puesto en juego por los alumnos cuando se les administró el cuestionario que contenía elementos temáticos de las asignaturas “Introducción a la matemática”, “Matemática I” y “Matemática II”.

En la información recabada experimentalmente se encontró que existe una disparidad entre las prácticas discursivas y operativas. Lo escrito tiende a ser formal, riguroso y aproximarse al significado institucional de referencia. En cambio lo hablado es ambiguo, pero se aproxima más al razonamiento matemático realmente empleado por el estudiante. El significado personal declarado verbalmente no está formalizado con la misma precisión como lo está el significado declarado por escrito. Esto lleva a la conclusión que no es suficiente con analizar los cuestionarios, porque con las entrevistas semiestructuradas es donde afloran diversos conflictos semióticos. Por una práctica personal no válida, desde el punto de vista de la institución, detectada en el registro escrito, salen a relucir por lo menos diez prácticas discursivas incorrectas.

Práctica discursiva manifestada por (I:16:32)

> *Todos los reales lo tradujiste en la integral como límite inferior: menos infinito y límite superior: más infinito*

Con relación a los registros de representación semiótica interesa resaltar los siguientes aspectos:

a) Algunos registros de representación semiótica traen consigo elementos de confusión.

Práctica discursiva

Donde me quede más que todo fue en el área porque no pude asociar el área con la integral (A4:19:12)

Esa curva es la campana de Gauss para todo x perteneciente a los números reales ¿Cómo colocar eso en la integral? (I:18:4)

¿No viste la relación entre el área y la integral impropia? (…) (I:13:13)

b) Los registros no son neutros o de igual valor informativo y semiótico, lo cual se puede ilustrar con el siguiente ejemplo:

Práctica discursiva manifestada por (A3:14:26)

…ellos no saben cuanto es "e" a la más infinito y "e" a la menos infinito. Les digo: tienen que ver la gráfica, cuando ella tiene valores negativos se va aproximando más al cero pero cuando tiene valores positivos ella va creciendo entonces "e" a la más infinito es más infinito y "e" a la menos infinito es cero. Porque cuando uno les hace la gráfica lo ven. Cuando les hago la gráfica entonces ellos como que Aaaah, Ok.

c) Los alumnos establecieron una jerarquía en la utilización de los registros de representación semiótica. Los registros analítico y verbal se utilizaron en mayor medida, el gráfico fue alternativo y de menor importancia.

Como establece Duval (1995) las representaciones semióticas son un medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los demás. Conjuntamente a las funciones de comunicación, las representaciones semióticas son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática. La posibilidad de efectuar manipulaciones, operaciones y cálculos sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. El progreso de los conocimientos matemáticos se acompaña siempre de la creación y del desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que más o menos coexisten con el de la lengua natural.

Dentro del mismo orden de ideas que se vienen exponiendo se puede emplear la metáfora del pez en el acuario vigilado por dos cámaras de video, una situada frontalmente y la otra lateralmente, con respecto al acuario. Si se miran los dos monitores se puede pensar que los peces visibles en los monitores son dos entidades separadas, la diferente posición de las videocámaras dará en efecto dos imágenes levemente diferentes. Pero, siguiendo con la observación de los dos peces, al final se percata que hay cierta unión entre ellos cuando se mueve, también el otro se moverá, cuando uno mira de frente, el otro mirará lateralmente. En el caso que se está analizando, las representaciones semióticas se conciben como "proyecciones" del objeto matemático; para que se pueda imaginar como es ese objeto se debe disponer de diversas vistas parciales del objeto y tener la capacidad de combinarlas para obtener una imagen global.

Sin embargo, Godino (2002) rechaza esta posición ya que considera que la idea de que un mismo objeto matemático tenga diferentes representaciones semióticas es una visión ingenua o simplista del problema. Indica que ese planteamiento tiende a minusvalorar la importancia de las diferentes representaciones ostensivas, las configuraciones de los objetos puestos en juego y las traducciones entre ellos en la producción del significado global de dicho objeto. En lugar de afirmar que "hay un mismo objeto con distintas representaciones" lo que existe es un sistema complejo de prácticas en los que cada uno de los diferentes pares objeto/representación forma un holo-significado del objeto en cuestión. Un ejemplo sencillo que sustenta este argumento es que es difícil manipular simbólicamente figuras geométricas sin las herramientas de notación de la geometría analítica.

6.5.- El Conflicto Ontosemiótico Imbricado con la Dimensión Dual Elemental/Sistémico

Cuando en el capítulo III se realizó el estudio histórico epistemológico de la noción de *infinito*, se encontró que este objeto matemático no se desarrolló en forma independiente y autónoma sino que forma parte de una macrored o entramado que se obtiene por medio de la interacción e interdependencia con otros objetos. Particularmente, en el contexto institucional de estudio, la vinculación se presenta en la siguiente configuración epistémica del infinito matemático en el contexto institucional de estudio:

1) **Situaciones-problema**
   a) Descripción de conjuntos no acotados
   b) Estudio de curvas (asíntotas)
   c) Áreas de regiones planas no acotadas
   d) Cálculo financiero: el valor presente de una anualidad perpetua
      Por ejemplo los Premios Nobel
   e) Estadística inferencial: función de densidad de probabilidad y valor esperado
2) **Procedimientos**
   a) Cálculo de límites
   b) Cálculo de formas indeterminadas relacionadas con el infinito
   c) Cálculo de integrales impropias
3) **Lenguaje**: Simbólico literal (∞): signo que sirve para expresar un valor mayor que cualquier cantidad asignable.
4) **Conceptos**: Tipos de infinito (como adjetivo: potencial y como sustantivo: actual; lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño).
5) **Propiedades**: Indeterminaciones, cardinalidades de conjuntos transfinitos
6) **Argumentos**: Demostraciones formales para indicar distintos niveles de infinito.

Del análisis teórico se determinó este abanico de elementos de significado sobre el infinito donde se visualiza la complejidad ontológica y semiótica del objeto y la multitud de elementos intensivos que el alumno debe integrar para lograr una comprensión completa del mismo. Es decir, el infinito no es un signo aislado sino que forma parte de un macrosistema, un conjunto de relaciones que son las que definen los otros signos matemáticos o funciones semióticas. Como se puede apreciar en la configuración epistémica anteriormente señalada, cada uno de los objetos matemáticos (en los cuales el infinito está implícito) lleva su propio campo asociativo, de aquí que los significados personales se cruzan hasta formar redes muy tupidas y, a la manera de hilos y nudos los significados no pueden estudiarse aisladamente sino teniendo en cuenta este entramado complejo. Esta situación también se visualiza en las redes semánticas (Ver Capítulo V y su construcción en el Anexo E).

7.- El Conflicto Ontosemiótico Imbricado con la Dimensión Dual Objeto/Proceso

En las entrevistas aplicadas, cuando se les demandó a los estudiantes que explicaran el significado de un determinado objeto matemático, contestaron dando un algoritmo operativo para calcular o reconocer dicho objeto más no ofrecieron un elemento de significado de tipo conceptual.

Práctica discursiva

I: ¿Infinito menos infinito es? (I:18:16)
A4: Es una indeterminación.
I: ¿Por qué?
A4: Porque no puedes restar un infinito con un infinito.
I: ¿Por qué?
A4: Porque no es un número real, porque no es un número finito.
I: Porque no se puede manipular de la misma forma que a los números reales.

A1: Indeterminado (A1:4:37)
I: ¿Por qué?
A1: Porqueeee…yo lo veo así como lo que vimos allá en el pasado, que esto es como una indeterminación. Porque esta no es un expresión que yo pueda decir uno menos uno sino que puede tener infinitos valores.

I:(…) ¿Uno sobre cero? (I:11:8)

A3: Eeeeh…indeterminado.
I: No, no es indeterminado. Recuerda que las indeterminaciones son cero sobre cero, infinito sobre infinito, infinito menos infinito y hay tres más donde hay que hacer transformaciones para poder aplicar la regla de L'Hôpital.

Más ejemplos de esta situación aparecen indicados en el Anexo F

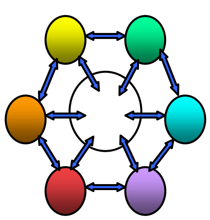
Se presenta entonces el conflicto ontosemiótico asociado con los dos aspectos del término infinito: objeto y proceso, porque una cosa es el objeto matemático interpretado como un todo, como una estructura, como un ente abstracto y otra considerar el mismo objeto como un proceso, como una entidad más bien potencial, que adquiere existencia en cada circunstancia mediante una secuencia de acciones. La dificultad que tienen los estudiantes de identificar un número muy grande como ∞ se puede explicar porque en el primer caso es considerado como un proceso, mientras que el ∞ es una estructura matemática.

De igual forma el objeto matemático *integral* tiene dos acepciones semánticas en el cálculo. El significado fundamental y profundo coincide con la acepción corriente de la palabra; se usa para indicar total de algo, o bien la suma de partes. La segunda significación que tiene en matemática es la de encontrar una función llamada primitiva conociendo su derivada. En el primer caso la *integral* es considerada como un objeto, mientras que la segunda es un proceso.

Se configura de este modo una relación dialógica con estatus diferentes: el estatus operacional, de carácter dinámico, donde los objetos son tratados como un proceso; y el estatus estructural, de carácter estático, donde los objetos son tratados como una entidad conceptual. Ambos estatus constituyen los dos aspectos integrantes del objeto matemático así que cualquier análisis que los aborde desde uno solo de estos aspectos resulta reduccionista. Por tal razón es que Gray y Tall (1994) acuñan el término "procepto" a esta dualidad concepto/proceso.

Godino (2002) sostiene que no es pertinente hablar de la definición de un concepto matemático ya que en general se puede encontrar una variedad de definiciones para un mismo concepto, cada uno recogiendo aspectos parciales (sentidos) o momentos en el proceso de generación de los objetos matemáticos.

Algunos docentes plantean que para que los alumnos comprendan un objeto matemático, estos deben construir ejemplos viendo y haciendo diferentes interpretaciones y registros de representación semiótica del mismo. Otros docentes, por el contrario, plantean que para que un alumno construya un significado personal de un objeto matemático este tiene que ser tratado como proceso algorítmico, esto es, que el estudiante tiene que ser capaz de ejecutar operaciones y cálculos en general donde este involucrado el objeto.



CAPITULO VIII
REFLEXIONES Y APORTES EPISTEMOLÓGICOS

La realidad no es más que una ilusión,
si bien una muy persistente.
Albert Einstein

La dificultad no está en las nuevas ideas,
está en escapar de las antiguas.
Lord Kelvin (1824-1907)

CAPITULO VIII

REFLEXIONES Y APORTES EPISTEMOLÓGICOS

1.- Introducción

El último capítulo de esta Tesis Doctoral tiene como propósito presentar una síntesis de los principales logros en cada uno de los diferentes niveles de la investigación en función de las interrogantes y las pistas de itinerario que articularon la indagación sistemática reportada en este documento:

1) Indagar sobre los factores condicionantes que operan en la constitución de las prácticas discursivas y operativas en las que interviene el objeto matemático infinito.

2) Elaborar una metódica basada en la articulación de las redes semánticas con el análisis ontosemiótico para determinar la complejidad de los objetos personales y detectar conflictos semióticos potenciales.
3) Determinar la relación del conflicto semiótico con las cinco facetas duales en las que pueden ser consideradas las entidades matemáticas, según el juego del lenguaje en que participan, empleando como contexto de reflexión diversos objetos matemáticos en donde el infinito está implícito.

A continuación, con el propósito de justificar e ilustrar estas consideraciones, se precisan los aspectos más relevantes acerca de la dinámica de los significados personales en la actividad matemática. Para ello se identifican las principales contribuciones, se establecen algunas de las implicaciones de la indagación ontosemiótica realizada, sus limitaciones y se proponen sugerencias para futuras investigaciones. Se finaliza este capítulo con una reflexión sobre la experiencia de la investigadora para desarrollar esta Tesis Doctoral.

2.- Nodos de Cierre Relacionados con la Descripción de la Dinámica de los Significados Personales de los Objetos Matemáticos desde la Óptica de la Complejidad.

Una de las intenciones de esta investigación es describir y explicar la dinámica de los significados personales de los objetos matemáticos desde la óptica de la complejidad. Para lograr esta primera contribución se realizó un análisis de fuentes documentales de tipo epistemológico, cognitivo y semiótico de manera tal de formular un conjunto de premisas epistemológicas sobre el constructo multidimensional denominado conflicto ontosemiótico que se resumen a continuación:

1) El conflicto ontosemiótico es un elemento crucial en la cronogénesis de los significados personales matemáticos, evidenciado por la discordancia entre el objeto personal y el objeto institucional de referencia y que se produce por la

ausencia de ciertas funciones semióticas en determinados contenidos matemáticos.

2) Los espacios de estado construidos en el capítulo VI permiten afirmar que los conflictos ontosemióticos no son aleatorios ni impredecibles sino que es factible encontrar regularidades o patrones subyacentes.
3) El conflicto ontosemiótico está altamente influenciado por los conocimientos previos y es dependiente del contexto socio-tecno-cultu-circunstancial en el que surge.
4) El conflicto ontosemiótico se puede explicar mediante estados y trayectorias cognitivas.
5) La superación de un conflicto ontosemiótico implica una negociación de significados con la consecuente auto-eco-organización de los significados personales.

En esta investigación se ha renunciado a utilizar términos como obstáculos o errores, muy comunes en otros trabajos en educación matemática (Radatz (1980), Socas (1997)) y se ha optado por hacerlo de una manera que sea coherente con el EOS.

3.- Nodos de Cierre Relacionados con la Metódica Basada en el Análisis Ontológico- Semiótico

Dentro de los límites que establece el marco teórico referencial se elaboró un procedimiento metodológico para determinar significados institucionales y personales y su compleja dinámica de interrelaciones que puede ser aplicada en otras coordenadas espacio-temporales. Esto implicó, en primera instancia, realizar un estudio histórico, epistemológico y didáctico sobre el objeto matemático no ostensivo denominado infinito (§3.2) de tal manera de identificar y caracterizar su significado institucional de referencia, seguidamente diseñar, implementar y evaluar instrumentos de recolección y organización sistemática de información (cuestionarios (§4.7.1), entrevistas individuales (§4.7.2) y redes semánticas (§4.7.3)) para detectar los conflictos semióticos potenciales y finalmente identificar y caracterizar los significados parciales y los registros de representación semióticos que los agentes interpretantes manifestaron durante esta fase de la investigación (§5.2.1).

Aplicando la regla hermenéutica de comprender el todo desde las partes y cada parte desde el todo, se encontró que en los textos analizados: (a) El concepto *infinito* (tratado como un objeto estático) es reseñado en los primeros capítulos de los libros, específicamente en el tema de intervalos no acotados, indicando de que no se trata de un número sino de un símbolo que simplifica notaciones, (b) En las actividades propuestas no se enfatiza en el significado del término *infinito* utilizado, es decir no se hace una diferenciación entre el infinito potencial y el infinito actual y por ende no se aborda la problemática de la dualidad potencial/actual, (c) No se proponen elementos extensivos (ejemplos/ problemas/actividades) cuyo objetivo sea la conversión entre los registros de representación semiótica en ciertos objetos matemáticos donde el infinito potencial está implícito, (d) Tratan de imponer un único punto de vista que privilegia la resolución de problemas prototípicos produciendo un significado institucional de referencia restringido si se contrapone a un análisis conceptual y epistemológico de las nociones involucradas, (e) No se promueve la construcción de significados a través de actividades cognitivas fundamentales vinculadas a la semiótica (representación, tratamiento, conversión).

Con relación a la metodología se concluye: (a) La elección y el diseño de los instrumentos de selección de significados fueron acertados porque permitieron obtener información, tanto por separado como integrada, sobre los conflictos semióticos asociados al término *infinito* en el grupo seleccionado de estudiantes universitarios. Se reseña de manera especial las entrevistas, porque sin esta intervención interactiva hubiese sido muy difícil describir y caracterizar los significados personales, ya que las respuestas escritas no revelan en su totalidad los conocimientos puestos en juego. Se considera que podrían utilizarse, con las debidas adaptaciones, en estudios similares al realizado, (b) Los instrumentos utilizados y las triangulaciones metodológicas permitieron explicar y fundamentar con evidencias los conflictos semióticos puestos en juego, (c) Si bien los instrumentos utilizados no son novedosos, puesto que instrumentos parecidos han sido ampliamente empleados en otras investigaciones educativas, el hecho de incluir las redes semánticas (utilizadas principalmente en la investigación cualitativa en las ciencias sociales) constituye un importante aporte metodológico que complementa y refuerza el estudio ontosemiótico.

