UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DIRECCIÒN DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

EL INFINITO ¿ANTINOMIA O APODÍCTICO? HACIA UNA EPISTEMOLOGÍA DE LA NOCIÓN DE INFINITO ACTUAL. ANÁLISIS DE LOS MODELOS INTUITIVOS Y ESQUEMAS CONCEPTUALES ASOCIADOS AL DESARROLLO HISTÓRICO DE ESTA NOCIÓN

Autor: Licdo. Romstine Cescutti.
Tutor: Dr.Rafael Ascanio.

Valencia, Julio de 2015.

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DIRECCIÒN DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

EL INFINITO ¿ANTINOMIA O APODÍCTICO? HACIA UNA EPISTEMOLOGÍA DE LA NOCIÓN DE INFINITO ACTUAL. ANÁLISIS DE LOS MODELOS INTUITIVOS Y ESQUEMAS CONCEPTUALES ASOCIADOS AL DESARROLLO HISTÓRICO DE ESTA NOCIÓN

Autor: Licdo. Romstine Cescutti.

Trabajo Presentado ante el Área de estudios de Postgrado de la Universidad de Carabobo para optar al Título de Magister en Educación Matemática.

Valencia, Julio de 2015.

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DIRECCIÒN DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

VEREDICTO

Nosotros, Miembros del Jurado designado para la evaluación del Trabajo de Grado titulado: *El Infinito ¿Antinomia o apodíctico? Hacia una epistemología de la noción de infinito actual. Análisis de los modelos intuitivos y esquemas conceptuales asociados al desarrollo histórico de esta noción* presentado por: *Licenciado Romstine Armando Cescutti Alvarado,* titular de la cédula de identidad Nº: *18.611.559,* para optar al Título de *Magister en Educación Matemática* estimamos que el mismo reúne los requisitos para ser considerado como: _______________________

Apellido y Nombre	**Cedula de Identidad**	**Firma**
-----------------------------	-----------------------------	---------------
-----------------------------	-----------------------------	---------------
-----------------------------	-----------------------------	---------------

Valencia, Julio de 2015.

AGRADECIMIENTOS

Dirijo mi más sinceros agradecimientos a los Docentes Universitarios quienes colaboraron directamente en cuanto al lineamiento y enfoque de investigación que sugirieron en alguna etapa del desarrollo del Trabajo de Grado para optar al título de Magister en Educación Matemática, específicamente a los Profesores: Zoraida Villegas, Mariela Gómez, Cirilo Orozco y Próspero González y, respectivamente un especial agradecimiento al Profesor Dr. Rafael Ascanio Tutor de mi Trabajo de Grado por brindarme de forma constante las tutorías de orden técnico – metodológico, asimismo por su gran apoyo constante durante todo el desarrollo del mismo.De igual manera, también dirijo mi agradecimiento al teórico Bruno D'Amore, quien tuvo la amabilidad y el gesto de responder a varios de mis correos y brindarme información con respecto a mi tema de investigación.

Por último, agradezco al Personal Administrativo y Obrero de la Universidad de Carabobo y al de la Unidad Educativa el "El Siervo de Dios" quienes en función del cumplimiento de su labor diaria y de la voluntad de solidaridad que le es propia, colaboraron de una u otra forma en el desarrollo de la presente investigación. Asimismo, a los Estudiantes de Pregrado Cursantes de la Asignatura Cálculo I de la Mención Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo, y además, a los estudiantes pertenecientes al 5to año de educación media y general de la Unidad Educativa "El Siervo de Dios", por haber participado en el taller y haber accedido a la realización del instrumento de recolección de datos.

ÍNDICE

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DIRECCIÒN DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

EL INFINITO ¿ANTINOMIA O APODÍCTICO? HACIA UNA EPISTEMOLOGÍA DE LA NOCIÓN DE INFINITO ACTUAL. ANÁLISIS DE LOS MODELOS INTUITIVOS Y ESQUEMAS CONCEPTUALES ASOCIADOS AL DESARROLLO HISTÓRICO DE ESTA NOCIÓN

Autor: Licdo. Cescutti A., Romstine A.
Tutor: Dr. Rafael Ascanio
Fecha: Julio de 2015

RESUMEN

La presente investigación tiene como objetivo general construir una aproximación epistemológica de la noción de *Infinito Actual* para un cambio conceptual, a partir del análisis de los modelos intuitivos y esquemas conceptuales asociados al desarrollo histórico de esta noción. La sustentación teórica se realizó por medio de las teorías propuestas por Tall y Dreyfus, Brousseau, D`Amore, Chevallard y Godino a nivel epistemológico, psicológico, pedagógico, didáctico y matemático con la finalidad de abordar, comprender y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos matemáticos, en este caso la noción de *Infinito*. La naturaleza del estudio es corte cualitativo, del tipo descriptivo, y que, además, la misma adopta un diseño hermenéutico descriptivo y de base esencialmente documental. Asimismo, se efectuó un análisis del discurso o texto, a través de fases de análisis y categorización de las unidades de registro de la información descrita en esta investigación para la elaboración de un meta – texto, es decir, construir una aproximación epistemológica de la noción de *Infinito Actual*. De donde se desprendió la identificación y categorización de unos esquemas conceptuales asociados a la noción de *Infinito*: *EIAP*, *EIP*, *EIM*, *EIPT*, *EII*, *EIPSL*, *EICF* y *EITCAT*que sirvieron de base para el análisis de los esquemas conceptuales que poseen los estudiantes sobre la noción de *Infinito* en dos niveles diferentes del sistema educativo venezolano, así como además, la identificación de los obstáculos *Dependencia*, *Aplastamiento* y *Deslizamiento* en los grupos de estudio.

Palabras claves: Educación Matemática, Epistemología, Didáctica de la Matemática, Infinito, Obstáculo Epistemológico y Límite.
Línea de Investigación: Epistemología e Historia en Educación Matemática**.**

UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DIRECCIÒN DE POSTGRADO
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

OR AT ¿INFINITUM ANTINOMY APODICTIC? TOWARDS AN EPISTEMOLOGY OF THE NOTION OF INFINITYCURRENT. INTUITIVE ANALYSIS OF MODELSASSOCIATED CONCEPTS AND SCHEMESTHE HISTORICAL DEVELOPMENTTHIS NOTION

Autor: Licdo. Cescutti A., Romstine A.
Tutor: Dr. Rafael Ascanio
Fecha: Julio de 2015

ABSTRACT

The current research has as general aim to build an epistemological approach about the Present *Infinite* notion to a conceptual change, beginning from the intuitive models and conceptual diagrams associated to notion historical development. The theoretical supporting was made through theories suggested by Tall and Dreyfus, Brousseau, D`Amore, Chevallard y Godino from a didactic mathematical educational psychological and epistemological level, whose purpose is to tackle, to understand and to explain the teaching-learning processes of mathematic definitions, in this case the Infinite notion. This research has a descriptive qualitative approach, and the same adopts a descriptive hermeneutical design with a documental base. Likewise, it is presented an analysis of the text through analysis and categorization stages of the information register units described in this research to an elaboration of a meta –text, which means a epistemological approach construction about the Present Infinite, where the categorization and identification brought up from some conceptual diagrams related to the *Infinite* notion: *EIAP, EIP, EIM, EIPT, EII, EIPSL, EICF and EITCAT*, which were very useful as base of students ´conceptual scheme analysis about the Infinite notion into two different Venezuelan educational systems; besides, the identifications of the obstacles *Dependencia*, *Aplastamiento* y *Deslizamiento* inside the group of study.

Key words: Mathematics Education, Epistemology, Mathematical Didactics, Infinite, Epistemological Obstacle and Limit.
Research Line: Epistemology and Mathematic Education History.

INTRODUCCIÓN

¿Mediante qué mecanismos mentales determinamos que mientras el conjunto N = *{1, 2, 3,…} tiene infinitos elementos, el conjunto S = {-3, -2, -1, 0, {1, 2, 3,…}} tiene sólo cinco? Si crees que esta cuestión es trivial, intenta convencer a cualquier estudiante universitario.*
E. Dubinsky

Usualmente se utiliza la palabra infinito para denotar algo muy grande o imposible de contar. Sin embargo, la noción de *Infinito* como idea de algo indefinido o inalcanzable, ha sido una fuente de confusión a través de la historia. Las aproximaciones cuantitativas, que buscan el *Infinito* en términos de magnitud medible, no serían suficientes; se requiere un análisis más profundo y complejo si se quiere llegar a él, no bastan los simples hechos observables. Dicha noción (*Infinit*o) se ha convertido en toda una obsesión para el hombre desde la época de los griegos hasta la actualidad y por donde se mire, ya sea bajo la lupa de lo infinitamente pequeño, así como también de lo infinitamente grande, el *ápeiron* de los griegos se ha transformado en una especie de sombra que acecha en la oscuridad del pensamiento, y que a veces se comporta como un medio imprescindible en las tentativas de dar cuenta y razón de los fenómenos que ocurren en lo que se denomina la realidad.

Ahora bien, en lo que respecta al presente trabajo se encontrará en él la exposición, descripción, explicación y análisis detallado por capítulos del problema que origina la noción de *Infinito* y su inserción en el ámbito de la educación matemática. De esta manera, el lector, en el *Capítulo I* podrá encontrar una descripción del panorama epistemológico y educativo sobre la repercusión que tiene la inserción de conceptos matemáticos, en su origen de naturaleza ideal y abstracta, en este caso la noción de *Infinito*, la cual juega un papel preponderante en el aprendizaje de otros conceptos más avanzados como el Límite, la Derivada y la Integral, que se sirven de éste (en su dualidad potencial y actual) para su comprensión. Por lo que, se plantea la siguiente interrogante ¿En qué medida es posible construir una aproximación epistemológica de la noción de *Infinito Actual* a partir del análisis de los modelos intuitivos y esquemas conceptuales asociados al desarrollo histórico de dicha noción?; de allí, se desprenderán una serie de objetivos que guiarán el desarrollo de la investigación, además, se plantea una justificación acorde a las exigencias a nivel de varios aspectos, que hace el estudio relevante e importante.

Por otro lado, en el *Capítulo II*, el Marco Teórico, se esbozan, entre otras cosas, los antecedentes de investigaciones relacionadas al tópico de estudio, el *Infinito*, entre estas, vale la pena mencionar a: Valdivé y Garbin, (2008), Belmonte, (2009), Cescutti y Ortega (2010), D'Amore B. (2011), entre otros; estas investigaciones serán esenciales para el desarrollo de este trabajo por sus significativas aportaciones. Asimismo, se realizará un análisis histórico – epistemológico de la noción de *Infinito* para comprender el origen de su concepción, así como, además, las dificultades y los obstáculos que surgieron alrededor de este en la historia. Igualmente, se abordará para la fundamentación teórica las siguientesteorías: La Teoría del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), La Teoría de las Situaciones Didácticas y La Transposición Didáctica para analizar los procesos de aprendizaje de conceptos matemáticos cuyas conceptualizaciones se sirven de los modelos intuitivos que poseen los estudiantes sobre la noción de *Infinito*.

En este orden de ideas, siguiendo la secuencia, en el *Capítulo III* se plantea la realización de una investigación de corte cualitativo, la misma adoptó un diseño hermenéutico descriptivo y de base esencialmente documental. Además, se efectuó un análisis del discurso o texto, a través de fases de análisis y categorización de las unidades de registro de la información descrita en esta investigación para la elaboración de un meta – texto, es decir, derivar una aproximación epistemológica de la noción de *Infinito Actual*.

De donde se desprendió la identificación y categorización de unos esquemas conceptuales asociados a la noción de *Infinito*, que sirvieron de base para el análisis de los esquemas conceptuales que poseen los estudiantes sobre la noción de *Infinito* en dos niveles diferentes del sistema educativo venezolano a través de los registros obtenidos por medio de la aplicación de un taller y un cuestionario. Para esto, se hizo necesario escoger dos poblaciones para el caso de la Educación Media General se tomó a los estudiantes de 5to año de la Unidad Educativa "El Siervo de Dios", mientras para el caso de la Educación Universitaria se eligió a estudiantes del 4to semestre de Educación Mención Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de Carabobo del turno de la mañana. Por ser una investigación de corte cualitativo las muestras son no probabilísticas y se empleó muestras de tipo homogéneas. Además, se realizó ejecución de un análisis didáctico a un episodio de clase, desde la perspectiva de las teorías abordas en las bases teóricas.

Asimismo, en cuanto a Presentación y Análisis de los Resultados se demostró la existencia de esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución de la noción de *Infinito*: *elEsquema de Infinito en su Acepción más Primitiva, asociada a la idea de número* (EIAP), *el Esquema de Infinito Potencial asociado a una división o adición de magnitudes de manera reiterativa e ilimitada, es decir, esquema asociado a una razón* (EIP), *el Esquema de Infinito Metafísico asociado a lo eterno o a una sustancia eterna principio originador de todo que trasciende*(EIM), *el Esquema de Infinito asociado a una Perspectiva Teológica como propiedad exclusiva de Dios. El Infinito Absoluto* (EIPT), *el Esquema de Infinito asociado a lo Infinitesimal y a una unidad invisible (punto). Existencia de elementos infinitésimos e indivisibles* (EII), *el Esquema de Infinito Potencial asociado a un Símbolo y al la idea de Límite* (EIPSL), *el Esquema de Infinito asociado a la noción de Conjuntos y a* *una Función* (EICF) y por último *el Esquema de Infinito asociado a la Teoría de Conjuntos y a la aritmética Transfinita* (EITCAT).

De igual manera, se identificó dos esquemas conceptuales recurrentes en la muestra seleccionada de estudiantes del 5to año de Educación Media General, estos son: *Esquema de Infinito en su Acepción más Primitiva* (EIAP) y *Esquema de Infinito Potencial* (EIP). Por otro lado, al tratarse de la muestra de los estudiantes universitarios esquemas conceptuales que operan de manera más significativa son el *Esquema de Infinito en su Acepción más Primitiva* (EIAP) y *Esquema de Infinito Potencial* (EIP). Así como también la existencia de los obstáculos de: *Dependencia*, *Aplastamiento* y *Deslizamiento*. Además de la manifestación de conflictos entre lo discreto y lo continuo al plantearse al estudiante problemas asociados a la idea de Límite en diversos contextos el geométrico, el algebraico y el geométrico. Así como, la confusión con respecto al infinito decimal (infinitésimos) que ocurre en aquellos estudiantes que se limitan a pensar que expresiones de la forma: $0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + \cdots$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \ldots$, o $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \ldots$, son un proceso continuo.

INCERTIDUMBRE EPISTEMOLÓGICA O PERPLEJIDAD PEDAGÓGICA

1.1. El vacío epistemológico – didáctico. La inestabilidad conceptual de *Infinito*.

Desde tiempos antiguos el hombre siempre se ha inquietado por buscar la verdad y desnudar la realidad tal cual es, pero allí es donde se encuentra el problema, cómo verificar que lo que se ve es realmente el reflejo puro de la realidad. Es por ello, entre otras cosas que, el ser humano, ante la imposibilidad de responder a estas inquietudes, comienza a plantearse cómo lograrlo y desarrolla la filosofía, la cual proviene del vocablo griego que significa amor a la sabiduría, y que se refiere al estudio de todo aquello que es objeto de conocimiento universal y totalitario (García, 2005). Siguiendo este orden de ideas, se tiene que la filosofía se puede dividir en dos grandes disciplinas como lo son la ontología, "teoría de los objetos conocidos y cognoscibles" (García, 2005, p.19) y la gnoseología, "palabra griega que viene de *gnosis*, que significa sapiencia, saber, y que será el estudio del conocimiento de los objetos"(García, Ob. Cit., p.19).

Por otro lado, cuando el conocimiento es limitado a una sola forma, esto es al aspecto científico y ya no desde una postura filosófica en su totalidad y generalidad, se comienza a plantear el estudio de este por medio de la epistemología, que literalmente significa tratado del conocimiento, y se encarga del estudio de la constitución de los conocimientos válidos y del estudio del paso de estados mínimos de conocimiento a los estados más rigurosos (Ugas, 2007), ya sea por medio de la superación de obstáculos epistemológicos vinculados o por rupturas en el conocimiento debido a la instauración de nuevos modelos paradigmáticos, teniendo en cuenta su naturaleza misma, sus límites, posibilidades y cuyo análisis es de carácter científico, así como también la relación entre conocimiento y la circunstancia vital del investigador en función de una práctica científica.

En este sentido, la epistemología se ocupa de estudiar los métodos, la lógica y las herramientas que emplean los científicos para el estudio de la realidad, por lo que la epistemología no es una ciencia inventiva, ya que no pretende descubrir el hecho del conocimiento humano; por el contrario, su proceso investigativo sigue tres caminos: Primero, es descriptiva, la cual responde a un "qué"; segundo, es explicativa, la cual se plantea el "por qué" de la fundamentación de la ciencia, y tercero, la epistemología es normativa, examina como se ajusta la ciencia a un modelo establecido (Ugas, 2007). A partir de esto se podría considerar a la epistemología como el estudio de las condiciones de producción y validación del conocimiento científico, teniendo como base los métodos y fundamentos del mismo.

Sin embargo, en el desarrollo histórico de la ciencia y por consiguiente de la epistemología, siempre han ocurrido cambios debido a la contraposición del pensamiento del hombre, donde el progreso científico se da a partir de revoluciones o rupturas epistemológicas, lo cual ha desencadenado el surgimiento de nuevos paradigmas (unos tras otros) no por evolución, sino por suplantación, entendiendo como paradigma aquellos supuestos teóricos generales, leyes y técnicas que adoptan los miembros de una comunidad científica (Ugas, 2007).

Estos nuevos esquemas conceptuales, son una especie de arquetipo de resolución de ciertos problemas o fenómenos que se suscitan en la realidad, por ende, el conocimiento científico no opera por acumulación según un modelo continuo o lineal, sino por rupturas revolucionarias que surgen cuando el modelo paradigmático reinante almacena muchas anomalías en la ciencia normal que no pueden ser explicadas ni resueltas, aunque se hayan articulado ciertas leyes que les sean propias, lo cual provoca la crisis y los científicos buscan alternativas para sustituirlo, por lo tanto, la historia es la que determina el modelo paradigmático reinante en función de las exigencias que se plantean en determinada época y que se ajuste a la realidad, por medio de la contraposición.

En función de lo plantado, se tiene que el estudio del conocimiento matemático ha estado supeditado al desarrollo histórico de las diferentes nociones, conceptos y sistemas axiomáticos consistentes, así como también en las diferentes crisis de fundamentos que acaecieron durante este proceso en la matemática, como lo fue la aparición de los números irracionales, el cálculo infinitesimal, la teoría de conjunto, la aparición de geometrías y axiomáticas no euclídeas, la conjetura de Gödel, entre otras.

De allí que, el análisis de la historicidad es fundamental para el desarrollo de una epistemología, teniendo en cuenta, además, ciertos problemas de fondo perteneciente a la gnoseología (teoría del conocimiento) como los formulados por León (2010):

> La posibilidad del conocimiento humano: ¿puede realmente el sujeto aprender el objeto?; el origen del conocimiento: ¿es la razón o la experiencia la fuente del conocimiento humano?; la esencia del conocimiento humano: ¿es el objeto quien determina al sujeto o es al revés?; las formas del conocimiento humano: ¿el conocimiento es racional o intuitivo?; y el criterio de verdad: ¿Cómo sabemos que nuestro conocimiento es verdadero? (p. 21)

Donde el problema esencial a resolver es la relación sujeto – objeto epistémico, esto es, el sujeto es el ser que conoce y el objeto de conocimiento es todo proceso o fenómeno sobre el cual el sujeto desarrolla su actividad cognitiva. Por lo que, el problema se centra en la naturaleza, el carácter, así como de las particularidades de los factores que se presentan en esa relación.

La noción de Infinito. La perplejidad epistemológica:

Una vez expuesto y aclarado lo anterior, se tiene que la génesis de la noción de *Infinito* se remonta a tiempos antiguos, épocas cuando el ser humano se interesó en pensar y reflexionar sobre los hechos que acontecían en su vida, así como de la realidad en la que se desenvolvía, deliberando sobre el ¿por qué? y ¿cómo? ocurren las cosas. Diversos filósofos, matemáticos y grandes investigadores de otras disciplinas, de todo el mundo y de distintas épocas, han construido diversas concepciones sobre el *Infinito*, simples preguntas como ¿qué significa numeroso o ilimitado? ¿Era el universo un espacio finito o se extiende indefinidamente? ¿Es infinita la materia en profundidad, en cuanto a su estructura? ¿Se puede dividir de forma continua la materia en trozos más y más pequeños o se llega a un instante en que la pieza es tan minúscula que no puede ser dividida aún más?; estas entre otras, fueron las ideas que condujeron a la búsqueda de esa noción, para así dar respuestas convincentes a las inquietudes que se iban originado. En relación a esto, Cescutti y Ortega (2010) manifiestan:

> Tales acepciones fueron fundamentales en cada período de la historia, en tanto hacía evidente la capacidad inventiva del hombre y el poder de la filosofía para revelar los secretos que permanecían ocultos. Pero los cambios paradigmáticos que presenta la historia contribuyeron a varias revoluciones del pensamiento, las cuales traen controversias, discusiones y contradicciones alrededor de la noción de *infinito*. (p. 3)

En otras palabras, es evidente entonces que la noción de lo *Infinito* que iba resultando del proceso de reflexión y análisis continúo al cual era sometido la lógica y el razonamiento humano, en el tiempo, fue originado, en un principio, a partir de simples, pero enigmáticos, problemas como la infinitud del universo, la eternidad de la materia en el tiempo y el carácter inexhaustivo de la estructura que la compone. Estas cuestiones, asociadas a la conciencia colectiva como algo abstracto e inasequible fueron fuente de inspiración para muchas personas a lo largo de la historia, quienes trataron por todos los medios de hallar soluciones satisfactorias que ayudaran a la formalización, si es posible, de un conocimiento de lo *Infinito* que profundice en su propia esencia.

No obstante, con respecto al concepto de *Infinito*, este todavía representa un término indefinido y de descripción imprecisa, "el conocimiento matemático ha hecho grandes avances gracias al *Infinito*, protagonista de dos de las mayores revoluciones en la historia de la matemática como lo fueron: la creación del *cálculo infinitesimal* y la *teoría (transfinita) de conjuntos*"(Ob. Cit., p. 4). Ahora bien, en el cálculo infinitesimal no se había planteado el problema de su fundamento y el del orden técnico hasta entrado la edad contemporánea. Por lo que, "la forma demasiado intuitiva con que se servía de las nociones de infinito y de continuo provocaba la existencia de una dificultad de orden técnico" (Blanché, 1973; p.94), originando según Blanché (1973) interrogantes como la siguiente: "¿cómo era posible que un instrumento tan eficaz se fundara en bases cuya racionalización no era muy segura?" (p.93).

Así, el término "cálculo infinitesimal", resulta muy vago y ambiguo, ya que supone, sin determinarlo exactamente, que hay una correspondencia entre el *cálculo* y el *Infinito*; sin embargo, "¿qué es el infinito allí?, ¿es un 'objeto` para el cálculo, o una propiedad del cálculo mismo?...¿o se trata de una filosofía de la naturaleza? "(Burbagey Chouchan,2002, p. 6). Leibniz no duda en afirmar que: "todo va al infinito en la naturaleza", o que "(la naturaleza) hace entrar el infinito en todo lo que ella hace". (Burbagey Chouchan, Ob. Cit., p. 6). En concordancia a lo anterior planteado, Cantor (2004), establece:

> Existe una diferencia esencial entre los conceptos de un infinito potencial y un infinito actual. El primero es una magnitud variable que crece más allá de cualquier límite finito, mientras que el segundo constituye una cantidad (quantum) en si fija y constante que se encuentra más allá de toda magnitud finita. A pesar de ello, la confusión entre ambas nociones es demasiado frecuente. No es raro encontrar, por ejemplo, concepciones de diferenciales que hablan de estos como si se tratara de magnitudes definidas infinitamente

> pequeñas, mientras que, en realidad, se trata simplemente de magnitudes subsidiarias variables a las que debe considerarse, de manera arbitraria, pequeñas, pero que desaparecen por completo en los resultados finales de las operaciones. Esta es la razón por la cual Leibniz se refiere a ellos como ficciones (Carta publicada en la revista *Signos Filosóficos*, 2004, p.182).

Como puede observarse, al hablar sobre la naturaleza de *Infinito* en cuanto a número, se puede establecer una serie de argumentos a partir de esto. A través de la historia, muchos han optado por su rechazo y descalificación a priori, tales como Aristóteles, Euclides, Euler, Newton, Leibniz, entre otros; puesto que no resulta directamente mensurable y mucho menos asequible. En relación a esto, se puede plantear si el *Infinito* "¿es tanto menos concreto o tanto menos físico que "dos", por ejemplo?"(Marc y Leblond, 2004; p.204), de esta manera, se puede argüir que "el concepto del numero "dos" radica, pues, en la supuesta identidad de los objetos de un par y en una (la) característica común a todos los pares" (Marc y Leblond, Ob. Cit.,p.204), esta concepción de número entero se muestra en relación con la experiencia inmediata, mientras que la "idea de número infinito en el fondo no pide más que un paso suplementario bastante modesto"(Marc y Leblond,Ob. Cit., p.204).

Efectivamente, siguiendo el mismo orden de los planteamientos, se pueden diferenciar dos modos en el cual el *Infinito* interviene, el *Infinito cardinal* y el *Infinito de tipo ordinal*. El primero, en palabras de Marc y Leblond (2004), "se presenta cuando tratamos con conjuntos infinitos de objetos, de conceptos o de tamaños. El ejemplo más frecuente es el conjunto de los puntos de una recta o de un segmento o, (…) el conjunto de los números reales" (p.205). En este sentido, manifiestan que:

> Si, en efecto, la prohibición (que formulaba el dogma neopositivista) de introducir en la teoría cualquier concepto que no fuera "directamente mensurable" se tomara en serio, el físico debería renunciar tal vez a los números reales, ya que la infinitud de sus decimales los pone fuera de la experiencia directa. Debería utilizar sólo decimales finitos y no considerar $\sqrt{2}$, ni π, ni e, etc. como "números verdaderos", mejor aún, racionales en desarrollo decimal infinito, tales como ${}^{1}/_{3} = 0.33333 \ldots$ o ${}^{1}/_{7} = 0.142857142857142 \ldots$ que se volverían sospechosos. (…) Por ello, se volvería caduco todo el arsenal de la

> teoría de las funciones de variable real (continuidad, diferenciabilidad, etc.). (p.205)

Ahora, en tanto a su segunda forma de intervención, el *Infinito ordinal*, según Marc y Leblond (2004), "ya no se trata de la infinitud de un conjunto de entidades conceptuales o de dimensiones físicas, sino de los valores numéricos mismos de tales dimensiones –energía, velocidad, número de partículas, etc. –" (p.206).

Por otra parte, al hablar de lo infinitésimo o lo infinitamente diminuto, este trae consigo las mismas paradojas y antinomias que lo infinitamente grande, a saber, siguiendo a Ortiz (1994), "Como un punto carece de la dimensión longitud, no importa el número finito de puntos que tomemos, jamás podrán constituir un segmento de recta, el cual si posee longitud" (p.75). Por lo que, de acuerdo a este planteamiento, se puede conjeturar, según las expresiones del autor mencionado, "que todo segmento de recta, toda región del plano o del espacio debe estar constituida por un número infinito de puntos. De la misma manera, podemos considerar que un intervalo de tiempo está constituido por un número infinito de instantes" (p.75).

De los anteriores planteamientos se puede inferir, tal como afirma Lavine (2005), que "ya a partir de la mera naturaleza del número irracional[1], parece necesario comprender plenamente el infinito matemático antes de que sea posible una adecuada teoría de números irracionales" (p.22). Lo cual trae como consecuencia, que "sin una teoría consistente del infinito matemático no hay teoría de los números irracionales; sin una teoría de los números irracionales no hay análisis matemático de ninguna clase, ni siquiera alguno que remotamente se parezca al que actualmente tenemos (…)" (Lavigne, Ob. Cit., p.22). Por lo tanto, "la empresa más importante que enfrentan los matemáticos es al parecer la construcción de una teoría satisfactoria del

[1] Y por consiguiente la del números real, como ampliación directa que resulta de integrar los demás conjuntos numéricos.

infinito" (Lavine, Ob. Cit., p. 22). Cabe mencionar, lo que se conoce actualmente de *Infinito*:

> No comenzó como un esfuerzo para producir una teoría del infinito, (…) empezó más bien con el intento de esclarecer los fundamentos del análisis, y específicamente del cálculo – es decir, surgió a partir del desarrollo de la teoría de razones de cambio y de áreas bajo las curvas –. En gran parte, el infinito ha entrado en las matemáticas actuales como resultado de algunos intentos de dar sentido a la noción de una curva o de una función arbitraria" (Lavine, 2005; p.23)

La noción de Infinito. El conflicto psicopedagógico y didáctico:

Por otro lado, cuando se aborda el tema de la comprensión, diversas teorías de aprendizaje que existen en la actualidad se centran en el estudio de las concepciones y las representaciones que los estudiantes poseen en relación a los diferentes objetos de conocimiento, ya que estas explican que para alcanzar un aprendizaje significativo se necesita partir de las concepciones previas e ir interactuando con estas para ir construyendo constructos cognitivos más avanzados que permitan adquirir nuevos conocimientos, es decir, construir estructuras de pensamiento avanzado modificando y acomodando la organización cognitiva del esquema de comportamiento que permitan acoger nuevos objetos o eventos desconocidos en primera instancia para el sujeto. Con respecto a lo expuesto, cabe mencionar que:

> En ocasiones, las concepciones pueden, además, interferir en la adquisición de un nuevo conocimiento. Cuando se habla de la concepción del infinito, se consideran todas las representaciones que las personas recuerdan, actualizan y expresan con relación a situaciones y obstáculos en los que interviene esta noción, incluyendo toda la variedad de representaciones que se extienden desde lo que algunos autores denominan intuición del infinito (Fischbein, Tirosh, & Hess. 1979; Tirosh, 1991, citado por Montoro V. y Scheuer N. 2005, p. 2), hasta aquellas congruentes con la conceptualización matemática contemporánea del mismo. (Montoro y Scheuer, 2005, p. 2).