El contenido de las prácticas discursivas revelan que los entrevistados tienen como significado personal declarado del *infinito* una entidad numérica que no puede ser precisada, que ciertamente difiere del holosignificado construido en este documento (acción proyectada en lo posible pero no realizada) el cual no aparece claramente explicitado en los libros de texto consultados (§5.3). Entonces el significado personal del objeto "infinito" hay que entenderlo en sentido amplio como el conjunto de prácticas operativas y discursivas que realiza un estudiante relacionadas con acciones proyectadas en lo posible pero no realizadas. Este conjunto de prácticas se puede descomponer en prácticas discursivas no formales comúnmente empleadas en la cotidianidad y prácticas operativas formales en las que interviene el objeto matemático *infinito.* La interferencia entre estas prácticas favorece la aparición de los conflictos semióticos.

Las entrevistas realizadas a los estudiantes evidencian: (a) Serias carencias en el componente discursivo al comunicar los significados personales de los objetos matemáticos, con una marcada dificultad para concatenar argumentos, (b) Elementos intensivos (conceptos y procedimientos matemáticos) deficientemente adquiridos, (c) Apropiación de los objetos matemáticos, (d) El infinito matemático se maneja en términos metafóricos (infinito es un lugar- de partida o de llegada), (e) Ejecución de elementos actuativos (procedimientos) sin proporcionar argumentos que justifiquen la realización de los mismos, (f) Incapacidad para afrontar condiciones de incertidumbre cognitiva, (g) Imprecisión en el lenguaje matemático empleado, situación detectada por el uso incorrecto de las notaciones y nomenclaturas del cálculo integral, (h) Discordancias con lo registrado en el cuestionario (disparidad entre las prácticas actuativas y comunicativas), (i) Desviación del uso legítimo de la palabra imaginario para denotar un objeto matemático no ostensivo, (j) Ciertas respuestas correctas tienen como base significados personales erróneos, es decir, resultados correctos están acompañados de conflictos semióticos de tipo algorítmico y de razonamientos mal estructurados, (k) Utilización de metáforas dinámicas en la descripción de los intervalos, interpretándolos como un camino con un comienzo (desde) y con un horizonte (el infinito) lo cual contribuye a considerar incorrectamente al infinito como un número y finalmente (l) Son imprecisos al emplear elementos validativos, es decir no expresan con claridad, coherencia, preedición y pertinencia los objetos matemáticos.

Como hallazgos provenientes de la revisión exhaustiva de las redes semánticas (§5.5) se señalan: (a) El elemento intensivo del infinito matemático responde a la interpretación natural e intuitiva que se le da en la cotidianidad en sus variadas manifestaciones semánticas: la ausencia de límites y la falta de conclusión de un proceso que se repite indefinidamente, (b) Existe confusión del significado de infinito con otros términos que en matemática son palabras reservadas (indeterminado, indefinido, imaginario).

En los cuestionarios administrados se propusieron una serie de preguntas cuyo objetivo era el de abordar la delicada problemática relacionada con el significado del infinito en diferentes contextos, evidenciándose que los alumnos (en general): (a) Le dan un tratamiento numérico al infinito, (b) Confunden un valor numérico con la evaluación de un límite, (c) Establecen una jerarquía en la utilización de los registros de representación semiótica, se emplea en mayor grado el registro analítico, le sigue el gráfico en importancia, mientras que los sistemas de representación numérico y geométrico aparecen con menor frecuencia. Adicionalmente se evidencia la dificultad en la conversión de un registro ostensivo en otro, (d) Interpretan incorrectamente un valor imaginario, (e) Aplican incorrectamente procedimientos simbólicos de transformación sintáctica. Adicionalmente no se puede omitir el problema de la no confiabilidad (relativa) del cuestionario: durante las entrevistas los estudiantes cambiaban de opinión y modificaban las respuestas marcadas en el cuestionario.

Los diagramas de estado (§6.2), construidos a partir de los protocolos de las entrevistas, constituyeron un conveniente recurso de representación esquemática en esta investigación ya que: (a) Facilitaron el estudio de los significados personales puestos en juego durante las entrevistas, así como la evolución de los mismos, poniendo de manifiesto los conflictos semióticos identificados en cada estudiante, (b) Posibilitaron la comparación de los resultados obtenidos entre distintos estudiantes.

4.- Nodos de Cierre Relacionados con la Multiplicidad de los Conflictos Ontosemióticos

Otra de las aportaciones de la presente investigación ha sido reflexionar sobre el papel que juega el conflicto semiótico en la cronogénesis de los significados personales matemáticos. Se parte de tres prolegómenos básicos:

a) La borrosidad en la cronogénesis de los holosignificados: La construcción de significados se realiza de manera progresiva, dinámica y no lineal desfasada con respecto al momento en que el contenido es tratado en el proceso organizado de enseñanza y aprendizaje.
b) La relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados sistémicos puestos en juego: Los significados son dependientes del contexto socio-tecno-cultu-circunstancial en donde se ponen en juego.
c) La multiplicidad de los conflictos ontosemióticos debido a la complejidad de los objetos matemáticos y a la complejidad de los procesos de pensamiento que se han de utilizar para construir y manejar dichos objetos.

Estos prolegómenos permitieron determinar la imbricación del conflicto ontosemiótico con las cinco dimensiones duales contempladas en el EOS:

1) El conflicto ontosemiótico imbricado con la dimensión dual personal/ institucional
2) El conflicto ontosemiótico imbricado con la dimensión dual ostensivo/ no ostensivo (perceptible/mental)
3) El conflicto ontosemiótico imbricado con la dimensión dual concreto/ abstracto

4) El conflicto ontosemiótico imbricado con la dimensión dual expresión/ contenido
5) El conflicto ontosemiótico imbricado con la dimensión dual elemental/ sistémico

Incorporándose una sexta relación: El conflicto ontosemiótico imbricado con la dimensión dual estructura/operación.

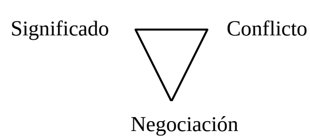
En este contexto de reflexión se consideraron tres niveles de análisis:

1) Un primer nivel más general donde se ha utilizado el pensamiento complejo con sus tres premisas fundamentales:
   - Dialogicidad: la interrelación simultánea, complementaria, concurrente y antagonista de las instancias presentes en el conflicto semiótico.
   - Recursividad: La codificación realizada como un proceso iterativo y cíclico.
   - Hologramicidad: cada punto del sistema contiene a los otros elementos en su totalidad.
2) Un segundo nivel más detallado donde se ha vuelto a utilizar el pensamiento complejo para el estudio ontosemiótico de la dinámica de los objetos personales.
3) Un tercer nivel donde se utiliza los registros de representación semiótica y los objetos personales matemáticos de los agentes participantes propuestos por el EOS, para organizar las prácticas discursivas y operativas de los estudiantes.

5.- Aportes Epistemológicos

Como resultado de esta investigación se destacan los siguientes aportes epistemológicos significativos:

1) El estudio complejo del conflicto ontosemiótico en la dinámica de los holosignificados personales de los objetos matemáticos basado en el bucle de



cronogénesis
2) La contribución al desarrollo de una teoría sobre los conflictos ontosemióticos; gracias a la visión ontológica y semiótica que sobre ellos permite la articulación y presentación en niveles de los argumentos apoyados en una profunda revisión

documental, usando en la elaboración discursiva del documento y sometiendo a la reflexión hermenéutica el pensamiento complejo, el EOS y la teoría de las representaciones semióticas.

3) El enfoque transdisciplinario al articular de manera coherente herramientas teóricas de diversas disciplinas: la educación matemática, la antropología cognitiva, la filosofía y la semiótica, porque desde la perspectiva compleja no existen fronteras entre las disciplinas: la realidad es multidimensional. Como señala Jacques Labeyrie (citado por Morin (1999c) p. 117) "Cuando no se encuentra una solución dentro de una disciplina, la solución viene dada de afuera de la disciplina".
4) La incorporación de los constructos “borrosidad en la cronogénesis de los significados personales de los objetos matemáticos” como una herramienta conceptual para abordar la problemática de la discontinuidad en la construcción de significados y la "no-linealidad signo-significado" para explicar la ambigüedad de los registros de representación semiótica. Se considera que dichos constructos sustentan posibles respuestas a la problemática de la brecha entre el objeto institucional y el personal y representa un avance en la reflexión teórica sobre el conflicto ontosemiótico.
5) La inclusión en la metódica de las redes semánticas para determinar los significados personales puestos en juego por los estudiantes. Adicionalmente la profundización en las verbalizaciones sobre las prácticas incorrectamente realizadas.
6) La modelización de los espacios de estado y trayectorias de los significados personales con la identificación y caracterización de regularidades o patrones ocultos en los conflictos semióticos, poniéndose de manifiesto la importancia de la negociación de significados como una manera de dar cuenta de cómo los estudiantes desarrollan la comprensión de las nociones matemáticas y desarrollan actitudes en relación a la matemática.
7) La articulación del conflicto ontosemiótico con las cinco facetas duales contempladas en el EOS y con las configuraciones epistémico/cognitivas.

El tema objeto de estudio es novedoso ya que es abordado desde el EOS en sus tres facetas (epistémico, cognitivo e instruccional). El infinito es un concepto complejo, lábil y fuertemente contradictorio pero coherente dentro de su propio contexto (Tall, 2001).

6.- Sugerencias para Líneas de Desarrollo de Futuras Investigaciones.

Se acepta como premisa del pensamiento complejo, que el conocimiento no estará nunca acabado y por lo tanto es imperfecto. Esta situación conlleva a la necesaria ampliación del tema objeto de estudio y a la completación de los resultados presentados en este documento doctoral, debido a que son diversas las líneas en las que se puede proseguir el estudio sobre los conflictos ontosemióticos. En lo que sigue se sugieren posibles temas en que este trabajo puede ser extendido, a áreas especializadas de la matemática e incluso puede orientar investigaciones en otros campos del conocimiento.

Estudio sobre el significado del infinito matemático: Dentro de los elementos considerados en la construcción del holosignificado del infinito, se realizó una categorización de las formas en que se concibe dicho objeto matemático, que muestran la complejidad sistémica de esta entidad. Sin embargo, puesto que el significado institucional puede variar de acuerdo al tratamiento que se le da al tema, una extensión de la presente investigación podría ir encaminada a analizar el significado del *infinito* en otros niveles o enfoques de la enseñanza en los cursos de formación de licenciados en matemática o en educación matemática.

Analizar el proceso de aprendizaje y los significados personales: Esta investigación se efectuó a partir del análisis de las prácticas discursivas y operativas a un cuestionario y a las redes semánticas. Aunque esta metodología proporcionó información pertinente sobre los significados personales de los agentes participantes y su evolución, es claro que se podría obtener una visión más completa y un estudio de las diferencias en la comprensión de los alumnos por medio de otras técnicas de selección de significados (proyectos, talleres, etc.).

7.- Experiencia de la Investigadora para Desarrollar la Tesis Doctoral

En el marco conceptual de este proyecto de investigación se menciona que para explicar el objeto de estudio es imposible separarlo del observador. Por tal motivo se incluye estos párrafos en el tejido argumental para ser consistente con uno de los principios del pensamiento complejo: la reintroducción del que conoce en todo conocimiento, es decir, se utilizará la voz activa y en primera persona del singular como estilo de redacción en los siguientes párrafos.

El primer contacto que tuve con el enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática fue a través de la tutora de esta Tesis Doctoral: la Dra. Ana Beatriz Ramos (2005) quien, utilizando el EOS conjuntamente con la teoría de la acción comunicativa de Habermas, realizó su Tesis Doctoral en la Universidad de Barcelona-España. Ella analizó en profundidad el papel que juegan los objetos personales matemáticos y didácticos del profesor en la incorporación de situaciones contextualizadas del proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones en la asignatura “Introducción a la Matemática” de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales de la Universidad de Carabobo.

El objeto de mi investigación fue planteado en 2007 en el programa del Doctorado en Educación de la Universidad de Carabobo y surgió de la conjunción de dos intereses complementarios: la experiencia de la doctoranda en la enseñanza del cálculo integral y álgebra matricial en las carreras de AC-CP de FaCES-UC y la línea de investigación creada por la Dra. Ramos sobre el enfoque ontosemiótico de la instrucción y la cognición matemática en la misma facultad.

Partiendo de estas dos circunstancias nos propusimos plantear un problema de investigación que tuviera un interés tanto práctico como teórico. Se llega a este acuerdo por la interacción producida entre ambas docentes, cuando comparten sus intereses de investigación relacionados con sus áreas de trabajo. La pregunta inicial que motivó la indagación fue: ¿Cuál es el papel que juega el conflicto semiótico en la cronogénesis de los significados personales matemáticos?

Después de haber estudiado Ingeniería Química carrera en la que recibí los conocimientos básicos de matemática y estadística decidí realizar la Especialización en Docencia para la Educación Superior donde adquirí algunas bases teóricas de los procesos implicados en la enseñanza, aprendizaje y evaluación de la matemática. Esto me ha permitido ejercer la docencia en la FaCES-UC.

Durante años sentí que los recursos teóricos que tenia para sustentar epistemológicamente mi práctica docente en la asignatura Matemática II eran incompletos y por lo tanto el dialogo cotidiano que mantenía con mis estudiantes no era tan fructífero como yo lo hubiera deseado. Por eso inicie con mucho entusiasmo el Doctorado en Educación. En los primeros trimestres tuve la oportunidad de conocer los planteamientos filosóficos de varios académicos y científicos nacionales e internacionales. Allí compartí con un grupo de profesores de diferentes disciplinas con variadas inquietudes y conocimientos y en donde todas las ideas generadas eran sometidas a un debate constructivo. También me encontré con algunos doctores y doctorantes que emplean un lenguaje "aparentemente profundo" simplemente porque escriben frases incomprensibles que si se analizan en profundidad no aportan nada nuevo al campo del conocimiento educativo. Complican para "impresionar" con una seudoerudición y con una prosa rebuscada.

Al entregar mi proyecto de tesis doctoral tuve que seguir la recomendación de Sabato (1983):

> *Si nuestro propósito era el de escribir un libro negro y alguien nos advierte manchas blancas, debemos oír con mucho cuidado la observación y tratar de enmendar la falta; pero si el señor se nos acerca para convencernos de la ventaja de escribir libros rojos o cuadriculados, hay que oírlo como quien oye llover* (p.178)

Prácticamente realice dos tesis doctorales en paralelo, la primera la presente ante la FaCES como trabajo de ascenso para optar a la categoría de titular.

Los aportes del EOS, me han permitido por una parte comprender la actualidad y pertinencia de este enfoque emergente. Por otra parte, la complejidad de los planteamientos de Godino, alrededor del conflicto semiótico me inspiraron a investigar las causas de este fenómeno. Durante el desarrollo de esta Tesis Doctoral me tocó desempeñar dos roles simultáneamente: el de profesora y el de investigadora, es decir conducir el desarrollo del programa de Matemática II y dirigir la investigación sobre el papel que juega el conflicto semiótico en la dinámica de los significados personales de los objetos matemáticos. Esta situación requería estar pendiente de los obstáculos y dificultades que tenían mis alumnos durante la práctica matemática. Tuve la necesidad de propiciar, mediante la mayéutica socrática, preguntas para detectar los conflictos semióticos potenciales y de apreciar por qué se presenta en objetos matemáticos en donde el infinito potencial está implícito. Muchas veces tuve que desviar el contenido de la asignatura dándole prioridad a ciertos contenidos ya que en esos momentos era más importante investigar y describir los significados puestos en juego. No fue una tarea simple combinar las activida investigación con las actividades docentes y administrativas pero el es realizado se ha visto recompensado con la producción de este documento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

La lectura suministra a la mente sólo el material del conocimiento;

es el pensamiento lo que nos permite apropiarnos de lo que leemos.
John Locke

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acevedo, J. (2007). ***Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. El caso de las gráficas de funciones.*** Tesis Doctoral. Universidad de Barcelona. España.

Allen, J. (1993). ***Más allá de los números. Meditaciones de un matemátic****o.* Barcelona: Metatemas 31. Libros para pensar la ciencia.

Álvarez, J. y Jurgenson, G. (2003). ***Cómo hacer investigación cualitativa****.* ***Fundamentos y metodología****.* México: Paidós Educador.

Arboleda, O. y Recalde, L. (1995). ***Formación y manejo operatorio de conceptos matemático: La historia y epistemología del infinito.*** Enseñanza universitaria. Vol IV. N° 1 y 2 pp.150-165.

Arrieche, M. (2002). ***La teoría de conjuntos en la formación de maestros. Facetas y factores condicionantes en el estudio de una teoría matemática.*** Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Granada. España.

Arrieche, M. (2003). *Línea* ***de investigación. Perspectivas del enfoque semiótico-antropológico para la didáctica de la Matemática***. Maracay: Paradigma. 24 (2) pp. 151-160

Bachelard, G. (1993). ***La formación del espíritu científico.*** México: Siglo XXI.