Asimismo, en una investigación realizada por Arrigo y D'Amore (1999), en el cual se trabajó con una muestra de 287 estudiantes de edad variable entre 15 y 18 años (específicamente con edades comprendidas de 17 a19 años en el caso de Italia y de 16 a 18 años de Suiza), pertenecientes a los últimos grupos de escuela preparatoria en los países de Suiza e Italia, a los cuales se les mostró un video donde se había grabado tres demostraciones relacionadas a tópicos que implican de diferentes maneras el *Infinito*, así como también, de una manera particular, el teorema de Cantor referente a la equipotencia entre el conjunto de los puntos de un cuadrado y el conjunto de los puntos de uno de sus lados(Arrigo y D'Amore, 1999), se obtuvieron los porcentajes siguientes[2] evidenciadas en la tabla adjunta[3]:

Segmentito-segmentote	**Formas Periódicas**	**Teorema de Cantor**
38. 0 %	53 %	67 %

Datos tomados de Arrigo y D`Amore (1999, p.17)

En relación a esta investigación D`Amore (1999) explica lo siguiente en relación al Teorema de Cantor:

> Si bien los estudiantes tenían los prerequisitos necesarios para comprender este teorema, lo rechazan y, en el caso de aceptación, se hace por motivos institucionales (no solo de contrato) y no por motivos de comprensión (…). Entonces, si bien sean bastantes los estudiantes que parecen dispuestos a aceptar el resultado del teorema por motivos institucionales, un análisis sucesivo más refinado demuestra que, por el contrario, el 67% lo rechaza (estos, por lo menos, lo entendieron; queda el problema de saber si el restante 33% entendió verdaderamente lo que se propuso). Los obstáculos para el aprendizaje, analizados a fondo en aquella investigación, son tanto de tipo epistemológico, como de tipo didáctico. Por lo que la escolarización no solo se refiere al saber conceptual, sino también al argumentativo (por ejemplo, las demostraciones) y a las actitudes. (p. 329)

Igualmente, una investigación realizada por D'Amore, Arrigo, Bonilla, Fandiño, Piatti, Rodríguez, Rojas, Romero y Sbaragli (2006), desarrollado en conjunción entre:

[2]Estos porcentajes indican los alumnos que no entendieron las demostraciones realizadas en el video.
[3]En el cual las categorías: *segmentito – segmentote*, *formas periódicas* y *el Teorema de Cantor* se refieren a: 1) Presentación de la problemática y demostración del hecho de que en el plano puntual dos segmentos de diferentelongitud son equipolentes, 2) Presentación y demostración del hecho de que 0,39 = 0,4; y 3) Presentación y demostración del hecho de que en el plano puntual un cuadrado es equipotente a uno de sus lados.

NRD Bologna, Italia, ASP Locarno, Suiza y MESCUD Bogotá[4], Colombia. Se obtuvo una serie de informaciones y conclusiones con relación al *sentido del infinito*, estas fueron resultado de la aplicación de un instrumento, donde se realizaron una serie de preguntas a los estudiantes italianos y suizos, estudiantes con edades comprendidas entre 17 y 19 años, y que, además, ya habían estudiado el argumento *infinito matemático*. A continuación, se mencionan algunas de estas preguntas con sus resultados:

En el ítem Nº 3 se plantea: *A pesar del hecho que entre dos racionales diferentes hay infinitos racionales, ¿crees aún que los números racionales son tantos como los naturales?*, donde arrojó el ***69,32%*** de respuestas positivas, sin embargo, hay que agregar que este resultado no se debe a una verdadera comprensión, sino, por el contrario, por el efecto del fenómeno de aplastamiento[5], que presentan los estudiantes, esto quedó manifestado posteriormente sobre la base de la entrevista clínica donde el ***67%*** responde afirmativamente, los dos conjuntos son equipotentes, pero sólo porque los dos conjuntos son infinitos. Por consiguiente, no se logra percibir la igualdad $|\boldsymbol{N}| = |\boldsymbol{Q}|$ como un hecho intuitivo[6].

Por su parte, en el ítem Nº 4.a *¿Entre 0 y 1 hay más números reales o más números racionales?* y en el ítem Nº 4.b*¿Hay más números reales entre 0 y 1 o más números racionales en todo el conjunto Q?*, se puede observar que ambas son la misma pregunta pero realizada de forma diferente, no obstante, se obtuvieron un porcentaje diferente en sus respuestas, así en el ítem 4.a cerca del ***60%***de los

---

[4]**NRD** (Núcleo de Investigación en Didáctica de la Matemática, Departamento de Matemática, Universidad de Bologna, Italia) desarrollado en colaboración con la ASP (Alta escuela Pedagógica, Locarno, Cantón Ticino, Suiza) y MESCUD (Matemáticas Escolares de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia).

[5]**Aplastamiento:** Fenómeno según el cual "el estudiante considera que todos los conjuntos son infinitos, en cuanto infinitos, tienen la misma cardinalidad" (D'Amore, et al. 2006, p. 4)

[6] El símbolo | | indica el cardinal de un conjunto dado, en este caso, se lee el cardinal de ***N*** es igual al cardinal de ***Q***.

estudiantes respondieron correctamente, al parecer habíancomprendido el hecho de que la cardinalidad de $\boldsymbol{R}$ es mayor que la cardinalidad de $\boldsymbol{Q}$, pero que al verificarse dicho aprendizaje mediante un segundo ítem como el 4.b se muestra un claro descenso del ***60%***a un ***35 %***de respuestas correctas. Lo cual indica, que la estimación parece requerir habilidades de un nivel avanzado, debido a que la desigualdad existente $|\boldsymbol{Q}| < |[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]| \subset |\boldsymbol{R}|$ no es del todo percibida.

Es evidente entonces, que cuando se plantea al estudiante estos procesos infinitos durante una edad en donde se mantienen esquemas finitos y concretos hay que tener en consideración, además, el hecho de que el estudiante debe abandonar sus esquemas previos finitos para así ingresar en el campo de la infinitud y adquirir nuevos esquemas que cognitivamente hablando presentan muchas contradicciones (Garbin, 2005b). Un ejemplo de ello es el siguiente:

> Los nuevos conceptos e ideas matemáticas entran en contradicción con los esquemas finitos previos. Empiezan a suceder cosas "extrañas", como que dos segmentos de recta de longitud distinta tienen la misma cardinalidad, o que el punto, representado con una marca ocupa espacio, no tiene dimensión, etc… Algunos alumnos entre 16 – 17 años que al ser preguntados sobre la posibilidad de si al dividir un segmento, AB, por la mitad, luego por la mitad, y así sucesivamente, el punto de bisección llega a coincidir con el punto extremo del segmento, contestaron afirmativamente y de manera finita, considerando a los puntos de bisección con dimensión. (Garbin, 2000, citado por Garbin, 2005b, p. 173).

Ahora bien, en la actualidad, en las instituciones, universidades u otra institución en las que se imparta la matemática como objeto de enseñanza, es normal manejar diversos conceptos que estén relacionados a la noción de *Infinito*, sea explícita o implícitamente, y que a su vez manifiesten problemas para comprender o resolver situaciones que involucren colecciones infinitas, cálculos numéricos y algebraicos, así como también representaciones geométricas; es decir, tópicos habituales de la enseñanza como decimal periódico, número real, sucesiones, series, asíntotas, límite, derivada, integral, fractal, geometría no euclidiana y proyectiva, cardinal de un conjunto, entre otros tópicos, que son fundamentales para la formación integral del sujeto. “Este carácter singular del infinito y el inevitable interés que despierta entre los estudiantes su mención o cualquiera de sus paradojas constituye una buena razón para estudiar con detalle sus características cognitivas”(Belmonte y Sierra, 2010, p. 141).

Con referencia a lo anterior, se tiene que la inserción en el currículo de la noción de infinito y en los textos escolares presenta una distinción con respecto a otras concepciones, ya que no se define ni se formaliza en algún texto de manera precisa o detallada. Por tanto, se presenta que desde edades muy tempranas, aunque se ejemplifique para representar la numerosidad de un conjunto, hasta la culminación del bachillerato, con la introducción aproximada a la idea de Límite, existe la dificultad de hallar referencias concretas en relación a su significado dentro de un contexto educativo, por lo que, el *Infinito* se maneje desde una perspectiva vaga o ambigua, como carácter simbólico o como un sinónimo de muy grande o muy pequeño (Belmonte y Sierra, 2010).

Por otra parte, la formación de un esquema conceptual relacionado a la idea de *Infinito*, el cual sea lo adecuadamente completo, supone un grado de abstracción inusual en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En cuanto a los registros semióticos que se utilicen para presentar y representar los diferentes aspectos del concepto tendrán, en este caso, una repercusión crucial en la actitud de los estudiantes (Duval, 1995; Garbin y Azcárate, 2002). En general, “establecer la definición conceptual no es tarea trivial en matemáticas y hacerlo con el infinito, en particular, presenta problemas adicionales que no es posible obviar” (Tall y Vinner, 1981; citado por Belmonte, 2009). Teniendo en cuenta esto, Belmonte y Sierra (2010) señalan:

> (…) la generación de un *esquema conceptual* (Tall y Vinner, 1981) en torno a la idea de infinito, que sea suficientemente rico, supone un grado de abstracción poco común en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; en particular,

> la identificación del sistema de *metáforas* asociado a tal concepto contribuirá a la definición y comprensión del esquema. (p. 141)

De igual manera, se tiene que “la idea de *infinito actual* es metafórica y el mecanismo de metáforas permite conceptualizar el resultado de un proceso infinito pero tomando en cuenta, además, que las ideas abstractas adquieren la estructura inferencial de la experiencia física, corporal y perceptiva” (Lakoff y Núñez, 2000; Sfard, 1994; citado por Belmonte, 2009, p. 13). Asimismo, la doble coyuntura histórica desarrollada alrededor de la noción de *Infinito*, ya sea su acepción *potencial* o *actual*, implica una recopilación de representaciones conceptuales asociadas a ambas nociones, teniendo así lo dinámico o lo estático, lo indefinido o lo definido, lo divisible o lo indivisible, entre otros términos, que a su vez de enriquecer dicha noción suponen significativos obstáculos didácticos y epistemológicos en el proceso de su comprensión (Belmonte, 2009).

Como puede observarse, en la historia el concepto de *Infinito* dado por Aristóteles es una noción potencial que imperó durante mucho tiempo en la historia hasta muy entrado el siglo XIX, con la incursión de las teorías de Cantor en la matemática, aunque hay que reconocer que la noción potencial de *Infinito* ejerció gran influencia para el tratamiento de este concepto. Atendiendo a esto, Fischbein (1982; citado por Garbin y Azcárate, 2001), ha expuesto que esta concepción potencial de *Infinito* responde a la interpretación intuitiva del mismo, mientras que el *Infinito actual* es más una noción contraintuitiva, esto queda evidenciado en su explicación siguiente:

> Un objeto potencialmente infinito (por ejemplo una línea que puede ser extendida indefinidamente) tiene un significado “conductual”. Una operación potencialmente infinita también tiene un significado “conductual” (por ejemplo dividir indefinidamente un segmento). Un infinito actual no tiene un significado conductual, por tanto no es congruente con una interpretación intuitiva. (p. 55)

En consecuencia, el paralelismo existente entre el desarrollo histórico de la noción de *Infinito* y el de su incorporación al argot matemático de los estudiantes, así como también al de la formación de sus esquemas mentales representativos de dicho objeto y los que dependan de su manipulación cognitiva, exige repasar las principales líneas en las cuales se originó tal concepción, ya que proporciona las herramientas para realizar una primera aproximación a los problemas de su aprendizaje (Belmonte, 2009).

Esto es, el análisis epistemológico y didáctico de sus fundamentos, por medio del análisis histórico – crítico de algunos conceptos matemáticos que son presentados en la enseñanza, para así reducir la brecha que se suscita entre el saber sabio y el saber enseñado, es decir, estableciendo las diferencias existentes que se da entre el objeto de enseñanza y objeto de la ciencia, debido al reduccionismo al cual se ve sometido para garantizar su comprensión por parte de los estudiantes, esto es la ilusión de transparencia de los objetos que muchas veces introduce concepciones epistemológicas erróneas en el proceso de enseñanza. Ahora bien, en función a lo planteado por Tall y Dubinsky (1991, citado por Belmonte, 2009) se tiene que:

> La presencia en el currículo del *Infinito*, y por ende en los textos de matemáticas, a lo largo de toda la enseñanza secundaria y primeros cursos universitarios conlleva una manipulación insegura y una encapsulación incompleta por parte del estudiante. En consecuencia, si el proceso no se convierte adecuadamente en objeto, el concepto en cuestión será una fuente clara de importantes errores en la interpretación de resultados, en especial en el campo del análisis matemático. (p. 14)

Por lo que, se hace necesario el estudio y análisis de los obstáculos en la enseñanza de las matemáticas el cual es introducido en relación conjunta entre la epistemología y la didáctica, ejemplo de esto, por mencionar algunas, las investigaciones realizadas por Brousseau (1983); Arrigo y D`Amore (1999 2002, 2004); Artigue (1990); Azcárate (2003); D'Amore, et al. (2006); Garbin y Azcárate (2002); Garbin (2005a, 2005b); Belmonte (2009); Cescutti y Ortega (2010); D`Amore (2011), entre otras. Es por ello, que situar un problema reside en encontrar una situación o medio didáctico en la cual el estudiante emprenda una serie de cambios concernientes a una misma cuestión para así afrontar aquella dificultad cognitiva que se constituyen un obstáculo para él, sobre la que se va apoyar para la construcción de su conocimiento.

Además, se debe tener en consideración lo planteado por Gascón (2002) en relación al Programa Cognitivo sobre el problema de la educación Matemática, entendiendo que cuando se percibe el nombre de un concepto matemático, lo que suele ser evocado o recordado no es la definición del concepto sino el "esquema conceptual"(concept image) (Tall y Vinner, 1981); por lo que, se debe tratar de desarrollar en el estudiante un pensamiento matemático que le permita una manipulación dual de un mismo símbolo, ya sea como proceso que generan objetos o como objetos a los cuales se les aplican procesos para obtener nuevos objetos, esto es la conformación de estructuras o sistemas de pensamiento poéticos o autopoiética en su seno.

En tal sentido, un estudio realizado por Garbin (2005a) estuvo orientado bajo la influencia de la Teoría del Pensamiento Matemático Avanzado, teoría cognitiva desarrollada por Tall y Dreyfus, para así analizar los efectos que tiene la percepción de los estudiantes universitarios, con conocimientos previos de cálculo diferencial e integral. En función de esto, la autora trata conceptos relacionados a la teoría ya mencionada en el mismo párrafo, los cuales son: primero el *concept image*[7] o lo que se conoce como *esquema* conceptual, y segundo la *informal image*[8] *y formal image*[9] (Tall, 2001; citado por Garbin, 2005a, p. 63), o dicho de otra manera la *imagen informal y formal*.

[7] Se entiende por: "El conjunto de todas las imágenes mentales del estudiante asociadas al concepto, juntamente con todas las propiedades que lo caracterizan" (Tall, y Vinner, 1981; citado por Garbin, 2005, p. 63).
[8] La imagen informal hace referencia a "algún tipo de imagen que se tiene antes del acercamiento del estudiante con teorías axiomáticas" (Garbin, 2005, p. 63)
[9] Por su parte, la imagen formal consiste en "la parte del esquema conceptual que es formalmente deducido de los axiomas" (Garbin, 2005, p. 63).

En consecuencia, los esquemas conceptuales asociados al *Infinito actual* en la enseñanza de la matemática, presentan una serie de problemas expresados en lenguajes matemáticos disímiles como lo son: el verbal, el geométrico, el gráfico, el algebraico y el analítico donde estos lenguajes según Garbin y Azcárate (2002) "genera contextos lingüísticos matemáticos diferentes. Y cada lenguaje matemático utiliza una combinación de ciertos registros de representación semiótica que pueden ser del tipo lingüístico (lenguaje natural, escritura algebraica, lenguaje formal…) o de otro tipo (figuras geométricas, gráficos cartesianos, esquemas…)" (p. 94). Con relación a lo planteado, es pertinente señalar lo expresado por Azcáratey Camacho (2003):

> De acuerdo con las palabras de Dreyfus (1991), "comprender es un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante" y es el resultado de "una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales". Cuando nos referimos a procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático avanzado, pensamos en una serie de procesos matemáticos entre los que destaca el proceso de abstracción que consiste en la substitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente. (p. 136)

Por otro lado, en cuanto a la noción de límite, Miranda, Navarro y Maldonado (2007) expresan que la historia evidencia "que las paradojas del infinito promovieron reflexiones profundas en relación a los conceptos matemáticos, que llevaron a conclusiones más satisfactorias, a definiciones más precisas y rigurosas, resolviendo el problema causado por el infinito potencial y el infinito actual" (p.4). No obstante, en la matemática escolar existe el enfrentamiento de lo intuitivo y lo formal dentro de los estudiantes, un ejemplo de ello Miranda, et al. (2007), en cuanto a los conflictos cognitivos que surgen en la resolución de problemas relacionados al límite, investigación realizada en la Universidad Autónoma de Guerrero de México, lo plantean de manera siguiente:

> "Una función constante $f_{(x)} = k$no tiene límite". ¿Por qué? Porque "no satisface" la siguiente definición: Sea a un número real contenido en un intervalo abierto y sea f una función definida en todo el intervalo (cerrado), excepto posiblemente en a, y sea L un número real. Entonces $Lim_{x \to a}\, f_{(x)} =$

> Lsignifica que f (x) puede acercarse arbitrariamente a L si x se elige suficientemente cercano a a (pero $x \neq a$). Ya que si se aplica la definición se observa que hay "un absurdo" o una imposibilidad para responder la pregunta: ¿a qué valor L puede acercarse una función constante si x se elige lo suficientemente cercano a a?"Contradicciones" como esta inciden en la falta de una explicación satisfactoria e intuitiva, lo cual constituye un conflicto cognitivo, hecho que fue obtenido o corroborado con tres estudiantes en una experiencia de clase. (p.4)

En este trabajo se analizaron varios aspectos interesantes a nivel epistemológico, didáctico y cognitivo en concordancia con la noción de Límite, los cuales las autoras los identifican y los relacionaron con aspectos teóricos señalados por otros investigadores en el área. Así, en la parte epistemológica Miranda, et al. (2007) explica:

> Cornú (1991) señala los obstáculos epistemológicos siguientes: El fracaso de la unión entre geometría y aritmética, tal como ocurre en el caso del cálculo del área del círculo; la noción de lo infinitamente grande e infinitamente pequeño; el aspecto metafísico de la noción de límite; y ¿el límite es alcanzado o no? (p.5)

De igual forma, en relación al aspecto didáctico plantearon que "El concepto de Límite presenta dificultades u obstáculos debido a su naturaleza, al currículo y a los métodos de enseñanza del profesor" (Miranda et al., 2007, p.5). Además, revisaron los planes y los programas de estudios a nivel curricular de la universidad señalada encontrando:

> (…) que para las preparatorias se tiene el libro de texto: Matemáticas V (Calculo Diferencial), donde se expone una de las paradojas de Zenón (Fernández, 2005; Hitt, 2003); mientras que en la licenciatura no se expone ninguna para formar el concepto de límite y su definición, sino solamente en el tratamiento de las series infinitas de dos textos bibliográficos. (p. 5)

Siguiendo este orden, las autoras Miranda, Navarro y Maldonado (2007), en el aspecto cognitivo señalan una de tantas causas de estos problemas en la enseñanza, entre las cuales localizaron lo manifestado por Sierpinska (1985, citado por Miranda, et al., 2007) donde este explica:

> (…) el aspecto cognitivo (…) presenta obstáculos de aprendizaje, tales como: la persona rehúsa admitir que el paso al límite es una operación matemática, la

> dificultad de eliminar el problema del infinito al tomar tantos términos como sean necesarios, se fija más la atención en funciones monótonas, y se usa más el lenguaje natural que símbolos usuales en el paso al límite. (p. 5)

Esto se evidenció en uno de sus ítems clave planteado en forma de proposición, esta se realizó a un grupo de trece 13 estudiantes que habían cursado Cálculo Diferencial e Integral I y Geometría Euclidiana de la universidad ya mencionada. La proposición dice expresamente lo siguiente: "*No existe ningún polígono regular inscrito en un círculo, o circunscrito al mismo, de* $n \geq 3$*,* $n \in N$*, lados cuya área sea igual al del círculo* πr^2"Miranda, et al. (2007, p. 5), este problema "es una afirmación verdadera, pues no se indica que *n* "tiende al infinito" y cuando se indica esa operación entonces se dice que el área del círculo es el límite del área de polígonos regulares inscritos y circunscritos" Miranda, et al. (2007, p. 5).

Como resultado, obtuvieron que 7 de los estudiantes, un ***53,85%***, "respondieron que la afirmación era verdadera, es decir, *n* no puede tender a $+\infty$, pues *n* es un número natural"Miranda, et al. (2007, p. 6); mientras que 6 de ellos, un ***46,15%***, indicaron que era falsa, interpretando de esta manera "el área del círculo como límite de áreas de los polígonos regulares inscritos y circunscritos, ignorando que el número de lados de dichos polígonos es $n \geq 3$, donde $n \in N$, o sea, dieron el paso al límite: *n* tiende a $+\infty$ "Miranda, et al. (2007, p. 6). Con el fin de aclarar estos resultados, se realizó una discusión entre ellos mismos de las respuestas individuales de cada uno y por equipos sugirieron una propuesta de solución, en consecuencia se consiguieron con otros datos de interés, Miranda, et al. (2007) así lo expresa:

> Donde se observa que la frase "tiende a" lo manejan como aproximación, el límite no se alcanza, tal como lo definió D'Alembert, y efectivamente, no operan adecuadamente con el límite. Su idea entra en conflicto con la idea matemática que consiste en mostrar claramente que su respuesta es correcta. Además, al calcular el límite del "área" $A = {}^{nlr}/_{2}$ cuando $n \to +\infty$el "área es infinita". Otros, insistieron en que el límite esπr^2 sin poder mostrarlo, y sólo el equipo cuatro pudo mostrar este resultado. (p. 7)

Todo lo anterior explicado, muestra diversas consideraciones importantes a tomar a la hora de introducir conceptos o nociones en la enseñanza de la matemática, en este caso la concepción de Límite, ya que este se sirve de varios sistemas de representación (aritmético, geométrico, algebraico y topológico), por lo que representa diversos problemas en cuanto al pasaje entre sistemas, incurriendo así el denominado deslizamiento metacognitivo, ya señalados en un principio por Brousseau (1983) y por Arrigo y D'Amore (1999).

Asimismo, la idea de Límite se basa en nociones fundamentales a la hora de su comprensión y su construcción, entre estas, cabe mencionar, la noción de número y la noción de *Infinito*, las cuales no han sido lo suficientemente abordados y estudiados en el sistema educativo, dejándose como nociones sin importancia manejadas desde la intuición por parte del estudiante desde su experiencia sensible.Es conveniente recalcar, que el Límite es un tópico importante en el cálculo infinitesimal, pero mucho más lo es el estudio de la noción de *Infinito*, ya que en este se fundamenta el cálculo mismo (Burbage y Chouchan, 2002). Con respecto a esto, Hitt(2003) explica:

> En la enseñanza de la idea de límite, en lo referente a las técnicas algebraicas y al evalúo de límites de una función "el profesor no introduce en ningún momento un proceso al infinito. Todo lo reduce a una sustitución. Esta idea prevalece a lo largo de los estudios de los estudiantes y son pocos los que logran sobrepasar el obstáculo" (p.10).

Esto evidencia un problema de corte epistemológico que se ha mantenido en la enseñanza, desde siglos anteriores hasta la actualidad, debido a la utilización de una concepción errónea de Límite, así como también la concerniente al Límite *Infinito*, aunque esta noción equivocada proporcione resultados inmediatos en expresiones de la manera $lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1} = \infty$ lleva a los estudiantes a manifestar una conducta condicionada y algorítmica evitando recorrer la demostración formal del concepto evadiendo así su construcción, donde el proceso de inducción y deducción no se ve aplicado de una forma correcta impidiendo el objeto final de la matemática el cual se resume en lo siguiente "análisis y síntesis" (Camacho y Aguirre, 2001).

Otro ejemplo de ello, es el presentado por Hitt y Páez (2004) en su investigación sobre dificultades de aprendizaje del concepto Límite. En una entrevista realizada a un profesor de enseñanza media con respecto al significado de la expresión $lim_{n\to\infty} a_n = 0$, este respondió:

> Significa que todos los términos mayores que un valor conocido de $n\in N$ (por ejemplo k) son iguales a cero, menos un conjunto finito… [con respecto a *'$n\to\infty$'*] semánticamente sería que no tendríamos, no podríamos parar... En esta notación [$lim_{n\to\infty} a_n$] hay dos componentes semánticas totalmente distintas. La idea del uso del infinito, de algo que tiende a infinito y que por eso se conserva la notación como tiende... y el otro significado distinto con la notación de límite como tal, y esta notación, la parte de arriba [se refiere a lim] sí conlleva al significado de algo cierto, de un valor cierto. (p.5)

Por lo que, es evidente, de acuerdo a Hitt y Páez (2004), que la explicación dada por el profesor en relación a la notación es dividida en subcategorías, las cuales poseen su propio significado. Para la notación $n \to \infty$ el significado está asociado a la idea de *Infinito* potencial, mientras que la notación $lim\, a_n$ la relaciona con un determinado valor resultado de un salto al *Infinito* por medio de la operación, en donde el signo de "$=$" actúa con un significado de predicción. En esta entrevista, también se obtuvieron otras declaraciones de interés, entre ellas cabe mencionar la hecha con la expresión $lim_{n\to\infty} a_n = L$, en donde se observa lo siguiente:

> Profesor: *"este proceso, como un proceso infinito, en algún momento cuando estamos en el infinito, esto [a_n] sí sería L"*.
> Entrevistador: En el caso particular de la sucesión $\frac{1}{n}$ ¿dónde se hace cero?
> Profesor: *"No, para ningún número natural... en el infinito sí es cero... si lo puedes pensar que en el infinito sí lo llega a tocar"*.
> Entrevistador: ¿Dónde está el infinito?
> Profesor: *"No se puede representar físicamente el infinito ¿no?, pero si lo puedes conceptualizar, al final de la recta, no lo puedes ver pero sí puedes pensar en el final de la recta"*. Interpretando la notación$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ *"...en el infinito, estaría pensando si me muevo hacía allá* [señala en la gráfica de la función 1/x el lado de los naturales], *si me muevo hacia allá la distancia entre*

> *estos dos* [se refiere a la gráfica de la función 1/x y al eje de las x] *es cada vez más cercana a cero. Entonces, en el infinito en algún sentido, pues, aquí está el infinito* [lo coloca al final del eje positivo de las x] *bueno, no digo eso, éste llega de alguna forma a interceptar al eje x pero en un lugar utópico que sería el infinito... Si yo me fijara al final de la gráfica, el final de la gráfica tocaría al eje x...".*
> Entrevistador: ¿qué es el final de la gráfica?
> Profesor: *"En donde acaba el eje x, [pausa] pero no acaba el eje x".*
> Entrevistador: ¿acaba o no acaba el eje x?
> Profesor: *"No acaba el eje x, entonces no existe el final de la gráfica. Bueno hay algo que sí me choca hay veces... ".* (p.6)

De lo manifestado por el profesor entrevistado, surgen dos aspectos considerados por él, en este caso, uno ligado a la expresión $n \to \infty$ y la otra con lo concerniente a la diatriba de que si se alcanza el límite o no. De allí, se observa que: "Existe la creencia de considerar 'un número tan grande como se quiera' equivalente con la existencia de un final. Incluso, algunos profesores afirman que 'el último elemento en los reales es el infinito'" (Hitt y Páez, 2004;p.6). Además, "la idea de decrecimiento ilimitado también los lleva a la creencia de que 'en algún momento' se hace cero"(Hitt y Páez, 2003; p.6). Cabe mencionar, que estas inquietudes y argumentos se pueden encontrar a lo largo de la historia de la matemática en relación a la idea de límite.

Por otro lado, la conceptualización de la triada: *Infinito matemático*, *Infinitesimal* y *Límite*, ha sido objeto de estudio por muchos investigadores quienes abordan al *infinito*en el contexto del Análisis Matemático desde el punto de vista epistemológico, didáctico, psicológico y matemático. Persiste así el interés por el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos de Límite, Derivada, Número Real, Continuidad, entre otros. Así, Valdivé y Garbin (2008,) plantean:

> Las preguntas ¿Cómo logran comprender los estudiantes algunos de los conceptos del Análisis cuando están presentes los infinitesimales?, ¿Cómo pueden entender los estudiantes el *épsilon* ($\boldsymbol{\varepsilon}$) y el *delta* ($\boldsymbol{\delta}$), los diferenciales ($\boldsymbol{dy}$), ($\boldsymbol{dx}$)?, ¿qué imagen formal tiene un estudiante de esos infinitesimales?, Y ¿qué significado tiene las expresiones $|\boldsymbol{f(x)} - \boldsymbol{l}| < \varepsilon$ **ó** $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| < \delta$para un estudiante que no tiene un esquema conceptual de esos infinitesimales?, perfilan el papel de los infinitesimales como

> infinitamente pequeño en los conceptos claves del Cálculo y por tanto del Análisis Matemático. (p. 415)

En este sentido, también es importante señalar lo manifestado por Artigue (1997) y Cornu (1983) (citados por García, Serrano y Díaz, s/f) donde se identifican ciertos obstáculos de corte epistémicos con relación a la noción de Límite, entre estos se tienen:

- Sentido común de la palabra límite, lo que induce a concepciones persistentes de límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso
- Sobregeneralización de las propiedades de los procesos finitos a los procesos infinitos.
- Aspecto metafísico de la noción, ligado con el infinito, ya que introduce una nueva forma de razonamiento. Obstáculos debidos al "horror al infinito".
- Los conceptos infinitamente grandes y cantidades infinitamente pequeñas. (p.3)

Ahora bien, el ambiente del aprendizaje es un factor poco analizado, puesto que solo se ha considerado teóricamente y no en la praxis. El trabajo y la actividad educativa matemática con el pasar del tiempo exigen con más ahínco la recurrencia de herramientas y estrategias didácticas que estén en consonancia con las nociones abstractas a ser enseñadas. Sin embargo, como se ha planteado el propio lenguaje exhibe incongruencias semióticas que agudizan el conflicto del conocimiento racional y bien fundamentado, lo que trae consigo que la noción de *Infinito* tenga una naturaleza dual.

Es decir, una noción que es manejada en comunidades matemáticas especializadas y selectivas, y otra noción que es utilizada por los estudiantes y educadores diariamente, tal es el caso de los estudiantes cursantes de la asignatura de Cálculo I de la Mención Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo de la República Bolivariana de Venezuela. En este orden de ideas, en una investigación realizada por Cescutti y Ortega (2010), se trabajó con una muestra de 63 estudiantes y arrojó los siguientes porcentajes:

Resultados de la dimensión: Infinito actual.

Indicador	Ítem	Nº respuestas correctas	%	Nº respuestas incorrectas	%	Nº que no respondieron	%
1. Comprende la noción de cardinalidad de un conjunto.	*1,13*	*17*	*22,37%*	*99*	*26,98%*	*10*	*18,18%*
2. Reconoce las diversas cardinalidades entre conjuntos.	*2,5,14*	*34*	*44,74%*	*129*	*35,15%*	*26*	*47,27%*
3. Intuye la noción de conjuntos numerables y no numerables.	*3,4,6*	*25*	*32,89%*	*139*	*37,87%*	*19*	*34,55*
Total	*1-6, 13,14*	*76*	*100%*	*367*	*100%*	*55*	*100%*
Nº r. /Total de r. %		*76 /498 15,26 %*		*367 / 498 73,70 %*		*55/498 11,04 %*	*498/498 100%*

Tomado de Cescutti y Ortega (2010, p. 95)

De acuerdo a los resultados obtenidos por este estudio se puede apreciar que un ***84,74 %*** de los sujetos, a quienes se les aplicó el instrumento, no manifestaron conocimiento ni mucho menos dominio de la noción actual de *Infinito*, de donde se puede desprender las siguientes conclusiones: a) Los estudiantesno evidenciaron dominio de la noción de cardinalidad de un conjunto, asi como también, no evidenciaron dominio de la noción de cardinalidad entre conjuntos como herramienta para la comparación de éstos; b) Los estudiantesno reconocen la distintas cardinalidades existentes (menor, igual o mayor, en pocas palabras lo que establece la tricotomía de la relación *menor que*)entre conjuntos algebraicos o numéricos; y por último, c) Los estudiantes no comprenden o intuyen la noción numerabilidad de un conjunto y mucho menos intuyeron la noción de conjuntos numerables y no numerables.

Además, en este estudio se obtuvieron otros resultados interesantes, los cuales están relacionados a la manera en que se manifiestan los obstáculos epistemológicos asociados a la noción de *Infinito actual*, que a continuación son mencionados:

Resultados de la manera en se manifiestan los obstáculos epistemológicos asociados a la noción actual de infinito.

Error que se manifiesta	***Dependencia***	***Aplastamiento***	***Deslizamiento***	***Total***
f	*100*	*122*	*145*	*367*
Porcentaje	*27, 25 %*	*33,24 %*	*39,51 %*	*100 %*

Tomado de Cescutti y Ortega (2010, p. 109)

Se puede observar que en los sujetos a los cuales se les realizó el estudio manifestaron el error concerniente al fenómeno de deslizamiento[10], el cual fue evidenciado con mayor frecuencia con un ***39,51 %***, por su parte, cabe destacar que el fenómeno de aplastamiento obtuvo un porcentaje significativo de un ***33,24 %***. Esto demuestra la existencia de obstáculos epistemológicos en los estudiantes con relación a la noción de *Infinitoactual*.

Por lo que, los investigadores Cescutti y Ortega (2010) manifestaron que el poco conocimiento con respecto al tópico de *Infinito* y a la insuficiencia de textos u otros documentos bibliográficos, han propiciado el empleo de estructuras de pensamiento y aplicación matemática sin estar consciente de lo que son y representan, por lo que el individuo tiende actuar de una manera algorítmica inducido por una ignorancia funcional dejando a un lado el análisis, la reflexión y la síntesis que conllevan los

[10]**Deslizamiento:**"Se tiene cuando se está hablando de alguna cosa (o en un cierto modo o en el ámbito de un cierto lenguaje) e, improvisadamente, nos hallamos hablando de otra cosa(o en otro modo o en otro lenguaje)"(Arrigoy D'Amore, 1999, p.8).

procesos esquemáticos del pensamiento matemático, apoyados en los resultados que obtuvieron en su investigación.

Siguiendo este orden de ideas, son muchas las investigaciones realizadas en el campo de la enseñanza de la matemática, numerosos estudios han puesto en evidencia que en la educación secundaria e incluso en la universitaria, los estudiantes encuentran serias dificultades de conceptualización cuando se enfrentan con situaciones que implican el infinito (Montoro y Scheuer, 2005). A su vez, en el área de la didáctica son ya diversas las investigaciones atañidas con este tópico, abordados desde distintos puntos de vista y marcos teóricos. Esto se demuestra a partir de lo siguiente:

> Son muchas las investigaciones realizadas, trabajos que representan interés histórico, epistemológico, psicológico, filosófico o didáctico. D`Amore (1996, 1997) recoge muchos títulos (280) del año 1851 al 1996 y muestra con éstos la dirección que han tomado las investigaciones. Después de 1996 siguen apareciendo nuevos trabajos pero más reciente la revista *Educational studies in Mathematics* dedica, el tema del infinito, el volumen 48 (2001) (Garbín 2005; p. 61, citado por Valdivé y Garbín, 2008; p. 415).

Es por ello, que la comunidad científica coincide en que la noción de *Infinito* enfrenta un conflicto pedagógico; por su parte en el breve análisis histórico matemático y filosófico dan cuenta de un vacio epistemológico. Teniendo en cuenta esto, la presente investigación, en una primera instancia, abordará la noción de *Infinito actual* desde un análisis histórico – crítico, que según Blanché (1973) es:

> Para la ciencia, como para todos los demás temas humanos, el presente sólo puede entenderse gracias al pasado. La historia ofrece un buen medio de análisis, separando por fechas y circunstancias de aparición los diversos elementos que han contribuidos a formar poco a poco las nociones y principios de nuestra ciencia. (p. 36)

Por lo que, estudiar la evolución histórico epistemológico de un concepto matemático permite identificar, entre otras cosas, la noción de concepción que de acuerdo a Ruiz (1998, citado por Valdivé y Garbín, 2008) "para un mismo concepto matemático se ha ido sucediendo una diversidad de puntos de vista sobre el mismo que, en su momento, fueron considerados como correctos y posteriormente han sido rechazados o revisados" (p.418). Dicho análisis es relevante para la presente investigación, entre uno de varios aspectos a considerar, puesto que permite diferenciar las ideas, los métodos, las representaciones, el contexto y los conceptos vinculados a la noción imperante de una época histórica, a partir de las investigaciones y trabajos realizados por matemáticos y filósofos representativos. Así como también, permite identificar los problemas que se manifestaron para crear, luego, reflexiones relacionadas a las argumentaciones empleadas por los matemáticos en la historia y a las diversas dificultades que se podrían exhibir en el aula de clases.

El análisis se realizará a través de cinco categorías o periodos históricos, estos son: *Preludio. "Egipto y Mesopotamia, las civilizaciones de los valles fluviales"*,"*El Pensamiento Helénico"*, "*El Interludio Medieval y Moderno"*, "*La Matemática Contemporánea. Siglos XIX – XX"* y "*El Paraíso de Cantor"*, aunque la última categoría no es un periodo en sí, hace referencia a la perspectiva cantoniana del *Infinito*, en el cual el sustantivo paraíso hace referenciaa un elogio expresado por Hilbert (1926)[11]hacia Cantor. Al respecto se conjetura que, estudiando así algunos de los grandes teóricos, filósofos y matemáticos, así como reportes científicos contemporáneos sobre la noción pedagógica y didáctica de *Infinito* permitan establecer una aproximación epistemológica a la noción de *infinitoactual* en la teoría del conocimiento matemático para hallar, si es posible, un concepto universal de *Infinito*que le de uniformidad general a la matemática como ciencia formal.

Además, por todo lo planteado resulta interesante y pertinente intentar profundizar en el proceso de adquisición del conocimiento matemático y que en segunda instancia

[11]D. Hilbert (1926): "Del paraíso que Cantor creo para nosotros, ya nunca nadie nos echará jamás", dando a entender la influencia que ejerció Cantor en su tiempo para ser receptor de tales elogios.

se realizará por medio de este tema "como vehículo de inspección y diagnosis con el fin de conjeturar nuevos aspectos de aquél e incorporar nuevos resultados en el marco teórico existente al respecto" (Belmonte, 2010, p. xi), puesto que, como lo explica Núñez (1990, citado por Belmonte, 2010), "el estudio de la concepción del infinito permite investigar dominios de la actividad mental no basados en experiencias directas -debido a nuestra realidad finita-, permitiéndonos acceder a terrenos muy poco explorados de la actividad puramente mental" (p. xi).

Todo ello conduce a formular la siguiente interrogante: ¿En qué medida es posible construir una aproximación epistemológica de la noción de *Infinito actual* a partir del análisis de los modelos intuitivos y esquemas conceptuales asociados al desarrollo histórico de dicha noción?

1.2 Objetivos de la investigación

1.2.1 Objetivo general

Construir una aproximación epistemológica de la noción de *Infinito actual* para un cambio conceptual a partir del análisis de los modelos intuitivos y esquemas conceptuales asociados al desarrollo histórico de esta noción.

1.2.2 Objetivos específicos

1. Identificar los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de *Infinito*.
2. Categorizar los esquemas conceptuales asociados al desarrollo histórico de la noción de *Infinito actual* de acuerdo a los periodos históricos a considerar en la presente investigación.

3. Distinguir los esquemas conceptualesque poseen los estudiantes sobre la noción de *Infinito* en dos niveles diferentes del sistema educativo venezolano: Educación Media General (para efectos de este trabajo estudiantes del último año) y educación Universitaria (de igual acotación, estudiantes del 4to semestre de Educación Mención Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de Carabobo).
4. Analizar los procesos de aprendizaje de conceptos matemáticos cuyas conceptualizaciones se sirven de los modelos intuitivos que poseen los estudiantes sobre la noción de *Infinito*.

1.3 Justificación de la investigación

La presente investigación es de importancia para la disciplina matemática, puesto que trata de crear una aproximación epistemológica sobre la noción de *Infinito*, con lo que se busca contribuir a solucionar parte del vacío epistemológico existente (vacío que se origina por la perspectiva que han asumido de la matemática como disciplina para la resolución de problemas, por lo que se olvida la parte teórica de ésta) en el estudio de entes y conceptos matemáticos que son esenciales para la edificación de la matemática, propiciando así el desarrollo de conocimientos que permitan abordarlos de una manera didáctica favoreciendo la combinación entre lo matemático y lo pedagógico. Además, a nivel local, la presente investigación pretende ser novedosa como consecuencia directa del tópico escogido para estudio, ya que son muy pocas, por no decir inexistentes, las investigaciones realizadas en Facultad de Ciencias de la Educación en relación a la noción de *Infinito* y sus repercusiones en el campo de la enseñanza matemática.

Asimismo, es relevante señalar algunas implicaciones prácticas de *¿Por qué estudiar la noción de Infinito?*, entre la cuales se puede mencionar los distintos obstáculos epistemológicos que pueden surgir en el aprendizaje de entes u objetos matemáticos, como lo es el *Infinito*. Por lo tanto, la comprensión de estos podría servir de ayuda para la orientación y el mejoramiento de la metacognición del sujeto en la medida de lo posible, de tal manera que se puedan corregir inadecuadas interpretaciones que se presentan cuando se intenta expresar la intuición que se tiene sobre el *Infinitoactual*, debido a la influencia de los lenguajes matemáticos (lenguajes matemáticos distintos así como los identifica Garbin, y Azcárate, 2002; p. 94) u otros conceptos asociados en el problema de estudio. Todo esto con el objetivo de ayudar a promover en el estudiante el desarrollo de un pensamiento coherente y consistente respecto al concepto de *Infinito actual*.

De esta manera, desde la perspectiva didáctica, el estudio de la noción de *Infinito* se convierte en un gran aporte de orden didáctico y pedagógico para la enseñanza del Cálculo y el Análisis Matemático en contenidos como el Límite, la Derivada y la Integral, pues describe las prácticas que se suscitaron alrededor de este ente a través de la historia y también debido a los resultados que se producen a través de la investigación, facilitando así la manera de comprender el proceso de aprendizaje en los estudiantes de conceptos matemáticos clave para poder estructurar constructos más complejos, igualmente puede suministrar orientaciones o una guía para la formulación de una didáctica apropiada para la enseñanza de este tópico o algún otro que se sirva de él, mejorando la tarea pedagógica en el proceso interno de conocimiento de todo aquel que quiere construir y trasmitir un saber.

Es por ello, que cuando se indaga sobre los procesos epistemológicos que impiden un conocimiento avanzado hay que realizar un estudio histórico de la génesis del concepto para así poner en manifiesto aquellos procesos que Bachelard denomina obstáculos y que deben entenderse como algo que derivan del proceso de conocimiento en sí mismo. En pocas palabras:

> Es el acto mismo de conocer, donde aparecen, por una especie de necesidad funcional[12], los entorpecimientos y las confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento y hasta de retroceso, es ahí donde discernimos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos (Bachelard, 2004., p. 15, citado por Barón, Padilla y Guerra, 2009, p. 93).

Por otro lado, este estudio posee una relevancia social, ya que desde el punto de vista antropológico es importante describir las prácticas humanas que se ejecutan en distintas instituciones de manera genérica para evitar introducir aspectos culturales, filosóficos o ideológicos que distorsionen o aumenten la brecha entre el saber sabio y saber enseñado, es decir, el tratamiento que se da al conocimiento científico o docto en el seno de la institución por medio de los mecanismos de producción, y las prácticas ligadas a su uso y aplicación, teniendo en cuenta a su vez la enseñanza del objeto y su transposición, es decir, el paso que se da en la traducción del contexto del conocimiento especializado a un contexto de conocimientos que resulten de fácil aprensión para el estudiante.

Así pues, el análisis epistemológico que propone este estudio, se constituye en un medio para contribuir, entre otras cosas, a la reorientación y a la superación de las prácticas docentes tradicionales, y que posibilitará la elaboración de lineamientos para la formación del docente de educación básica, media – diversificada y universitaria, con base en conocimientos epistemológicos complejos, con una capacidad de análisis crítico y reflexivo sobre el origen y formación de las representaciones mentales y modelos cognitivos que se dan en los estudiantes, tomando en cuenta también la parte didáctica para integrar el conocimiento matemático con la manera en cómo se da la praxis y la transposición de este, por lo que se “pone la actividad matemática y, por tanto, la actividad de estudio de la

[12] “Cuando Bachelard se refiere a una “necesidad funcional” habla de un carácter práctico en el cual, el sujeto en su afán de dar respuesta o explicación a lo que lo rodea, emite razones inmediatas y poco elaboradas desde su experiencia sensible” (Barón, Padilla y Guerra, 2009, p. 93).

matemática, en el conjunto de la actividad humana y de las instituciones sociales" (Chevallard, 1999, citado por D'Amore y Godino, 2007, p.197).

Resulta oportuno mencionar la premisa didáctica expresada por D'Amore y Fandiño (2005) quienes plantean "que a la base de una significativa formación de los futuros docentes de Matemática deba existir un múltiple aprendizaje que va en este orden (entendido también en sentido jerárquico)" (p.8):

Una buena preparación matemática (que debería ser *específica* para la profesión docente)

Una fuerte preparación en cuestiones históricas y epistemológicas de la Matemática

Una profunda preparación en Didáctica de la matemática (incluida, cuando es posible, una reflexión crítica sobre ésta).

Tomado de D'Amore y Fandiño (2005, p.8).

Los autores también analizan ciertas consideraciones de investigaciones anteriores en relación a la premisa expuesta anteriormente, por lo que explican lo siguiente:

> En D'Amore, Fandiño (2004) mostramos como, en Italia, esto es posible y profesionalizante a través de las Escuelas de Especialización postgrado para la formación de docentes de Matemática de la Escuela Secundaria y en otros Países en cursos análogos; mientras que en D'Amore (2004a) se profundizaron las específicas motivaciones que nos impulsan a considerar *esenciales* para el futuro docente una formación epistemológica; no se trata de razones culturales únicamente (…), sino también de razones altamente profesionales. Estas últimas están ligadas principalmente con la problemática de la evaluación del error y, por tanto, con el obstáculo epistemológico. (p.8)

Por lo tanto, se considera que, el presente estudio posee un valor teórico indiscutible porque aglomera en su corpus gran cantidad de información recopilada sobre teorías de interés didáctico y pedagógico, que buscan explicar ¿cómo? el individuo construye el conocimiento de un concepto u objeto, teniendo en cuenta que el conocimiento conceptual es simbólico y argumentado, expresándose así, en símbolos mentales, verbales, escritos o pensados; por lo que "estas imágenes mentales (…) así como el proceso de su manipulación, están sustentada en la experiencia y aprendizajes previos del estudiante" Cuestas (2007, p. 22).

Asimismo, esta investigación proporciona invaluables aportes para la enseñanza de la matemática por la descripción histórica – epistemológica que se realiza sobre la noción de *Infinito* y de los procesos que se han generado a través de este, como lo son el cálculo integral y el álgebra de conjuntos, para así identificar aquellos procesos generadores de obstáculos que impiden la correcta formación de esquemas conceptuales o concepciones, brindando al docente el instrumento para combatir "la ilusión de transparencia de la comunicación didáctica presente en los modelos tomados del aprendizaje, permitiendo diferenciar el saber que la enseñanza desea transmitir y los conocimientos efectivamente construidos por los estudiantes" (Artigue, 1990, p.24).

MARCO TEÓRICO

Con el propósito de fundamentar la presente investigación, se elaboró el marco teórico que de acuerdo a Hernández, Fernández y Baptista (2008, p.64) “Es un compendio escrito de artículos, libros y otros documentos que describen el estado pasado y actual del conocimiento sobre el problema de estudio. Nos ayuda a documentar cómo nuestra investigación agrega valor a la literatura existente”, con lo cual se sustenta teóricamente el estudio exponiendo y analizando las diversas teorías y conceptualizaciones, así como también, las investigaciones y los antecedentes relacionados al problema de estudio.Ahora, una vez dilucidado este aspecto se comienza con su elaboración:

2.1. Antecedentes de la investigación

Son diversas las investigaciones educativas referidas a la concepción del *Infinito matemático* entre las cuales son menester mencionar:

Valdivé y Garbin, (2008); analizaron los procesos de conceptualización de la noción infinitesimal en estudiantes de Licenciatura en Ciencias Matemáticas y la asignatura Análisis Matemático, a partir del estudio de la evolución histórico – epistemológica del concepto infinitesimal para interpretar factores determinantes de los procesos de construcción y concepción de los infinitesimales por parte de los alumnos de un curso de Análisis Matemático. Mediante este trabajo se logró una aproximación a la identificación, descripción y caracterización de siete esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal, de los cuales cinco de ellos están ligados a una diferencia, a una razón aritmética, a un incremento, a un símbolo y a una función y, los dos restantes son identificados como esquemas epistemológicos previos, es decir experiencias previas que le dan sentido a la noción infinitesimal.

Asimismo, Belmonte, (2009); tuvo como propósito observar y analizar el proceso de transición que tiene lugar en la reestructuración cognitiva del esquema conceptual de infinito a nivel colectivo bajo una perspectiva transversal. Llegando a la conclusión que las dificultades para comprender cómo se establece la noción de infinito en la mente del individuo y cómo evoluciona dicha noción sometida al proceso de enseñanza y aprendizaje se deben, dentro de tantos factores, a la propia naturaleza del concepto, que desde el principio presenta un carácter sinonímico de otras expresiones ya existentes en el vocabulario del niño o joven; por el contrario, esto no ocurre de igual manera con la nociones matemáticas más complejas como, por ejemplo, la idea de Límite.

Por su parte, Crespo, C., Homilka, L. y Lestón, P. (2009); presentaron los resultados de una experiencia llevada a cabo con estudiantes de escuela media en relación a las ideas construidas fuera de escenarios escolares, en este caso la idea de *Infinito*, y su influencia cuando llegan a contextos escolares matemáticos, el trabajo fue orientado desde la perspectiva socioepistemológica, puesto que considera a la problemática de estudio como *"*el examen de los fenómenos que se suceden cuando el saber matemático, construido socialmente fuera de la institución escolar se introduce y se desarrolla en el sistema de enseñanza*"* (Farfán, 2003, citado por Crespo et al., 2009). Como conclusión, se obtuvo que conceptos como el de *Infinito*, se construyen fuera de la escuela de manera intuitiva y no matemático, y que cuando entran en el aula, se manifiestan de manera conflictiva, generando así obstáculos epistemológicos al tratar ideas relacionas al *Infinito*, esto es si no se exploran las construcciones anteriores.

Posteriormente, Belmonte y Sierra (2010); elaboraron una investigación con la que se concentraron en estudiar los modelos intuitivos que funcionan ante situaciones que implican la noción de *Infinito*, así como el análisis de su evolución a lo largo de los niveles educativos considerados que va desde la educación primaria hasta el primer curso de enseñanza universitaria. Como resultado de este trabajo se logró identificar tres nuevos modelos que operan cuando un sujeto se enfrenta a preguntas o problemas que requieren del uso de la noción de infinito para su resolución, estos modelos son: los modelos de indefinición, modelos de divergencia y modelo de acotado – finito / no acotado – infinito. Además, se evidenció que estos modelos entran en conflictos bajo determinados contextos, lo que trae consigo contradicciones internas que se reflejan a través de respuestas incoherentes.

Igualmente, Fedriani y Tenorio (2010); realizaron una aproximación a las diferentes visiones que se tienen y se han tenido del concepto de infinito en la historia de la matemática, así como también explicar el papel de *Infinito* en la sociedad actual y comparar la percepción por que esta tiene con respecto el rigor matemático. Como consecuencia del proceso de investigación realizado por los autores se obtuvieron las siguientes conclusiones: primero, en la sociedad, las referencias al infinito están relacionadas más con la trascendencia o con intentos de conseguir notoriedad. Segundo, la comprensión de *Infinito* más accesible para cualquier individuo es la geométrica, puesto que no resulta tan abstracta y por último, la asimilación de infinito representa un problema educativo de difícil tratamiento, pero que puede abordarse con resultados positivos desde el convencimiento de que la idea de infinitud evoluciona con el proceso de aprendizaje y que relaciona distintas materias o disciplinas entre sí.

De igual manera, la investigación realizada por Cescutti y Ortega (2010); donde se analizaron los obstáculos epistemológicos asociados a la noción actual de *Infinito* desde la perspectiva de la teoría de las situaciones didácticas de Guy Brusseau, así como también de los estudios realizados por Bruno D` Amore. Como consecuencia de esta investigación se obtuvieron las siguientes conclusiones: los estudiantes utilizan estructuras o modelos de pensamiento matemático, incluyendo su aplicación, sin conocer lo que verdaderamente significan, lo que da lugar a una actuación algorítmica por parte del sujeto en los procesos matemáticos.

Por otro lado, también se determinó que los obstáculos epistemológicos que se manifiestan en los estudiantes, en primer lugar, se dan través del fenómeno de *deslizamiento* y, en segundo lugar, por medio del fenómeno de *aplastamiento*, lo que trae consigo que los métodos de enseñanza relacionados con la idea de Límite son más reproductivos que productivos, puesto que el estudiante repite los procedimientos enseñados por el profesor siguiendo un algoritmo o "receta", debido a la no utilización de los sistemas de representación semiótica, originando el surgimiento de errores, como el caso del fenómeno de *deslizamiento*, el cual está ligado al pasaje entre diferentes contextos.

Fernandez, C. (2010); realiza una construcción lógica de la secuencia numérica en un contexto ordinal, haciendo especial ahínco por el sistema de relaciones lógicas existente entre sus términos. Se obtuvieron las siguientes conclusiones: Primero las distintas interpretaciones epistemológicas sobre la secuencia numérica se han reflejado en la enseñanza del número en la escuela, por tal motivo los planteamientos conjuntistas introducen los conceptos de cardinal y de correspondencia, con lo cual se producen intentos por reducir la aritmética a la lógica y el número natural a las clases, mientras que los planteamientos aritmetistas respaldan el número ordinal. Segundo, que el dominio de la secuencia numérica es significativa desde la perspectiva relacionada a los modelos ordinales de la lógica formal del número natural, es decir, las competencias ordinales que manifiestan los niños están en relación con los axiomas de los modelos ordinales del número natural.

Por su parte, D'Amore B. (2011); en su investigación *La didáctica del Infinito matemático* se plantea un resumen y análisis de resultados de sus investigaciones anteriores sobre esta noción, así como también evidenciar brevemente los obstáculos que se han manifestado en el desarrollo histórico de este difícil argumento, hasta la demostración de Cantor. Como resultado de esta investigación se obtuvo que la demostración del teorema de Cantor se revela por encima de las capacidades normales de aprendizaje de los estudiantes de las escuelas superiores que aún no han seguido un curso del Análisis y que esto se debe sobre todo a obstáculos de naturaleza epistemológica y didáctica, como se ha mostrado, y, a su vez, debido a dos pasajes en la demostración (deslizamiento y manipulación de las cifras). Asimismo, Las demostraciones de los otros dos teoremas ("segmentito-segmentote" y "formas periódicas", así denominados por los investigadores) resultaron más inteligibles, pero igualmente manifestaron la existencia de obstáculos de diferente naturaleza, como por ejemplo de tipo curricular y cognitivo general.

De igual modo, Fuentes y Oktaç (2011); en esta investigación se aborda él cómo "niñas o niños talento en matemáticas" comprenden el *Infinito* al abordar la paradoja de las pelotas de tenis, con base en una descomposición genética de dicha paradoja. Además, se discutieron y explicaron algunos aspectos teóricos relacionados con las construcciones y mecanismos mentales relacionados con esta noción; así como la manera en que dicho concepto puede ser construido cognitivamente. Como resultado de este trabajo se obtuvo que los sujetos de estudio poseen las herramientas matemáticas para abordar el problema, pero sólo como un algoritmo, puesto que no logran relacionar estas ideas con el contexto del problema que se les plantea, por lo que se evidencia la necesidad de formular estrategias metodológicas que generen desde temprana edad la encapsulación de los números naturales como un proceso reiterativo *Infinito* en un objeto o unidad, esto es estrategias que permitan la consolidación de la noción de de *Infinito actual*.

En este orden de ideas, es importante señalar el trabajo realizado por Salat (2011); el cual se propuso estudiar el pensamiento y el método deductivo aplicado por los estudiantes al enfrentarse a conjuntos infinitos, así como también la construcción y uso de proposiciones por medio de algunos axiomas intuitivos relacionados a la teoría de conjuntos. Se obtuvo como conclusión que los estudiantes que ya habían finalizado el bachillerato a los cuales se les aplicó el instrumento, evidenciaron una tendencia a emplear el principio de que todo conjunto es mayor que cualquiera de sus partes al tratar con conjuntos infinitos, lo cual representa un error; mostrando que la noción de *Infinito* manejado por Cantor, de acuerdo Salat (2011), "aparece tardíamente en la formación matemática de los estudiantes. Quizá porque el concepto de infinito es una construcción del hombre que va más allá de la realidad material" (p. 82).

Cabe destacar el estudio realizado por Fernández (2011); en este se describen cómo los estudiantes expresan verbal y simbólicamente sus concepciones intuitivas sobre la noción de Límite de una función en un punto, y además cómo interpretan y responden a tareas vinculadas con dicho concepto, analizando el significado de determinados términos claves que expresan diferentes facetas vinculadas al concepto de límite, centrándose en delimitar, describir y caracterizar los significados puestos de manifiesto por estudiantes sobre el concepto de límite finito de una función en un punto, al inicio de sus estudios sobre análisis matemático. Como resultado se comprobó que aparte de los significados del concepto de Límite que manifiestan algunas investigaciones anteriormente realizadas, además se asientan nuevos componentes que enriquecen y amplían dichos significados, los cuales surgen de manera natural o inducida por los diversos ítems del cuestionario.

Así como también, otros aspectos que sobresalen en los argumentos manifestados por los sujetos, cabe mencionar los siguientes: "identificación del límite con la imagen del punto; límite como lugar donde cambia de manera brusca la función, ya sea de dirección o un salto; y errores ligados a la confusión de la variable independiente y dependiente" (Fernández, 2011, p. 64). Por otro lado, se identificó en los individuos que el empleo de las expresiones "aproximarse infinitamente" y "no se puede realizar la operación de la función" atiende primero al "uso implícito del sistema de representación numérico y el uso de la expresión denota usos implícitos del sistema de representación gráfico ("hueco") y simbólico ("indeterminación")"(Fernández, 2011, p. 60 – 61).