Baldor, A. (1981). ***Álgebra.*** **Madrid: Cultural** Centroamericana, S.A.

Bishop, A. (1999). ***Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural.*** Madrid: Temas de educación. Paidós.

Bisquerra, R. (1989). ***Métodos de investigación educativa***. *Guía práctica CEAC.* Barcelona.

Blázquez, D. (1998). ***El error, un instrumento útil para enseñar mejor.*** Compendio de Ponencias, Congreso de Educación Física UPEL. Caracas.

Borráis, R. (1987). ***Exploring mathematics through the analysis of errors.*** For the learning of Mathematics, 7(3), pp. 2-8.

Brent, E. (1989). ***Scaling strategist: An expert system to assist in designo of questionnaires***. Versión 1.0. Columbia, Missouri. The idea Works, Inc.

Briggs, J. y Peat, D. (1989). ***Espejo y Reflejo: Del caos al orden. Guía ilustrada de la teoría del caos y la ciencia de la totalidad.*** Barcelona: Gedisa.

Brousseau, G. (1983). ***Les obstacles epistemologiques et les problemas en Mathematiques.*** Recherches en Didactique des Mathematiques, 4,2 pp.164-198

Bohm, D. (1988). ***Ciencia, orden y creatividad. (Las raíces creativas de la ciencia y la vida)***. Barcelona: Kairós.

Budnick, F. (1990). ***Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales***. México: McGraw-Hill.

Burk, I. y Díaz, P. (1980). ***Psicología. Un enfoque actual.*** Caracas: Insula.

Capra, F. (1998). ***La trama de la vida. Una perspectiva de los seres vivos.*** Barcelona: Anagrama.

Cerda, H. (2000). ***Los elementos de la investigación***. Bogotá: El Búho.

Chevallard, Y. (1991). ***Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l´activité mathématique.*** Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l´informatique de Grenoble. Université Joseph Fourier, Grenoble.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). ***Estudiar matemática***. México: ICE-Horsori.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). ***Métodos de investigación educativa***. Madrid: La Muralla.

Cornu, B. (1983). ***Apprentissage de la notion de limit. Conceptions et obstacles. These de doctorat de troisieme cycle des mathematiques pures.*** Université de Grénoble.

Crespo, C. (2005). ***Un paseo por el paraíso de Cantor: problemas y reflexiones acerca del infinito.*** **Acta latinoamericana de matemática educativa**. Vol. 19 pp 28-33. México: Iberoamérica.

D'Amore, B. (2006a). ***Didáctica de la matemática***. Bogotá: Magisterio.

D'Amore, B. et al. (2006b). ***El "sentido del infinito".*** Epsilon. Vol 22 (2), n°65, p 187-216. Sevilla. España. Disponible en internet: http://www.dm.unibo.it/rsddm

Dávila, A. et al. (1996). ***Introducción al cálculo***. Caracas: McGraw-Hill.

De Bono, E. (1986). ***El pensamiento lateral. Manual de creatividad*****.** Madrid: Paidós.

De Bono, E. (1990). ***Ideas para profesionales que piensan. Nuevas consideraciones sobre el pensamiento lateral aplicadas a la empresa***. Madrid: Paidós.

Dilthey, W. (1976). ***The rise of hermeneutics*****. Critical Sociolog**y. Penguin. New York.

Dubinsky, E. et al. (2005). ***Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis; part I.*** Educational studies in mathematics, 58, pp. 335-359.

Duval, R. (1995). ***Sémiosis et pensé humaine***. Berna: Meter Lang.

Eco, U. (1991). ***Tratado de semiótica general*****.** Barcelona: Lumen.

Edwards, C. (1994). ***Cálculo con geometría analítica.*** Vol. I. México: Prentice Hall.

Espinoza, M. y Torretti, R. (2004). ***Pensar la ciencia. Estudios críticos sobre obras filosóficas** (1950-2000)*. Madrid: Tecnos.

Fischbein, E., Tirosh, D. y Hess, P. (1979). ***The intuition of infinity***. Educational studies in mathematics, 10 pp. 2-40.

Font, V. (1999). ***Procediments per obtenir expressions simbóliques a partir de gráfiques. Aplicacions a les derivades.*** Departamento de Didáctica de las Ciencias experimentales y de la Matemática. Universidad de Barcelona. España.

Gadamer, H. (2002). ***Verdad y método. Fundamentos de una hermenéutica filosófica.*** Salamanca: Sígueme.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2002). ***Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años.*** Revista Enseñanza de las ciencias, 2002, 20 (1) pags. 87-113.

García-Carpintero, M. (1996). ***Las palabras, las ideas y las cosas. Una presentación de la filosofía del lenguaje***. Barcelona: Ariel. S.A.

Godino, J. y Arrieche, M. (2001). ***El análisis semiótico como técnica para determinar significados***. Comunicación presentada en el V Simposio de la SEIEM, Grupo de trabajo DMDC. Almería.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). ***Significado institucional y personal de los objetos matemáticos.*** Recherches en Didactique des Mathématiques. 14 (3): 325-355.

Godino, J. (2002). ***Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática.*** Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en internet: http:// www.ugr.es/local/jgodino

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2006). ***Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática***. Departamento de Didáctico de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en Internet: http:// www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

González-Martín, A. (2005). ***Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores***. Revista Enseñanza de las ciencias. 23 (1) pp. 81-96.

Habermas, J.(1982). ***Teoría de la acción comunicativa***. Volumen I. Madrid: Taurus Humanidades.

Hitt, F. (2001). ***El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en educación matemática***. En Gómez P. y Rico L. (Eds), Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. pp 165-178

Hurtado, I y Toro, J. (2001). ***Paradigmas y Métodos de Investigación en tiempos de cambio***. Valencia: Episteme Consultores Asociados C.A.

Jahnke, H. (2001). ***Cantor´s cardinal and ordinal infinities: an epistemological and didactic view***. Educational studies in Mathematics 48: 175-197.

Jiménez, D. (1999). ***La aventura de las matemáticas. Sus secretos, protagonistas y grandes momentos.*** Los libros de El Nacional. Venezuela.

Larson, R et al. (1995). ***Cálculo y geometría analítica***. Vol. I. España: McGraw-Hill.

Leithold, L. (1982). ***El Cálculo***. México: Harla.

Martínez, M. (2002a). ***La nueva ciencia. Su desafío, lógica y método***. México: Trillas.

Martínez, M. (2002b). ***El paradigma emergente. Hacia una nueva teoría de la racionalidad científica***. México: Trillas.

Martínez, M. (2004). ***La investigación cualitativa etnográfica en educación. Manual teórico-práctico.*** México: Trillas.

Morin, E. (1990). ***Introducción al pensamiento complejo***. Barcelona: Gedisa.

Morin, E. (1999a). ***El método I. La naturaleza de la naturaleza.*** Madrid: Cátedra Teorema.

Morin, E. (1999b). *El método III.* ***El conocimiento del conocimiento***. Madrid: Cátedra Teorema.

Morin, E. (1999c). ***La cabeza bien puesta: Repensar la reforma, reformar el pensamiento***. Buenos Aires: Ediciones Nueva Visión.

Morin, E. (2000). ***Los siete saberes necesarios para la educación del futuro.*** Caracas: Ediciones FACES/UCV.

Morin, E. (2001). ***El método IV. Las ideas.*** **Madrid:** Cátedra Teorema.

Morin, E. (2002). ***El método II. La vida de la vida.*** Madrid: Cátedra Teorema.

Morin, E. (2003). ***El método V. La humanidad de la humanidad.*** Madrid: Cátedra Teorema.

Muñoz, J. y Velarde, J. (2000). ***Compendio de epistemología.*** Barcelona: Trotta.

Nieto, R. (2006). ***El cambio y el sentido de lo irracional (Incertidumbre, complejidad y caos)***. Bogotá: Editorial Pontificia Universidad Javeriana.

Osterlind, S. (1989). ***Constructing test items***. Boston: Kluwer.

Peirce, Ch. (1965). ***Obra lógico-semiótica***. Madrid: Taurus.

Penalva, C. (1996). ***Implicaciones didácticas de las dificultades en el aprendizaje de conjuntos infinitos: representaciones de conjuntos numéricos en textos matemáticos escolares***. Universidad de Alicante. España.

Prigogine, I. y Nicolis, G. (1997). ***La estructura de lo complejo.*** Madrid: Alianza.

Radatz, H. (1980). ***Student errors in the matehematical learning: a survey***. For the learning of Mathematics, 1(1), pp.16-20.

Ramos, A. (2005). ***Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales.*** Tesis Doctoral no publicada. Barcelona. España.

Real Academia Española (1992). ***Diccionario de la lengua española***. Madrid: Unigraf. S.L.

Rico, L. (1993). ***Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas***. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds), Educación matemática (pp. 60-108). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Roa, R (2000). ***Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada***. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. España.

Ruiz, A. (2003). ***Historia y filosofía de las Matemáticas***. Costa Rica: Ened. San José.

Sabato, E. (1983). ***Hombres y engranajes.*** *Heterodoxia*. Madrid: Alianza Editoral.

Sacristán, A. (2003). ***Dificultades y paradojas del infinito. Experiencias en un ambiente de exploración computacional.*** **Revista matemática educativa: aspectos de la investigación actual.** Fondo de cultura económica & Cinvestav pp. 262-279.

Salazar, I. (2004). ***El paradigma de la complejidad en la investigación social***. Revista Educere. Año 8. N°24. Enero-Marzo 2004.

Santos, L. y Sánchez, E. (1996). ***Perspectivas en educación matemática***. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Socas, M. (1997). ***Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria*** **(Cap.5, pp 125-154, en Rico, L. et al: La educación matemática en la Enseñanza Secundaria)**. Barcelona: Horsori.

Stein, S. (1982). ***Cálculo y geometría analítica.*** México: McGraw-Hill.

Stewart, J. (1986). ***Cálculo***. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Tall, D. (1992). ***The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof***. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. pp. 495-511.

Thomas, G. (1959). ***Cálculo infinitesimal y Geometría Analítica***. Madrid: Aguilar.

Thorndike, R. (1989). ***Psicometría aplicada***. Buenos Aires: Limusa Editores.

Turégano, P. (1996). ***Intuición del infinito en estudiantes de primero de bachillerato unificado y polivalente.*** Revista de la sociedad andaluza de educación matemática "Thales" N° 34. pp. 11-46.

Vanegas, C. (2007). ***El pensamiento complejo en la formulación y solución de problemas en matemática. Comunicación presentada en el VI Congreso Venezolano de Educación Matemática realizado en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.*** Aragua. Venezuela. Del 08 al 11 de Octubre de 2007.

Vanegas, C. (2008a). ***El conflicto semiótico en el aprendizaje del infinito matemático en un grupo de estudiantes universitarios.*** Comunicación presentada en las VII Jornadas de Aplicaciones Matemáticas realizadas por

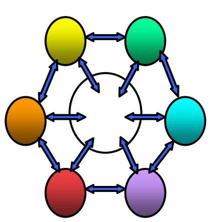
Facyt, Universidad de Carabobo. Valencia. Venezuela. Del 14 al 16 de Mayo de 2008.

Vanegas, C. (2008b). ***Una aproximación ontosemiótica a la disparidad de significados del infinito durante la actividad matemática***. Comunicación presentada en el VI Congreso de Investigación de la Universidad de Carabobo. Valencia. Venezuela. Del 5 al 10 de Octubre de 2008

Vergnaud, G. (1990). ***La théorie des champs conceptuels.*** *Recherches en didactiques des Mathématiques*, 10 (2,3): pp.133-170

Waldegg, G. (1996). ***Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual***. Revista mexicana de investigación educativa Enero-Junio vol 1, num 1, pp.107-122.

Wilhelmi, M. et al. (2004). ***Configuraciones epistémicos asociadas a l de igualdad de números reales. Granada: Departamento de didáct matemática.*** Disponible en internet: http://www.ugr.es/batanero



ANEXOS

No solo las ciencias físicas y la matemática ofrecen el único camino que conduce a la comprensión de la naturaleza, sino también que la verdadera belleza de la naturaleza sólo se revelará cuando se haya alcanzado tal comprensión.
D'Arcy Thompson

[ANEXO - A]
PRECISIONES TERMINOLÓGICAS PARA LA LECTURA DEL DISCURSO

Para la realización de esta investigación, fue evidente la necesidad de definir algunos términos, ya que hay nuevos conceptos con otras dimensiones y proporciones que abarcar. Realmente son tramas conceptuales porque es imposible hablar de un concepto aisladamente, dado que todo concepto se halla concatenado, ligado a otros. A continuación se explícitan dichos términos, palabras, nociones, conceptos y categorías articuladas en una gran red semiótica:

Accidente lingüístico: Con esta dicción se trata de precisar la posibilidad de expresión de los objetos personales con toda la carga de holosignificado (lógica y emotiva) de quien lo usa.

Borrosidad en la cronogénesis: Construcción progresiva, dinámica y no lineal de los significados por parte del aprendiz como consecuencia de la interacción con sistemas de prácticas prototípicas y mediatizada por los contextos institucionales en que tiene lugar dicha actividad.

Complejidad ontosemiótica: Imposibilidad de explicar de una manera reduccionista y fragmentaria los significados de los objetos matemáticos. Implica aceptar la naturaleza múltiple y diversa de las entidades matemáticas.

Comprensión: En esta investigación se tomó el término comprensión en el sentido que le atribuye Godino (2002), quien considera que la comprensión es la construcción o apropiación del significado institucional de referencia por parte de una persona.

Contexto: Es el conjunto de factores extra e intralingüísticos que soportan y determinan la actividad matemática y por tanto, la forma, la adecuación y el significado de los objetos puestos en juego en la misma (Godino, 2002). En otras palabras el contexto está constituido por los elementos lingüísticos que rodean al objeto y contribuyen a la construcción de su holosignificado.

Conflicto ontosemiótico: Este constructo es una extensión de la noción acuñada por Godino (2002) y que se concibe como un elemento crucial en la cronogénesis de los significados personales matemáticos, determinado por la discordancia entre el significado personal de un objeto matemático y el significado institucional de referencia, debido a la ausencia de ciertas funciones semióticas en determinados contenidos matemáticos (Vanegas, 2008b)

Conflicto semiótico de precisión: Se debe al uso del lenguaje cotidiano dentro del contexto matemático.

Cronogénesis: Es la generación en el tiempo del saber matemático como consecuencia de la interacción didáctica (Godino, 2002: p. 183)

Errores: Prácticas personales (acciones, argumentaciones, entre otros) no válidas desde el punto de vista de la institución (Godino, Batanero y Font, 2006)

Espacio de estado: Es un recurso de representación esquemática de las trayectorias de los significados manifestados por los agentes interpretantes.

Función semiótica: Relación entre un antecedente (expresión) y un consecuente (contenido) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia. (Godino, Batanero y Font (2006))

Invarianza: Uso de un mismo esquema mental para diversas situaciones semejantes (Piaget, 1995)

Holosignificado o significado holístico: El holosignificado de una noción matemática representa la expresión de los diversos modelos asociados a dicha noción (entendidos como un sistema único). (Wilhelmi, 2004)

Holosignificado de infinito en el contexto institucional de referencia: Acción proyectada en lo posible pero no realizada. Se representa mediante un símbolo que no puede ser manipulado como un número.

Negociación y conciliación de significados: Acoplamiento entre significados personales e institucionales en el seno de un proceso de instrucción. Búsqueda de entendimiento acerca de una situación en la que se trata de construir conocimientos matemáticos.

Objeto matemático: Constructo humano que constituye parte de alguna de las teorías matemáticas presentes en un momento dado.

Paradigma de la complejidad: Modo de abordar la realidad (simbolizable, manipulable rigurosa y racionalmente dominable mediante el bucle razón ⇆ modelo) y de investigar de acuerdo con la complejidad de la realidad. Es una nueva manera de pensar en términos de conectividad, relaciones y contexto.

Premisa: Una premisa es un principio de razonamiento.

Problema: Es una situación incierta que provoca en el ser humano una acción tendente a hallar la solución y reducir de esta forma la tensión estructural inherente a dicha incertidumbre (Vanegas, 2007)

Prolegómenos: Declaración previa. Introducción. Se aplica, generalmente, a las explicaciones que se ponen al principio de una obra para establecer los fundamentos de la materia a que trata. Del griego prolego: anunciar de antemano; declarar.

Recursión: Es la técnica en la que se usa un procedimiento aparentemente circular para poner en práctica la repetición de cierta operación o razonamiento.

Red semiótica: Se conceptualiza como un sistema complejo, donde los fenómenos del sentido se presentan como inversiones de conglomerados de materias significantes.