En suma, todas estas investigaciones convergen en la existencia de obstáculos, ya sean de origen epistémico o didáctico en relación a la noción de *Infinito*, planteando los errores que frecuentemente los individuos cometen en la resolución de problemas que involucre tópicos y contenidos del análisis matemático, así como también geométricos y algebraicos donde se haga uso de esta noción, tal es el caso de las nociones de Número Real, Función, Cardinalidad, Límite y Continuidad. En donde la formación de los modelos intuitivos y los esquemas mentales de los sujetos juegan un papel preponderante para la comprensión y encapsulación de los objetos matemáticos, por ende estos deben ser analizados de manera metódica, epistemológica y didáctica planteándose, además, los conflictos de origen cognitivos abordado por la psicología.

2.2Fundamentación teórica.

2.2.2 Análisis histórico de la noción de Infinito.

Antes de iniciar a dilucidar con relación a este tópico se debe tener presente algunos aspectos fundamentales que son pertinentes aclarar, primeramente hay que considerar *"Lo que hay y lo que es"*, para ello hay que ver lo que se entiende por realidad; la realidad no es más que aquello que se encuentra o se puede encontrar de un modo u otro, así pues, dicho concepto designa lo que hay. Pero no hay que caer en el equívoco de confundir "lo que hay" con "lo que existe", puesto que el verbo existir es un modo muy especifico de haber, propio de ciertas cosas (Marías, 1971).

Aunque, además, se debe advertir que en la teoría de entes se pueden distinguir cuatro tipos de objetos, cada uno con su propia estructura óntica, a saber, se tienen *"los objetos reales"* (*las cosas*), *"los objetos ideales"* (objetos *que son*), estos dos agrupados en la estructura óntica del ser *que es*, *"los valores"* (objetos *que valen*) y *"la vida"* misma (objeto metafísico que alude a la *existencia*), en la cual se encuentran los demás objetos, puesto ocupa un plano ontológico más profundo que el de las otras tres esferas ontológicas (*objetos reales*, *objetos ideales* y *valores*) (García, 2005), debido a que, estas últimas, en palabras de García (2005):

> "están en" la vida; pero ella, la vida, no está en ninguna parte. Por consiguiente, ontológicamente hay una diferencia esencial entre el ente de las cosas reales, el ente de los objetos ideales, el ente de los valores y el ente vida; y es que esos tres primeros entes son entes "en" la vida, mientras que la vida no es "en", no está "en". (p.394)

Sentado esto, el hombre en su interacción con las cosas tiene que habérselas con lo que hay (cosas y objetos ideales), ya que pertenece a su esencia en pocas palabras "lo que hay" es componente suyo, en tal sentido, en que la manera de ser "yo mismo" es el marco de referencia a lo otro que yo, es decir, yo solo soy teniendo que habérmelas con lo que hay, en el cual ese "tener que" en sí mismo no es más que lo que le confiere su carácter real a las cosas. Por ende, el conocimiento se cimienta o parte del supuesto de que hay ser previo a todo conocimiento, puesto "lo que es" es una interpretación de "lo que hay", o sin más el ser es el ser de lo que hay, de donde surge el "ente" como contemplación de lo que verdaderamente hay, Parmenides (citado por Marías, 1971, p. 253) señala: "El ente es y que el único camino de que se puede hablar es este: que es, solo se puede hablar de lo que hay diciendo que es".

En conclusión el hombre en su hecho de conocer "lo que hay" (cosas) y el modo en que se comportan estas por lo que tienen de suyo, surge la interpretación de lo que hay como lo que es, de donde surge que esas cosas que son se convierten en entes. Con relación a esto, Marías (1971) dice:

> Cuando trato de conocer o, lo que es lo mismo, de averiguar lo que las cosas son, parto ya del ser que creo tienen; el mero preguntarme por el ser pone ya su ámbito, el que hace posible la pregunta y le da sentido, y mientras permanezco en él lo identifico, sin más, con lo que hay. Pero este significa, literalmente, quedarse en una interpretación, sin advertir que lo es y confundirla, por lo tanto, con la realidad. Por eso, las cosas cambian de aspecto cuando se toma el ser como interpretación de la realidad; en términos aun más claros, cuando se pregunta uno por el ser de las cosas. (p.255)

Es por ello, en segundo lugar, se tiene que advertir que una interpretación también es una realidad, por el contrario lo que es la realidad de que es interpretación no es la interpretación como tal, por tal motivo es que no se debe confundir una teoría o interpretación de algo con ese algo. De acuerdo a esto, Marías (1971) plantea "las cosas, por tanto, tienen ser, pero no por sí; el ser es algo que hago yo, pero con las cosas; es decir, mi hacer que las cosas (las cosas que hay) sean" (p.258). Para luego, afirmar más adelante lo siguiente:

> Por esta razón, que es decisiva, todo conocimiento de *entes* se funda en una reflexión sobre el ser mismo, de manera que la irrupción de cada uno de los modos de haber no solo requiere una nueva idea del ser, sino una reelaboración de la anterior, de tal suerte que en cada momento se pueda "dar razón" desde el ser de todos los entes,…, en suma: Solo puede hablarse de una idea del ser en cuanto está dando razón de lo que hay (p.259).

La dificultad de esta distinción radica en que como el sujeto o investigador no es el autor original de esas interpretaciones, sino que son fruto de la ciencia, la sociedad e historicidad, es decir, su modo de existencia es social e histórica, así como también científica, como por ejemplo las creencias que les son dadas o recibidas como una realidad misma con la que se encuentra y tiene que habérselas, y que no son obra del, sino todo lo contrario, por lo tanto, les son ajenas. Como no se puede desechar las interpretaciones y mucho menos abolirlas, entonces se tienen que tomar en consideración y conocerlas como lo que son, simples interpretaciones para así dejar de confundirlas con la realidad a que hacen referencia (Marías, 1971).

Siguiendo este orden de ideas, se tiene que al investigar el desarrollo y la construcción de ciertos conceptos matemáticos, que no son más que interpretaciones de entes abstractos, se debe tomar en consideración el estudio de la evolución del concepto ligado a un determinado ente, por medio de un análisis reflexivo, histórico y crítico, examinando así los conflictos o problemas que surgieron en el proceso, explicando e identificando además los obstáculos que se suscitaron al momento de su concepción, para así acceder en la medida de lo posible a su ser, es decir, *a lo que es*. Por tal motivo, a continuación se realiza un estudio de los antecedentes históricos – epistemológico de la noción de *infinito* matemático en su dualidad *potencial* y *actual*.

Preludio. Egipto y Mesopotamia, las civilizaciones de los valles fluviales:

> Cuidadoso cálculo para penetrar en las cosas,
> en el conocimiento de todas las cosas que existen, misterios...
> todos los secretos. Este libro fue copiado en el año 33, mes cuarto
> de la estación de la inundación (bajo la majestad del Rey del (Alto y)
> Bajo Egipto, "A-user-Rê", goce de vida, fielmente de un escrito
> antiguo realizado en el tiempo del Rey del Alto
> (y Bajo) Egipto, (Ne-mal) 'et-Rê'. Mirad,
> el escriba Ahmés escribió esta copia."

La noción de *Infinito* en un principio pudo estar sujeta al origen de nociones primitivas ligadas a los conceptos de número, magnitud y forma, en cuanto a esto Boyer (1986) señala que "el desarrollo del concepto de número fue efectivamente un largo y lento proceso (…) por el dato de que algunas lenguas, incluido el griego, han conservado en su gramática una distinción tripartita entre uno, dos y más de dos" (p. 21), para seguidamente opinar "…evidentemente nuestros antepasados muy primitivos contaban al principio solo hasta dos, y cualquier conjunto que sobrepasaba este nivel quedaba degradado a la condición de muchos" (p. 21). Sin embargo, cabe mencionar que:

> Darwin en su Descent of Man (1371), hace notar que algunos de los animales superiores tienen facultades tales como memoria y alguna forma de imaginación, y actualmente resulta incluso más claro que la capacidad para distinguir número, tamaño, orden y forma (…) no son propiedad exclusiva del género humano. Experimentos llevados a cabo con cuervos y cornejas, por ejemplo, han demostrado que por lo menos algunos pájaros pueden distinguir entre conjuntos que contengan hasta cuatro elementos. (Boyer, 1986, p. 19)

Por otro lado, las grandes civilizaciones caracterizadas por el uso de los metales nacieron originalmente en los valles fluviales ubicados en las regiones de Egipto, Mesopotamia, India y China (Boyer, 1986). Sin embargo, esta investigación toma en cuenta, para el estudio de los inicios de la noción de *Infinito*, los albores del pensamiento humano en Egipto y Mesopotamia, ya que se poseen registros confiables y avalados por estudios históricos reconocidos; en relación a esto Boyer (1986) explica:

> Los registros cronológicos correspondientes a las civilizaciones de los valles de los ríos Indo y Yangtze son muy inseguros, pero en cambio se dispone de una información bastante fiable acerca de los pueblos que vivieron a lo largo del Nilo en el «creciente fértil» de los ríos Eufrates y Tigris. (p. 29)

Es notorio señalar, que las dos civilizaciones, mencionadas anteriormente, ya conocían una forma de escritura primitiva antes que culminara el cuarto de milenio, es decir, el 4000 A.C. Estos tipos de pictogramas fueron evolucionando de una manera progresiva para dar a lugar a una escritura con símbolos sencillos (Boyer, 1986). En Mesopotamia la escritura era cuneiforme, puesto que era realizada sobre tablillas hechas de arcillas donde imprimían marcas en forma de cuña, donde el significado del contenido a transmitir estaba determinado por el diseño que se originaba en la disposición de dichas marcas; mientras que la escritura egipcia se desarrolló por medio de jeroglíficos tallados en piedra y posteriormente marcados sobre el papiro (Boyer, 1986).

Asimismo, en la civilización egipcia la geometría, y por ende la matemática, se originó ante la necesidad práctica de medir y trazar los confrontes de las tierras, de donde surgió un sistema de numeración jeroglífica, el cual era un sistema decimal, es decir, de base diez conformado de un "sencillo esquema iterativo y con ayuda de un conjunto de símbolos distintos para cada una de las primeras media docenas de potencia de base diez" (Boyer, 1986, p. 31), observándose que ya para esa época los egipcios manejaban grandes cifras.

Por lo tanto, en este sistema numérico, "según demuestra el papiro de Rhind, los egipcios utilizaban los números naturales y las fracciones con numerador 1. Para representar números se basaban en el sistema de agrupación múltiple" (Temas para la

Educación, 2010, p. 1). En este orden de ideas, Boyer (1986) describe el sistema de numeración utilizado por los egipcios del siguiente modo:

> Un palote vertical aislado representa la unidad, un arco se usa para el 10, una especie de lazo recuerda una C mayúscula representa el 100, una flor de loto para el 1.000, un dedo doblado para el 10.000, un tipo de pez parecido a una lota para 100.000 y una figura humana de rodillas y con los brazos por alto (quizás una especie de Dios Infinito) para representar 1.000.000. (p.31)

Evidenciando el carácter a priori de la infinitud a través de una magnitud muy elevada para ese entonces, es decir la aparición de un esquema potencial de infinito en su acepción más primitiva. Ahora, en el Papiro de Ahmes y en el Papiro de Rhind se encontraron una gran cantidad de información matemática, en la que la matemática tenía un fin práctico, como lo es la de contar y medir, así como también para fines religiosos y ceremoniales, en estos se evidenció que los egipcios utilizaban sumas de fracciones unidad, es decir, la fracción del tipo $^1/_2$, junto con la fracción$^2/_3$, para expresartodas las fracciones (Boyer, 1986).

Igualmente, "los egipcios consideraban las fracciones generales propias de la forma $^m/_n$, con *m* menor que *n*, no como una «cosa» elemental y simple, sino como parte de un proceso incompleto" (Boyer, 1986, p.34). De donde se desprende que comenzaban a intuir la noción de infinitesimal y de reducción de fracciones a través de iteraciones rudimentarias, por ejemplo en el papiro de Ahmes se encuentra una descomposición, entre tantas, de la siguiente forma $\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$, además, conocían el hecho de que dos tercios de la fracción $\frac{1}{p}$ es igual a la suma de las dos fracciones unitarias $\frac{1}{2p}$ y $\frac{1}{6p}$ (Boyer, 1986).Recurriendo a estos conocimientos, los egipcios fueron capaces de resolver problemas aritméticos con fracciones, así como problemas algebraicos elementales.

Por su parte, la civilización mesopotámica, llamada también babilónica, poseía un alto nivel de desarrollo, el sistema de numeración que se desarrolló en este fue un sistema sexagesimal, cuya base fundamental es 60; este tuvo su origen, lo más probable, debido a que "la base 60 se adaptase y se localiza de una manera consciente por los intereses de la metrología, ya que una magnitud de 60 unidades puede dividirse fácilmente de manera exacta (…) lo que permite diez posibles subdivisiones exactas" (Boyer, 1986, p. 49).

No obstante, no lograron un sistema posicional completo por la ausencia del cero, en cuanto a esto Boyer (1986) afirma: "los babilónicos no parecen haber sido capaces, al principio, de inventar una manera clara de representar una «posición vacía» en un numeral, es decir no dispusieron de un símbolo para el cero en su sentido no cardinal sino posicional" (p. 51), aunque la posición es solo relativa, ya que para un mismo signo podría representar varios números, enteros como fraccionarios, dependiendo del contexto.

Hay que destacar, que esta civilización conocía los números enteros y las fracciones unitarias, ya usados por los egipcios, pero además extendieron el principio posicional a las fracciones explotando así las formas fraccionales decimales. Crearon algoritmos para aproximar raíces cuadradas. De igual manera elaboraron tablas en las que se disponían valores para la multiplicación, inversos, tablas de cuadrados, cubos, raíces cuadradas y cubicas escritas en el sistema sexagesimal cuneiforme (Boyer, 1986).

Asimismo, se tiene que el método algorítmico empleado por los babilónicos para aproximar raíces cuadradas es mencionado a continuación:

> Sea $x = \sqrt{a}$ la raíz que se trata de calcular y sea a_1 una primera aproximación a esta raíz; a partir de ella calcúlese una segunda aproximación b_1 tal que verifique la ecuación $b = {}^{a}/_{a_1}$. Si a_1 era demasiado pequeña, entonces b_1 será

> demasiado grande y viceversa, y por tanto la media aritmética $a_2 = a_1 + {}^{b_1}/_2$ será sin duda una aproximación mejor, (…) es evidente que el proceso puede continuarse indefinidamente. (p. 52)

Por lo tanto, si se considera el valor de $\sqrt{2}$ que aparece en la tablilla de Yale 7.289, se puede observar que resulta igual a_3 si se inicia con el término $a_1 = 1;30$, de donde este método pudo haber originado la inquietud, por parte de los matemáticos, por los procesos infinitamente largos, ya que en este algoritmo mesopotámico para el cálculo de raíces cuadradas encierra un método iterativo, aunque esto no se dio totalmente, ya que no tomaron en cuenta estas implicaciones con lo infinitesimales (Boyer, 1986). Ahora bien, en lo que respecta en las tablas faltan los inversos de los números 7 y 11, esto "debido sin duda a que los inversos de tales números «irregulares» tienen una expresión sexagesimal infinitamente larga (…) aquí pudieron haberse enfrentado (…) con el problema del infinito, pero tampoco (…) lo tomaron en consideración sistemáticamente" (Boyer, 1986, p. 53).

Quizás estos métodos algorítmicos en el desarrollo de las matemáticas rudimentarias, presentes en estos pueblos, tal vez fue lo que inspiro posteriormente a los filósofos y matemáticos griegos, si bien es cierto, la matemática egipcia y babilónica surgió por la necesidad de resolver problemas prácticos que se presentaban en la vida diaria, no obstante también pudo ser utilizada con fines de diversión o satisfacción del espíritu, analizar, entre una de tantas cosas, los procesos que involucran lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño y a cuestionarse sobre todas las cosas pertenecientes a la naturaleza.

El Pensamiento Helénico:

"El principio y elemento de las cosas es lo indefinido"
Anaximandro

Eminentes filósofos y matemáticos han tratado de dar una definición de *Infinito* a lo largo de la historia. En la antigua Grecia; Platón, Pitágoras y Aristóteles entre otros, se planteaban la existencia del *Infinito* y las contradicciones generadas a partir de la aceptación de su existencia. Las nociones de la infinidad del tiempo y de la eternidad son comunes al pensamiento griego, donde la eternidad se le muestra como atributo del ser universal; y de las tres formas en las que la idea de lo eterno puede resumirse según Mackenzie (citado por Mondolfo,1956) en: "1º) Lo que se extiende infinitamente en el tiempo; 2º) Lo que queda absolutamente fuera de él y 3º) Lo que lo incluye trascendiéndolo" (p.60).

Por lo tanto, en el pensamiento griego surge la idea de manifestar que el concepto de eternidad inmutable es igual al de infinidad de los tiempos, para así apoyar la concepción de extratemporalidad en la concepción de la infinitud temporal para luego concebirla como eterna. Dando a entender la imperfección de cada límite temporal manifestada en la mentalidad helénica, como consecuencia directa de la inferioridad existente entre el *Khrónos* en relación al *aión*[13](Mondolfo,1956). Y que además:

> (…) cuando atribuye al cosmos un comienzo en lugar de la eternidad (…) el pensamiento griego afirma la preexistencia de la fuente de la que deriva el mundo, ya el Caos *prótista*[14] de Hesíodo, ya el *prótiston aristón gennésan*[15]y los otros principios divinos que *aei ésan*[16], según Ferecides. Pero cuando, en el desarrollo de las cosmogonías, surge la idea de que el devenir cósmico al par de la vida orgánica puede comprender, en correspondencia con el proceso de formación, también el inverso, el de disolución, aquel *aei,* que es repudio de un

[13]Del tiempo respecto a la eternidad (Mondolfo, 1956, p. 61).
[14] Primerísimo(Mondolfo, 1956).
[15] El primero y óptimo principio creador (Mondolfo, 1956).
[16] Existían siempre (Mondolfo, 1956).

> límite absoluto, se precisa en la afirmación de una substancia eterna. Su permanencia excluye todo comienzo absoluto o absoluta cesación, dentro de cuyos límites pueda encerrarse la historia cósmica, y reúne en cambio en ésta siempre el fin con el principio (…) y hace del ciclo de formación y disolución (gran año) nada más que un acto de una serie infinita. (Mondolfo, 1956, p. 62)

Ahora, en el pensamiento helénico se han encontrado documentos en los cuales se abordan esas cuestiones. Esta profunda conciencia de la infinidad contribuyó a la formación y en la aplicación del proceso de división hasta el infinito que condujo a los griegos a una noción clara de lo infinitesimal, y, además, a la inclusión del *Infinito* dentro de cualquier magnitud finita. Es aquí donde la conciencia de la infinidad se desarrolla paralelamente en dos opuestas direcciones, la que responde a lo infinitamente grande y la que atañe a lo infinitamente pequeño Mondolfo (1956). Así, Anaximandro de Mileto (610 – 547 A.C) en su obra "Entorno a la naturaleza", expresa que "el infinito (*ápeiron*[17]) es el principio y elemento primordial de los seres", distinguiéndolo de los llamados elementos como el agua, el aire, la tierra y el fuego; puesto es el principio generador (naturaleza) *Infinito*, del cual nacen todos los cielos y los universos contenidos en ellos (Aristóteles, p.24).

Los orígenes de la noción de *Infinito* en matemática se remontan hasta Pitágoras (aprox. 569 - 500 A.C.), quien sostenía con firme convicción de que todo conocimiento matemático revela un invisible ángulo de la realidad, por lo tanto todo en el mundo es armonía y número. Además, decía que el *Infinito* es lo Par; porque lo Par, cuando es abarcado y delimitado por lo Impar, confiere a las cosas la infinitud. Por otra parte, los pitagóricos y así como también Platón, consideran que el *Infinito* es por sí mismo un principio, no algo accidental a otras cosas, sino algo que es en sí mismo una sustancia. Para Platón existen dos infinitos, lo Grande y lo Pequeño (Aristóteles, p.88).

[17] El termino Ápeiron ($\alpha\pi\varepsilon\iota\rho\omega\nu$) proviene del griego y es un adjetivo que significa ilimitado, infinito e inmutable. También se utiliza para calificar aquello de lo cual uno no puede desprenderse.

En relación a lo anterior, Larios (2000) expresa que la doctrina platónica sobre el infinito se encuentra expuesta en el dialogo de "El Filebo". En la cual, da una clasificación de todo lo que existe en el universo, por tal motivo, el mundo entero es visto en términos de finitud e infinitud. De esta forma, Platón interpreta dialécticamente el contraste entre finitud e infinitud:

> (…) todas las cosas a que se atribuye una existencia eterna, se componen de uno y muchos, y reúnen en si por su naturaleza lo finito y lo infinito, y siendo tal la disposición de las cosas, es preciso, en la indagación de cada objeto, aspirar siempre al descubrimiento de una sola idea. Efectivamente se encontrara una y una vez descubierta, es preciso examinar si después de ella hay dos o tres o cualquier otro numero; en seguida, hacer lo mismo con relación a cada una de estas ideas, hasta que se vea, no sólo que la primitiva es una y muchas y una infinidad, sino también las ideas que contiene en sí; que no se debe aplicar a la pluralidad la idea de infinito, antes de haber fijado por el pensamiento el número determinado que hay en ella entre lo infinito y la unidad; y que solo entonces es cuando se puede dejar a cada individuo ir a perderse en el infinito. (p. 31)

Después Anaxágoras de Clazómenes (500-496 - 428-27 A.C) discurría sobre "la unión originaria y la infinitud de los infinitesimales" estableciendo que "todas las cosas estaban juntas, infinitas en multitud y en pequeñez, porque también lo pequeño era infinito. Y estando todas las cosas juntas, ningún ser era discernible a causa de su pequeñez..."; porque no hay un grado mínimo de lo pequeño, sino que siempre hay un grado menor, pues es imposible que el ser no sea. Pero también de lo grande hay siempre un mayor. Y es igual en multitud a lo pequeño, y toda cosa, comparada consigo misma, es al mismo tiempo grande y pequeña (Mondolfo, 1956).

Posteriormente, Demócrito de Abdera (460-370 A.C) con su teoría atomitista busca explicar los fenómenos que acontecen en el mundo, por otro lado, su doctrina filosófica se centra en la concepción de un espacio donde coexiste en conjunción el vacío (no ser) con el ser, en el cual se encuentran los infinitos átomos que dan a lugar y constituyen la realidad física del universo (Pareja, 2007). "Estos átomos son absolutamente pequeños, indivisibles, eternos y que llenan completamente el espacio que ocupan. Esta teoría atomista nos lleva a imaginar la posibilidad de llenar en forma plena el espacio, con un agregado indefinido de átomos" (Pareja, 2007, p. 2).

Además, en su teoría física de constitución del mundo, este se comporta como una máquina que se mueve por medio de mecanismos precisos donde no intervenían lo sobrenatural, en relación a esto Pareja (2007) expresa, "su teoría cosmogónica es, en cierto aspecto, antecesora de las modernas teorías físicas, en el sentido de considerar la materia y la energía perennes e indestructibles. Los átomos son eternos, al igual que el movimiento, decía. Según Diógenes Laercio" (p. 3). De esta manera, en contraste con Anaxágoras, Demócrito consideraba que "la materia es divisible, pero hasta cierto punto nada más; y los últimos elementos, los átomos, poseen propiedades distintas a los de los cuerpos grandes. Son impenetrables, absolutamente sólidos y se distinguen únicamente por la forma" (Meliujin, 1960; p.19), para seguidamente afirmar que, "en el espacio infinito existen incontables mundos formados por cantidades inconmensurables de átomos" (Meliujin, 1960; p.19).

Sin embargo, es importante resaltar que Demócrito se encontró con dos grandes contradicciones en cuanto a la concepción de la estructura de la materia, las cuales se encontraban inmersas en el pensamiento helénico, estas eran, según Meliujin, (1960) las que presentaban lo siguiente:

> Si consideramos que al final de la división ilimitada de la materia se encuentran partículas inextensas, cualquier cuerpo constituido por ellas será también inextenso; pero si consideramos que las ultimas partículas son extensas, tendremos que admitir que una suma infinitamente grande de ellas (inevitable con la división ilimitada) nos daría un cuerpo de dimensiones infinitamente grandes, cosa que contradice con la experiencia. (p.25)

A tales manifestaciones, Demócrito negaba rotundamente, puesto que, para el ambas eran falsas, oponiéndose a que las últimas partículas fueran inextensas, por el contrario estas deberían ser extensos. Con la finalidad de dar validez lógica a sus razonamientos, Demócrito (citado por Meliujin, 1960) desarrolla la teoría de la indivisibilidad física que plantea que:

> Todo cuerpo es divisible sólo en el caso de que entre sus partes componentes pueda introducir una especie de cuña para separarlas. Pero con esa operación llegaremos, en última instancia, a partículas que sean absolutamente impenetrables y compactas, no existiendo ya cuña alguna capaz de separarlas. Las dimensiones de cada una de esas cuñas no serán menores que el elemento dado. Esos elementos son físicamente indesintegrables y se llaman "átomos" (indivisos). (p.26)

Aunque, se puede observar que de los razonamientos ya realizados la indivisión física de los átomos no implica que lo mismo acurra con su división geométrica, lo que se traduce, a la capacidad de poderle atribuir mentalmente a los átomos una serie de planos que consientan un posterior fraccionamiento del elemento. Por lo que, Demócrito (citado por Meliujin, 1960), ante esta cuestión, expresó:

> Todo elemento es divisible porque podemos separar su lado derecho del izquierdo, el superior del inferior, el de delante del de atrás. Pero cabe imaginar una partícula que no tenga esos lados o en el cual el concepto de lado sea inaplicable. Será un elemento extenso, pero no se lo podrá dividir en elementos más pequeños por no existir éstos. Esos elementos se califican de átomos matemáticos. Son mucho más pequeños que los átomos físicos y se encuentran en el interior de ellos. Aunque el átomo matemático tiene dimensiones finitas, no posee forma alguna, ya que la existencia de forma presupone la posibilidad de división sucesiva en elementos todavía menores. En los cuerpos hay cantidades extraordinarias – pero no infinitas – de átomos matemáticos; por lo tanto, su suma no forma un cuerpo infinitamente grande, si ni una magnitud finita. Y como esos elementos son extensos, el cuerpo formado por ellos también lo será. (p.26)

Cabe agregar, que Demócrito utiliza su teoría de los átomos matemáticos para explicar las propiedades presentes en las líneas y figuras geométricas, "la línea, para él, es la suma de numerosos átomos; la superficie, la suma de numerosas líneas superpuestas, y el volumen, la suma de una gran cantidad de planos, es decir, de capaz de átomos" (Meliujin, 1960; p.26). Además, de acuerdo a Cajori (1915) se sabe por Plutarco que Demócrito sugirió la siguiente cuestión:

> Si un cono fuera cortado por un plano paralelo a su base, ¿qué deberíamos pensar de la superficie de las secciones, que son iguales o desiguales? Si son

> desiguales, eso mostrará que el cono es irregular, con muescas como escalones, y disparidades; y si son iguales, las secciones serán iguales, y el cono parecerá tener la propiedad de un cilindro, a saber, estar compuesto de círculos iguales y desiguales, lo cual es absurdo. (p. 16)

Adelantándose Demócrito así por varios siglos con su teoría infinitesimal a Cavalieri, a Eudoxo y a Arquímedes. Sin embargo, esta paradoja revela que "las dificultades están en la manera de aceptar la noción de un infinitesimal y por lo tanto indirectamente favorece la idea de divisibilidad en solamente un número finito de partes" (Cajori, 1915, p. 16).

Por su parte, Antifón intento resolver uno de los problemas clásicos de la antigüedad, el vinculado a la cuadratura del círculo, donde para poder cuadrar un círculo se debe llegar a una situación en que las líneas curva y recta, de la circunferencia y el polígono respectivamente, sean reducibles a los mismos elementos indivisibles(Cajori, 1915). En este orden de ideas, Antifón, conforme con los alegatos de Simplicio y Filopón (citados por Cajori, 1915), "inscribió en un círculo un cuadrado, y por bisección del arco, obtuvo polígonos regulares de 8, 16, 32 lados, y así sucesivamente. Él suponía que podría alcanzar un polígono que coincidiera con la circunferencia" (p. 16).

Asimismo, en relación al método utilizado por Antifón, Cajori (1915) señala un comentario realizado por Simplicio, el cual expresa:

> La conclusión aquí es manifiestamente contraria a los principios geométricos, no como sostiene Alejandro, porque el geómetra supone como un principio que una circunferencia puede tocar a una línea recta en sólo un punto, y Antifón deja esto a un lado; porque el geómetra no supone esto, pero lo prueba. Sería mejor decir que es un principio que una línea recta no puede coincidir con una circunferencia, porque la que no encuentra a la circunferencia en un punto solamente, la encuentra en dos puntos y no más, y los encuentros se dan en puntos solos. No obstante al bisecar continuamente el espacio entre la cuerda y el arco, nunca se agotará, ni llegaremos nunca a alcanzar la circunferencia del círculo, aunque el corte se continuara ad infinitum: si lo hiciéramos, estaríamos

> haciendo a un lado un principio geométrico que rechaza que las magnitudes sean divisibles ad infinitum. (p. 16)

Por otro lado, Aristóteles rechazó la idea del *Infinito* debido las contradicciones que se originaban a partir de él. No obstante, lo concibió de dos formas diferentes, las cuales son las nociones de este concepto que se manejan hoy en día. En el tercer libro de su obra Física, Aristóteles ideó dos tipos de *Infinito*: *el Infinito potencial* (*Infinito* como proceso de decrecimiento o crecimiento ilimitado) y *el Infinito actual* (Infinito visto como un todo o unidad). De acuerdo a esto Ortiz (1994) plantea:

> La noción de infinito potencial se centra en la operación reiterativa e ilimitada, es decir, en la recursividad interminable, por muy grande que sea un número natural, siempre se puede concebir uno mayor, y uno mayor que este y «*así sucesivamente*» donde esta última expresión encierra la misma idea de reiteración ilimitada, al infinito (p. 61)

Para Aristóteles, el *Infinito* era explicado a través de la adición o reducción por la división sucesiva, de esta manera, se tiene que:

> El infinito por adición es en cierto modo el mismo que el infinito por división, pues en una magnitud finita el infinito por adición se produce en un proceso inverso al otro; porque en la medida en que una magnitud se ve dividida hasta el infinito, en la misma medida aparecen las adiciones con respecto a una determinada magnitud. Pues si en una magnitud finita tomamos una cantidad determinada, y tomamos luego otra en la misma proporción, aunque no en la misma cantidad del todo inicial, no lograremos recorrer la magnitud finita; pero si aumentamos la proporción de tal manera que las cantidades tomadas sean siempre iguales, entonces la recorreremos, porque toda magnitud finita puede ser agotada mediante la sustracción de una cantidad determinada. Así pues, el infinito no tiene otro modo de realidad que éste: en potencia y por reducción. Y existe actualmente en el sentido en que decimos que el día o la competición existen; y existe potencialmente, como la materia; pero no existe por sí mismo, comoexiste lo finito. (p.102)

En este orden de ideas, Aristóteles (1995) manifiesta que se acercó a la concepción de *Infinito*, ya que captó según él la relación entre movimiento y la infinitud, por lo que parte del supuesto siguiente:

> Puesto que la naturaleza es un principio del movimiento y del cambio, y nuestro estudio versa sobre la naturaleza, no podemos dejar de investigar qué es el

> movimiento; porque si ignorásemos lo que es, necesariamente ignoraríamos también lo que es la naturaleza. Y después de que hayamos determinado qué es el movimiento, hemos de intentar investigar de la misma manera los problemas posteriores.
> (…) El movimiento parece ser uno de los continuos, y lo primero que se manifiesta en lo continuo es el infinito. Por esto sucede a menudo que quienes definen lo continuo utilizan la noción de «infinito», ya que entienden por «continuo» lo que es divisible hasta el infinito. Además, se piensa que el movimiento es imposible sin el lugar, el vacío y el tiempo. (p.79)

Para luego, opinar lo siguiente;

> Todos los que estudian la naturaleza ponen como sujeto del infinito una naturaleza que es distinta de los llamados «elementos», como el agua o el aire o algo intermedio[18]. Pero ninguno de los que ponen un número finito de elementos piensan que éstos sean algo infinito. Y cuantos ponen infinitos elementos, como Anaxágoras con las *homeómerías*[19] *y* Demócrito con la *panspermía*[20]de las figuras, afirman que el infinito es un continuo por contacto. (p. 89)

Teniendo en cuenta lo anterior, para Aristóteles, Anaxágoras asevera "que una parte cualquiera de un todo es una mezcla[21] semejante al todo, porque ve que cualquier cosa se genera de cualquier cosa" (p.90). Por lo que, según él, existe un inicio de la separación no sólo para una, sino que además para todas las cosas. En función de esto Aristóteles (1995), explica:

> (…) Y como lo generado se ha generado de un cuerpo semejante, y hay una generación de todas las cosas, aunque no simultáneamente, tiene que haber un principio de esta generación, un principio único, que Anaxágoras llama Inteligencia; la Inteligencia opera mediante el pensamiento a partir de un cierto principio. Así, necesariamente en algún tiempo todas las cosas estuvieron juntas y en algún tiempo comenzaron a ser movidas. Demócrito, por su parte, niega que

[18] "Con «agua» se refiere a Tales, con «aire» a Anaxímenes y a Diógenes de Apolonia; en cuanto a «algo intermedio entre éstos» (cf. *Acerca del cielo* 303bl2, *Acerca de la gen. y la corr.* 332a20, *Met.* 989al4)" (Física, 1995, p. 89).

[19]"*Homoiomerés*este vocablo no se encuentra en los fragmentos que nos quedan de Anaxágoras. Algunos conjeturan que puede haber sido una invención de Aristóteles" (Física, 1995, p. 89).

[20]"El término *panspermía* no tiene equivalente en nuestras lenguas; la idea expresada es la de que los átomos son las «semillas» *(spérmata)* de todas las cosas" (Física, 1995, p. 89).

[21]"Anaxágoras parece haber supuesto que en cualquier parte material hay una mezcla *(mígma)* homogénea, porque si cualquier cosa puede emerger de una parte cualquiera, esa parte tendrá que ser una mezcla indiferenciada de toda clase de materia" (Física,1995; p. 89).

> los cuerpos primeros se hayan engendrado entre sí; para él el cuerpo común[22] es el principio de todas las cosas, diferenciándose éstas en magnitud y figura. (p. 90)

Por otro lado, para Aristóteles (1995, p.91) el reconocimiento de la existencia del *Infinito* tiene su origen especialmente por unas determinadas razones, cinco para ser exacto, estas son de acuerdo a él las siguientes: primero, “del tiempo, pues es infinito”; segundo, “de la división de las magnitudes, pues los matemáticos también hacen uso del infinito”; tercero, “si hay generación y destrucción incesante es solo porque aquello desde lo cual las cosas llegan a ser es infinito”; cuarto, porque lo infinito encuentra siempre su límite en algo, de suerte que si una cosa está siempre necesariamente limitada por otra, entonces no podrá haber limites últimos; y por última y más importante la razón que plantea el hecho de que “al no encontrar nunca término en nuestro pensamiento, se piensa que no sólo el número es infinito, sino también las magnitudes matemáticas y lo que está fuera del cielo” alegando seguidamente, que:

> (…) al ser infinito lo que esta fuera del cielo, se piensa que existe también un cuerpo infinito y un número infinito de mundos pues, ¿por qué habría algo en una parte del vacío más bien que en otra? De ahí que se piense que si hay masa en alguna parte, parte tiene que haberla en todas partes. Y también, que si hay un vacío y un lugar infinitos, tendrá que haber también un cuerpo infinito, porque en las cosas eternas no hay ninguna diferencia entre poder ser y ser” (Aristóteles, 1995; p. 91).

Además, llega a la formulación de una noción del continuo, la cual es muy importante para su física por ser una característica fundamental del universo en general, para él esta es concebida como la siguiente:

> Lo continuo (synechés) es una subdivisión de lo contiguo; así, por ejemplo, digo que una cosa es continua con otra cuando sus límites que se tocan entre sí llegan a ser uno y lo mismo y, como indica la palabra, se «con-tienen» entre sí, pero si los extremos son dos no puede haber continuidad. (p.182)

[22]“El principio infinito de Demócrito, según Aristóteles, no sería la multiplicidad infinita de átomos moviéndose en un vacío infinito, sino más bien «el cuerpo común» *(tò koinòn sôma)* de todos los átomos” (Física,1995; p. 90).

Posteriormente, Zenón de Elea (490-425 AC), discípulo de Parménides y representante de los eleáticos, propuso, de acuerdo a Pareja (2007), "según el comentarista Proclo (411-485 AD), cuarenta paradojas[23] relacionadas con el continuo y el movimiento, que vistas retrospectivamente han desempeñado un papel importante en las matemáticas desde tiempos griegos" (p.3). En ellas trató de probar la imposibilidad del movimiento partiendo de lapremisa de un espacio infinitamente divisible.

La base de sus razonamientos tenía como principios fundamentales, aceptados como evidentes por los filósofos de la época, el primero: "La suma de un numero infinitamente grande de magnitudes finitas y extensas, por pequeñas que sean, constituye una magnitud infinitamente grande" (Meliujin, 1960, p.21); y la segunda: "La suma de cualquier numero de magnitudes inextensas, por grande que sea, es igual a cero. ‹Si un objeto no tiene magnitud – decía Zenón –, es que no existe›" (Meliujin, 1960, p.21). Una de las más significativas, es la de *Aquiles y la Tortuga*, en la cual Zenón plantea la siguiente cuestión:

> Si compiten en una carrera Aquiles, el de los pies ligeros, y la Tortuga, el más lento de los animales, aquél nunca cogerá a ésta, con tal de que la Tortuga inicie la carrera con una ligera ventaja con respecto al Pélida. (García, 2003; p.216)

Como resultado de esto, Zenón explicaba que:

> (…) antes de alcanzar a la Tortuga, Aquiles debe recorrer el espacio que le separaba inicialmente de ella y, mientras tanto, la Tortuga habrá avanzado una distancia, por pequeña que sea. Del mismo modo, Aquiles debe recorrer esta distancia que ahora le separa de la Tortuga antes de alcanzarla, dando ocasión al animal de avanzar otro poco, aunque sea una distancia minúscula, con lo que de nuevo surge una separación entre ambos corredores que Aquiles ha de cubrir en un tiempo durante el cual la Tortuga adelantará otra ínfima magnitud espacial, y así, aunque progresivamente decreciente, siempre existirá una separación entre los dos corredores. (García, 2003; p.217)

---

[23] Cabe señalar que dichas paradojas pueden ser tratadas de forma natural (desde la formalización del concepto de límite) a través de la idea de convergencia de una serie infinita.

Por lo tanto, “al asumir la hipótesis contraria, de que el tiempo y el espacio son infinitamente divisibles llega a la conclusión de que Aquiles, el veloz héroe griego, no es capaz de sobrepasar, a una lenta tortuga” (Pareja, 2007; p.3). De acuerdo a Pareja (2007), lo que Zenón trataba de hacer era demostrar a los filósofos y matemáticos de su época que los conceptos de espacio y tiempo no estaban bien establecidos y dejar en manifiesto que no se puede fiar totalmente de la razón para hallar la verdad.

Luego, Euclides (alrededor del 300 A.C) toma la misma una actitud de Aristóteles en cuanto al *Infinito* evitándolo al ser origen de contradicciones. En su obra de los *Elementos*, específicamente en su definición 23, la cual se establece que: “Son rectas paralelas las que estando en el mismo plano y siendo prolongada sindefinidamente en ambos sentidos, no se encuentran una a otra en ninguno de ellos” (Euclides, citado por Belmonte, 2009; p.7), se puede observar, como opina Belmonte (2009), como evita utilizar cualquier frase o expresión que involucre la noción de infinito actual, ya que podía alegar, en su definición, que las rectas fueran prolongadas hasta el *Infinito*.

Cabe explicar, que Euclides no hacía alusión a rectas sin fin, “sino a segmentos de recta extensibles a longitudes arbitrarias, según supone en el postulado 2[24]. Esta noción de infinito potencial -las rectas consideradas finitas, reservándose la posibilidad de extenderlas al infinito constituye una extrapolación razonable de la experiencia” (Belmonte, 2009; p.7).

[24]Tal como lo reseña, Belmonte (2009) el Postulado 1 plantea: “Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera” (p.7); seguido el Postulado 2 dice: “Y el prolongar continuamente una recta finita en línea recta” (p.7).

Ahora bien, el término *Infinito* tuvo, para los diferentes pensadores griegos, un gran valor significativo con una variedad de matices que conviene resumir (Filep, 2001 y 2003, citado por Belmonte, 2009, p. 25):

	Aumento ***-mediante suma***	Disminución ***-mediante división***
Actual	No hay nada fuera de él. Existe el más grande. Existen la línea y el número infinito.	No hay nada dentro de él. Existe el más pequeño (átomo). Existen el número y la línea de átomos (punto = unidad). La divisibilidad infinita de una línea es imposible.
Potencial	Siempre queda algo fuera. No existe el más grande. La línea puede construirse indefinidamente. pero no existe la línea infinita No existe el número más grande.	Siempre queda algo dentro. No existe el más pequeño (para magnitudes). No existe la parte más pequeña. de la línea, puede dividirse indefinidamente.

Tomado de**:** Belmonte (2009; p. 8).

Así, de acuerdo a Moreno y Waldegg (1991, citado por Belmonte, 2009) realizan un análisis sobre los diferentes usos y significados de la palabra *Infinito* en el pensamiento helénico, que se describe a continuación:

> Como nombre aparece sólo en relatos de tipo mitológico, teológico o metafísico: “Infinito” pertenece al ámbito de los dioses.
> Como adjetivo que describe a un nombre se utilizaba sólo cuando este último tenía características de un absoluto, como el Universo, el Ser, el espacio o el tiempo.
> Como adverbio de modo se utilizaba para definir acciones (mentales) tales como extender, subdividir, continuar, añadir, aproximar, etc. Y este significado está asociado con el infinito potencial, es decir, con aquellos procesos que se pueden continuar indefinidamente. (p. 26)

De esta forma, se tiene que en el periodo helenístico se presentan situaciones en las que se manifiesta de manera intuitiva la noción de *Infinito*, así como también la idea de límite; las cuales están ligadas al descubrimiento de procesos geométricos infinitos que surgieron de las paradojas de Zenón, el descubrimiento de los números irracionales y la comparación de áreas y volúmenes de figuras curvilíneas mediante la aproximación de figuras rectilíneas.

Interludio Medieval y Moderno:

"Dios, que es acto puro y no tiene nada
de potencialidad, tiene un poder activo
infinito sobre las demás cosas".
Santo Tomás de Aquino

La noción de *Infinito* sigue desarrollándose y ya en la Edad Media, la totalidad de la matemática relacionada con la naturaleza del *Infinito* tomó una connotación teológica, al considerar al *Infinito* como una propiedad exclusiva de la majestad divina de Dios. En tal orden de ideas, Ortiz (1994) señala: "San Agustín creía que solo Dios era ilimitado y sus pensamientos eran infinitos, por su parte Santo Tomás de Aquino (1224-1274) demostraba en la Summa Theologiae que, aunque Dios era ilimitado él no podía crear cosas absolutamente ilimitadas" (p. 62).

Negando de esta manera la existencia del *Infinito* actual, puesto que, argumenta él, si se pudieran admitir al mismo tiempo cada uno de los elementos de un conjunto *Infinito*, de tal forma que se integrasen en una totalidad actualmente definida, por esta condición podrían ser contados uno a uno, lo cual traería una contradicción, ya que sería un número *Infinito*. Por otro lado, la omnipotencia de Dios se extendió luego a la creación de cantidades infinitas, al mismo tiempo que la perfección de Dios se designaba a través de términos que se referían a su totalidad, a su eternidad, entre otras, pero no a su carácter ilimitado (Belmonte, 2009).

Por otro lado, Santo Tomás de Aquino no siguió el planteamiento por la concepción aristotélica y por el contrario aceptó la proposición mediante la cual establece que "Dios es infinito, y eterno, e incircunscribible". Sin embargo, rápidamente manifiesta que el *Infinito* puede ser categorizado de acuerdo a su naturaleza en dos aspectos diferentes y opuestos entre sí, la primera en relación a la idea de forma y la segunda a la idea de materia. Aunque, esta distinción no se diferencia mucho a la ya anteriormente planteada por Aristóteles, la distinción entre *Infinito potencial* e *Infinito actual*, lo que buscaba era una conciliación entre la idea cristiana y la concepción aristotélica (Belmonte, 2009).

En ese mismo sentido, Cajori, (1915) explica lo concerniente a la naturaleza del continuo planteada por Tomas de Aquino, el continuo lineal era concebido por él como divisible de forma iterativa hasta el *Infinito*, aunque en la praxis no se pueda realizar dichas divisiones, dando a entender que no existía una línea mínima. Manifestando, al mismo tiempo, que el punto no es un componente de una línea, debido a que no ostenta la propiedad común, divisibilidad infinita, que posee la línea y sus partes, y, además, el continuo no puede construirse a partir de puntos, no obstante un punto a través de su movimiento puede generar una línea. Esta idea sobre el continuo fue la que dominó en el pensamiento medieval y moderno, teniendo una gran influencia de la antigua doctrina atomista.

Posteriormente, Roger Bacon (1214 – 1294),uno de los primeros escritores ingleses que se planteó la cuestión sobre la continuidad y el *Infinito*, replicaba en contra de la composición del continuo en partes indivisibles (distintas de puntos) y lo hizo a través de la renovación de las explicaciones manifestadas por los griegos y los antiguos árabes. Sosteniendo así, la hipótesis que expresa:

> (…) las partes indivisibles de tamaño uniforme harían que la diagonal de un cuadrado fuera conmensurable con un lado; si los extremos de una parte indivisible de una circunferencia están conectados por sus radios con el centro de la circunferencia, entonces los dos radios intersecarían un arco en una circunferencia concéntrica de menor radio. (Cajori, 1915; p. 24).

De lo anteriormente dicho, se infiere que la circunferencia interior es del mismo tamaño que la exterior, lo cual es imposible. Por su parte, Bacon del mismo modo argumentó en contra del *Infinito*, manifestando que "si el tiempo fuera infinito, eso implicaría que la parte es igual al todo"(Cajori, 1915; p. 24), esta deducción él la consideraba irracional e inadmisible. Por tal motivo, argumentos y planteamientos parecidos lo condujeron a concluir que el mundo constituido es finito.

Ahora bien, ya en 1600 D.C. Giordano Bruno, predicó un universo constituido por infinitos mundos. Sus estudios se iniciaron al tratar el problema de las determinaciones de Dios, concibió al mundo como totalidad, es infinito y único "uno infinito, inmóvil" (inmóvil porque lo infinito no es susceptible de movimiento local, que es en definitiva, un solo ser, una sola sustancia) (De l'infinito universo e mondi, dialogo I, tr. 1972). En su obra Bruno (tr.1972) diferencia la infinitud del universo y la infinitud divina, estableciendo:

> Llamó al universo todo infinito por que no tiene borde, término o superficie; digo que el universo no es totalmente infinito porque cada parte que de él se puede considerar es finita, y de los innumerables mundos que contiene, cada uno es finito. Llamo a Dios totalmente infinito porque él, todo eterno, está en todo el mundo y está infinita y totalmente en cada una de sus partes, al contrario de la infinitud del universo, la cual está totalmente en todo y no en las partes (si es que al referirnos al infinito se puede hablar de partes) que podemos incluir en aquel (De l'infinito universo e mondi, dialogo I). Con lo expuesto Bruno separa e independiza el concepto de infinito de la materia. (p.71)

De igual manera, René Descartes se plantea la cuestión de *Infinito*, pero a través de una perspectiva teológica y metafísica abordándolo de alrededor de la idea de Dios (puesto que para la época todo conocimiento estuvo supeditado por la iglesia y relacionado con argumentos teológicos), donde Descartes plantea la noción de totalidad de totalidades, expresando que "la infinitud de Dios incluye infinitos atributos en número positivos, e infinitud cualitativa de cada uno de los infinitos atributos" (Segundas objeciones, p. 137 - 138; 108, citado por Arana 2010, p. 139). Estableciendo así en sus *Meditaciones* una concepción de Dios, en la cual Descartes expresa: "concibo a Dios como un ser eterno, infinito, omnisciente, omnipotente, creador de todas las cosas que existen, excepto de sí mismo, que aquellas por las que se presentan las substancias finitas" (Descartes, 1641, p. 25). Para luego, dar una definición complementaria:

> Bajo la denominación de Dios comprendo una substancia infinita, independiente, que sabe y puede en el más alto grado, y por la cual he sido creado yo mismo con todo lo demás que existe, si es que existe algo más. Todo lo cual es de tal género que cuanto más diligentemente lo considero, tanto menos parece haber podido salir sólo de mí. De lo que hay que concluir que Dios necesariamente existe. (Descartes, 1641, p. 28)

Estableciendo una comparación entre hechos, puesto que, tal cual como lo manifiesta, "aun cuando exista en mí la idea de substancia por el mismo hecho de que soy substancia, no existiría la idea de substancia infinita, siendo yo finito, si no procediese de alguna substancia infinita en realidad"(Descartes, 1641, p. 28). Afirmando seguidamente:

> No debo pensar que yo no percibo el infinito por una idea verdadera, sino tan sólo por la negación de lo finito, como percibo la quietud y las tinieblas por la negación del movimiento y de la luz. Al contrario, veo manifiestamente que hay más realidad en la substancia infinita que en la finita, y por lo tanto existe primero en mí la percepción de lo infinito, es decir, de Dios, que de lo finito, es decir, de mí mismo. ¿Cómo podría saber que yo dudo, que deseo, es decir, que me falta algo, y que no soy en absoluto perfecto, si no hubiese una idea de un ser más perfecto en mí, por cuya comparación conociese mis defectos? (Descartes, 1641; p. 28)

Además, se observa en sus *Meditaciones* la diatriba entre la potencialidad y la actualidad con respecto a la idea de Dios y su atributo de infinitud, por lo que Descartes plantea:

> (…) aunque sea cierto que mi conocimiento aumenta paulatinamente y que existen en mí muchas cosas en potencia que no están todavía en acto, nada de esto atañe, sin embargo, a la idea de Dios, en la que no hay nada en absoluto en potencia, puesto que esto mismo, ir conociendo poco a poco, es una prueba certísima de la imperfección. Además, aunque mi conocimiento se engrandezca siempre más y más, nunca, no obstante, será infinito en acto, puesto que nunca llegará a un extremo tal en que ya no sea capaz de un incremento mayor todavía. Por el contrario, juzgo a Dios infinito en acto de tal modo que nada puede añadirse a su perfección. Finalmente, considero que el ser objetivo de una idea no puede provenir únicamente de un ser potencial, que en realidad no es nada, sino tan sólo de un ser actual o formal. (p. 29)

Al mismo tiempo, Galileo Galilei, llegó a la conclusión "después de observar que los puntos de dos segmentos de recta de diferente longitud podían hacerse corresponder biunívocamente" (Ortiz, 1994; p.62), en pocas palabras, la parte era del mismo tamaño que el todo cuando estas tienden a infinito. Además Galileo percibió que el conjunto de los números cuadrados perfectos es apenas una parte del conjunto de los números naturales, sin embargo cada número natural es la raíz cuadrada de un número natural ($n \rightarrow n^2$). Es decir, se percató de la existencia de una correspondencia uno a uno entre los elementos del conjunto de números naturales {1, 2, 3, etc.} y aquellos llamados cuadrados perfectos {1, 4, 9, 16, 25, etc.}. En relación a esto Pareja (2007) explica:

> Galileo,… encontró una paradoja al observar los números naturales y sus respectivos cuadrados. El conjunto de todos los enteros positivos, cuadrados y no cuadrados, debería ser "mayor" que el conjunto de los cuadrados. Sin embargo, notó que los conjuntos podían ponerse en una correspondencia biunívoca uno con el otro:
>
> $$\begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \ldots \boldsymbol{n} & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{16} & \ldots \boldsymbol{n^2} & \ldots \end{array}$$
>
> Con esto estaba probando que a los conjuntos infinitos no se les puede aplicar la relación de orden "mayor que", porque según la correspondencia mostrada, hay tantos cuadrados como enteros positivos hay. (p. 6)

Contemporáneo a Galileo se encontraba el astrónomo y filosofo alemán Johannes Kepler (1571 – 1630), el cual ya poseía la idea de infinitos elementos infinitamente pequeños, puesto que estas ideas eran necesarias para ser aplicadas en sus estudios astronómicos, especialmente en conexión con sus órbitas elípticas desarrolladas en 1609. Hay que señalar que sus profundas investigaciones de las cónicas en 1604, en su obra "Introducción a la Óptica de Vitilio", desarrolló una especie de principio de continuidad donde consideraba, a diferencia de Apolonio, cinco tipos de cónicas, las cuales pertenecían a una única familia (Boyer, 1986), su explicación se basó de acuerdo al siguiente procedimiento:

> (…) a partir de la sección cónica formada simplemente por un par de rectas que se cortan, en la que los dos focos coinciden con el punto de intercepción, en el

> cual se puede pasar gradualmente desde un conjunto infinito de hipérbolas, según uno de los focos va alejándose más del otro. Cuando el segundo foco se haya alejado infinitamente, no tenemos ya una hipérbola con sus dos ramas, sino una parábola. Según el foco móvil traspasa el punto del infinito y se va acercando de nuevo al otro lado, vamos pasando por un conjunto infinito de elipses, hasta que, cuando los dos focos coinciden de nuevo, tendremos una circunferencia como quintos y último tipo de cónica (Boyer, 1986; p.409).

Ya en el año 1609, Kepler en su “Astronomía Nova” publica sus dos primeras leyes astronómicas, en su obra también supone que el área encerrada por la órbita descrita por un planeta alrededor del Sol “estaba formada por triángulos infinitamente pequeños con vértice en el Sol y los otros dos vértices en puntos infinitamente próximos sobre la órbita del planeta” (Boyer, 1986; p.411). Por otro lado, su método para el cálculo de volúmenes se fundamentaba en suponer que “los sólidos como compuestos de una cantidad infinita de elementos de volumen infinitamente pequeños”(Boyer, 1986; p.412), para luego aplicar una estrategia similar al cálculo de áreas. Por su parte, el filósofo Tomás Hobbes (1588-1679; citado por Cajori, 1915) también hizo gala en participar en lo referente con el *Infinito*, ocupándose directamente de los argumentos de Zenón. Así, en el año 1655 escribió lo siguiente:

> La fuerza de aquel famoso argumento de Zenón contra el movimiento consistía en esta proposición, *todo lo que puede ser dividido en partes, infinitas en número, es infinito;* la cual él sin duda pensaba que era verdadera, pero sin embargo es falsa. Porque dividir algo en un número infinito de partes no es más que dividirlo en tantas partes como lo haría cualquier hombre. Pero no es necesario que una línea tenga un número infinito de partes, o que sea infinita, porque yo puedo dividirla y subdividirla tanto como yo quiera; porque por muchas partes que haga, su número es finito, porque el que dice partes, simplemente, sin añadir cuántas, no limita ningún número, sino lo deja a la determinación del oyente, por lo tanto decimos vulgarmente, que una línea puede dividirse infinitamente; lo cual no puede ser cierto en ningún otro sentido. (p. 31)

En este sentido, Cajori (1915) expresa “para Hobbes, *infinito* es sinónimo de *indefinido.* Toma una actitud agnóstica sobre los problemas del infinito” (p. 31), esto queda evidenciado en lo que escribió luego:

> Pero cuando no se dice nada más que esto, *el número es infinito,* debe entenderse como si se dijera, el sustantivo *número* es un sustantivo *indefinido*...Y, por lo tanto, aquello que vulgarmente se dice, que el espacio y el tiempo se pueden dividir infinitamente, no debe entenderse así, como si pudiera haber una división infinita o eterna, sino debe tomarse en este sentido, *todo lo que se dividese divide en partes tales que pueden dividirse a su vez...* ¿Quién puede afirmar que eso lo demuestra? 'Si el mundo fuera eterno entonces un número infinito de días o de otras unidades de tiempo precederían al nacimiento de Abraham, pero el nacimiento de Abraham precedió al de Isaac, entonces un infinito es más grande que otro o un eterno es mayor que otro eterno, lo cual', según él, 'es absurdo'. Esta demostración es como la suya, él de esto: que el número de pares es infinito, concluiría que hay tantos números pares como simplemente números, o sea, que hay tantos números pares como números pares e impares juntos. Aquellos que de esta manera niegan la eternidad del mundo, ¿no están del mismo modo negando la eternidad del creador del mundo?... Y los hombres que razonan de esta manera tan absurda no son idiotas, sino, lo que hace a este absurdo imperdonable, geómetras, y eso los convierte en jueces, impertinentes, pero jueces severos de las demostraciones de otros hombres. (Hobbes citado por Cajori, 1915, p.32)

Posteriormente, Jhon Wallis (1616 – 1703), en su obra *"Aritmética Infinitorum"* publicado en el año 1655, comienza a utilizar la curva lemniscata "∞**"**, introducida por Jacob Bernoulli cuya ecuación es $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$, como símbolo de *Infinito*, donde se aritmetizaba la "Geometria indivisibilibus" de Cavalieri, geometría que estableció la autenticidad y la legitimidad del cálculo de los indivisibles (Boyer, 1986).

Por otro lado, Cavalieri había ideado una nueva técnica para solucionar cierta clase de problemas geométricos, tal es el caso del problema de "*la génesis de las figuras geométricas*", cuyo procedimiento describe González (2004) a continuación:

> Considerando la generación del cono y del cilindro a partir del triángulo y del paralelogramo, y teniendo en cuenta que la superficie del paralelogramo es el doble de la del triángulo, supuestas la misma base y altura, Cavalieri observó la *anomalía* o desproporción de que el volumen del cono fuera un tercio del cilindro. Para corregir esta anomalía y buscar la proporción entre los dos sólidos y los elementos que los generan, propuso que éstos fueran considerados, no como el resultado de un corte que siguiera el eje del cono o del cilindro, sino de otro tipo de corte, por planos equidistantes y paralelos a la base. Ello implicaba

el recurso a lo infinitamente pequeño, o a lo indivisible, conforme al espíritu arquimediano. (p. 100)

Por lo que este nuevo procedimiento de cálculo se basó en cuadrar o cubicar, tomando aquellos elementos propios que se originan en las secciones paralelas a la base. Donde se establece, además, una correspondencia entre magnitudes desconocidas y magnitudes conocidas pero sin llegar a establecer una magnitud total con relación a las partes geométricas que forman la figura. Este método se acercó mucho a la integración y sirvió de base para su creación. Por otro lado, hay que señalar que como la suma de los elementos infinitésimos de la figura no era capaz de ser expresada matemáticamente en esos momentos, en la práctica se sustituía por una técnica que evidenciara geométricamente la correlación entre dos sumas infinitas de partes infinitas en número ilimitado (González, 2004).