Semiosis: Interpretación del signo (Duval, 1995).

Semiogénesis: Es el estudio complejo de la dinámica de los significados personales de los objetos matemáticos.

Semiótica o semiología: (línea filosófica peirciana y morrissiana en el primer caso, línea lingüística sausureana en el segundo caso) Es un dominio de estudios, un repertorio de intereses todavía no unificado que se ocupa de la terceridad o el análisis de los signos y está conformado por tres ramas: pragmática, semántica y sintaxis. Toda idea, toda representación, todo pensamiento es un signo. La semiótica investiga los rasgos comunes de todos los sistemas de signos, su interrelación y las características específicas de cada uno de ellos.

Significado en la cotidianidad (significado personal no formal o significado convencional): Es el conjunto de prácticas (operativas y discursivas) que realiza una persona en el contexto cotidiano cuando carece de una instrucción formal en el campo matemático. Es ambiguo, espontáneo y depende de la experiencia. En la práctica educativa este significado se asoma siempre demostrando su persistencia.

Transdisciplinario: El prefijo trans significa más allá y a través de, se utiliza predominantemente para indicar eventos en los que no existen fronteras entre las disciplinas. Las acciones se mueven dentro y a través de una determinada disciplina. (Morin, 2000)

Trayectoria de los significados personales: Secuencia y articulación de los cambios o fluctuaciones representativas de los distintos elementos de significado de un objeto personal a lo largo del tiempo.

Vacío de significación: Disparidad de interpretaciones que requieren procesos de negociación de significados. (Godino, 2002)

[ANEXO - B]
TRANSCRIPCIÓN DE LAS ENTREVISTAS SEMIESTRUCTURADAS

Entrevista a una estudiante de bajo rendimiento (A1) (Los subrayados añadidos constituyen información complementaria/adicional/aclaratoria planteada por la investigadora)

Práctica discursiva (pag 1)

I: ¿Cómo te pareció el cuestionario?

A1: Me pareció muy bueno porque ahí es donde uno empieza a pensar y buscar la lógica.

I: Lo primero que vamos a hacer es que tú me digas todas las dudas que tuviste, vamos a ir analizando cada pregunta por separado porque fíjate que yo no quiero establecer si las respuestas son correctas o incorrectas. No es la idea. Ni que te voy a asignar una nota. Quiero analizar los argumentos que utilizaste para resolver los ejercicios. En la primera pregunta te dan un conjunto perteneciente a los reales tal que x pertenece al intervalo abierto [1, ∞) ¿Qué respuesta marcaste como correcta?

A1: La (a), x es un número real tal que x pertenece al conjunto desde el número uno hasta el número infinito

I: ¿Por qué no escogiste la (c)?

A1: Es que la (c) dice que es el conjunto de los números reales mayores o iguales a uno, no lo veo (objeto personal) que es uno nada más, sino que lo veo de uno a más infinito

I: ¿Por qué no pudiera ser la (c)?

A1: Tengo dudas porque… se dice que todos los números pertenecen desde uno hasta más infinito.

I: Vamos con la notación ¿Qué significa el corchete?

A1: Qué es cerrado, que va desde uno hasta más infinito.

I: Pero en el item (a) habla del número infinito ¿Qué interpretas como infinito?

A1: Es como… o sea… no tiene… no se le puede asignar un valor a eso, o sea va más allá de lo que uno pueda determinar. (Imprecisión en la definición)

I: Pero, ¿consideras que es un número?

A1: Puede llevar muchos números (existencia de un conflicto semiótico de tipo cognitivo) pero en sí no lo veo como un número en específico.

I: En la segunda pregunta te piden calcular el límite cuando x tiende a uno de la función uno sobre x menos uno ¿Cuál escogiste?

A1: La (a) porque yo determine que si el límite de uno entre x menos uno. Agarre (expresión incorrecta) el número uno y lo plantee aquí en la x. Entonces dije uno menos uno es cero y el número uno entre cero es cero (conflicto semiótico).

I: Vamos a analizar tu argumento. Al plantear el límite cuando x tiende a uno por la derecha de uno sobre x menos uno. ¿Cuánto te da ese límite?

A1: Eso es lo que me tiene enredada. ¿Aquí no debería ser cero por la derecha?

No se si es cero por la derecha o se toma cero por la izquierda. No se.

I: ¿Cuál número tomarías a la derecha de uno?

A1: Dos, tres, todos esos números.

I: Ojo, muy próximo a uno, por ejemplo 1,00001. Vamos a realizar la operación en la calculadora. 1,00001 menos 1 es 0,00001. Si dividimos 1 entre 0,00001 nos da 10000 es decir me da un número muy grande. Cuando se divide uno entre un

Práctica discursiva (pag 2)

número muy pequeño nos da un número muy grande. Por lo tanto ¿A cuanto tiende el límite?

A1: ¿Aquí no sigue siendo cero por la derecha? (<u>Responde con otra pregunta. Inseguridad</u>)

I: Vamos a analizarlo nuevamente. Uno menos uno es cero y uno sobre cero. ¿Tiende a?

A1: Ahí sigue siendo igual a cero, tiende más allá de cero (<u>problema para comunicar el significado personal de los objetos matemáticos)</u>

I: Ahora vamos a analizar el otro límite lateral: límite cuando x tiende a uno por la izquierda. Haz el mismo razonamiento.

A1: Ahora busco un número menor que uno, que en este caso seria 0,00001

I: ¿Por qué no utilizas mejor 0,9999?

A1: (Realiza la operación en la calculadora) Ahora da un número muy grande pero negativo. Seria menos infinito.

I: Analiza los dos límites ¿Son iguales?

A1: No, porque uno tiende a más infinito y el otro tiende a menos infinito.

I: ¿Te acuerdas del teorema de la unicidad del límite?

A1: De eso no me recuerdo muy bien, no recuerdo exactamente.

I: El límite existe siempre y cuando los dos límites laterales coincidan ¿Coinciden los dos límites laterales?

A1: No, entonces el límite no existe. Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (d).

I: ¿Por qué?

A1: Porque cuando evalúas por la derecha y por la izquierda los límites no son iguales y para que exista el límite, los límites laterales deben ser iguales.

I: Vamos a analizar la pregunta 3, límite cuando x tiende a cero por la derecha de uno sobre x. ¿Tienes dudas? Quiero entender porque se producen esas dudas [Nuevamente realiza la operación en la calculadora]

A1: Da un número muy grande por lo tanto tiende a más infinito.

I: Vamos con la número 4. ¿Cuál es el valor de uno entre cero?

A1: No existe. Porque yo por ejemplo cuando voy a tomar…este un número y lo divido entre cero en la calculadora me da como un error. Por lo tanto ese número no existe. Todo número dividido no no…

I: Entonces ¿Por qué en el ejercicio anterior si existía?

(Se queda pensativa)

I: ¿Qué diferencia observas entre la pregunta 3 y la 4? ¿Por qué en la 3 la respuesta es más infinito y en la 4 es no existe?

A1: Porque aquí no me están especificando si es por la derecha o por la izquierda. Porque no me la están planteando como un límite.

I: Es decir en la pregunta 3 estamos evaluando un límite y en la 4 un cociente de

Práctica discursiva (pag 3)

dos números. Fíjate que en este cuestionario estamos avanzando en el grado de complejidad. La primera es de introducción a la matemática, las otras tres de Matemática I y ahora llegamos a una pregunta de “Matemática II”. El área bajo la curva de $y = 1/x^2$ para todo x mayor o igual a uno.

A1: No la plantee porque tengo dudas ahí.

I: ¿Cuáles?

A1: Porque al aplicar $y = 1/x^2$ yo veo que es más infinito, hacia arriba.

I: Leamos desde el principio, el área bajo la curva ¿Cómo planteas matemáticamente el área bajo una curva?

A1: Eso es lo que me ha costado. Esa parte.

I: ¿No se plantea como integral definida?

A1: Es que no se como plantearla

I: ¿No viste la relación entre el área y la integral impropia? En la número 6 se pide evaluar la integral definida.

A1: Le saque la integral a esto (No coloca “los signos de puntuación” a las expresiones matemáticas. Adicionalmente comete un error de concepto porque saca el uno del integrando y pasa el exponencial al numerador. No sigue una lógica en la resolución de la integral. Tiene problemas al resolver la integral como procedimiento) Vamos a analizar las dificultades que tuviste son problemas de tipo teórico.

I: Vamos a seguir con la número 7. ¿El área bajo una curva de longitud infinita puede ser…?

A1: No la realice porque tenía muchas dudas en esta pregunta y también en la número 8. Una curva que tiene longitud infinita (la dibuja).

I: No es que tienda al infinito sino que tiene longitud infinita.

A1: Es que eso es lo que no entiendo del ejercicio.

I: ¿Qué interpretas que algo tiene longitud infinita? (Imprecisión de la docente en la realización de la pregunta) Que es muy largo ¿Verdad? ¿Cuales funciones conoces que tengan longitud infinita? (Dibuja una parábola convexa, una cúbica) Entonces una función no acotada tiene longitud infinita. Entonces fíjate en las respuestas. La primera es cero (El área bajo una curva de longitud infinita no puede ser nula, sin embargo ella duda en la respuesta). La segunda un valor finito ¿Puede dar un valor que se pueda medir? ¿El área bajo una curva puede ser imaginaria?

A1: En este caso no, porque si tenemos varios valores no puede ser imaginario (Confusión entre el corte con los ejes y lo que representa un valor imaginario)

I: ¿Qué interpretas tú como imaginario?

A1: Como… como decir… como que no exista, como que yo no lo pueda ver… pues.

I: Entonces ¿La raíz cuadrada de menos uno no existe?

A1: No tanto como que no exista. No es esa la palabra. Sino por ejemplo aquí

Práctica discursiva (pag 4)
(señala el corte de la parábola con el eje x) en este punto me lo va a decir. Imaginario es que no este ahí. Que no lo vea ahí (conflicto semiótico).
I: ¿Qué diferencia existe entre imaginario y que tu lo puedas apreciar? (Se queda callada). Lo que estoy tratando de analizar son esos conceptos tan abstractos. Fíjate que todo el cuestionario está relacionado con el infinito. Porque considero que es uno de los conceptos más difíciles que tienen los estudiantes para apropiarse de él. ¿Cómo puedo diferenciar algo imaginario del área finita? (Se queda callada) Vamos a ver la otra alternativa: ¿el área bajo una curva puede ser negativa? (Ella dibuja una parábola cóncava en el cuarto cuadrante.).
A1: Yo me recuerdo que había curvas que daban negativas.
I: ¿Cómo por ejemplo…?
A1: Las que van más abajo, las que van más abajo. (Indica hacia abajo. La mayoría de las preguntas me las respondía con otra pregunta, eso denota falta de seguridad en lo que está diciendo)
I: La función como tal tiene imágenes negativas pero el área encerrada es positiva. Vamos a pasar a la siguiente pregunta.
A1: Esa no la plantee porque no la entendí. Yo entiendo que esta pregunta tiene mucha relación con…
I: Con relación a la pregunta 9 se pide que evalúes una integral para todo número mayor o igual a cero de la función seno de x. (Omite la separación entre las proposiciones matemáticas) Recuerda que la matemática es un lenguaje que tiene su sintaxis, sus signos de puntuación para separar oraciones y eso no lo estas colocando. Cuando escribes una carta empleas los signos de puntuación para que el lector te entienda. Aquí pasas de una integral definida a una integral indefinida, sin dar una explicación. Bien, olvidando esto calculas la primitiva y evalúas el límite y escribes que no existe. Es correcto. Ahora explícame ¿Por qué no existe?
A1: Porque es una trigonométrica: el coseno de infinito no se puede determinar (Llega a un resultado correcto realizando razonamientos incorrectos) En cambio si fuera un número si lo pudiera determinar pero yo lo veo así como para determinarlo. Es por eso que no puedo decir que es más infinito o menos infinito porque la trigonométrica no se evalúa en un número. El infinito no lo puedo colocar en la calculadora
I: ¿Y algo que se aproxime al infinito?
A1: Escribiría un número de muchas cifras.
I: Vamos con la pregunta 10 ¿A qué es igual la expresión infinito menos infinito?

A1: Indeterminado.
I: ¿Por qué no es cero?
A1: Porqueeeeeeee….yo lo veo así como lo que vimos allá en el pasado, que esto es una indeterminación (A pesar de tener un nivel adecuado de manipulación

Práctica discursiva (pag 5)

simbólica, presenta algunas fallas en la interpretación de ciertos resultados de las operaciones ejecutadas) Porque esta no es una expresión que yo pueda decir 1-1 sino que puede tener infinitos valores (conflicto semiótico: infinitos valores).
I: ¿Qué contestaste en la pregunta once?
A1: Yo puse dos, esta mañana lo analice bastante.
I: ¿Por qué?
A1: Porque no puedo decir que son infinitos números porque va solo de 0 a 1, no podría decir que son muchos números. Entonces cuando estaba leyendo la última pregunta me puse a analizarla nuevamente.
I: ¿Qué contestaste en esa última pregunta?
A1: En la última pregunta conteste la (b) porque de menos infinito a más infinito hay muchísimos valores en cambio aquí (señala el intervalo [0,1]) va de cero a uno. Observo que de menos infinito a más infinito es más grande. También tuve dudas porque también puedo decir que los dos conjuntos tienen infinitos valores. Claro yo lo veo a simple vista Ok. Son solo dos números. Si no tomo en cuenta eso (Señala el símbolo $\Re$) Pero yo al pasar aquí no puedo tomar este conjunto (señala la opción a) porque me estaría contradiciendo con la pregunta anterior. Ok, lo analice desde otro punto vista, ambos tienen infinitos números.
I: Bien, con esto podemos dar por terminada la entrevista, muchas gracias por tu colaboración.

Entrevista A Una Estudiante Que Apareció En Talento Universitario (A2)

Práctica discursiva (pag 6)

I: Mi objetivo es analizar la forma en que los estudiantes resuelven los problemas, las fallas, los errores, los conflictos semióticos, en el momento de contestar este cuestionario. Fíjate que el mismo tiene preguntas tanto de Introducción a la matemática, Matemática I y “Matemática II” y todas están relacionadas con el concepto infinito. Es un concepto muy abstracto. Yo he notado que los estudiantes tienen dificultad a la hora de aplicar el concepto infinito en este tipo de problemas. Tú eres una buena estudiante que quedaste en el grupo de talento universitario (reforzamiento positivo). También se lo voy a aplicar a las preparadoras para analizar el tipo de razonamiento empleado en cada ejercicio. La idea no es determinar las repuestas correctas o incorrectas sino el procedimiento de resolución. ¿Está bien? (Responde afirmativamente con la cabeza)

I: ¿Cómo te pareció el cuestionario?

A2: Bien.

I: Empecemos con la primera pregunta. ¿Cuál alternativa escogiste?

A2: [Piensa…] La (d)

I: ¿Por qué?

A2: (Abre notablemente los ojos y se queda callada) Primero porqueee….hice un sondeo de todas así pues, no me pare…no me pare a leer cada una así como tal, sino que hice un sondeo. (Se aprecia una aprensión ante el cuestionario. No desea ser evaluada realmente por la investigadora porque quiere aparentar ciertas cualidades o competencias que no posee).

I: Primero hiciste un sondeo.

A2: ¡Aja!!. Exacto. Pues quizás no me detuve en cada alternativa. Si yo creo que…la tome porque… (Se queda callada largo tiempo).

I: Fíjate que allí hay una palabra clave. Si escogiste la (d) aparece la expresión “número infinito” ¿Qué interpretas tú como infinito?

A2: ¿Infinito?... Algo que no…que no tiene fin.

I: Pero ese algo ¿Qué tipo de objeto es?

A2: En este caso un número.

I: Lo interpretas como un solo número ¿Hasta el número infinito?

A2: No, es la (c) tiene sentido porque son los números mayores o iguales a uno (Muchos alumnos automáticamente al ver el símbolo infinito lo interpretan como un número)

I: Cualquier número que imagines por más grande que sea siempre le puedo sumar uno y se puede crear un número superior a él. Vamos con la siguiente pregunta, te piden evaluar un límite ¿Cuál alternativa escogiste?

A2: La (d): No existe.

I: ¿Por qué?

(Se queda un rato largo callada)

I: ¿Realizaste algún cálculo para obtener la respuesta?

A2: No, no hice ningún cálculo, lo hice mentalmente. Cuando yo meto el uno aquí

Práctica discursiva (pag 7)

abajo (Imprecisión en la verbalización: debería decir al sustituir el uno en el denominador. Muchos hasta utilizan palabras soeces: esta broma) me da cero entonces uno entre cero es infinito. Pero yo digo que no existe porque… no coloque más infinito porque aquí no me dicen si es el uno por la izquierda o si es el uno por la derecha. Yo lo veo (yo lo entiendo) desde ese punto de vista…no se.