Asimismo, la dificultad matemática que se presentaba en la geometría de Cavalieri puede ser ejemplificada por medio de este ejemplo, siguiendo a Koyré (1977; citado por González, 2004):

> La razón entre el cono y el círculo podía hallarse si se podía encontrar la razón entre la suma (agregado) de todos los círculos decrecientes en el cono (infinitos en número) y la suma de todos los círculos iguales del cilindro (cuyo número es también infinito). En el caso del cono, estos círculos son decrecientes desde la base hasta el vértice y forman una progresión aritmética, la de los cuadrados de los términos. En el caso de otros cuerpos se obtendrían progresiones diferentes. El método general consistía en establecer la relación entre esta suma de términos crecientes o decrecientes y la suma de los términos iguales que forman la figura uniforme y conocida de la misma base y altura. (p. 101)

Por lo tanto, se tiene que la problemática teórica ocasionada por la geometría de los indivisibles tenía su origen, de acuerdo a González (2004):

> (…) en el paso de entidades unidimensionales a entidades bidimensionales, al sustituir un elemento lineal por un elemento superficial: para mayor complicación, éste último podía tener forma cuadrada, circular, etcétera, según se tratara de conos, pirámides, etcétera; pero el paso determinante era la sustitución de una línea por una superficie. Por consiguiente, al considerar un área como una suma de rectas se estaba razonando entorno a figuras finitas del

> espacio sobre la base de considerarlas formadas por elementos infinitamente pequeños. (p. 101)

Sin embargo, la investigación de los infinitesimales trajo como consecuencia muchas crisis de los fundamentos para la época, uno de tantos coparticipes de esas crisis fue Blaise Pascal, quien introdujo la consideración de un *Infinito* tan pequeño como se imagine o se desee, independientemente de su extensión física, por lo de su carácter de indivisible. En contraste con las teorías imperantes, las cuales eran regidas por una metodología basada en el ideal escolástico de la deducción, es decir, el ideal de emplear nociones que hayan sido definidas perfectamente (González, 2004).Aunque cabe resaltar, que el cálculo de los indivisibles planteado por Pascal no satisfacía algunas de las reglas de la aritmética, tal como lo señalaba Brunschvicg (1972, citado por González, 2004; p.98) el cual da como ejemplo el siguiente:

> (…) la proposición que afirma que un indivisible, multiplicado tantas veces como se quiera por una cantidad, está tan alejado de sobrepasar una extensión dada que no puede formar sino uno solo y único indivisible. A partir de esta propiedad, Pascal asimiló el indivisible al cero de la aritmética, que como tal es un verdadero cero de la extensión. Ello estaba en clara oposición a algunas leyes de representación espacial, como la que expresaba un plano por un número indefinido de líneas. (p. 99)

En este orden de ideas, Pascal mantenía su teoría en un movimiento constante entre "la consideración de la división infinita como algo incomprensible y sin representación directa, y por otra parte, como un principio geométrico ineludible. La noción matemática de indivisible no es sino un reflejo de esa contradicción" (González, 2004; p. 99). La manera en que se manifiesta el pensamiento pascaliano queda ejemplificada, siguiendo a Brunschvicg (1972, citado por González, 2004), a continuación:

> (…) mientras el método de exhaución de los griegos se expresa y se representa en las figuras mismas, tal como aparecen a la mirada del geómetra, el método de los indivisibles, cuando trata de resolver los problemas de integración de una figura dada, recurre a la suma de infinidad de elementos que tienen una dimensión menos. Esta infinitud de elementos constituye un supuesto del

> razonamiento, que basta para configurar la práctica geométrica del nuevo método de lo indivisible. (p.99)

Posteriormente, Pascal al realizar estudios profundos sobre la cicloide, y todos aquellos problemas relacionados con esta, introdujo los principios fundamentales del análisis infinitesimal, antes que cualquier otro, aunque en sus cálculos no se manejaba de manera explícita la noción de *Infinito* (González, 2004). Por lo que, ideó un procedimiento, el cual consistía en:

> (…) determinó, de manera rigurosa, los límites de las sumas de un número infinitamente grande de cantidades infinitamente pequeñas, resolviendo a la vez los problemas de los diferentes tipos de integración a base de calcular volúmenes geométricos. La noción pascaliana equivalente a la de integral venía dada por la suma de líneas, planos y senos, y el método de integración tenía su equivalente en las sumas piramidales. Su método, directo y geométrico, le dispensaba de la necesidad de buscar un algoritmo. (González, 2004; p. 101)

Por otro lado, Isaac Newton (1642-1727) elabora la teoría de las fluxiones en su obra *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* (1736), "donde se estudian las magnitudes variables, introducidas como abstracción de las diferentes formas del movimiento mecánico continuo denominadas fluentes. Todas las fluentes son variables dependientes y tienen un argumento común, el tiempo" (Ferrante, 2009; p.6). En este método, Newton "consideraba a las variables *x* e *y* como cantidades que van fluyendo, o *'fluentes'*, de las cantidades p y q[25] (…) son las 'fluxiones' o velocidades de variación" (Boyer, 1986; p.499) y que "la razón p/q (…) la razón entre la velocidades instantáneas del cambio de *y* y de *x*, es decir la pendiente de la curva $f_{(x,y)} = 0$"(Boyer, 1986; p.498) , mediante este procedimiento trató de forma general problemas de análisis infinitesimal, llegando a resultados tales como la demostración que el área bajo la curva $y = ax^{\frac{m}{n}}$ viene dada por $\frac{ax^{\frac{m}{n+1}}}{\frac{M}{n+1}}$, o lo que es lo mismo $z = \frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$, donde z es el área de la curva (Boyer, 1986).

---

[25] Originalmente Newton utilizaba *po* y *qo*. Estas hacen referencia a los pequeños incrementos que experimentan la variables x e y durante un determinado intervalo de tiempo (Boyer, 1986).

Por otro lado, años anteriores a la aparición del método de las fluxiones, había desarrollado de manera indirecta el teorema binomial (1664 ó 1665) a partir de los trabajos de Wallis en relación a un problema de cuadraturas y cálculo de áreas. En palabras de Boyer (1986), en relación a una carta escrita por Newton a Leibniz donde explica como concibió ese método, relata que:

> (…) se encontró en la obra de Wallis con el cálculo de áreas (desde *x* = 0 hasta *x* = *x*) encerradas por curvas cuyas ordenadas eran de la forma $(1-x^2)^n$. Examinando las áreas que se obtenían para exponentes *n* iguales a 0, 1, 2, 3, etc., descubrió que el primer término siempre era x, el segundo término era $\frac{-0}{3}x^3$ ó $\frac{-1}{3}x^3$ ó $\frac{-2}{3}x^3$ ó $\frac{-3}{3}x^3$, según que el exponente n fuera 0, 1, 2 ó 3, y así sucesivamente. Por lo tanto, aceptando el principio de "intercálculo" o inerpolación de Wallis, supuso Newton que los dos primeros términos que aparezcan en el área para $n=\frac{1}{2}$ deberían ser
>
> $$x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$$
>
> y, de la misma manera, procediendo por analogía, encontró los términos siguientes, siendo los cinco primeros
>
> $$x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}-\frac{\frac{1}{8}x^5}{5}-\frac{\frac{1}{16}x^7}{7}-\frac{\frac{1}{128}x^9}{9}$$
>
> Posteriormente comprobó Newton que se podría haber obtenido el mismo resultado deduciendo primero que
>
> $$(1-x^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\frac{5}{128}x^8-\cdots$$
>
> por medio de una interpolación análoga a la anterior, y después hallando el área por integración de la serie término a término. (Boyer, 1986; p.496)

Con lo cual operó sin hacer uso del triángulo de Pascal y a partir del desarrollo de su teorema y de trabajos posteriores con series infinitas vislumbró el camino para el cálculo, puesto que "había descubierto que el análisis mediante series infinitas tenía la misma consistencia interna que el álgebra de cantidades finitas y que estaba regido por las mismas leyes generales" (Boyer, 1986; p.497), por lo que estas series "no deberían ser consideradas más como recursos de aproximación únicamente, sino que eran formas alternativas de las funciones que representaban" (Boyer, 1986; p. 497). Al respecto Wallis en su *Algebra* (citado por Boyer; 1986) declara que la series infinitas o convergentes "sugieren la designación de alguna cantidad particular mediante una progresión regular o sucesión de cantidades que se aproximen a ella de una manera continua y que, si se prolonga infinitamente, debe terminar por ser igual a ella" (p.497).

Por otra parte, se expresó en cuanto a la continuidad y el *Infinito*, al referirse sobre las paradojas de Zenón, específicamente la paradoja de "*Aquiles y la Tortuga*" en el problema de Aquiles, donde se preguntó si algunas variables pueden o no alcanzar sus límites. Tomando en cuenta sus declaraciones realizadas, se tiene:

> (...) esas razones últimas con las cuales las cantidades se desvanecen no son verdaderamente las razones de cantidades últimas, sino límites hacia los cuales siempre convergen 1as razones de cantidades decreciendo sin límite; y a los cuales se aproximan más cerca que cualquier diferencia dada, pero nunca ni van más allá ni en efecto los alcanzan hasta que las cantidades se disminuyan in infinitum[26]. (Cajori, 1915; p.45)

Para luego, manifestar su opinión dejando claro que las variables alcanzan sus límites:

> Las cantidades, y las razones de las cantidades que en cualquier tiempo finito convergen continuamente a la igualdad, y antes de que termine ese tiempo se aproximan una a la otra cada vez más que cualquier diferencia dada, finalmente llegan a ser iguales. [27] (Cajori, 1915; p. 45)

De esta manera, cabe agregar la opinión de Cajori (1915) quien en relación a este expresa:

> En otros pasajes del primer libro del Principia se permite a 1as variables alcanzar sus límites. Aunque la exposición de Newton no es tan explícita como uno quisiera, ni está libre de críticas, merece el crédito de percibir que las variables pueden alcanzar sus límites y que las variables que se presentan en la mecánica usualmente son, de naturaleza tal que efectivamente alcanzan sus límites (p. 45).

[26]Newton, Principia, Libro I, Sección I, último escolio.
[27]Newton, Principia, Libro I, Sección I, Lema I.

Asimismo, contemporáneamente, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), escribió lo siguiente:

> Es verdad que hay una infinidad de cosas, es decir, que siempre hay más de las que podemos designar. Pero si se les toma como auténticos todos, entonces no hay número *infinito*, ni línea ni cualquier otra cantidad que sea *infinita*, como es fácil demostrar. Las escuelas han querido o debido decir eso, al admitir un *infinito sincategoremático* (infinito potencial), pero no el *infinito categoremático* (infinito actual), por decirlo en su lenguaje. En rigor, el verdadero infinito sólo está en lo absoluto, que es anterior a toda composición y no está formado por adición de partes. (p.177)

En cuanto a la paradoja de *Infinito* ya descrita por Galileo en sus discursos y demostraciones, del tipo aritmético, en palabras de Burbagey Chouchan (2002)establecen:

> Hay a menudo, dice Leibniz, "fallas en las consecuencias", pero también, "falsas suposiciones que enredan"…, se percibe entonces que muchas de estas paradojas no lo son: las dificultades nacen de principios mal fundados, que juegan como presupuestos en el razonamiento, siendo una mezcla mal controlada de géneros. (p.40)

Con ello Leibniz se desliga un poco de las paradojas del *Infinito*, aludiendo que estas eran originarias de contradicciones que reposan sobre bases inciertas, aunque nunca rechazó su validez, admitió que si las paradojas se desarrollan, es porque nuestros conceptos son limitados. No obstante, todo lo que respecta al empleo y utilización del *Infinito* en la geometría, así como además en la matemática en general, durante el periodo del siglo XVII, se encontraba influenciado por nombres como el de Cavalieri, Fermat y Florimond de Beaune, entre otros. Lo que trajo como consecuencia que muy pocos matemáticos y estudiosos de aquella época lograran entender "el significado y el alcance del nuevo cálculo, el cual investigaba lo infinito a partir de las diferencias de diversos órdenes de infinitos y consideraba lo infinitamente pequeño como variación"(González, 2004; p. 108).

Cabe agregar "que la originalidad del algoritmo leibniciano para el cálculo infinitesimal depende de esta metafísica de la diferencia" (González, 2004; p. 108).

En este orden de ideas, “la nueva noción leibniciana de lo infinitamente pequeño permitió que en un problema cualquiera pudiera descenderse de manera progresiva a las diferenciales de grado infinito (dxdy, ddx ddy, etcétera)” (González, 2004; p. 108). Esto se debe a que Leibniz descubrió, alrededor de 1673, que:

> (…) la determinación de la tangente a un curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas, cuando se hacen infinitamente pequeñas estas diferencias, así como las cuadraturas dependen de la suma de las ordenadas o de los rectángulos infinitamente estrechos que constituyen el área. (Boyer, 1986; p.505)

A partir de sus trabajos en torno a los infinitesimales y los diferenciales, Leibniz ideó una nomenclatura y nuevo lenguaje para expresar sus operaciones para así ayudar y agilizar los procesos de pensamiento, por lo que, aproximadamente, en el año 1676 “después de varios ensayos se decidió a representar por dx y dy las diferencias más pequeñas posibles (o diferenciales) de la *x* y de la *y*”, igualmente para el proceso de integración, “escribía simplemente omn. y (es decir, *«todas las y»*) para representar la suma de las ordenadas bajo una curva, pero más tarde utilizó el símbolo $\int y$, y posteriormente aun el $\int y\,dx$” (Boyer, 1986; p.506), donde la *s* es el signo de la integral por ser la inicial de la palabra suma.

Ahora bien, también hay que mencionar que los fundamentos del cálculo fueron atacados y criticados duramente, uno de sus principales detractores fue el obispo Berkeley(1685 – 1753) quien expuso sus ideas en contra, así su primera declaración publicada sobre este tema aparece en su Alciphron, or the Minute Philosopher (1732). En donde manifiesta, siguiendo a Cajori (1915):

> (…) la ciencia matemática no llega a tener «esas ideas claras y distintas» que muchos «esperan y sobre las que insisten» en los misterios de la religión... como «las que han surgido en geometría sobre la naturaleza del ángulo de contacto, la doctrina de las proporciones, de los indivisibles, los infinitesimales y otros puntos diversos». Dice que así como las matemáticas, aunque envueltas en obscuridades, se consideran excelentes y útiles, también los artículos de la fe Cristiana deben aceptarse como no menos verdaderos y excelentes, debido a que proporcionan material de controversia. (p. 45)

Posteriormente, Berkeley en su obra el Analyst (1734), elabora un discurso sobre dos puntos que son desarrollados y explicados detalladamente, los cuales se describen a continuación en palabras de Cajori (1915):

> (1) La concepción de fluxiones es ininteligible ya que son 1as razones de cantidades que no tienen magnitud, (2) la derivación de la fluxión de x^n se apoya en una violación de un canon axiomático de razonamiento profundo. Newton no tomó las fluxiones infinitamente pequeñas, sino originalmente como los momentos de fluxiones como infinitamente pequeños. Después descartó lo infinitamente pequeño y explicó las fluxiones con su teoría de razones primeras y últimas. Berkeley argumentaba con gran agudeza contra lo infinitamente pequeño. (p. 46)

En este mismo sentido, Berkeley (1982; citado por González, 2004) en *Of infinites* rechazó la utilización de la geometría y las figuras geométricas como símbolos del continuo aritmético, manifestando:

> But if lines are infinitely divisible, I ask how there can be any such thing as a point? Or granting there are points, how can it be thought the same thing to add an indivisible point as to add, for instance, the differentia of an ordinale in a parabola, which is so far from being a point that it is itself divisible into an infinite number of real quantitys whereof each can be subdivided in infinitum, and so on according to Mrs. Leibnitz.[28](p. 111)

De esta forma, de acuerdo González (2004)Berkeley declarará:

> (…) apoyándose en la filosofía de Locke y también en cierta ambigüedad del lenguaje de Leibniz, las contradicciones que supone la introducción de los infinitesimales (magnitudes actuales que no son ni finitas ni nulas) cuya naturaleza se desconoce y del infinito (no tenemos idea que lo represente) en los nuevos procedimientos matemáticos. Sin embargo, su posición es un elemento muy útil para comprender el alcance de la problemática filosófica del nuevo cálculo que, en ausencia de una noción clara de infinitesimal, su aceptación en general será meramente práctica ante el estupor de que de premisas falsas se deducen fórmulas verdaderas. (p. 111)

[28]"Pero si las líneas son divisibles al infinito, yo me pregunto ¿cómo puede existir un punto? O, si se admite la existencia de puntos, me pregunto cómo se puede pensar que sea la misma cosa añadir un punto indivisible y añadir por ejemplo la *differentia* de una ordenada en una parábola, diferencia que es por poco un punto ya que como tal es divisible en un número infinito de cantidades reales, cada una de las cuales puede ser a su vez subdividida in *infinitum* y así a seguidamente, al menos si creemos al Sr. Leibniz" (tr. Gonzales, 2004; p. 111).

Por otro lado, en su obra *A Defence of Fee – thinking in Mathematics* de 1975, realiza un resumen de los intentos para establecer los fundamentos del cálculo en sus coetáneos y los principales problemas que se encontraban en este periodo histórico, de esta manera Berkeley (citado por Lavine, 2005) expresa:

> Algunos vuelan hacia proporciones entre nadas. Algunos rechazan cantidades porque son infinitesimales. Otros sólo aceptan cantidades finitas y las desechan porque no son considerables. Unos equiparan al método de las *fluxiones* con el de *exhaustaciones* y no admiten nada de ahí en adelante. Unos más mantienen una clara concepción de las fluxiones. Otros más sostienen que pueden demostrar cosas incomprensibles. Algunos mas probarían el algoritmo de las *fluxiones* por medio del método de reductio *ad absurdum*; otros los harían a priori. Algunos sostienen que los incrementos que tienden a cero son cantidades reales; otros dicen que son nada, y otros más aseguran que son cantidades límite. Hay tantos modos de pensar como hombres […] Algunos insisten en que las conclusiones son verdaderas, y por tanto también los principios […] Finalmente, varios […] francamente reconocieron que las objeciones no tienen respuesta. (p.37)

Luego, el matemático suizo Leonhard Euler (1707 – 1783) integró los fundamentos del cálculo diferencial de Leibniz y el método de las fluxiones de Newton, dando origen al "análisis" propiamente dicho, el cual se refiere al estudio de los procesos infinitos. El nuevo análisis se fundamentó en la obra *Introductio in analysin infinitorum*, aunque a las funciones algebraicas y las funciones transcendentales se les dio un tratamiento analítico estrictamente más no geométrico, por lo que, cuestiones como la del seno de un ángulo no era percibida como un segmento sino como un número que representa la ordenada de un punto de la circunferencia unidad. En esta obra, Euler trata de proceso infinitos, ya sean productos o fracciones con series infinitas (Boyer, 1986).

En sus trabajos, Euler manipulaba las relaciones entre la teoría de números y las propiedades de las series infinitas las cuales utilizaba de forma pragmática y en cierto punto imprudentemente, pero que le daba deducciones correctas (Boyer, 1986). De esta manera, obtuvo muchos resultados considerables, tales como:

> del desarrollo:
> $$\ln\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$
> Obtiene que
> $$\ln\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots$$
> y, por lo tanto, que
> $$\frac{1}{\ln\infty} = 0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{10} - \cdots$$
> donde en la serie aparecen los inversos de los primos, con signos menos, y los inversos de los productos de dos primos distintos, con signo más. (Boyer, 1986; p.563).

Por otro lado, en la *Introductio*, según Boyer (1986) también aparecen una gran cantidad de series y productos infinitos, entre esas aparecen:

> $$0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{17}\cdot\frac{18}{19}\cdot \ldots$$
> y el
> $$\infty = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{18}\cdot \ldots$$
> consecuencia del anterior. El símbolo ∞ lo utiliza Euler libremente para representar el inverso de cero. (p. 563)

Por el contrario, Jean Le Rond D`Alembert (1717 – 1783), "definía lo infinitamente grande en términos de límites" (Boyer, 1986; p.568) en contraste a la posición de Euler quien consideraba "las cantidades infinitamente grandes como las inversas de las magnitudes infinitamente pequeñas" (Boyer, 1986; p.568). Por lo que, "D`Alembert negaba la existencia del infinito actual, ya que pensaba en magnitudes geométricas y no en términos de la teoría de conjuntos" (Boyer, 1986; p.568). Además, proporciona una idea de límite en la cual "llama a una cantidad el límite de una segunda cantidad variable si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada (sin llegar nunca a coincidir con ella)" (D`Alembert; citado Boyer, 1986; p.567), aunque esta definición no fue muy aceptada por los matemáticos de la época por su falta de precisión lingüística.

La Matemática Contemporánea. Siglos XIX – XX:

"¡El infinito! Ninguna cuestión ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre".
David Hilbert (1921)

En 1831, Gauss en un fragmento en una carta dirigida Schumacher muestra su posición en cuanto al Infinito actual, al enviar en esta una demostración sobre uno de los postulados de Euclides da a entender su rechazo rotundo hacia el Infinito, a continuación de acuerdo a Ferreirós (1992; citado por Belmonte, 2009) Gauss escribe:

> Pero en lo que respeta a su demostración protesto ante todo contra el uso de una magnitud infinita como si fuera completa, cosa que nunca está permitida en la matemática. El infinito es sólo una façon de parler, cuando propiamente se habla de límites que se acercan tanto como se quiera a determinadas relaciones, mientras que a otros se les permite crecer sin limitación. (p. 27)

De esta manera, se puede observar la manera en que Gauss se expresaba acerca de la existencia de un infinito actual, el cual rechaza y que, por su parte, solo aprobaba la noción potencial de está, basada en la teoría de Límites. Sin embargo, debido al rechazo idealista que surgió posteriormente con respecto al mecanicismo newtoniano originó que se volviera a tomar en consideraciones algunas de las posiciones de Leibniz, en específico la formulada en la Monadología, en la que se fundamento en la aceptación de lo simple, es decir, las monadas, y del *Infinito actual* (Belmonte, 2009), planteamiento expresado a continuación:

> Estoy en tal medida a favor del infinito actual, que en lugar de admitir que la naturaleza lo aborrece, como se dice vulgarmente, sostengo que la afecta por todas partes para mejor mostrar las perfecciones de su Autor. Así, creo que no hay ninguna parte de la materia que no sea, no digo ya divisible, sino actualmente dividida; y en consecuencia la menor partícula debe considerarse como un mundo lleno de una infinidad de criaturas diferentes. (Ferreirós, 1992; citado por Belmonte, 2009; p.27)

Asimismo, el filósofo Immanuel Kant fijó posición en relación a tal enigmático ente matemático, en el siglo XIX, "coincidía con Aristóteles al señalar que el límite absoluto es imposible en la experiencia, es decir, nunca se puede llegar al infinito (actual)" (Ortiz, 1994; p.63).En la crítica del discernimiento Kant indica que no se puede dar un número al *Infinito* puesto que no puede haber totalidad absoluta de progreso sin fin, es decir, porque no se puede dar un esquema, un equivalente espacio – temporal al *Infinito*.

Pero fue el matemático francés Augustin – Louis Cauchy (1789 – 1857) quien le dio la forma que tiene actualmente el cálculo infinitesimal elemental; su posición, argumentos y demostraciones en relación a este aparece en tres de sus libros, los cuales son el Cours dànalyse de l`École Polytechnique (1821), el Résumé des lecons sur le calcul infinitésimal (1823) y las Leçons sur le calcul différentiel (1829), partiendo del concepto de Límite de D`Alembert y perfeccionándolo desde una perspectiva aritmética, dejando a un lado la geometría, los infinitesimales, así como también las velocidades de cambio (Boyer, 1986), llega a formular la siguiente definición:

> Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que terminan por definir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás. (Cauchy, 1882 – 1932; citado por Boyer, 1986; p.647)

Además, define un infinitésimo, no como una cantidad o número constante muy pequeño, sino como "una cantidad variable se hace infinitamente pequeña cuando su valor numérico disminuye indefinidamente de manera que converge hacia el límite cero" (Cauchy, 1882 – 1932; citado por Boyer, 1986; p.647). Por otro lado, Cauchy "definió la Derivada como un límite y sólo empleó diferenciales definidas en términos de la Derivada; definió la convergencia y divergencia de las series y abiertamente enunció que las series divergentes no tienen suma" (Lavine, 2005;

p.45). También logra definir la Derivada haciendo uso de conceptos fundamentales tales como la de función y de límite, en consecuencia:

> Para definir la derivada de la función $y = f_{(x)}$ con respecto a x, le da a la variable x un incremento $\Delta x = i$ y forma el cociente
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_{(x+i)} - f_{(x)}}{i}$$
> Y al límite de este cociente de diferencias cuando i tiende hacia cero, lo define como la derivada de $f'_{(x)}$ de y con respecto a x. (…) Si d_x es una cantidad finita, entonces la correspondencia diferencial d_y de $y = f_{(x)}$ vendrá definida simplemente como $f'_{(x)} = d_x$. (Boyer, 1986; p. 648).

De igual forma, definió "la integral como el límite de una suma de rectángulos" (Lavine, 2005; p.45). Su aporte más significativo es el relacionado con el desarrollo de criterios de convergencia para series, la más conocida el criterio de convergencia de Cauchy para una sucesión, la cual establece que: "la sucesión $S_0, S_1, \ldots$ tiene un límite si $|S_{n+r} - S_n|$ es menor que cualquier cantidad dada para todo valor de *r* y para valores suficientemente grandes de *n*" (Lavine, 2005; p.45). No obstante, muchos de sus errores, de acuerdo a Grattan – Guiness (1980; citado por Lavine, 2005) provenían de que "hablaba del límite de una variable, no del límite de una función, y no expuso la dependencia de una variable en la variable independiente. Consideraba a una variable que se aproxima a cero como un infinitesimal" (p. 46).

Luego, el filósofo, teólogo matemático checo Bernhard Bolzano (1781 – 1848), fue el primero que se preocupó y trató de cimentar la noción de *Infinito* actual, en su obra Paradojas de lo infinito (1851) expresando que éste podía ser introducido en matemática de manera consistente, libre de contradicciones y resaltando el hecho de que el concepto de equivalencia entre dos conjuntos era aplicable tanto a conjuntos finitos como infinitos, lo cual sirvió de base e influyó en los trabajos de Georg Cantor; esto de acuerdo a Ortiz (1994).

Bolzano define al conjunto infinito como: Un conjunto no vacío A es finito si para algún entero positivo n, $\boldsymbol{A}$ es equipolente a $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n\}$; de otra forma $\boldsymbol{A}$ es infinito. Por otro lado, un conjunto $\boldsymbol{A}$ es infinito si existe un subconjunto propio $\boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{A}$ equipolente a $\boldsymbol{A}$; en cualquier otro caso $\boldsymbol{A}$ es finito. Cabe destacar que esta definición de conjunto finito es la actualmente aceptada, aunque en ella Bolzano plantea una contradicción con la intuición que se tiene de subconjunto propio, por la razón de que si un conjunto $\boldsymbol{A}$ tiene un subconjunto propio $\boldsymbol{B}$, entonces $\boldsymbol{B}$ debe ser más pequeño que $\boldsymbol{A}$ debido a que existen elementos de $\boldsymbol{A}$ que no están en $\boldsymbol{B}$, esta contradicción aparente lo que indica es que la manera en que se observa el mundo de lo finito al igual que la lógica empleada para explicar los fenómenos finitos no podrían ser suficientes para ser aplicables a situaciones donde se presente o se mida la noción de *infinito*. En relación con esto Boyer (1986), expresa:

> Así fue hasta que en tiempos de Dedekind, quien vio "que en las paradojas de Bolzano no algo anómalo, sino justamente una propiedad universal de los conjuntos infinitos, que Dedekind tomó como definición precisa: "Un sistema S se llama infinito cuando es semejante a una propia parte de sí mismo; en caso contrario, se dice que S es un sistema finito". (p.700)

Por su parte, Karl Weierstrass (1815 – 1897) realizó varias investigaciones sobre representación de funciones por medio de series de potencias y estableció una definición de Límite más elaborada que la de Cauchy, donde se reemplaza la expresión "tan poco como queramos" por ϵ (Lavine, 2005). Esta definición, plantea que:

> (…) una función $f_{(x)}$ tiene su límite L en $x = x_0$, si para todo $\epsilon > 0$ hay una δ tal que si $|x - x_0| < \delta$ y $x \neq x_0$, entonces $|f_{(x)} - L| < \epsilon$. En la terminología de Cauchy la "variable" – que es la función – "termina" en el intervalo definido por $|x - x_0| < \delta$, difiriendo del "valor fijo" L por "tan poco como uno desee", es decir, por menos que ϵ. (Kitcher, 1983; citado por Lavine, 2005; p.49).

Ya para la década de 1860, Weierstrass empleando sus propios hallazgos y los métodos sugeridos de Bolzano logra demostrar "que todo conjunto infinito acotado de puntos tiene un *punto límite*, es decir, un punto en el que todo intervalo alrededor de él contiene una cantidad infinita de miembros del conjunto" (Kline, 1972; citado por Lavine, 2005; p.50), a esta enunciado se le conoce como el teorema Bolzano – Weierstrass.

Ahora, para la época el tratamiento del *Infinito* estaba orientado y asociado con lo muy grande o lo muy pequeño, no eran aceptada las ideas relacionadas con el *Infinito actual*, pues eran vista como anomalías, hasta que apareció la definición de conjunto infinito dada por Dedekind (1831 – 1916)en su obra *Stetigkeit und irrationale Zahlen*en 1872. Esta definición reza de la forma siguiente: Dedekind (1882): "Un conjunto ***A*** es *infinito* si algún subconjunto propio ***B*** de ***A*** es equipolente a ***A***; en cualquier otro caso ***A*** es infinito" (Carta de Dedeking a Cantor, 1882; citado por Ortiz, 1994; p. 66).

Sin embargo, luego, Georg Cantor (1845 - 1918) demuestra que existen diversos órdenes de infinitud. Además, desarrolla una teoría conjuntista lineal de puntos al trasladar la operatividad de los números reales a los números de la recta, basada en la correspondencia uno a uno entre dos conjuntos, estableciendo la relación de equipotencia entre conjuntos a través de una relación biyectiva, permitiendo distinguir entre conjuntos contables y no contables, con las investigaciones y aportes de Cantor se da un cambio metodológico dejando a un lado el proceso de verificación empírico por uno más apegado a la lógica (Belmonte, 2009). Sus teorías serán estudiadas más a fondo en el apartado titulado *"el Paraíso de Cantor"* por sus invaluables contribuciones al campo de la matemática y al estudio del *Infinito*.