I: ¿Y si en el cuestionario apareciera por la derecha o por la izquierda…?

A2: Ahí seria más o menos infinito.

I: En ese resultado ¿No hay algo implícito? Yo estoy de acuerdo con tu razonamiento, pero creo que le falta algo adicional que tú aprendiste en Matemática I: el teorema de la unicidad del límite ¿Lo viste?

A2: Si.

I: ¿De que trata ese teorema?

A2: “Ahorita” no me acuerdo bien.

I: Para que el límite exista necesariamente los límites laterales tienen que ser iguales. Como muy bien dices, el límite por la derecha te da un resultado y si lo evalúas por la izquierda te da otro. Tu razonamiento está bien pero no te apoyaste en un concepto matemático y ahí es donde se inician los conflictos semióticos. Pasemos a la tercera pregunta, allí te piden evaluar otro límite ¿Cuál fue tu respuesta?

A2: La opción (a) más infinito.

I: Bien, en la siguiente pregunta, te piden el valor de uno entre cero

A2: Marque la opción (a): no existe

I: ¿Por qué?

(Se queda callada por largo tiempo)

A2: Yo coloque: uno entre cero es infinito, pero…

I: Yo soy la que tengo una duda y quiero que tu me la ayudes a resolver ¿Por qué en la tres marcaste infinito y en la cuatro no existe? ¿Qué diferencia existe entre la pregunta tres y la cuatro?

A2: Aquí (señala la pregunta 3) me están diciendo un límite cuando tiende a cero en cambio aquí (señala la pregunta 4) me dice el valor de uno entre cero.

I: Muy bien. Es diferente evaluar una tendencia a calcular un valor numérico. Bien. Vamos a ver la pregunta cinco.

A2: No la conteste.

I: ¿Por qué? ¿Qué te paso? ¿No trataste de plantear un gráfico?

A: No, trate de realizarlo mentalmente. Bueno, pues. Esta pregunta pertenece a “Matemática II”, debería responderla porque se supone que yo ya pase por eso… Esteee… (Se queda callada por largo tiempo).

I: Vamos a tratar de analizar esta pregunta. Empecemos con la curva $y = 1/x^2$

¿Qué forma tiene en un diagrama coordenado?
A2: Esta broma es una parábola.

Práctica discursiva (pag 8)
I: No, no puede ser una parábola al estar expresada como una función racional.
A2: Correcto (Se queda callada durante largo tiempo).
I: Se grafica en un papel. Se sombrea el área buscada. (Una de las primeras dificultades fue el gráfico de la función. No sabía identificar la forma que tenia. Segunda dificultad: sombrear el área).
I: Intuitivamente el área bajo esta curva ¿Cuál es?
A2: Intuitivamente seria un área infinita.
I: ¿Cómo demostrarías matemáticamente eso? (Realiza la operación matemática en un papel resolviendo la integral impropia y obtiene 1) {No tiene problemas para seguir el procedimiento}¿Qué diferencia observas entre el resultado matemático y el intuitivo?
A2: Ok, lo que pasa es que lo vi así, como tiende a más infinito pensé que el resultado seria más infinito. Como no resolví la integral.
I: ¿Cómo se lo explicarías a un alumno? Tú que ya aprobaste la materia y fueras la preparadora y viniera un alumno y te dijera: “Bueno, ¿Qué locura es está?” Si veo que el área pareciera infinita ¿Por qué la integral da uno? ¿Está malo?
A2: Si.
I: ¿Si?
A2: (Abre los ojos en gesto de asombro) No.
(Risas al unísono)
A2: No, no está malo
I: Vamos a utilizar el método exhaustivo de Arquímedes, el aproximaba el área bajo la curva a la suma de las áreas de todos los rectángulos. Fíjate que la curva que estamos analizando es asintótica es decir se aproxima al eje x pero sin llegar a cortarlo. ¿Qué área debería tener este rectángulo? (la investigadora señala un rectángulo muy pequeño, la alumna se queda pensando por un largo tiempo) Analízalo como lo haría Arquímedes ¿Cuál es la base de este rectángulo?
A2: ¿No seria cero? (cuando contesta con otra pregunta, denota inseguridad o está a la defensiva)
I: Prácticamente tiende a cero. Entonces si la base es cero y la altura es muy pequeña ¿Cuál seria el área de ese rectángulo?
A2: Cero.
I: Prácticamente cero. Estos rectángulos son tan pequeños que prácticamente su área es cero y los que “colaboran” en el área son los grandes, es el área que tiende a uno. El área de los rectángulos pequeñitos no colabora, no influye, no aporta área. Es por eso que el área es uno. Esta es la explicación de por qué intuitivamente se piensa que es infinito pero analíticamente se tiene uno (Wittgenstein indicaba que cuando se intente describir el significado de una palabra- un objeto matemático en nuestro caso- se piense en como se explicaría a

un extranjero o, mejor aún, a un niño) Bien. Vamos con la siguiente pregunta ¿Cuál alternativa escogiste?

A2: La (b) (Al dar la alumna la explicación se observa que llega al resultado correcto pero realizando un razonamiento incorrecto porque evalua la integral impropia sin previamente haber calculado la primitiva)

Práctica discursiva (pag 9)

I: En la 7, que es una pregunta netamente teórica ¿Qué alternativa escogiste?

A2: La (b).

I: ¿Por qué no escogiste la (a)?

A2: Lo que pasa es que leí mal, creía que decía un valor infinito.

I: ¿Puede dar un valor finito?

A2: No.

I: ¿Cómo que no?

A2: Aaaaah, Ok, si, si, si tiene razón.

I: Fíjate que en el ejercicio 5, la longitud de 1/x con x perteneciente [1, +∞) es infinita y el área bajo la curva es uno.

A2: Si puede dar entonces un valor finito.

I: ¿Por qué no cero? Vamos a ir descartando alternativas ¿Por qué no puede dar cero?

A2: Gráficamente Ok, es cero.

I: Ojo, tiende a cero pero no es exactamente cero. Es imposible que el área de cero. Siempre se va a poder dibujar un rectángulo muy pequeñito. ¿Por qué el área no puede ser imaginaria? ¿Qué interpretas como área imaginaria?

A2: ¿Imaginaria?

I: Por supuesto en matemática porque si me voy a otro contexto por ejemplo en la literatura, una novela imaginaria, no tiene basamento real.

A2: Por ejemplo, la raíz cuadrada de menos uno es un número imaginario.

I: ¿Pudiera hablarse de áreas imaginarias?

A2: No creo, pues no creo que pueda hablarse de áreas imaginarias

I: Estas en el campo de los números imaginarios. Pero en este caso la base y la altura de los rectángulos es finita, es un número real.

A2: No puede ser.

I: ¿Y negativa?

A2: No, no puede haber área negativa.

I: ¿Por qué?

A2: Bueno, lo que yo recuerdo que uno calcula el área no le puede dar un negativo. El área tiene que dar un número mayor que cero. El área de esta oficina. El piso de la oficina es un rectángulo tiene un largo y un ancho. Tiene un área.

I: La pregunta # 8

A2: La opción correcta es la (b)

I: Bien, la pregunta # 9

37	**A2**: La opción correcta es la (c)
38	**I**: Bien, la pregunta # 10
39	**A2**: La opción correcta es la (b)
40	**I**: Bien, la pregunta # 11
41	**A2**: La opción correcta es la (b)
42	**I**: Bien, y finalmente la pregunta # 12
43	**A2**: La opción correcta es la (c)
44	**I**: Bien, con esto podemos dar por terminada la entrevista, muchas gracias por tu colaboración.

ENTREVISTA A LA PREPARADORA (A3)

Práctica discursiva (pag 10)

I: ¿Cómo te pareció el cuestionario?

A3: El cuestionario se entiende todo, lo que he tenido siempre esa duda en realidad, por lo menos cuando tengo que evaluar un seno o coseno en el infinito.

I: Entonces arranquemos con la pregunta número nueve porque me interesa saber las dudas que tienes. Allí esta planteada una integral impropia entre cero y más infinito de seno de x.

A3: La resolví pero entonces el coseno de infinito, el coseno siempre me da valores que oscilan entre uno y menos uno, entonces si yo evalúo de cero a más infinito siempre me van a dar esos dos valores, en realidad no se si en realidad diverge. Le coloque que no existe.

I: Efectivamente la integral diverge, el límite no existe por oscilación. Porque por lo que tú muy bien dices la función coseno está oscilando. Existen dos tipos de divergencia: cuando el límite tiende a infinito y cuando el límite no existe por oscilación como en este caso. (Existe una divergencia entre lo hablado y lo escrito, lo escrito es riguroso, es formal, en cambio lo hablado es ambiguo porque se trata de que el alumno entienda lo explicado). Vamos a analizar la primera para ir siguiendo el orden del cuestionario. En la primera pregunta te dan un conjunto entre uno y más infinito. ¿Qué alternativa escogiste?

A3: La opción (c)

I: ¿Por qué no escogiste la (a)?

A3: La pensé también, números reales que pertenezca al conjunto del número uno hasta el número infinito, pero como no me decían justamente que contenía el uno, no la escogí, preferí escoger la que decía mayores o iguales a uno.

I: Pero fíjate que en esta proposición aparece la expresión “un número infinito”.

A3: Si también.

I: ¿Qué interpretas como infinito?

A3: Que está incluido todos los decimales,… o sea desde el uno hasta el infinito positivo incluyendo los que están comprendidos, es decir, entre uno y dos, o los que están comprendidos…bueno… el infinito también no dice mucho.

I: Creo que no me has entendido la pregunta, fíjate que aparece la expresión “número infinito”. ¿Tú interpretas que el infinito es un número?

A3: Ah, no.

I: ¿Qué es para ti el infinito?

A3: El infinito lo veo yo como un símbolo (repetición de la expresión “yo lo veo” (objeto no ostensivo), adicionalmente la persona se apropia de los objetos matemáticos), un símbolo que me dice que no es un intervalo cerrado, sino que hay algo más allá pero igual no se puede contabilizar, sino lo que me está mostrando es que hay algo más pero igual no no no es tangible sino que más bien es como una especie de símbolo.

I: Es una abstracción, que no se puede trabajar ni como un número ni como una variable. Es una abstracción porque cualquier número que tú te imagines le puedes

Práctica discursiva (pag 11)

sumar uno más y se va haciendo más grande, más grande, más grande. Estoy de acuerdo contigo, vamos con la siguiente. Te piden evaluar este límite cuando x tiende a uno. ¿Qué procedimiento seguiste?

A3: Primero lo evalué, y me da uno entre cero que es indeterminado (conflicto semiótico) entonces lo que hice fue aplicarle L'Hopital y derive arriba y derive abajo, como la derivada de una constante es cero, cero entre un número es cero.

I: Tenemos un problema con este razonamiento. Vamos nuevamente a sustituir, uno menos uno es cero. ¿Uno sobre cero es?

A3: Eeeeh…Indeterminado.

I: No, no es indeterminado. Recuerda las indeterminaciones son cero sobre cero, infinito sobre infinito, infinito menos infinito y hay tres más donde hay que hacer transformaciones para poder aplicar L´Hopital. Vamos a analizarlo nuevamente, uno menos uno, cero. Uno sobre cero. Infinito. Pero tampoco sirve ese razonamiento ¿Por qué? Fíjate que aquí x tiende a uno, pero no establecen si es uno por la derecha o si es uno por la izquierda. Ahora te pregunto ¿Qué hubiera pasado si aquí te coloco que tiende a uno por la derecha? Uno por la derecha menos uno, cero por la derecha, uno sobre cero por la derecha más infinito (observo que si yo estudiara con el lenguaje coloquial no entendería absolutamente nada, debe existir un puente entre el lenguaje coloquial y el lenguaje riguroso) Si en cambio hubiera sido uno por la izquierda, daría cero por la izquierda y uno sobre cero por la izquierda menos infinito. Entonces fíjate que los límites laterales son diferentes.

¿Tú te acuerdas de Matemática I, el teorema de la unicidad del límite?

A: No, no profe yo vi Matemática I hace bastante tiempo.

I: Vamos a tratar de recordar: Para que este límite exista, los límites laterales tienen que ser iguales, entonces fíjate que por un lado te da más infinito y por el otro menos infinito, entonces el límite como tal no existe. La respuesta correcta es la (d). ¿Tú no viste Matemática I aquí en la Universidad de Carabobo?

A3: No, no porque yo vengo de San Cristóbal, hice equivalencia por Matemática I, de lógica pase directo a "Matemática II".

I: ¿Allá si estabas estudiando contaduría?

A3: No ingeniería informática.

I: Ah, Ok, vamos con la número cuatro ya que la tercera la contestaste correctamente y tiene relación con la segunda. El valor de uno sobre cero contestaste más infinito ¿Por qué?

A3: Porque tenia el concepto de que uno entre cero es más infinito. Se me había olvidado analizar por la derecha o por la izquierda.

I: Pero… aquí tenemos una diferencia. Estoy de acuerdo que aquí tú me digas que es más infinito porque estas evaluando un límite en cambio aquí estas calculando un valor numérico. Si en una calculadora realizas la operación uno entre cero, te aparece error. Entonces, ¿Cuál debería ser la respuesta? No está definido. Vamos…

Práctica discursiva (pag 12)

con la siguiente pregunta. Fíjate que las preguntas están mezcladas, unas pertenecen a Introducción a la matemática, otras a Matemática I y la que viene a continuación es de “Matemática II”. Veamos la número 5, colocas 1. Es la respuesta correcta ¿Cómo llegaste a ese resultado?

(La alumna explica el procedimiento correctamente pero no presenta la solución gráfica, se le solicita que realice el gráfico, el cual plantea correctamente) Así a simple vista, sin la parte analítica ¿Cual debería ser el área bajo curva para todo número mayor a cero?

A3: Infinito también.

I: Entonces ¿Por qué será que intuitivamente se ve que el área es infinita y analíticamente se obtiene que el área es uno?

A3: Debe ser porque la gráfica se va acercando más al eje x entonces como le estamos aplicando un límite entonces yo puedo decir que tiende a uno, porque cada vez se esta haciendo como más pequeña.

I: Estoy de acuerdo con tu razonamiento, pero le falta algo. ¿De donde proviene la noción de área? ¿Como nosotros en las clases de teoría les explicamos a los estudiantes la noción de área? ¿Basándonos en que?

A3: En los diferenciales.

I: Los diferenciales son rectángulos que tienen una base muy pequeña y la altura coincide con la función. Fíjate que a medida que te vas corriendo hacia más infinito los rectángulos son cada vez más pequeños, más chiquititos. Asumamos que todos los rectángulos tienen la misma base pero su altura se está haciendo cada vez más pequeñita. Entonces el área de un rectángulo es base por altura. El área de estos rectángulos es prácticamente cero, prácticamente no contribuyen al área total. El área que realmente está dando contribución es la que proviene de los rectángulos más grandes. Cuando realizas la suma de esos infinitos rectángulos el área tiende a uno. En la otra pregunta no tuviste problema. Sin embargo las otras estudiantes no la contestaron, las preguntas que más le costaron estaban relacionadas con el cálculo de áreas no acotadas, yo creía que como la materia estaba más fresquita lo iban a contestar con mayor facilidad. Vamos con la pregunta 7. ¿Por qué el área bajo una curva no puede ser cero?

A3: Porque un área no puede ser cero, un área es algo que estamos midiendo. Si fuera cero indicaría que no hay área.

I: Imagínate que yo pongo aquí desde cien hasta más infinito ¿El área es cero?

(Se ríe)

A3: Ah bueno, matemáticamente es cero, pero hay un poquito.

I: Se aproxima a cero, pero no es que exactamente sea cero. Fíjate como dice la pregunta ¿Es exactamente cero?

A3: No.

I: Bien, buen razonamiento ¿El área puede ser imaginaria?