Posteriormente, en 1892 Camille Jordan realizó una formulación concluyente en relación a la integral de Cauchy – Riemann, influenciado por la Teoría de Conjuntos de Cantor, este realiza estudios y proporciona una serie de afirmaciones definitivas. En aquella época la Integral de una función en dos dimensiones era definida sobre la región que se hallaba en el interior de una curva cerrada y que a su vez estaba limitada por esta, entonces la integral venía dada en términos de los valores límite de las sumas de particiones del plano las cuales se realizaban arbitrariamente y en rectángulos (Lavine, 2005).

No obstante, esta concepción de la integral de superficie presentaba un problema, el cual atañía al qué hacer con los rectángulos que se encontraban en la frontera de la región evaluada, es decir, aquellos rectángulos que no se encontraban totalmente dentro ni totalmente fuera de la región a integrar. La cuestión estaba en que si estos debían ser tomados o no al realizar las sumas. Por lo que el problema se resolvió por medio de la afirmación "que la suma de las áreas de los rectángulos de la frontera tendía a cero en el límite y que, por tanto, no importaba si los rectángulos de la frontera eran incluidos o excluidos" (Lavine, 2005; p. 64). Pero surgieron otras cuestiones que parecían cuestionar esta afirmación más específicamente en los estudios de la curva de Peano.

Luego, esto fue resuelto por Jordan al tratar las particiones (los rectángulos) como los subconjuntos del plano desde el punto de vista cantoriano. En palabras de Lavine (2005):

> La noción de Cantor y Stolz del contenido exterior se generaliza de una manera obvia de la línea al plano: se pueden usar rectángulos en vez de intervalos. Jordan introdujo la noción de contenido interior, la cual le fue sugerida por la noción de contenido exterior. El conjunto exterior de un conjunto se define utilizando las áreas de conjuntos finitos de rectángulos que contienen al conjunto: es la máxima cota inferior de tales áreas. El contenido inferior de un conjunto es la mínima cota superior de las áreas de los conjuntos finitos de rectángulos disyuntos dos a dos que están contenidos dentro de dicho conjunto. Jordan decía que un subconjunto del plano es medible si tiene un conjunto exterior igual a su contenido interior. Naturalmente, la medida de un conjunto medible es su contenido exterior o interior. Se puede ver fácilmente que la medida de los conjuntos familiares de puntos sobre el plano son justamente sus áreas. (p. 64)

Una vez hechas estas modificaciones, "Jordan definió la integral en términos de los valores límite de las sumas sobre las particiones arbitrarias del plano en conjuntos medibles" (Lavine, 2005; p. 64), tratando así la región de integración como un conjunto medible arbitrario, y no como se venía haciendo en el cual se trataba solo como el interior de una curva. Demostrando además, "que un conjunto es medible si y solo si el contenido exterior de su frontera es cero" (Lavine, 2005; p. 64), lo cual le sirvió para demostrar "que la suma de las áreas en la frontera tendían a cero en el límite y, por tanto, que la integral estaba bien definida"(Lavine, 2005; p. 64), lo cual añadió en su obra Cours d' analyse en 1893.

Ahora, ya para el año de 1902 Henri Lebesgue, introduce en el análisis la teoría de conjuntos, una vez ya definida la exponenciación cardinal hecha por Cantor en 1885 donde planteó que la potencia del conjunto de los números reales es $2^{\aleph_0}$. Lebesgue modifica la definición del conjunto exterior de los subconjuntos del intervalo unitario con la finalidad de dar cabida a la existencia de conjuntos infinitos numerables de intervalos, ya demostrados anteriormente por Cantor, en lugar de conjuntos finitos solamente. Por lo tanto, de acuerdo a Lavine (2005), "admitió $[a_1, b_1]$,…, además de $[a_n, b_n]$" (p. 65), para luego, definir "que el contenido interior de un subconjunto *E* del intervalo unitario 1 menos el contenido exterior del complemento de E. Actualmente la noción correspondiente de medida es conocida como medida de Lebesgue" (p. 65). Esta medida la empleó para definir la integral de una función planteándola como:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Posteriormente, Kurt Gödel (1906-1978), demostró como producto de sus *Teoremas de Incompletitud*, por medio de un corolario, que la consistencia de la *Teoría de Conjuntos*, desarrollada hasta el momento, no podía probarse dentro del mismo sistema. Esto es, en los "Teoremas de Incompletitud se demostraba que siempre existirían ciertos problemas sencillos que no se podrían resolver con una teoría axiomática. Además, la existencia de conjuntos infinitos no puede deducirse del resto de los axiomas de la Teoría de Conjuntos" (Fedriani y Tenorio, 2010; p.44).

El Paraíso de Cantor:

"En matemática, el arte de formular una pregunta
ha de tenerse en mayor estima que resolverla"
Georg Cantor

Esta investigación permite estudiar los principales constructos teóricos de Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 - 1918) en relación a la noción de *Infinito* actual, los cuales evidencian el paraíso que él construyó a los matemáticos alrededor de tan enigmático asunto, que ha preocupado al hombre desde sus inicios como ser pensante. Sus investigaciones fueron de vital importancia para el desarrollo de la matemática actual, por tal motivo se tomó este apartado solo para describir y explicar, en la medida de lo posible, su teoría de *Infinito* inscrita en su aritmética transfinita y en su teoría de conjuntos.

Cantor, introdujo la *Teoría de los Conjuntos* y *Números Transfinitos*, aportando así un nuevo lenguaje lógico manejable y capaz de expresar conjuntos infinitos a través de combinaciones de una cantidad limitada de signos con lo cual fue capaz de describir conjuntos más grandes aún que un "todo". En palabras de Lavine (2005):

> Cantor comenzó estudiando los dos puntos más interesantes: el conjunto de los números racionales y el de los números reales. Buscaba diferencias entre los dos que fueran relevantes en relación con el hecho de que los números reales son continuos, mientras que los números racionales no lo son. En 1874, (…), demostró que los números algebraicos (y por tanto su subconjunto, los números racionales) pueden ser puestos en correspondencia biunívoca (uno a uno), con los números naturales, mientras que no puede hacerse esto mismo con los números reales (p.56)

En este mismo orden de ideas, una de las demostraciones más relevantes en la *Teoría de Conjuntos* es la que tiene que ver con la afirmación de que el conjunto de los números reales posee una potencia mayor que la del conjunto de los números racionales; para esta demostración utilizó el método de *reductio ad absurdum*, Boyer(1986) describe el método y razonamiento empleado por Cantor de la siguiente manera:

> Supongamos que los números reales entre 0 y 1 son numerables, y supongámoslos expresados todos ellos como decimales que no terminan en una sucesión de ceros (es decir, que por ejemplo $\frac{1}{3}$ aparecerá representado por 0,3333…, $\frac{1}{2}$ por 0,4999…, etc.); si los números $0 < x < 1$ pudieran ordenarse en un orden numerable tendríamos una sucesión:
>
> $$a_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13} \dots$$
> $$a_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23} \dots$$
> $$a_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33} \dots$$
> ………………………………………………
>
> donde a_{ij} es un dígito entre 0 y 9, ambos incluidos. Para demostrar que en cualquier ordenación de este tipo no pueden figurar *todos* los números reales entre 0 y 1, Cantor construye un decimal infinito distinto de todos los de la lista: para ello basta escribir el decimal $0, b_1b_2b_3b_4 \dots$, donde $b_k = 9$ si $a_{kk} = 1$, y $b_k = 1$ si $a_{kk} \neq 1$. Este número real estará entre 0 y 1 y, sin embargo, será distinto evidentemente de todos los de la sucesión dada, que habíamos supuesto contenía *todos* los números reales entre cero y uno. (p.702)

Por lo tanto, Cantor demostró la existencia de varios "tamaños" u órdenes de infinitud, probando que es imposible establecer una correspondencia uno a uno entre el conjunto de números naturales y el conjunto de números reales entre el cero y el uno. Argumentando con esto que las cantidades infinitas no necesariamente deberían responder a las mismas leyes que las finitas, y que sus leyes específicas podían ser establecidas.

Además, introdujo una invención magistral, la del concepto de función *biyectiva*, en otras palabras, la idea de una relación exhaustiva y uno a uno, la cual le servía de herramienta para la comparación de conjuntos y establecer si eran equivalentes o no.

Con lo que posteriormente surge el concepto de *cardinalidad*, es decir la **“**herramienta para comparar conjuntos numerables. Dos conjuntos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ tienen la misma cardinalidad si es posible definir una relación biyectiva de $\boldsymbol{A}$ sobre $\boldsymbol{B}$” (Revista Matemática Digital. Nº 18, abril 2009).

También ideó y utilizó una serie de principios básicos con lo cual fundamentó su teoría, Lavine (2005) con respecto a ello manifiesta, que aunque no trabajó bajo un esquema axiomático, este “abordó los hechos con base en cierta perspectiva o concepción, no con base en supuestos ya estipulados. No obstante, tomó como básicos cada uno de los principios que yo considero como axiomas cantorianos, en uno u otro sentido, básicos” (p.94). Estos supuestos o axiomas cantorianos, de acuerdo a Lavine (2005) y en notación actual, son:

> Axioma 1. Los números ordinales están ordenados linealmente por $<$.
> Axioma 2. Existe un numero ordinal mínimo, 0.
> Axioma 3. Todo número ordinal α tiene un sucesor inmediato $\alpha + 1$[29]. (p.95)
> (…)
> Axioma 4. Existe un número ordinal ω tal que $0 < \omega$. Para todo número ordinal α, si $\alpha < \omega$, entonces $\alpha + 1 < \omega$ y cada número ordinal distinto de cero $\alpha < \omega$ hay un número ordinal β tal que $\alpha = \beta + 1$.(p.96)
> (…)
> Definición 5. Un *conjunto* es el rango de una función uno a uno que tiene como dominio un segmento inicial propio de los números ordinales[30].
> Axioma 6. (de extensionalidad). Los conjuntos que tienen los mismos elementos son iguales.
> Axioma 7.Todo conjunto de ordinales tiene una mínima cota superior.(p.96)
> (…)
> Axioma 8. Para todo número ordinal α hay un conjunto asociado (α) –la clase numérica de α– tal que β está en (α) si y sólo si β es un número ordinal y el conjunto de predecesores de α es el rango de una función uno a uno que tiene dominio de los predecesores de β. (p.96)
> (…)

---

[29] Específicamente, “el axioma dice que para todo número ordinal α hay un número ordinal β tal que $\alpha < \beta$, y para cualquier número ordinal γ, si $\alpha < \gamma$, entonces $\beta \leq \gamma$. Se ve fácilmente que el número ordinal β es único. Llamémoslo $\alpha + 1$” (Lavine, 2005; p.95).

[30] Complementado la definición, Cantor (1891; citado por Lavine, 2005) expresa: “entiendo por “conjunto” (*“Mannigfaltigkeit” oder “Menge”*) toda cantidad que puede ser concebida como unidad, i.e., cualquier dominio de elementos definidos que pueden ser amalgamados en un todo por medio de una Ley” (p.100).

> Axioma 9. Para todo número ordinal α, hay un número ordinal $\beta > \alpha$ tal que el conjunto de los predecesores de β no es el rango de una función uno a uno con dominio α.(p.97)
> (…)
> Axioma 10. Sea *S* un conjunto de conjuntos, sea *F* una función que tiene como dominio los predecesores de algún número ordinal α que atestigua que *S* es un conjunto, de tal manera que todo miembro de *S* sea $F_{(\gamma)}$ para alguna $\gamma < \alpha$. Entonces hay una función binaria H tal que, para todo $\gamma < \alpha$, la función *"única"* $H\ (\gamma, .)$que permanece después de que γ es introducida a H tiene como dominio el conjunto de los predecesores de un número ordinal inicial y atestigua que $F_{(\gamma)}$ es un conjunto. (p.97)

Luego, presenta una definición de conjunto más elaborada:"Entendemos por conjunto bien definido (o variedad) cualquier reunión en un todo *M* de determinados objetos bien distinguidos *m* de nuestra intuición o nuestro pensamiento (llamados elementos de *M*)". Donde al decir la frase "*reunión en un todo*", Cantor expresa que un conjunto es un objeto en sí mismo, dando la noción de clase, por otro lado, la afirmación "*de objetos bien distinguidos*" quiere dar a entender que todos los elementos de un conjunto deben estar determinados sin ninguna ambigüedad y que estos no deben ser confundidos entre ellos mismos, ni con otros elementos que no sean del conjunto, para así establecer si un objeto pertenece o no al conjunto. Y por último, cuando se refiere a objetos "*de nuestra intuición o pensamiento*" desea manifestar que los objetos pueden ser reunidos dentro de un mismo conjunto sin atender a la procedencia, diversidad o abstracción de estos (Di Tada, E., 2006).

De igual manera, durante su investigación, Cantor define un concepto que le es imprescindible a la hora de desarrollar su corpus teórico y este es el de *potencia* o *número cardinal de un conjunto*, el cual es definido por Cantor (citado por Di Tada, E., 2006):

> Llamaremos potencia o número cardinal del conjunto *M* al concepto general que por medio de nuestra facultad activa del pensamiento resulta cuando se hace abstracción de la naturaleza de los elementos que le pertenecen y del orden que están dados,..., el número cardinal $\overline{\overline{M}}$ es un conjunto compuesto por unidades y

> este número tiene existencia en nuestra mente como una imagen intelectual o proyección de conjunto original *M*. (p. 114)

Dicho en otras palabras, la potencia de un conjunto "puede ser considerada como un atributo de cualquier colección *bien definida*, cualquiera que sea el carácter de sus elementos" (Cantor, 1879; citado por Lavigne, 2005; p.58)

Por otro lado, en una carta dirigida a Eneström expone una serie de opiniones y explicaciones con respecto al infinito actual y a los números hechos infinitos[31], entre las cuales resalta la manifestada en oposición a las supuestas pruebas que existían en contra de las acepciones ya mencionadas, argumentando que estas pruebas son erróneas, ya que se le asigna a los números de hecho infinitos o números transfinitos, todas las propiedades que satisfacen los números finitos. Afirmando seguidamente:

> De hecho, por el contrario, los números infinitos, en tanto pueda, en absoluto, hablarse de ellos, deben considerarse justamente en su oposición a los números finitos, es decir, como un nuevo tipo de números, cuyas características deben depender exclusivamente de la naturaleza misma de las cosas y ser objeto de investigación independiente, sin someterse a nuestro arbitrio o a nuestros prejuicios. (Cantor, 2004; p. 178)

Con respecto a esto, en la misma carta Cantor plantea que son diversos los criterios empleados para agrupar y ordenar las principales concepciones que se han manifestado a lo largo de la historia en torno al problema del *Infinitoactual* y que en la mayoría de estos puntos de vista han sido utilizados para poner en duda la existencia del *Infinito actual*. Entre ellas menciona las presentes:

> En primer lugar, en tanto existente *in Deo Extramundano aeterno omnipotenti sive natura naturante*[32]. En tal caso, se llama *absoluto*.
> En segundo, en tanto que se presenta *in concreto seu in natura naturata*[33]. Aquí lo llamo *transfinito*.

---

[31] "Proviene de la frase *aktual unendliche zahlen* el cual se vincula literalmente a como números actualmente infinitos y que posteriormente Cantor denomina números transfinitos"(n. T, Cantor, 1885, p. 175).

[32] "En un Dios extramundano, eterno y omnipotente, o sea, como una naturaleza creadora" (n. T, Cantor, 1885, p. 179).

[33] "En concreto o como naturaleza creada. La distinción parece provenir de Nicolás de Cusa, quien distingue entre una *natura naturans* (o *naturante*, generadora), esto es, entre el Dios cristiano como algo trascendente y una *natura naturata*, como una naturaleza creada" (n. T, Cantor, 1885, p. 179).

> El infinito actual puede cuestionarse, en tercer lugar, *en abstracto*, es decir, en tanto que pueda ser aprehendido por el conocimiento humano en la forma de números *de hecho infinitos* o *números transfinitos*, como los llamo, esto es, en la forma todavía más general de los *tipos de orden.* (Cantor, 2004; p.179)

Una vez señaladas estas posturas u orientaciones, Cantor (2004) hace una distinción entre ellas y toma para ello las dos últimas, puesto que la primera alude a la visión filosófica donde se aborda el problema que plantea el *Infinito actual in Deo*, en relación a esto último Ortiz (1994) indica "el Infinito Absoluto es el Absoluto, por definición lo imposible de alcanzar: lo inalcanzable. El grado máximo de independencia, autonomía y completitud (…) Para Cantor desentrañar el infinito absoluto era una labor mística: la busqueda de Dios" (p.67). Ahora, de las dos posturas escogidas Cantor indica que se generan cuatro puntos de vistas distintos y que han sido sostenidos en la historia, las cuales describe a continuación:

> (1) Se puede rechazar el infinito actual tanto *en concreto* como *en abstracto*. Esta postura ha sido defendida, por ejemplo, por Gerdil, Cauchy, Moigno, al igual que por Ch. Renouvier y por todos los llamados *positivistas* y pensadores afines.
> (2) Se puede aceptar el infinito actual *en concreto* y, al mismo tiempo, rechazarlo *en abstracto*. Como he demostrado en mis *Grundlagen*[34], esta es la posición que han sostenido, entre muchos otros, Descartes, Spinoza, Leibniz y Locke (…) Hermann Lotze (…)
> (3) El infinito actual puede también ser aceptado *in abstracto* y, al mismo tiempo, por el contrario, puede ser negado *en concreto.* Este punto de vista es compartido por una parte de los neo-escolásticos, mientras que otra parte de ellos, estimulada poderosamente por la Encíclica *De Philosophia Cristiana admentem Sancti Thomae Aquinatis Doctoris Angelici in scholis catholicis instauranda* de León XIII, intenta defender el primero de estos cuatro enfoques.
> (4) Por último, el infinito actual puede igualmente, aceptarse tanto *en concreto* como *en abstracto*. Esta postura, que personalmente considero como *la única correcta*, ha sido sostenida históricamente por muy pocos. De hecho, quizá sea yo el primero en adherirse con toda determinación y consecuencia a ella. Estoy, sin embargo, firmemente convencido de que no seré el último. (Cantor, 2004; p.180)

[34]Cantor se refiere aquí a su memoria de 1883, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltikeitslehre* [Fundamentos de una teoría general de las variedades] (n. T, Cantor, 1885, p.179).

De igual manera, aclara que el *Infinito* (indefinitum) *potencial* o sincategoremático no origina una clasificación como la plasmada para *Infinito actual*, debido a que “esta noción sólo tiene importancia como concepto relacional, como una idea subsidiaria de nuestro pensamiento, sin, no obstante, designar ningún concepto propiamente dicho” (Cantor, 2004; p. 181). Por lo que, opina además, que “como un recurso epistemológico y como una mera herramienta mental, ha tenido, por supuesto, un papel muy relevante en el cálculo diferencial e integral inventado por Leibniz y Newton. Pero no puede reclamar para sí más que esto” (Cantor, 2004; p. 181). Mientras, que para Cantor el *Infinito actual* tanto en la matemática como en la física “constituían lo *Transfinito*, donde, a diferencia del infinito absoluto, inalcanzable, existían una infinitud de infinitos: *los cuales están claramente limitados, sujetos a nuevas extensiones, y porlo tanto relacionados con lo finito*” (Ortiz, 1994, p.68).

En suma, fueron innumerables las investigaciones realizadas por los mejores matemáticos de finales de siglo XIX y principios del siglo XX, tales como: Burali-Forti (1897), Hilbert (1926), Zermelo (1871-1953),Fraenkel A. (1891-1965), Russell (1903, 1967.), entre otros; quienes demostraron que las ideas de Cantor se quedarían para siempre en el mundo de las matemáticas, sentando las bases para la comprensión de la noción de *Infinito*, con respecto a esto D. Hilbert (1926) describió a la teoría de Cantor como el “producto más sublime del genio matemático y uno de los logros supremos de la actividad intelectual humana". Aunque en sus investigaciones se demostraron ciertas antinomias sus trabajos conservaron sus principales elementos.

En conclusión, la noción de *Infinito actual* se constituye, en palabras de Cantor (2004;p.182), “en una cantidad (quantum) en sí fija y constante que se encuentra más allá de toda magnitud finita”. Es decir, surge al considerarlo como una unidad y que lo tratamos como si fuese un elemento que surge al superar el paso al Límite. Pero las contradicciones que surgieron posteriormente en relación al problema de *la hipótesis del continuo* dejaron ciertas dudas por la indeterminabilidad de esta, debido a los estudios realizados por Gödel y Cohen, propiciando que la naturaleza del *Infinito* siga siendo una inquietud constante y abierta para el espíritu humano, y que dicha noción se manifieste dentro de un movimiento dialéctico entre el ser y no ser, esto es, entre lo apodíctico o la antinomia.

2.2.3 Bases psicopedagógicas y didácticas

A la hora de integrar lo matemático y lo pedagógico en ese proceso de didactificación, término empleado por Gascón (2002), la definición de un concepto matemático se debe considerar como una serie de palabras o una definición verbal del concepto, que sea producto de su evolución histórica, entre las cuales, se podrá distinguir entre las *definiciones formales*, o sea, definiciones acordadas y admitidas por la comunidad científica de los matemáticos en un periodo dado de la historia, y las *definiciones personales* utilizadas por los individuos (ya sean estudiantes, profesores, matemáticos, entre otros) (Tall, 2001) como interpretación, construcción o reconstrucción de una definición formal, así como también, algún tipo de imagen que se tiene antes del acercamiento del estudiante con teorías axiomáticas.

Por tanto, se tiene que considerar el lenguaje semiótico, el cual debe adaptarse a las capacidades y a la comprensión de los alumnos; así como también a la secuencia de las unidades de aprendizaje que debe estar adaptada a la lógica interna de las matemáticas; propiciando en el estudiante la capacidad de formular conjeturas, invención y resolución de problemas, desarrollando así capacidad heurística, dejando a un lado el método algorítmico del pensamiento, es decir, descartar el énfasis de la búsqueda mecánica de respuestas, como se ha venido realizando en la actualidad.

Por otro lado, se deben introducir los conceptos y procesos matemáticos respetando las etapas de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitiva, evitando precipitar el aprendizaje del nuevo objeto, así como también la innecesaria complejidad de los signos matemáticos, tomando en consideración las individualidades que tienen que ver con los ritmos de trabajo individual o colectivo en la clase.

Ahora bien, se considera además lo planteado por Brun (1996a, citado por D'Amore, 2000, p. 2) donde señala que "La Didáctica, en tanto ciencia de la producción, organización y gestión de los bienes del sistema de enseñanza – aprendizaje, tiene relación con la cuestión epistemológica relativa a la transformación del conocimiento". En pocas palabras, hace referencia a lo propuesto por Gascón (2002) en relación a la enseñanza de las matemáticas en lo referente a Programa Epistemológico en donde el problema de la Educación Matemática puede ser abordado a partir del análisis de las prácticas que se llevan a cabo en las diferentes instituciones, siendo generadoras de conocimientos a partir de la elaboración por parte de la didáctica de determinados modelos epistemológico – didáctico.

Hecha la observación precedente, hay que mencionar además lo que Schubauer – Leoni (1996, citado por D'Amore, 2000) expresa:

> El individuo, sujeto de la psicología cognitiva o socio-cognitiva, es por tanto estudiado en cuanto alumno que se enfrenta a una situación didáctica y, de esta forma, con un saber específico. Asistimos entonces a un desplazamiento de la función cognitiva en los estudios de didáctica respecto a aquellos de la psicología. De hecho, en el caso de la didáctica, los procesos cognitivos, los "gestos mentales" de los sujetos, el surgimiento de concepciones nuevas, son analizados no solo en cuanto productos de los controles internos que los sujetos ejercen sobre el problema, sino también en función de los controles externos provenientes de la situación. Por lo tanto, se trata de avanzar en la comprensión de las condiciones que hacen posible el encuentro del alumno con el problema y la relativa aceptación de su parte. (p.3)

Una vez expuesto esto, para el presente estudio hay que tomar en cuenta una sustentación teórica solida que permita abordar, comprender y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos matemáticos, en este caso la noción de *Infinito*, teniendo en cuenta la didactificación conjunta entre lo pedagógico y lo matemático de conceptos matemáticos cuyas conceptualizaciones se sirven de los modelos intuitivos que poseen los estudiantes sobre la noción de infinito, así como también la psicología cognitiva y los procesos de enseñanza y aprendizaje. Entre estas teorías, para el estudio se utilizarán las siguientes:

a. La Teoría del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA).

Para abordar la problemática propuesta en la investigación se hace necesario recurrir, para el estudio de los esquemas conceptuales, a la "teoría cognitiva originada por Tall (1991, 1992, 1995, 2001, 2004, 2005) y Dreyfus (1990, 1991) "Valdivé y Garbin (2008, p.416), es decir, el modelo teórico del Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), el cual fue elaborado a partir de las observaciones y los hallazgos encontrados por Tall en conjunción con Dreyfus, y en "donde los objetos matemáticos básicos no son nuevos para el estudiante pero que no se pueden considerar estabilizados en su mente (…) y que es el Análisis quien va a jugar un papel esencial en su maduración y conceptualización" (Valdivé, 2008, p.534).

De esta manera, la escolaridad y el proceso de enseñanza y aprendizaje en el sujeto se desarrollan a lo largo de etapas definidas por edades y contenidos, que inician desde su inserción en el sistema educativo y culminan con los estudios universitarios o de postgrados. Entre estas etapas cognitivas, se encuentran el Pensamiento Matemático Elemental (PME) y el Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), donde por PME se entiende por aquella etapa cognitiva que tiene lugar hasta la secundaria, mientras que el PMA, es la etapa relacionada con la enseñanza de la matemática en ámbitos universitarios. Una vez dicho esto, es importante señalar las características del PMA, según Garbin (2005b) en esta etapa cognitiva se precisa lo siguiente:

> a) Se enseñan una mayor cantidad de conceptos en menor tiempo.
> b) Se enseña con mayor frecuencia los contenidos del currículo de manera formal antes de que el estudiante se haya familiarizado con ellos de manera informal.
> c) Se enseñan conceptos que históricamente evolucionan muy lentamente y, al mismo tiempo, se exige aprendizaje de demostraciones estándar y la realización de construcciones mentales abstractas.
> d) Se enseña una mayor cantidad de conocimientos matemáticos y se exige comunicación de los mismos y el aumento de estrategias de trabajo; se espera, además, que los estudiantes adquieran la habilidad de distinguir entre pensamiento matemático y metamatemático.
> e) La dificultad de evaluar a los estudiantes en tiempos cortos y la de reducir las actividades a tareas elementales; de esta manera se dificulta una evaluación que tome en cuenta la comprensión, el análisis y la síntesis, y no sólo la reproducción de conocimientos por parte del estudiante. (p.172)

Por otro lado, en lo que respecta a esta teoría, Valdivé (2008) elucida lo siguiente:

> En la teoría psicológica del aprendizaje de la matemática (PMA), específicamente de la matemática avanzada o en el Análisis, han de hacerse algunas consideraciones. Por un lado, acerca de los procesos de pensamiento que usa un estudiante cuando está realizando tareas cognitivas que involucran los infinitesimales y, por el otro, acerca de la enseñanza que promueva los procesos cognitivos de síntesis y análisis en los alumnos. (p.534)

Indicando así dos vertientes, una relacionada a las tareas cognitivas realizadas por el estudiante y otra a actividades de enseñanza. La primera, referida a la actividad realizada por el estudiante en su proceso cognitivo al resolver problemas o situaciones donde reajusta y reorganiza sus conocimientos previos, en la medida que la nueva información se vaya afrontando, construyendo un modelo mental o esquema conceptual de lo que está aprendiendo. Mientras que la segunda, está orientada al cómo promover actividades en la cual la capacidad de razonamiento lógico y reflexivo en los estudiantes se vea aumentada, para así desarrollar un aprendizaje significativo en estos en relación a constructos y conceptos avanzados de pensamiento.

Además, se debe tener presente la transición que ocurre de un Pensamiento Matemático Elemental (PME) al Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), para así comprender cómo ocurre el proceso de reformulación y adaptación de los conocimientos previos establecidos internamente por el estudiante en su estructura cognitiva, y de esta forma incorporar nuevos conocimientos de una manera más adecuada propiciando el desarrollo de actividades y tareas que promuevan la comprensión, el análisis y la síntesis, dejando a un lado la reproducción algorítmica del estudiante en cuanto al conocimiento. En concordancia con lo mencionado, Garbin y Azcárate (2001) alegan:

> Tall (1995) afirma que el paso del PME al PMA implica una transición significativa que requiere una reconstrucción cognitiva. Esta reconstrucción implica, por un lado, el paso de «describir» a «definir», y por otro, el paso de «convencer» a «demostrar». Se podría decir que los alumnos que se encuentran en la franja de edad de 16-20 años, aproximadamente, son los que están en esta época de transición; se trata de alumnos de Bachillerato y primeros cursos de Universidad. (p. 54)

En relación con lo anterior, cabe mencionar lo planteado por Tall (1994, 2001; Ob. Cit., p. 534) en el cual manifiesta que "los estudiantes no tienen bien desarrolladas las estructuras cognitivas, por lo que son engañados por las falsas imágenes. Los estudiantes tienen sus propios esquemas conceptuales asociados a los conceptos, esquemas desarrollados a través de sus propias experiencias previas". Lo cual significa que los estudiantes crean sus propios esquemas conceptuales con los cuales representa el mundo en que viven y que estos son adquiridos de forma empírica, y es por ello que el acto de comprender se puede definir de acuerdo con Dreyfus (1991, citado por Azcárate, C. y Camacho, 2003, p. 136), como "un proceso que tiene lugar en la mente del estudiante y es el resultado de una larga secuencia de actividades de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales".