Práctica discursiva (pag 13)
A3: Para mi, nunca. El área siempre tiene que ser un valor positivo y tiene que ser que se pueda medir. Un valor imaginario, no.
I: ¿Qué es para ti un valor imaginario?
A3: Es por ejemplo cuando aparecen raíces negativas. El valor existe pero nooooo…Es como un conjunto de números que existen pero no…como que no son reales. (Se rie).
I: Los ingenieros electricistas trabajan con esos números, pero para nosotros en las ciencias administrativas y contables solo nos interesan los números reales. Por eso es que los estudiantes cuando uno les grafica una parábola en el primer cuadrante y se les pide que busquen los cortes de la parábola con el eje x se enredan, porque les da un número imaginario y automáticamente te dicen no existe. El número como tal si existe pero en otro campo, en el campo de los números complejos, lo que no existe son los puntos de corte de la parábola con el eje x. Los estudiantes tienden a tener esa confusión y eso es precisamente lo que estoy analizando. (Asocian imaginario a lo que no se puede ver). Veamos la siguiente pregunta ¿El área puede ser negativa?
A3: El área nunca es negativa, “profe”.
I: ¿Por qué?
A3: Como lo vemos aquí (señala el gráfico) es la suma de áreas de rectángulos. Nunca me puede dar un número negativo.
I: Pasemos a la número 8. El área limitada por esta curva. ¿La graficaste?
A3: No, simplemente desintegre la integral.
I: Ahora la expresión infinito menos infinito ¿Por qué no es cero?
A3: En la clase contestan que es cero porque el infinito lo interpretan como si fuera un número. El infinito no es un número sino un símbolo que me indica que es un número bastante grande pero que igual no lo podemos contabilizar, porque no se que valor es infinito.
I: Una indeterminación siempre está relacionada a un límite de funciones. Habría que tomar en consideración la ley de los grandes números. Vamos a pasar a la siguiente. ¿Cuál escogiste?
A3: La opción (b)
I: ¿Por qué?
A3: Porque me dicen que son los números reales, me va a incluir el cero y el uno y todos los números entre ellos, el 0,1, el 0,2. Y en cuanto a los decimales puedo incluir infinitos decimales.
I: La última pregunta. De estos dos conjuntos ¿Cuál es más grande?
A3: Yo conteste que era imposible decidir, yo no se cuantos números hay entre uno y dos, igual no se cuantos números hay entre más infinito y más infinito. Es decir puede haber infinitos números aquí e infinitos números allá.
I: ¿Cuál infinito es más grande?

Práctica discursiva (pag 14)

A3: Sigo considerando que es imposible de decidir.

I: Cantor, uno de los matemáticos más famosos, hizo la siguiente suposición: tomó todos los números naturales, que son infinitos, de este gran conjunto decidió tomar un subconjunto: los números pares, que también son infinitos. Entonces fíjate la paradoja: un conjunto que es infinito generó un subconjunto de infinitos números. Entonces ¿Cuál es más grande?

A3: No se puede decidir. No se cuantos números puedo tomar aquí.

I: Cualquiera que tú escojas le puedes agregar un número. Fíjate que el infinito es un concepto muy abstracto. De las preguntas planteadas en este cuestionario ¿Cuál fue la que te causó mayor confusión o duda?

A3: La última. Eeeeeh….. Esta porque la leí mal (señala la pregunta 4) pensé que era como las dos anteriores. En la pregunta 9 porque tenia la duda de la oscilación.

I: La integral impropia divergente por oscilación. ¿Cuáles otras dudas te plantean los estudiantes en la clase de preparaduria?

A3: Cuando planteamos integrales impropias y nos da cero por infinito o cero por logaritmo de cero. Ellos tienden a pensar que cualquier número multiplicado por cero es cero.

I: Es decir, no lo ven como una indeterminación. ¿Cuales son las fallas que presentan los estudiantes relacionados con infinito? El tema de cálculo de área no acotada es una de las más complicadas y sin embargo de mayor aplicabilidad en estadística y cálculo financiero.

A3: Si, porque no es tan mecánico como cuando trabajamos con las técnicas de integración.

I: Porque los estudiantes tienden a memorizar los procedimientos, como si fueran recetas de cocina. En cambio aquí hay que analizar más, es necesario graficar.

A3: Por ejemplo, ellos no saben cuanto es “e” a la más infinito y “e” a la menos infinito. Les digo «Tienen que ver la gráfica, cuando ella tiene valores negativos se va aproximando más al cero pero cuando tiene valores positivos ella va creciendo entonces “e” a la más infinito es más infinito y “e” a la menos infinito es cero». Porque cuando uno les hace la gráfica lo ven. Cuando les hago la gráfica entonces ellos como que Aaah, Ok.

I: Ahí como que darle la vuelta a la matemática para que el estudiante nos comprenda.

I: La pregunta # 6

A3: La opción correcta es la (b)

I: Bien, la pregunta # 7

A3: La opción correcta es la (b)

I: Bien y finalmente la pregunta # 10

A3: La opción correcta es la (b)

Bien, esto era lo que quería preguntarte. Muchas gracias por tu valiosa colaboración.

ENTREVISTA A UNA ESTUDIANTE DE RENDIMIENTO PROMEDIO (A4)

Práctica discursiva (pag 15)
I: ¿Cómo te pareció el cuestionario?
A4: Bien.
I: Quiero que me digas las dudas que tuviste y vamos a analizar cada una de ellas. Vamos con la primera.
A4: La (a).
I: Vamos a ir descartando las posibles soluciones. La (a) no puede ser porque contiene la palabra infinito. ¿Qué indica el corchete?
A4: Que es mayor o igual.
I: Entonces la (b) no puede ser porque dice mayor que uno, no lo incluye, en cambio la (c) si lo incluye. Entonces ¿Cuál crees que es la diferencia entre la (a) y la (c)?
(Se queda pensando un rato)
A4: Que la (c) no tiene un límite superior.
I: Pero fíjate que aparece una palabra clave en la alternativa (a), te dicen que es hasta el número infinito. ¿Qué es para ti el infinito?
A4: ¿Qué es el infinito? Algo que no tiene…estee…como le digo…no tiene restricción…pues…más lejos de lo real.
I: Pero ¿Es un número?
A4: No.
I: ¿Lo interpretas como un número?
A4: No.
I: Entonces aquí habría una contradicción porque te están diciendo hasta el número infinito.
A4: Me está diciendo que está acotado al infinito pero nosotros no sabemos que es el infinito.
I: Vamos a analizar la pregunta #2 y calcular este límite ¿Cuál escogiste?
A4: No existe.
I: ¿Por qué?
A4: Porque un número entre cero no está definido. En cambio un número entre cero por la derecha y cero por la izquierda ya me tiende a más o menos infinito.
I: Entonces allí estas aplicando el teorema de la unicidad del límite. Para que el límite exista los dos límites laterales deberían ser iguales. Fíjate que la 3 tiene relación con lo que estamos hablando. Vamos a analizar mejor la pregunta #4. ¿Cuál es el valor de 1/0?
A4: No existe.
I: ¿Por qué?
A4: La tome como el otro.
I: ¿La tomaste como el otro?
A4: Uno sobre cero, la segunda.
I: No entiendo.

Práctica discursiva (pag 16)
A4: Usted sabe que uno sobre x menos uno seria uno sobre cero, yo dije que eso no existe.
I: Pero en el límite me tiende a infinito. Pero cuando es cero por la derecha tiende a más infinito. ¿Pero es por la presencia del límite o porque tiene que establecerse si es por la derecha o por la izquierda?
A4: Por la presencia del límite.
I: Y la pregunta 5.
A4: Esa no la pude resolver.
I: Pero ¿Qué pensaste?
A4: Ya me estaban restringiendo mi área, verdad, que iba de uno a más infinito pero tenía que buscar la función de aquí.
I: ¿Cómo determinas el área bajo la curva?
A4: Primero graficando $y = 1/x^2$
I: ¿Tienes idea de la forma de esa curva?
A4: Seria como algo así (grafica la hipérbola equilátera) Yo colocaría que el área es infinita.
I: ¿Cómo se determina analíticamente el área bajo una curva?
A4: Planteo la integral definida desde uno hasta infinito positivo de $1/x^2$ diferencial de x (Resuelve la integral y obtiene el resultado correcto que es uno). La integral converge.
I: Ahora te hago la siguiente pregunta ¿Es posible que una curva que va de uno a más infinito tenga área uno? ¿Tiene sentido que una curva infinita tenga área uno?
A: No.
I: Fíjate que la curva tiene una particularidad: a medida que x crece sin límite la curva se va aproximando al eje x pero sin llegar a cortarlo. ¿Cuál es el área de los pequeños rectángulos que se están formando aquí? (Se señala el final de la curva, se queda pensando).
A4: Cero.
I: La que está contribuyendo al valor del área son los rectángulos más grandes. La suma de los rectángulos representativos es la que te da uno. Entonces tiene sentido que una curva que tiene longitud infinita tenga un área de valor finito.
I: Todos los reales lo tradujiste en la integral como límite inferior: menos infinito y límite superior: más infinito. Por razones de tiempo vamos a pasar a la pregunta número nueve.
A4: Yo tengo una duda sobre esa. Porque a mi me dicen que el infinito no existe, el seno está definido entre -1 y 1 (conflicto semiótico: confunde el dominio con el rango de una función). Eso me dijo mi primo que es estudiante de ingeniería eléctrica, no es que no exista.
I: La función tiene máximos y mínimos. Son como los picos que están entre -1 y 1 pero la función sigue oscilando indefinidamente. Pero no es que termine en 1.
A4: ¡Aaaaah! Es que yo pensé que era de -1 a 1.

Práctica discursiva (pag 17)

I: Vamos con la pregunta 6. ¿Qué tipo de integral es?

A4: Es una integral impropia de segunda especie porque tiene problemas en infinito.

I: ¿Qué respuesta escogiste?

A4: La 1/e (Explica el procedimiento de cálculo correctamente).

I: Vamos con la otra que parece más una pregunta de tipo teórico ¿Qué escogiste?

A4: No escogí ninguna, pero…yo creo…un número finito.

I: Ok, vamos a empezar a descartar alternativas ¿Por qué no la primera alternativa?

A4: ¿Qué es una curva de longitud infinita?

I: Larga, largota. (Imprecisión en la docente) yo me tardaría toda la vida dibujándola (Expresión metafórica) ¿Esta área puede ser cero?

A4: Si.

I: ¿Si?

A4: Cero no, puede tender a cero porque nunca va a tocar el eje.

I: Ok, ¿El área puede dar un valor finito?

A4: Si, precisamente con el ejercicio cinco lo estamos comprobando.

I: Veamos la otra opción ¿Qué interpretas tú como imaginario?

A4: (Se queda pensando por un largo rato) Seria algo como que… matemáticamente no tendría solución. Algo que yo me pueda imaginar (se echa a reír). Me confunde "profe". Un número imaginario es raíz cuadrada de menos uno. Una raíz no puede ser negativa (concepción fuertemente arraigada, no habla de números imaginarios).

I: Ojo, el número si existe pero pertenece a otro campo, el de los números complejos. Los ingenieros electricistas trabajan con esos números. Realmente el desarrollo de las calculadoras, computadoras y otros artefactos electrónicos se debe al uso de los números complejos porque los fenómenos eléctricos se explican mejor con los números complejos que con los números reales. Para ellos son unos números familiares.

A4: Son naturales para ellos pero para nosotros son imaginarios, son como raros, como si no existieran.

I: Vamos con la pregunta: ¿El área bajo una curva de longitud infinita puede ser imaginaria?

A4: Si, porque me están dando infinitos números y en esos infinitos números puede entrar un número imaginario ¿O no?

I: No, porque recuerda que cuando realizamos la definición de cálculo de área empleamos los diferenciales y el área de cada diferencial es base por altura. El área bajo una curva de longitud infinita ¿Puede ser negativa?

A4: Hay funciones negativas, que están por debajo del eje x. En el cuarto cuadrante. La función techo es el eje x y la función piso es la función considerada.**I**: El área no puede ser negativa. Se puede medir el largo y el ancho. Imposible de

Práctica discursiva (pag 18)

que sea negativa. Son magnitudes físicas. Las áreas siempre son positivas. Eso es lo que yo quiero analizar en mi trabajo. ¿Por qué se presenta ese conflicto semiótico? La otra pregunta es como determinar el área bajo la curva $1/(1+ x^2)$. Esa curva es la campana de Gauss para todo x perteneciente a los números reales ¿Cómo colocar eso en la integral? (<u>problema al hacer la conversión de registros semióticos</u>) Por favor sombrea el área pedida ¿Dónde colocaste el primer rectángulo característico?

A4: En el infinito negativo.

I: ¿Y donde colocarías el último?

A4: En más infinito.

I: Entonces los límites de integración serían más y menos infinito. Ahora lo que tendríamos que hacer es resolver la integral impropia.

A4: A mi me habían dicho que el límite no existe pero nadie me había explicado por qué no existe.

I: Es que ese es el gran problema, que a los estudiantes no se les explica el por qué de las cosas. La otra pregunta : ¿infinito menos infinito es?

A4: Es una indeterminación.

I: ¿Por qué?

A4: Porque no puedes restar un infinito con un infinito.

I: ¿Por qué?

A4: Porque no es un número real, porque no es un número finito.

I: Porque no se puede manipular de la misma forma que a los números reales. Es una indeterminación. Vamos a pasar a la pregunta que está relacionada con el conjunto cerrado de 0 a 1.

A4: De 0 a 1 hay infinitos números. Marque esa pero en realidad pienso que es la (b) porque puedo escribir 0,1, 0,2 y luego 0,01, 0,02 y así sucesivamente.

I: Vamos a tomar el conjunto de los números naturales 1, 2, 3… ¿Cuántos números naturales existen?

A4: Infinitos.

I: Porque a cada número que tú me des yo le puedo sumar uno. De ese conjunto infinito yo puedo formar un subconjunto de los números pares 2, 4, 6… ¿De qué tamaño es el subconjunto de los números pares?

A4: Infinito.

I: De un conjunto infinito se extrajo un subconjunto infinito. Parece una paradoja que se pueda formar un subconjunto infinito. Esa misma situación está ocurriendo en el intervalo cerrado [0,1] porque es factible escribir un número con infinitos decimales. Las clases de matemática también tienen que incluir una parte teórica, para que ustedes no se dejen llevar por la intuición y realmente conozcan el resultado correcto. Ahora bien vamos con la última pregunta.

A4: Ahora que entendí la pregunta 11 se que conteste mal la 12. Ahora se que la

Práctica discursiva (pag 19)
opción correcta es la (c).
I: La pregunta # 3.
A4: La opción correcta es la (a).
I: ¿Cómo te pareció el cuestionario?
A4: Me gusto porque tiene cosas raras. Por lo menos lo del seno. Aclare muchas dudas que tenia. Pues. Donde me quede fue más que todo fue en el área porque no pude asociar el área con la integral.
I: Me he dado cuenta que los problemas más difíciles eran los que estaban relacionados con “Matemática II”.
A4: Es que tienden a confundir para armar la integral, de donde a donde.
I: Todos los problemas están relacionados con el infinito. Bien con esto podemos dar por terminada la entrevista, muchas gracias por tu valiosa colaboración.

ENTREVISTA A UN ESTUDIANTE DE ALTO RENDIMIENTO (PROVIENE DE INGENIERÍA (A5))

Práctica discursiva (pag 20)

I: ¿Como te pareció el cuestionario?

A5: Me puso a pensar bastante.

I: Fijate que todas las preguntas que coloque están relacionadas con el infinito. Son de varias asignaturas: Introducción a la Matemática, Matemática I y “Matemática II” ¿Cuáles fueron las preguntas que te causaron mayor dificultad, duda, ansiedad o confusión.

A5: Eeeeeeh...Bueno la de los límites…la 2, la 4, la 5 y la 6.

I: Entonces vamos a arrancar con la segunda pregunta ¿Qué opción escogiste?

A5: Eeeeeeh…cero porque cuando hablamos de límite como no me dicen, si abajo tenemos un x-1 y el x tiende a 1 entonces me quedaría 1 entre 0. Ya no estaría dividiendo entre cero sino que estaría dividiendo entre un número muy cercano a cero ¿Qué pasa? Cuando yo tengo un número y lo divido entre algo muy, muy, muy pequeño me daría una cantidad extremadamente grande que tendería a más infinito.

I: Pero también pudiera ocurrir que x tendiera a 1 por la izquierda. Si restas 1 por la izquierda menos 1 te da un cero por la izquierda. Es decir un número muy cercano a cero pero negativo. Y uno sobre cero por la izquierda también te da un número muy grande pero negativo ¿Entonces por qué me dices que es cero?

A5: (Pausa) Es como buscarle una…una especie de balanza (metáfora) como no está muy a la derecha ni muy a la izquierda.

I: Entonces ¿Por qué no lo interpretaste como que no existe el límite?

A5: El cero como tal no está ni para allá ni para acá.

I: Pero pasa algo muy importante. El límite no existe cuando los límites laterales no coinciden. ¿Te acuerdas de Matemática I el teorema de la unicidad del límite?

A5: Un poquito…Que el…No realmente no.

I: Pasemos a la pregunta 4 que es la otra pregunta donde me dijiste que tenias confusión. ¿El valor de 1 sobre 0 es?

A5: Bueno…No la respondí porque no la entendí. Pero por lógica le hubiera colocado no existe. Pero no es un valor como tal que yo pueda calcular es algo así como el mismo infinito que yo se que está ahí.

I: Pero aquí también tienes un problema porque esto no es un límite. Si pulsas en la calculadora 1 entre 0 te va aparecer en la pantalla error. Eso no está definido. La primera regla de la aritmética es que no podemos dividir entre cero. Vamos con la otra que tuviste confusión: ¿El área bajo una curva de longitud infinita puede ser? Vamos por partes ¿Qué interpretas por una curva de longitud infinita?

A5: Por ejemplo una recta.

I: ¿El área bajo esa curva puede ser cero?

A5: No.

I: ¿Por qué?

A5: Estoy suponiendo que la curva no corta al eje x, siempre va a quedar un

Práctica discursiva (pag 21)

espacio entre la curva y el eje “y” siempre va a existir área. Es imposible que sea exactamente cero.

I: ¿Puede ser un valor finito?

A5: Entonces los límites de integración deberían ser finitos.

I: Entonces me voy a remitir a la pregunta 5. Analicemos, te da -1. Aplicaste mal la regla de Barrow, evaluaste el límite inferior y le restaste el límite superior. Entonces ¿No te estás contradiciendo? Aquí tienes como ejemplo una curva de longitud infinita y el área bajo esa curva es 1 un valor finito. Entonces ¿Cómo le explicarías a un alumno que está cursando por primera vez “Matemática II” que el área bajo una curva infinita puede tener un valor finito?

A5: (Pausa muy larga) Bueno...Gráficamente es un límite, es una aproximación. Yo podría decir que es 1 porque cuando yo sume todas las áreas igual ese número se me va a acercar a 1.

I: Has dibujado un conjunto de rectángulos. Pero estos rectángulos son tan, pero tan pequeños que su área tiende a cero. Entonces ¿Cuál es el área que está dando 1? Los primeros son los que están contribuyendo a que la suma de las áreas de los rectángulos nos de 1. Si hemos contestado la pregunta 5 tenemos la respuesta a la pregunta 7. Ahora yo te pregunto ¿Puede ser un área imaginaria?

A5: Por lo mismo que le explique. Yo me imagino que es un área que va hacia el infinito siempre va a ser un número muy grande, es algo que siempre vamos a estar calculando.

I: ¿Qué interpretas como un valor imaginario?

A5: Es una operación matemática en el cual el resultado no existe en la realidad por ejemplo la raíz cuadrada de menos dos. Regresándonos a lo que es el infinito yo lo veo como una especie de número imaginario porque es algo que tenemos que plantearnos un valor aproximado, me lo tengo que imaginar.

I: En matemática se define un número imaginario como la raíz cuadrada de un número negativo. Es un problema de tipo conceptual porque me estás confundiendo un campo de números con algo que te estás imaginando o abstrayendo.

A5: Ok. Entiendo.

I: El área de un rectángulo se calcula multiplicando base por altura. Si se está realizando la suma de esas áreas es imposible que se obtenga un valor imaginario. Se está multiplicando un número real por otro número real ¿El área bajo una curva de longitud infinita puede ser negativa?

A5: Si pudiera ser negativa si tomamos una curva que este por debajo del eje x. Lógicamente debería dar negativo porque estoy tomando en cuenta…

I: ¿Cuál es la altura de este rectángulo?

A5: Seria un “y” negativo.

I: ¿Cómo altura lo tomarías negativo?¿Al medir con una regla ese valor sería negativo?

Práctica discursiva (pag 22)

A5: No, tomaría el modulo de ese valor que al multiplicarlo por la altura tiene que ser positivo. El área es positiva.

I: La curva es la que tiene imágenes negativas. Eso me está ocasionando que intuitivamente piense que el área puede ser negativa. Pero como tu muy bien dices yo tengo que medir la longitud de ese rectángulo y esa longitud es positiva, el área es positiva. Quiero regresarme a la pregunta 1 porque quiero saber tu razonamiento.

A5: Escogí la opción (c).

I: ¿Por qué no la (a)?

A5: (Pausa muy larga) Yo creo que es más de presentación que...Porque yo quiero ser puntual. Me están diciendo que x es un número entonces pienso en el conjunto de 1 a más infinito.

I: Entonces tú la descartaste porque aparecía la expresión número.

A5: Y fuera de eso decía que era hasta el número infinito y eso no tiene sentido.

I: Entonces la (a) y la (d) quedan descartadas porque contradicen lo que hasta el momento hemos sostenido: el infinito no es un número. Indudablemente que la (b) no puede ser porque dicen mayores que 1 y si hay un corchete te indica que el 1 tienes que incluirlo. Bien. Me interesa la pregunta 9.

A5: Ahí parece que tengo el mismo error de siempre (patrón de comportamiento) porque yo escogí el cero.

I: ¿Hiciste algún tipo de cálculo?

A5: No, ninguno.

I: ¿Qué razonaste?

A5: Me imagine la función seno, yo subo y bajo, voy a tener siempre un área que se me va a cancelar con otra área. Yo lo veo así.

I: No, ahí estás cayendo en el mismo conflicto semiótico. Las áreas no se pueden contrarrestar. Yo me imagino que tuviste que calcular la primitiva del seno que es el menos coseno y tenias que evaluar en el límite superior ¿Coseno de más infinito es?

A5: Debería dar infinito.

I: ¿Por qué?

A5: Porqueeeeee…Eeeeeeh…

I: Vamos a dibujar la función coseno: sube y baja, sube y baja. Ok…¿Qué ocurre para un número lo suficientemente grande positivo?

A5: Debería estar…

I: Fíjate que la imagen de la función siempre está limitada entre dos valores 1 y -1 ¿Qué le ocurre a esta función cuando tiende a más infinito?

A5: (No responde)

I: Ella está oscilando. El límite no existe precisamente por oscilación. Entonces se dice que la integral impropia es divergente por oscilación.

Práctica discursiva (pag 23)
I: Porque no se sabe exactamente que valor va a tomar. Hay dos tipos de integral impropia divergentes: las que al evaluar el límite, este tiende a infinito y otras que divergen por oscilación. Vamos a la pregunta 11 ¿Qué respondiste?
A5: Tiene infinitos números.
I: Ahora la 12 ¿Qué respondiste?
A5: Los dos son iguales. Porque igual puedo dividir los dos conjuntos en infinitos números. Ninguno es mayor que el otro. No puedo establecer que infinito es más grande que otro. Por ejemplo, entre 0 y 1 yo lo puedo dividir infinitamente, el otro conjunto también lo puedo dividir infinitamente.
I: Tu razonamiento es correcto. Esta pregunta entra en una rama de la matemática denominada teoría transfinita de conjuntos.
I: La pregunta # 3.
A5: La opción correcta es la (a)
I: Bien. La pregunta # 6
A5: La opción correcta es la (b)
I: Bien. La pregunta # 8
A5: La opción correcta es la (b)
I: Bien y finalmente la pregunta # 10
A5: La opción correcta es la (b)
I: Con esta pregunta terminamos la entrevista, te agradezco enormemente la colaboración que me prestaste. Uno de los objetivos es conocer el significado que le asignan al infinito, una noción matemática muy abstracta. También quería determinar como relacionaban este concepto con los otros contenidos de los cursos de matemática en la escuela de administración y contaduría de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales.

Práctica discursiva (pag 24)

I: Hola, la idea no es asignarte una calificación, ni esto te va afectar la nota de "Matemática II". Es un estudio que estoy llevando a cabo sobre el infinito. Me llamó la atención que no hubieras incluido elementos de "Matemática II", por ejemplo las integrales impropias también están relacionadas con el infinito y el cálculo de las áreas de regiones planas no acotadas. Otra cosa: ¿Por qué incluyes la palabra subjetivo en el campo conceptual del infinito?

A5: Porque a veces....algo que…eeeeeh…como verlo en el espacio. Nosotros…le damos un…concepto al espacio como tal de que es infinito.

I: Tu asocias el infinito con…

A5: Con lo subjetivo porque es como una manera de ver algo que sigue, que sigue, que sigue. Sabemos que eso evidentemente no pasa pero lo tenemos como concepto, que no es algo tangible como tal. Igual que el concepto de espacio. Nosotros decimos que es infinito pero como tal yo creo que el infinito es difícil de ver.

I: Observé que incluiste un elemento de ingeniería. Si yo les pidiera a los muchachos de contaduría que hicieran este campo no colocarían plano en el espacio ¿Por qué asociaste el infinito con un plano en el espacio?

A5: Porque eso…de… es como darle otro concepto… como cuando empezamos a hablar como yo no se aplicarle el concepto como tal pero si se de que un plano es como una especie de límite por decirlo de alguna manera es infinito…que me ofrece un espacio…eeeeeeh…una base para desarrollar lo que sea y que de por si …teniendo en cuenta…yo me iría a lo… como diría yo…a un concepto muy propio… es imaginármelo como una sabana en el espacio que se va ampliando, teniendo en cuenta que nosotros no vamos a llegar nunca a un límite, es algo que se va, que se expande.

I: Eso sucede con los planos, con las superficies, con la recta real, con los números ¿Por qué colocaste la palabra período?

A5: (Pausa) Eeeeeh…bueno…yo lo asocie con ese decimal que es algo queeeee…sigue, que sigue.

I: Tú lo asociaste con un número real cuyo decimal es periódico. En cambio yo lo asocie con las funciones seno y coseno que tienen periodo 2π. Entonces se repite indefinidamente. Otra cosa, escribes extremo ¿A que te refieres?

A5: Siempre se busca… eeeeh…comoooo…yo lo veo así… en la vida uno siempre tiene límites para todo, todo nace y se muere. Siempre buscamos como darle ese toque hasta donde debemos llegar. Yo creo que el hecho de tener un límite o el hecho de darle un extremo es ese infinito. Yo se que eso no existe. Yo le voy a asignar una especie de calificativo, lo voy a llamar infinito pero como tal ya el hecho de llamarlo el extremo infinito ya estoy de una u otra forma como colocando un campo.

I: ¿Qué piensas sobre la aseveración de que el precio del barril de petróleo va a

Práctica discursiva (pag 25)

llegar al infinito? (Esta pregunta se realizó en la época en que el precio del barril estaba por encima de los 150 dólares).

A5: Bueno…eso es muy subjetivo…pero si pudiera decirse que pudiera ser infinito si se ve desde el punto de vista de que a medida de que avanza se va haciendo más escaso el petróleo, entonces el precio va aumentando, va aumentando, va aumentando.

I: Por ejemplo, el caso de la leche, un producto que no se consigue. Los buhoneros la venden a Bs. 50.000 el tarro. ¿El precio de este artículo de primera necesidad pudiera ser infinito?

A5: También depende del campo en que nos movamos porque si alguien la necesita tanto daría todo su dinero para comprarla.

I: Pero esa cantidad de dinero ¿Sería infinita?

A5: No. Está limitada.

I: Entonces fíjate que hay una separación entre lo concreto y lo abstracto, el mundo real y el mundo matemático. Pareciera que en el mundo concreto el infinito no tiene cabida, no tiene sentido. Porque nadie puede pagar una cantidad infinita de dinero por un tarro de leche. Siempre va a existir un límite. Pero en el campo matemático si tiene sentido hablar de infinito, si tiene sentido ese concepto matemático ¿Qué es para ti el infinito?

A5: (Pausa) Bueno…eeeeh…es algo…es como un ciclo… como el ciclo del agua que se repite y se repite y se repite que va más allá de la capacidad y que va en contra de lo que es la mayoría de los hechos, de las cosas, de los fenómenos que observamos en el mundo real.

Campo asociativo de Infinito
Indeterminado
Subjetivo
Planos en el espacio
Periodo
Grande
Límite
Extremo

[ANEXO - C]

EJEMPLOS CONTEXTUALIZADOS DE INTEGRALES IMPROPIAS PROPUESTAS POR LOS ESTUDIANTES

1) Se desea determinar que cantidad de trabajo es necesario aplicar para colocar en órbita el satélite Simón Bolívar (Venesat 1) de 5100 kilogramos de peso a una distancia infinita de la tierra sabiendo que la fuerza viene dada por k/x^2 y que el radio de la tierra es aproximadamente 4000 millas.

2) Determinar el ingreso del fondo de inversión para la estabilización macroeconómica en Venezuela, con el uso y aplicación de una integral impropia de segunda especie suponiendo que el flujo de ingresos anuales será continuo y constante de BsF. 350000 durante un lapso indeterminado a una tasa de interés anual constante del 2%.

3) El banco Plaza posee un bono indefinido (es decir que no vence). Determinar el monto que recibirán los herederos del señor Vargas para un tiempo lo suficientemente largo si este deposita BsF. 1000 y la tasa de interés a plazo fijo es del 17%.

4) En estadística, la función de densidad de probabilidad se utiliza con el propósito de conocer como se distribuyen las probabilidades de un suceso o evento, en relación al resultado del suceso. Matemáticamente, la función de densidad de probabilidad es la derivada de la función de distribución de probabilidad, o de manera inversa, la función de distribución es la integral de la función de densidad:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Las propiedades de la función de densidad de probabilidad son:

a) $f(x) \geq 0$ para todo valor de x. Es una función no negativa.

b) El área total bajo la curva $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

c) P(a ≤ x ≤ b) = $\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$

El valor esperado es la media aritmética ponderada de una variable aleatoria. En estadística se le conoce como la esperanza matemática (o simplemente esperanza) y es la suma del producto de la probabilidad de cada suceso por el valor de dicho suceso:

$$E(h(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x).f(x)dx$$

El valor esperado es un concepto fundamental en el estudio de las distribuciones de probabilidad. Desde hace muchos años este concepto ha sido aplicado ampliamente en el negocio de los seguros y en los últimos veinte años ha sido aplicado por otros profesionales que casi siempre toman decisiones en condiciones de incertidumbre.

5) El banco de sangre de la ciudad de Valencia realiza una campaña anual para reponer su inventario. Se va a suponer que la tasa promedio de donantes viene dada por la siguiente ecuación:

$$d(t) = 500\ e^{-0.4t}$$

Donde t representa el tiempo en días. Una encuesta realizada reflejó que al pasar el tiempo iban disminuyendo los donantes por varios factores: las personas hoy en día viven muy agitadas para dirigirse a donar sangre, la mayoría de las personas que van en busca de sangre para un familiar no llegan al peso corporal mínimo para donar, las personas ya no se interesan por aquellos que no son sus familiares ni sus amigos para donar sangre a otra persona que no conocen, temor a contagiarse de una enfermedad, etc. En vista que los inventarios que realiza un banco de sangre anualmente van disminuyendo ¿Cuántos centímetros cúbicos deberían recolectarse en un tiempo lo suficientemente largo antes de que empiece a disminuir la cifra mínima requerida?

[ANEXO - D]
INSTRUCCIONES PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA RED SEMÁNTICA DEL INFINITO

1) Define, de manera individual y con la mayor precisión posible el infinito, mediante la utilización de 10 palabras que consideres relacionadas con este objeto matemático (emplea la primera columna).
2) Una vez definido el infinito, jerarquiza todas las palabras que expresaste como definidoras, en función de la relación, importancia o cercanía que cada una de ellas tenga con el infinito. De esta forma, se asigna el número 1 a la palabra más cercana o relacionada con el infinito, el 2 a la que le sigue en importancia y así sucesivamente hasta terminar (emplea la segunda columna).

¿Qué elementos definen el infinito?

Palabras definidoras		Jerarquías
	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	

Muchísimas gracias por tu colaboración

Segundo vaciado, cálculo del VTM y establecimiento de categorías semánticas para el infinito

Categoría	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**VTM**
Abstracto	1				2					1	21
Amor								1			8
Consecuente								1			8
Demasiado										1	10
Desconocido						2					12
Dios										1	10
Eterno	1				1			1			14
Ilimitado			1			1				3	39
Imaginario				2	1						13
Impreciso							1				7
Inagotable			1								3
Inalcanzable	1			1		2		1	1	1	44
Incalculable	1			1	1	1	2		4		66
Incierto	1										1
Indefinido						1				3	36
Indeterminado							2	3			38
Inexacto				1			1				11
Infinitesimal								1			8
Inimaginable	1					1			1		16
Inmenso			1			1					9
Innumerable								1			8
Interminable							1	1			15
Invisible	2										2
Irreal								1			8
Lejano	2										2
Más allá						1				1	16
Máximo									1		9
Múltiple		1									2
Muy grande	1	1			2		1		2	3	68
No es único		1									2
No tiene límite				1			2	1	2	3	74
Oculto		1									2
Perpetuo				1							4
Persistente					1						5
Siempre									1		9
Sin fin	1	2			1	1		3	3	5	117
Último número	1			1							5
Universo			1			1	2	2		1	49
Vida									1		9

[ANEXO - E]

INSTRUCCIONES PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LA RED SEMÁNTICA DE "INDETERMINACIÓN"

Alumno	1	2	3	4	5
1	Incógnita	Operación	Límite	No existe	No definido
2	Sin procedimiento	Matemático	Incógnita	Inconcluso	Indefinido
3	Sin límite	Indefinido	Oculto	Impreciso	Incógnita
4	Sin solución	Infinito	Complicado	Indefinido	Sin límite
5	Innumerable	Inalcanzable	Indescriptible	Ilimitado	Infinito
6	Nulo	Cero	Sin solución	Infinito	Sin procedimiento
7	Incalculable	Desconocido	Inalcanzable	Inestable	Inexacto
8	Complicado	Imaginario	Variable	Oculto	Infinito
9	Infinito	Problema	Sin fin	Incógnita	Indefinido
10	Indefinido	Desconocido	Sin respuesta	Inexistente	Incalculable
11	Indefinido	Incalculable	Sin límite	Imaginario	Impreciso
12	Incógnita	Impreciso	Infinito	Inexistente	Desconocido
13	Sin solución	Lejano	Sin límite	Incompleto	Inexistente
14	Incógnita	Inexistente	Indefinido	Desconocido	Matemática
15	Sin solución	Infinito	Sin procedimiento	Imaginario	Complicado
Alumno	6	7	8	9	10
1	Desconocido	Imaginario	Incalculable	Complicado	En búsqueda
2	Impreciso	Inalcanzable	Sin límite	Incertidumbre	Libre
3	Muchos valores	Variable	Error	Vacío	Irreal
4	Matemática	Incógnita	Restricción	Problema	No revelado
5	Incógnita	No existe	Anormal	Sin solución	Anónimo
6	Inexistente	Imposible	Incógnita	Complicado	Imprevisto
7	Indefinido	Ilógico	Infinito	Imaginario	Problema
8	Inconcluso	Difícil	Cero/cero	Infinito/infinito	Extenso
9	Incomprendido	Error	Inexistente	Sin procedimiento	Ilógico
10	Inestable	Perdido	Inconcluso	Sin límite	Error
11	Inexacto	Número	Error	Infinito	Oculto
12	Error	Sin procedimiento	Derivar	Inconcluso	Sin límite
13	Indefinido	Impreciso	Incierto	Desconocido	Complicado
14	Interrogante	Oculto	Impreciso	Variable	Inalcanzable
15	Irreal	Improbable	Interpretación	Estudio	Indefinido

Segundo vaciado, cálculo del VTM y establecimiento de categorías semánticas para Indeterminación

Categoría	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**VTM**
Complicado		1			1				1	1	26
Desconocido			1			1	2	2			39
Error	2	1		1							8
Ilimitado						1					6
Ilógico			1				1				10
Imposible								1			8
Impreciso				1		2		1		1	34
Inalcanzable			1				1		1		19
Incalculable	1			1		1			2	3	59
Incógnita						1		2	3	5	99
Incomprendido			1								3
Inconcluso			1	1	1		1	1	2	2	65
Indefinido			2			1	1	3	1	5	102
Indescriptible							1				7
Inestable				1	1						9
Inexacto				1	1						9
Inexistente	1	1	1	1	2	2			1	2	61
Infinito		1	1		2	3	4			1	71
Inimaginable							1				7
Irreal										1	9
Libre	1										1
Matemática					1			1			13
No se puede resolver					1	2		1			25
Nulo										1	10
Oculto						2					12
Perdido	1										1
Sin Límite								2	4	1	62
Sin solución						2	1		1	1	38
Variable									1		9

Cuadro. Conjunto SAM para Indeterminación

Conjunto SAM obtenido para el objeto indeterminación		
Conjunto SAM	Valor M	Valores FMG
15 Palabras definitorias	Total	Porcentaje relativo entre las palabras
Indefinido	102	100 %
Incógnita	99	97 %
Infinito	71	70 %
Inconcluso	65	64 %
Sin límite	62	61 %
Inexistente	61	60 %
Incalculable	59	58 %
Desconocido	39	38 %
Sin solución	38	37 %
Impreciso	34	33 %
Complicado	26	25 %
No se puede resolver	25	25 %
Inalcanzable	19	19 %
Oculto	12	12 %
Ilógico	10	10 %

[ANEXO - F]
SIGNIFICADO PERSONAL DEL OBJETO MATEMÁTICO "INDETERMINACIÓN"

A continuación se incluyen algunas de las expresiones consignadas por los estudiantes que participaron en este estudio, que son indicadoras del significado personal del objeto matemático denominado "indeterminación"

Práctica discursiva de los alumnos	Análisis semiótico
-Es cuando un límite no se puede resolver de forma inmediata y aplicando métodos matemáticos se puede llegar a una solución	De todos los significados obtenidos es el que mejor se aproxima al significado institucional de referencia (significado conceptual)
-No se puede determinar, es desconocido, no se puede realizar	No define el objeto matemático
-Esto carece de exactitud ya que no se puede determinar por ejemplo el infinito	Confusión con el infinito
-Una indeterminación es la que se resuelve bajo notaciones y fórmulas - Son las operaciones que dan como resultado infinito -No se resuelve por el método normal y no me va a dar un resultado directo, por lo que se debe derivar hasta conseguir su solución -Es aquel término en que no se puede obtener un resultado concreto, se puede realizar el procedimiento pero no se obtiene el resultado, se especula cual es pero no se sabe si realmente es el correcto	Remite a una operación matemática (significado actuativo)
- Puede ser 0/0, ∞/∞, ∞-∞, 1^{∞} - Es como una regla matemática por ejemplo 0/0, ∞/∞	Remite a tipos de indeterminación (significado proposicional)
- Es una constante que no se encuentra definida - Inexistencia - Se puede expresar como que la función no tiene un patrón fijo de estudio o que no concuerda con las teorías o métodos utilizados en cualquier área de la matemática - Resultado o planteamiento que no tiene solución en el campo de los números reales - Cuando algo no es preciso ni justo sino que tiene alguna diferencia o no es exacto - Es la ausencia de respuesta a una función mediante leyes ya establecidas - Cuando el resultado dado no está dentro de los márgenes de la respuesta	Información no válida desde el punto de vista de la institución

Nota: Se respeto la redacción original presentada por los estudiantes

[ANEXO - G]

CUESTIONARIO

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y SOCIALES
ESCUELA DE ADMINISTRACIÓN COMERCIAL Y CONTADURÍA PÚBLICA
CÁTEDRA DE MATEMÁTICA II

Instrucciones: A continuación se te ofrecen doce enunciados. Escoge la alternativa correcta y explica la razón de tu selección.

Ítem 1. El siguiente conjunto A={x $\in \Re$ /x$\in$[1, + ∞)} se traduce en:

(a) x es un número real tal que x pertenece al conjunto desde el número 1 hasta el número infinito.

(b) conjunto de los números reales mayores que 1.

(c) conjunto de los números reales mayores o iguales a 1.

(d) conjunto de los números reales desde el número 1 hasta el número infinito.

Ítem 2. Calcular $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$

(a) 0

(b) +∞

(c) -∞

(d) No existe

Ítem 3. Determinar $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$

(a) +∞

(b) -∞

(c) 0

(d) No existe

Ítem 4. El valor de 1/0 es:

(a) No está definido

(b) $+\infty$

(c) e

(d) 1

Ítem 5. El área bajo la curva $y = 1/x^2$ con $x \in [1,+\infty)$

(a) $+\infty$

(b) 1

(c) 0

(d) No existe

Ítem 6. Evaluar $\int_1^{\infty} e^{-x}dx$

(a) $+\infty$

(b) 1/e (**correcto**)

(c) 0

(d) – 1/e

Ítem 7. El área bajo una curva de longitud infinita puede ser:

(a) cero

(b) un valor finito

(c) imaginaria

(d) negativa

Ítem 8. El área limitada por la función $y = 1 / (1+x^2)$ y el eje x para todo $x \in \Re$ es:

(a) $+\infty$

(b) π

(c) $-\infty$

(d) $\pi/2$

Ítem 9. Evaluar $\int_0^\infty senx\, dx$

(a) 0

(b) 1

(c) No existe

(d) infinito

Ítem 10. La expresión $\infty - \infty$ es:

(a) cero

(b) indeterminada

(c) no existe

(d) uno

Ítem 11. El siguiente conjunto $A=\{x \in \Re \, / x \in [0,1]\}$ tiene:

(a) 100 números

(b) infinitos números

(c) 2 números

(d) 1000000000 números

Ítem 12. En el campo de los números reales:

¿Cuál conjunto es más grande? ¿[0,1] o (- ∞,+ ∞)?

(a) [0,1]

(b) (- ∞,+ ∞)

(c) los dos conjuntos tienen infinitos elementos

(d) imposible decidir

[ANEXO - H]

TABLA DE FÓRMULAS BÁSICAS DE LA PRUEBA INTERNA DE APTITUD ACADÉMICA APLICADA EN FACES EN EL AÑO 2009

INFORMACIÓN BÁSICA

Definiciones básicas	**Áreas**			**Otras fórmulas**
En la ecuación de la recta y=ax+b, a es la pendiente y b es la ordenada al origen Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a -1 En un triángulo, la suma de los ángulos internos es 180°	Figura	Área	Simbología	Teorema de Pitágoras: Dado un triángulo rectángulo cuyos catetos son a y b, y la hipotenusa es c, entonces $c^2 = a^2+b^2$ Resolución de la ecuación ax^2+bx+c $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
	Triángulo	A = (b·a)/2	b: base h: altura	
	Cuadrado	$A = l^2$	l: longitud del lado	
	Rectángulo	A= b·a	b: base h: altura	
	Círculo	$A = \pi \cdot r^2$	r: radio	
	Trapecio	$A=\frac{(a+b)\cdot h}{2}$	a: base menor b: base mayor h: altura	

TRIGONOMETRÍA

Funciones	0	30	45	60	90	180	270
Seno	0	½	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	½	0	-1	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞

¡ÉXITO!

EPÍLOGO

Muchos autores cierran sus trabajos mediante un Epílogo. Mi deseo es terminar con un poema a la complejidad que está en total coherencia con "El conflicto semiótico: elemento crucial en la cronogénesis de los significados personales matemáticos"

La Complejidad

La distinguimos en sus infinitos matices
Y modos de manifestarse en la naturaleza,
sin embargo no la podemos manipular,
ella nos domina a nosotros.

Diariamente está en mi aula de clases
en las pupilas de aquellos que
quieren comprender el mundo
con sus dudas e interrogantes.

Está presente al resolver problemas,
sin distinguir ciencias ni disciplinas,
sus hilos invisibles nos envuelven
como una telaraña mágica.

La incertidumbre nos causa desasosiego,
porque todo lo queremos controlar,
si conociéramos las fuerzas del caos
a la realidad nos podríamos aproximar.

Eres la esencia de la postmodernidad,
todo se revela en ti, todo está integrado,
somos una red de relaciones,
más allá de la causa y el efecto.

Diosa tejedora de tramas,
unes lo antagonista, lo diverso,
conocedora de la irreversibilidad del tiempo
tu flecha atraviesa a todos por igual.

CURRÍCULUM VITAE

- Ingeniero Químico [Universidad Central de Venezuela] (1992)

- Especialista en Docencia para la Educación Superior [Universidad de Carabobo] (2002)

- Magíster en Ingeniería Industrial [Universidad de Carabobo] (2004)

- Candidata a Doctora en Educación [Universidad de Carabobo].

- Profesora Titular en la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. Dicta actualmente la asignatura Matemática II en la Escuela de Administración Comercial y Contaduría Pública. Más de 15 años de experiencia docente.

- Actualmente Miembro de la Comisión de Extensión de la Escuela de Administración Comercial y Contaduría Pública de la Facultad de Ciencias Económicas y Sociales.

- En el periodo 2004-2007 Jefe de la Cátedra de Matemática y Cálculo Financiero. Oficina 1502 5to piso (al lado del centro de estudiantes de AC-CP) del edificio de aulas FaCES. Ciudad Universitaria. Av. Salvador Allende de Naguanagua. Estado Carabobo.

- Línea de investigación: Enfoque ontosemiótico de la instrucción y la cognición matemática.

- Participante como ponente, tallerista y forista en eventos enmarcados en la Educación Matemática a nivel nacional.

EL CONFLICTO SEMIÓTICO: ELEMENTO CRUCIAL EN EL SISTEMA DE PRÁCTICAS DISCURSIVAS Y OPERATIVAS EN LAS QUE INTERVIENE EL INFINITO MATEMÁTICO

TEMA OBJETO DE ESTUDIO: Un conflicto semiótico es cualquier disparidad, discordancia o desajuste entre los significados o contenidos atribuidos a una misma expresión por dos sujetos en interacción comunicativa que provocan dificultades y limitaciones en los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación de la matemática. Godino (1994, 2002, 2006)

INTENCIÓN RECTORA DE LA INVESTIGACIÓN: Producir una reflexión teórica sobre la naturaleza y el papel que juega el conflicto semiótico en el sistema complejo de prácticas actuativas y comunicativas en las que interviene el objeto matemático infinito

DESCRIPCIÓN DE LAS PISTAS DE ITINERARIO

1) Indagar sobre los factores condicionantes que operan en la constitución de las prácticas discursivas y operativas en las que interviene el objeto matemático infinito.

2) Elaborar una metódica basada en la articulación de las redes semánticas con el análisis ontosemiótico para determinar la complejidad de los objetos personales y detectar conflictos semióticos potenciales.

3) Determinar la relación del conflicto semiótico con las cinco facetas duales en las que pueden ser consideradas las entidades matemáticas, según el juego del lenguaje en que participan, empleando como contexto de reflexión diversos objetos matemáticos en donde el infinito está implícito.

JUSTIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

Perspectiva epistemológica: Análisis de los significados personales e institucionales en el campo matemático.

Perspectiva educativa: Explicación de las dificultades y limitaciones potenciales en el estudio de la matemática para evitar discontinuidades en el proceso de aprendizaje.

Perspectiva metodológica: Incorporación del análisis ontológico semiótico para determinar significados personales e institucionales puestos en juego y sus interrelaciones.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA: La investigación está basada en el enfoque ontosemiótico de la instrucción y la cognición matemática de Godino (2002) [sistema de nociones teóricas elaborado sobre la naturaleza, origen y significado de los objetos matemáticos que desde una perspectiva educativa trata de articular de manera coherente las dimensiones epistémico y cognitiva] y el pensamiento complejo de Morin (1990) [una nueva concepción que busca la integración de la partes en un todo, la recursividad y la relación dialógica entre elementos aparentemente antagónicos o discordantes pero que realmente son complementarios].

METÓDICA

Metodología	Hermenéutica para comprender e interpretar los textos consultados
	Análisis ontológico-semiótico para determinar los significados personales e institucionales y sus interrelaciones
	Estudio teórico para elaborar el sistema de nociones teóricas sobre la naturaleza y el papel que juega el conflicto semiótico
Población	Estudiantes de Administración y Contaduría
Muestra	Intencional. 30 estudiantes de “Matemática II”
Delimitación	Espacio: Dpto. de Matemática AC-CP FaCES-UC Temporal: 1S-2008 (Abril/2008 a Agosto/2008)
Instrumentos de selección de significados	- Cuestionario: manifestación de los significados en forma escrita - Entrevista semiestructurada: manifestación de los significados en forma verbal - Redes semánticas

Resumen del aporte teórico propuesto

1) Prolegómenos:

a) Borrosidad en la cronogénesis de los significados personales de los objetos matemáticos. La comprensión no es una suma de partes: a la comprensión no se llega por un camino lineal.

b) Relatividad socioepistémica y cognitiva de los significados sistémicos que entran en juego.

c) Los conflictos semióticos no son aleatorios ni imprevisibles sino que es factible encontrar ciertas regularidades o patrones subyacentes que se pueden identificar y caracterizar.

2) Naturaleza diversa del conflicto semiótico

- 2.1) Conflicto de tipo epistémico
- 2.2) Conflicto de tipo cognitivo
- 2.3) Conflicto de tipo interaccional
- 2.4) Conflicto de tipo ontológico:
  - 2.4.1)Lingüístico:
    - 2.4.1.1) De precisión: Uso del lenguaje cotidiano dentro del contexto matemático
    - 2.4.1.2) De conversión de registros semióticos:
      - a) Dentro de un mismo sistema de representación
      - b) En sistemas de representación diferentes
  - 2.4.2) Situacional: Significados sensibles al contexto de uso (Ambigüedad signo-significado).
  - 2.4.3) Argumentativo
  - 2.4.4) Conceptual
  - 2.4.5) Proposicional
  - 2.4.6) Actuativo

3) Relación del conflicto ontosemiótico con las cinco dimensiones duales contempladas en el EOS

- a) La dimensión dual personal/institucional
- b) La dimensión dual ostensivo/ no ostensivo
- c) La dimensión dual concreto/ abstracto
- d) La dimensión dual expresión/contenido
- e) La dimensión dual elemental/ sistémico

Incorporándose la vinculación con la dimensión dual objeto/proceso