No obstante, cuando describen los procesos cognitivos involucrados en el pensamiento matemático avanzado (PMA), no se puede dejar a un lado el proceso de abstracción, el cual es uno de los procesos matemáticos que consiste en la substitución de fenómenos concretos por conceptos confinados en la mente (Azcárate y Camacho, 2003). Por tal motivo, se puede considerar a la abstracción como una de las características de la matemática avanzada, aunque esta no sea exclusiva para este tipo de pensamiento, la abstracción juega un papel fundamental en estudios superiores; con relación a esto Azcárate y Camacho, (2003) consideran que "la progresiva matematización implica la necesidad de abstraer, definir, demostrar y formalizar. Por otro lado, entre los procesos cognitivos de componente más psicológica, además de abstraer, podemos citar los de representar, conceptualizar, inducir y visualizar" (p.136).

Ahora, otro factor a considerar, por parte del docente de matemáticas, es que la naturaleza de los entes matemáticos es muy distinta a la naturaleza de los objetos observables, ya que en los entes matemáticos influye el proceso de abstracción y percepción donde se usan símbolos manipulables mentalmente por el sujeto asociados a procesos y relaciones. Esto es manifestado por Garbin y Azcárate (2001) las cuales expresan:

> (…) dada la naturaleza de los objetos matemáticos también es importante distinguir los objetos mentales y los objetos físicos. Los objetos matemáticos tienen un significado más abstracto y son de naturaleza distinta a los objetos visuales como percepciones de los objetos físicos del mundo exterior. Un ejemplo típico es el de los objetos matemáticos como punto y línea. En el mundo real, un punto es una marca de un lápiz no prolongada y con medida finita; sin embargo, en matemática, tal concepto es abstracto, tiene posición pero sin medida. Cuando nos referimos a la estructura cognitiva, decimos que el esquema conceptual usa el símbolo para conectar convenientemente procesos y relaciones; de esta manera, en la mente se tienen símbolos que se pueden manipular como objetos mentales, sin ser necesariamente objetos físicos. (p. 54)

Por su parte, Tall y Vinner (1981) y Vinner (1983) explican lo referente a los conceptos de *Imagen conceptual* y *definición conceptual*, los cuales hay que tener en consideración para luego poder introducir y describir la acepción cognitiva y epistemológica del esquema conceptual, por ende explican lo siguiente:

> Las definiciones de estos términos mejoran su precisión entre un trabajo y otro, por lo tanto detallaremos las que describe Vinner (1983). Vinner (1983) define en primer lugar la noción de cuadro o dibujo mental de un concepto (mental picture) como el conjunto de todas las representaciones visuales mentales del concepto, ya sean pictóricas, simbólicas o gráficas. Llama imagen conceptual (conceptual image) al conjunto de todos los dibujos mentales asociados al concepto y de las propiedades que asigne el sujeto mentalmente a cada dibujo mental. Por otro lado la definición conceptual (conceptual definition) es cualquier explicación verbal precisa del concepto, no circular. (p.11)

Una vez dilucidado lo expuesto en los párrafos anteriores, se tiene que una concepción se asemeja mucho a lo que se conoce como esquema conceptual, ya que una concepción se puede entender de dos maneras una desde el punto de vista cognitivo y otra desde la perspectiva epistemológica; donde la primera está relacionada "con los conocimientos y competencias del sujeto con relación a un objeto matemático" (Valdivé y Garbin, 2008, p.418), mientras que el segundo, "se identifica al estudiar tanto la génesis histórica como la evolución de un concepto"(Valdivé y Garbin, Ob. Cit., p.418).

Teniendo en cuenta esto, Ruiz (1998, Ob. Cit., p.418) menciona que "para un mismo concepto matemático se han ido sucediendo una diversidad de puntos de vista sobre el mismo que, en su momento, fueron considerados como correctos y posteriormente han sido rechazados o revisados". Ahora, Artigue (1989, Ob. Cit., p.419) afirma que "la noción de concept image está muy próxima a la concepción del sujeto en su sentido más global", por lo que se asume que aun cuando los términos poseen definiciones diferentes debido a los distintos contextos teóricos en los cuales son enmarcados, estos comparten los mismos significados.

Por lo que, se puede distinguir entre el enfoque cognitivo y epistemológico del término esquema conceptual, según Valdivé y Garbin (2008, p. 419) "por acepción cognitiva del esquema conceptual del sujeto, entendemos a los conocimientos que este evoca sobre un concepto específico y que son accesibles a la investigación didáctica para representar y describir cada concepto que la persona conoce". Mientras, que el carácter epistemológico alude a "la evolución histórica de los conceptos matemáticos o a los tipos de conocimientos asociados a la noción matemática, así como también a las representaciones, los procedimientos y métodos que los matemáticos usaron para resolver una situación en un contexto específico (Ob. Cit., 419).

En este mismo sentido, con respecto al ¿cómo? se originan las concepciones Tall (1995, citado por Azcárate y Camacho 2003) expresa que existen dos secuencias de desarrollo las cuales son diferentes, pero a la vez simultaneas, donde, primero, se comienza por la percepción de objetos y, segundo, con la acción que recae en ellos. Plantea, además, que la mayor parte de la actividad matemática inicia por la percepción de objetos de manera visuo-espacial, para luego describirlo verbalmente, clasificarlo y dar el inicio a deducciones verbales basadas en la información obtenida.

En concordancia con lo expuesto y a manera de complemento, cabe mencionar algunas consideraciones teóricas, desde el punto de vista de este enfoque, que impulsaron el aprendizaje avanzado, tal como lo mencionan Harel, Selden y Selden (2006; citado por Arrieta, 2010), los cuales se pueden describir de la manera siguiente:

> 1. *La distinción entre imagen del concepto y definición del concepto*: que permite diferenciar entre la definición formal de un concepto y la correspondiente estructura mental individual consistente en ejemplos asociados, contraejemplos, hechos y relaciones.
> 2. *Progreso en las imágenes conceptuales para darle sentido a la definición formal del concepto*: la tendencia de muchos estudiantes a evocar la imagen de un concepto en lugar de la definición de tal concepto, cuando se enfrentan a una variedad de tareas matemáticas, no es necesariamente malo.
> 3. *Definición como organización*: además de la construcción del concepto, la construcción de la definición es importante junto con otros procesos matemáticos avanzados, tales como la visualización, generalización, abstracción, síntesis, pensamiento algorítmico, axiomático y prueba.

> 4. *Adquisición del concepto*: además de la comprensión de las definiciones matemáticas formales, existen otras formas de llegar a comprender un concepto, a saber, a través de la comparación de sus definiciones equivalentes, a través de sus múltiples representaciones y haciendo conexiones con otros conceptos. (p.35)

Ahora, al analizar la acción que repercute sobre los objetos matemáticos Tall (1995, citado por Azcárate y Camacho 2003) considera un tipo de desarrollo cognitivo diferente, que tiene su origen en el problema de la dualidad proceso – objeto, es decir, caso en el que un proceso y su producto se representan a través de un mismo símbolo, por lo que llega a la definición de un término denominado *procepto*. Este es definido por Tall (1995, Ob. Cit., p.139) como "un objeto mental combinado que consiste en un proceso, un concepto producido por dicho proceso, y un símbolo que se puede usar para significar cualquiera de los dos o los dos". Con respecto a la definición dada Ob. Cit, (2003) dan los siguientes ejemplos:

> La expresión $f(x) = x^2 - 9$representa simultáneamente el proceso de cómo calcular el valor de la función $f(x)$ para un valor particular de x y el objeto, es decir el concepto de función para un valor general de x. Se habla de un procepto "molde".
> En cuanto a las expresiones:
> $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-9}{x-1}$, $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x}$; $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$ representan el proceso de tender a un límite y el objeto valor del límite, pero sin incluir el procedimiento de cálculo específico para obtener ese valor. En este caso se trata de un procepto "estructural". (p. 140)

Asimismo, cabe agregar algunas de las características cognitivas particulares de los conceptos de límite y continuidad descritas por Fernández (2011) en la que menciona:

> Tall (1980) pone de manifiesto la riqueza de tipos de los procesos infinitos (limiting processes). Procesos infinitos continuos, tales como el límite de una función en un punto y la propia noción de continuidad, pues se basan en la idea de continuo frente a discreto, y procesos infinitos discretos, como los límites de secuencias y series, las expansiones decimales, o aproximación de áreas de formas geométricas. Cuando a los estudiantes se les transmite una noción informal de límite y posteriormente la definición formal, la imagen conceptual se "contamina" con ciertas propiedades que no forman parte de la definición conceptual dada. Los estudiantes conciben en su mayoría el límite como un

> proceso dinámico en vez de una cantidad numérica (Tall, 1980b, citado por Tall, 1980).
> Cornu (1981, 1983) citado por Gray y Tall (1994) muestra que dado que el proceso de cálculo de límite no es explícito, esto rompe en cierta manera con las intuiciones de los estudiantes pues su experiencia previa con los algoritmos aritméticos y algebraicos son explícitos. (p. 13)

Lo planteado se evidencia en el ejemplo dado por Tall (1986), en donde si un estudiante trabaja en un contexto reducido en el que todos los ejemplos considerados tienen una cierta propiedad y característica, entonces, sino existe contraejemplos, la mente tiende a asumir las propiedades conocidas como implícitas en otros contextos.

Esto es, si al estudiante se le presentan la mayoría de las sucesiones convergentes como 1/n, que tiende a un límite, cero, pero cuyos términos nunca igualan al límite. Al no existir contraejemplos de los mismos, el estudiante comienza a creer que esto cierto. Por lo que, experiencia propia del estudiante y sus esquemas así formados tiende a afirmar con frases como "se acerca cada vez más a" o "tiende a",lo que sugiere de manera implícita que los términos de una sucesión nunca pueden coincidir con el límite, es decir, que una sucesión de términos convergente a un límite está cada vez más próximo a él, pero que nunca llega a alcanzarlo.

Por otro lado, se debe tener en cuenta lo que se entiende como noción de representación, el cual "es un concepto clave en la filosofía del conocimiento, que se ha manejado y sometido a crítica de manera sistemática. Las disciplinas cuyo objeto de estudio es el conocimiento humano manejan las nociones de representación y comprensión" (Rico, 2000, citado por Fernández, 2011, p. 9). De esta forma, se enfatizará dos de las definiciones existentes en cuanto a esta noción, la primera debida a Kaput (1987, citado por Fernández, 2011) la cual considera:

> (…) una dualidad entre el objeto representante y el objeto representado, que funcionan como entidades funcionalmente separadas pero íntimamente relacionadas y postula que cualquier especificación particular de la noción de representación debería describir las siguientes entidades: el mundo representado,

> el mundo representante, qué aspectos del mundo representado están siendo representados, qué aspectos del mundo representante realizan la representación y la correspondencia entre los dos mundos, aclarando que en los casos interesantes uno o los dos mundos pueden ser entidades hipotéticas o incluso abstracciones. (p. 10)

Mientras la segunda definición es abordada desde la perspectiva de Castro y Castro (1997, citado por Fernández, 2011) los cuales consideran las representaciones como "notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes" (p. 10).Por lo que "el conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permiten representar una estructura matemática tienen carácter sistémico, se habla de sistemas de representación"(Fernández, 2011, p. 10).

En este orden de ideas, Duval (1996, 1999; citado por Garbin y Azcárate, 2001) considera que en la actividad matemática hay que enseñar a saber diferenciar entre la representación del objeto con el objeto matemático mismo, por lo que, "Duval, al interrogarse sobre si los medios estructuralmente requeridos para que una persona pueda acceder a los objetos del conocimiento matemático, son diferentes o no, a los medios requeridos para acceder a los otros objetos de conocimiento" (p. 54), asevera lo siguiente:

> • La no accesibilidad de los objetos matemáticos fuera de un sistema semiótico aunque sea rudimentario. Los objetos matemáticos, no son objetos reales, como pueden ser los propios de las disciplinas como la biología o la física que pueden ser manipulables. «De aquí la necesidad de describir y aprender cómo funcionan ciertos sistemas de representación: representaciones de escritura decimal de los números, representaciones gráficas de formas (funciones o no), representaciones de la escritura literal y algebraica, representaciones que son las figuras en geometría…».
> • La necesidad de no confundir nunca un objeto con su representación semiótica (un número y su escritura, un objeto geométrico y la figura que lo representa…). (p. 55)

En relación a esto, es notorio señalar, lo que respecta a la paradoja cognitiva mencionada por D'Amore (2000), en la cual se basa en lo manifestado por Duval

(1993), explicando que el aprendizaje de los objetos matemáticos no puede ser de otra manera sino por medio de un aprendizaje conceptual, pero que es únicamente a través de las representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos, estableciendo así la dificultad para los estudiantes de diferenciar el objeto matemático con su representación semiótica, o sea, con la estructuración de sus esquemas conceptuales relacionados con el objeto a través de un sistema de signos juntamente con todas la propiedades que lo caracterizan, esta dificultad surge debido a que los objetos matemáticos no poseen una realidad objetiva palpable a los sentidos.

Por otro lado, también se debe a los diferentes factores que intervienen entre la aprensión de los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos que sirven para concebirlos, entendiendo una definición de un concepto matemático la establecida por Tall (2001), distinguiéndose así entre definiciones formales y las definiciones personales manejadas por los individuos, en estas "participarían tanto la parte institucional (el Saber) como la parte personal (de quienquiera que haya abordado dicho saber, no solo el experto)"(D'Amore, 2000, p. 9). Ahora bien, la definición de un concepto posee un papel fundamental en la formación de las representaciones cognitivas del sujeto que posee de un concepto en específico, puesto que el *Infinito* como ya se ha mencionado no se ha definido totalmente, por lo que se maneja a modo de una noción, ya sea de manera *actual* o *potencial*, esto acarrea dificultades en la enseñanza de tópicos ligados al *Infinito*, tal como lo es la enseñanza de la idea de Límite.

En este orden de ideas, se entiende como definición, según Cecilia Calvo (2001, citado por Azcárate, 2003), el siguiente:

> La definición de un concepto matemático es un enunciado verbal que predetermina el concepto de una manera no circular (sus elementos deben ser nociones primitivas de la teoría o nociones definidas previa e independientemente) y consistente (no puede involucrar contradicciones lógicas que derivarían en que ningún objeto verifique sus

condiciones). En este marco, dos definiciones se consideran equivalentes cuando determinan el mismo conjunto de ejemplos. (p. 160)

Por lo que se tiene que la dualidad que presenta la noción de *Infinito* matemático, *actual* o *potencial*, constituye un serio problema en el momento de la formación de los esquemas conceptuales propios de los estudiantes, debido a las contradicciones que conllevan estas dos nociones opuestas entre sí, con relación a lo que respecta a los conceptos matemáticos, Azcárate y Camacho (2003), establecen que:

> Con el propósito de clarificar las ideas y el lenguaje, resulta relevante la distinción que establecen Tall y Vinner (1981) "entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos que sirven para concebirlos", es decir entre los diferentes resultados del proceso de adquisición y representación de un concepto matemático en la mente de cada individuo y la definición formal del mismo (p. 137).

Por lo tanto, se considera, la definición de un concepto matemático como una serie de palabras o una definición verbal del concepto, el cual debe satisfacer dos condiciones, que sea un enunciado no circular y consistente, producto de su evolución histórica, entre las cuales, se podrá distinguir dos acepciones, primero, *definiciones formales* (definiciones acordadas y admitidas por la comunidad científica de los matemáticos en un periodo dado de la historia) y, segundo, las *definiciones personales* utilizadas por los individuos (ya sean estudiantes, profesores, matemáticos, entre otros) como interpretación, construcción o reconstrucción de una definición formal previamente enseñada.

Ahora, es importante señalar lo explicado por Azcaráte y Camacho (2003), con respecto a las teorías de Sfard (1991), las cuales expresan lo siguiente:

> Sfard (1991) habla de dos tipos de concepciones de un mismo concepto matemático: las concepciones que llama operacionales cuando se tratan las nociones matemáticas como procesos dinámicos, algoritmos y acciones, y las concepciones estructurales cuando se consideran los conceptos matemáticos como objetos abstractos estáticos. Si bien afirma que los dos tipos de concepciones son complementarias ("la habilidad para ver una función o un número, a la vez como un proceso y como un objeto es indispensable para una comprensión profunda de las matemáticas, cualquiera que sea

> la definición de comprender"), ella considera que las concepciones operacionales preceden a las estructurales (p. 138).

Por tal motivo, se debe tomar en cuenta todos estos señalamientos a la hora de estudiar el origen y la formación de una noción de un objeto matemático, así como también los conceptos y representaciones propias del sujeto, para evitar así los conflictos cognitivos que se presentan en la enseñanza de la matemática. Entendiendo además, que "el pensamiento matemático avanzado ocurre en un campo conceptual matemático donde son apropiadas las estructuras matemáticas abstractas disponibles para fortalecer una red de relaciones deductivas" (Gómez, 2009; p.3). Por tal motivo, "hay actividades preliminares (…) que introducen conceptos no inmediatamente abstraídos de la realidad, tal como la noción matemática de un proceso infinito, la noción de un límite, [la noción de un espacio topológico] o el cardinal del infinito" (Tall, 1988;Ob. Cit., p.3).

El aprendizaje de la noción de *Infinito* conlleva la activación de muchos procesos cognitivos complejos en el estudiante, tales como el proceso de abstracción, conceptualización, definición y la operacionalización del mismo, unido además, a la dificultad de diferenciar dicho objeto matemático con su representación semiótica y más si se halla inmerso en problemas donde se utilicen otros conceptos o donde este opere para la resolución de cierto tipo de problemas o en la adquisición de nuevos conocimientos. La noción de *Infinito*, así planteada, psicológicamente es un objeto complejo y contradictorio, este se encuentra ligado entre otras cosas a una noción basada en la Teoría de Conjuntos y a la noción de número, así como también al acto de contar y a la noción de clase. De allí, que la investigación presente busque conocer sobre los procesos cognitivos que se dan a lugar en el sujeto cuando opera con situaciones que involucren al *Infinito* y la generación de los esquemas conceptuales a partir de estos.

Por otro lado, la noción de *Infinito*, al ser un objeto matemático, este no puede ser manipulado directamente como los objetos físicos, por lo que se hace ineludible un sistema semiótico para acceder a él, de aquí la necesidad de describir y aprender el funcionamiento de ciertos sistemas de representación, pero sin caer en el equívoco de confundir la representación semiótica con el objeto de estudio, pues la representaciones semióticas son sólo representaciones mentales para fines comunicativos, no obstantes son fundamentales para la actividad cognitiva del pensamiento del sujeto que la concibe, de allí la importancia del estudio del PMA.

b. La Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD).

Antes de comenzar a desarrollar una idea y una descripción de esta teoría, es importante recordar que la respuesta pedagógica en sí misma no responde satisfactoriamente al problema de la educación, por lo tanto, surge otro marco a considerar, y este es, la Didáctica de las Matemáticas, el cual partiendo de la necesidad de hacerse cargo de lo pedagógico y lo matemático, de forma integral y no disociada, produce lo que se conoce como didactificación conjunta de lo pedagógico y lo matemático (Gascón, 2002). Es por ello, que se tomará a consideración algunas de las teorías desarrolladas en esta disciplina, para crear un puente entre la pedagogía y la matemática que permita la enseñanza de la actividad matemática.

Asimismo, una de las teorías en didáctica escogida para desarrollar esta investigación, fue una teoría procedente de la escuela francesa de la didáctica de la matemática, la cual tiene una influencia piagetiana y es una teoría de corte constructivista, que además, representa un "intento de crear modelos en los que el conocimiento se construye por adaptación del individuo a las situaciones problemáticas propuestas. El alumno aprende por adaptación a las distintas situaciones que el profesor le plantea en un contexto escolar" (Gómez, 2002, p. 38). Esta plantea reflexiones que deben ser consideradas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de tópicos matemáticos, la teoría referente es la "Teoría de las situaciones didácticas" desarrollada por Guy Brousseau (1986;en Gómez, 2002).

En relación a lo anterior, en un primer momento, en su conocida obra *"Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas"*, se describen las situaciones en las que los jóvenes construyen su propios conocimientos a través de contextos, introducidas por el docente, en las que se le planteen problemas para que así estos formulen métodos para su resolución, así como también enunciados o reglas generales producto de la experiencia que van adquiriendo mediante su resolución. Es decir, una situación didáctica, según Brousseau (1986; citado por Vargas, 2000) es:

> Conjunto de relaciones establecidas explícitamente y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, en un cierto medio, comprendiendo, eventualmente, instrumentos y objetos y, un sistema educativo (el profesor) con la finalidad de posibilitar a estos alumnos un saber constituido o en vías de constitución... el trabajo del alumno debería, al menos en parte, reproducir las características del trabajo científico propiamente dicho, como garantía de una construcción efectiva de conocimientos pertinentes (p.9)

La teoría, ya mencionada, fue concebida basándose en una hipótesis acerca de la construcción del significado de una noción (Camacho y Aguirre, 2001) la cual expresa que:

> Una noción aprendida no es utilizable sino en la medida en la que ella es relacionada con otras, esas relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de activación. Empero, no es aprendida si no es utilizable y utilizada efectivamente, es decir, solo si es la solución de un problema. (p. 238)

Teniendo en cuenta esto, se deduce que el medio es fundamental, puesto que representa el ambiente dentro del cual el estudiante puede actuar de manera autónoma haciendo uso de su racionalidad, de tal manera que, el principio metodológico rector de la TSD, siguiendo a Brousseau (1994; citado por Gascón, 1998), es "definir un *'conocimiento matemático'* mediante una *'situación'*, esto es, por un autómata que modeliza los problemas que únicamente este conocimiento permite resolver de forma óptima" (p.9). Con respecto a esto Chamorro (1999; citado por Gómez, 2002) explica:

> En este modelo de aprendizaje por adaptación, las variaciones en las condiciones del medio, las acciones y las retro-acciones, producen como respuesta comportamientos de los alumnos tendentes a modificarlo, de manera que tras una situación en desequilibrio se pueda alcanzar un equilibrio interno. (p. 38)

Ahora bien, Brousseau (1986; citado por Chavarría, 2006), desarrolla una serie de conceptos esenciales como lo son el Contrato Didáctico y la Situación A – Didáctica, las cuales le permiten ir entramando una teoría sólida y bien articulada. Cabe mencionar, que se entiende por *Contrato Didáctico* a: "la consigna establecida entre el profesor y el alumno, de esta forma, comprende el conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del docente." (Chavarría, 2006, p.3). De la misma manera se entiende por *Situación A – Didáctica*, según lo descrito por Chavarría (2006):

> El proceso en el que el docente le plantea al estudiante un problema que asemeje situaciones de la vida real que podrá abordar a través de sus conocimientos previos, y le permitirán generar además, hipótesis y conjeturas que asemejen el trabajo que se realiza en una comunidad científica. En otras palabras, el estudiante se verá en una micro–comunidad científica resolviendo situaciones sin la intervención directa del docente, con el propósito posteriormente de institucionalizar el saber adquirido (p.2).

En efecto, se debe construir un medio que permita inducir y construir en el sujeto conocimientos socialmente adquiribles y que para ello el profesor debe provocar adaptaciones mediante la elección de situaciones propuestas al estudiante con la finalidad de construir la relación de su contexto con el conocimiento, o bien modificarlo como una respuesta adaptativa al medio."Las situaciones de este tipo,…, el alumno tiene conciencia de implicarse, no por razones ligadas al contrato didáctico, sino al razonamiento matemático. Dicho de otro modo, las intenciones didácticas no se revelan al alumno" (Gómez, 2002, p. 39).

Con respecto a lo anterior, para que una situación sea *A – Didáctica* es necesario que se satisfagan una serie de requerimientos, los cuales son planteados por Gómez (2002) de esta forma:

- Que exista un procedimiento de base insuficiente.
- Que el medio permita retroacciones y que el juego sea repetible
- Que se requiera, de forma lógica, el conocimiento buscado para pasar de la estrategia de base a la estrategia optima. (p. 39)

Otro aspecto que se debe tener en consideración es el relacionado a la noción de *Situación Fundamental*, esta es definida por Gómez (2002) como:

> Un grupo restringido de situaciones en las que la noción de enseñar juega para el alumno el papel de respuesta de adaptación óptima. Una situación fundamental debe permitir una creación efectiva del saber, de manera que el alumno fabrique una concepción correcta del conocimiento. Encontrar situaciones fundamentales es un importante objetivo a conseguir para todas las situaciones de enseñanza, aunque a veces resulte utópico dada la gran dificultad que hay para hallarlas. (p. 42)

O dicho de otro modo, se entiende por *Situación Fundamental*, en función de un determinado conocimiento matemático C, en palabras de Gascón (1998) a:

> (…) un conjunto minimal de *situaciones adidácticas* (especificas de C), que permiten engendrar, por manipulación de los valores que toma sus *variables didácticas*, un campo de problemas suficientemente extenso como para proporcionar una buena representación de C en relación a cómo ha sido reconstruido C en la institución didáctica en cuestión. (p.11)

Ahora, dentro de esta teoría se establece o se distingue una tipología de situaciones, que se presentan en el proceso de enseñanza y aprendizaje en conjunción al proceso didáctico, estableciendo así cuatro tipos de situaciones que se presentan en una situación didáctica que son: las situaciones de acción, de formulación y de validación. Describiéndolas se tienen:

- ***Situaciones de acción***: situaciones en las que el alumno debe actuar sobre un medio (material, o simbólico); la situación requiere únicamente aplicación de conocimientos implícitos. (Panizza, 2003.)

- ***Situaciones de formulación***: son situaciones en la que el alumno o grupo expone un mensaje dirigido a otro alumno o grupo el cual debe comprender dicho mensaje y actuar (sobre un medio, material o simbólico) en base al conocimiento contenido en el mensaje (Panizza, 2003.). Es decir, son aquellas situaciones en el cual se formulan enunciados y se realizan pruebas de proposiciones, elaborando modelos, lenguajes, conceptos y teorías para ser puestas a prueba.
- ***Situaciones de validación***: hace alusión a las situaciones en la que dos alumnos o grupo deben enunciar afirmaciones y lograr ponerse de acuerdo sobre la verdad o falsedad de las mismas. Estas serán evaluadas por otro grupo, los cuales juzgarán para aceptarlas o no oponiendo otras maneras de resolución. (Panizza, 2003.)
- ***Situación de institucionalización***, definido así por Brousseau (1994, citado por Panizza, 2003.):

> La consideración "oficial" del objeto de enseñanza por parte del alumno, y del aprendizaje del alumno por parte del maestro, es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento constituye el objeto de la institucionalización. (p.14)

En este mismo sentido, resulta oportuno mencionar una serie de efectos que pueden interrumpir el proceso de generación y construcción de conocimiento en el estudiante durante una *Situación Didáctica*, de acuerdo a Chavarría (2006), Brousseau identifica los siguientes:

- ***Efecto Topaze***: Está relacionada a "aquella circunstancia en donde el estudiante llega a la solución de un problema, pero no ha sido por sus propios medios, sino porque el profesor asume la resolución del problema" (p.3). debido a que este, ante "las dificultades que tiene un grupo para llegar a la resolución de un problema, por lo cual se ve en la necesidad de indicar cuál es el procedimiento que deben seguir" (p.3).

- ***Efecto Jourdain***: Es la que se origina por la actitud que asume el docente "cuando un estudiante da una respuesta que es incorrecta, no obstante, para no desilusionarlo le dice que "está bien", que es la respuesta correcta. Entonces, un comportamiento banal del alumno es asumido como un conocimiento válido" (p.4).
- ***Deslizamiento Meta – Cognitivo***: "Consiste en la actitud de tomar una heurística en la resolución de un problema y asumirla como el objeto de estudio" (p.4). Ejemplo de ello, la utilización de los Diagramas de Venn en la Teoría de Conjuntos, en esta: "Cuando se comenzaron a analizar los diagramas de Venn dejamos de lado lo que es la teoría de conjuntos, pues se tomaron los primeros como la teoría en sí misma. Ese es un deslizamiento meta cognitivo" (p.4).
- ***Uso Abusivo de la Analogía:*** este efecto hace alusión a la situación en la cual durante la resolución de un problema se emplea de manera constante el uso de la analogía, a tal punto que se suplanta el estudio de una noción compleja por un caso análogo o similar (Chavarría, 2006). Por lo que, "no nos podemos quedar con los problemas análogos, sino que debemos devolvernos al problema original. De lo contrario, incurrimos en el uso abusivo de la analogía" (p.4).
- ***La inadaptación a la exactitud***: consiste en banalizar los conocimientos matemáticos por parte del profesor o transmitirlos tal y como es concebido por el saber sabio, es decir, es un problema de transposición que se manifiesta cuando el "docente decide perder rigor a cambio de que los estudiantes entiendan, o bien, prefiere rigurosidad con la consecuencia inmediata de la incomprensión por parte de algunos de sus estudiantes" (p.4)

Por otro lado, la teoría de Brousseau provee una información valiosa en cuanto a una teoría de los obstáculos presentes en la enseñanza y en la didáctica de la matemática como disciplina científica, por lo que resulta oportuno aclarar lo que se entiende por obstáculo, esta noción es introducida en primera instancia por Gaston Bachelarden su libro publicado en 1938 y titulado: "La formación del espíritu científico", en el que explica:

> Cuando buscamos las condiciones psicológicas de los progresos científicos, llegamos pronto a la convicción que estos están en términos de los obstáculos que debe plantear el problema del conocimiento científico. Y no se preocupa por considerar los obstáculos externos como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos, ni de incriminar la debilidad del sentido y del espíritu humano: es dentro del acto mismo del conocimiento, íntimamente, que aparecen, por una clase de necesidad funcional, las lentitudes y los problemas. Aquí mostraremos las causas de estancamiento e incluso de regresión, descubriremos las causas de la inercia que llamaremos los obstáculos epistemológicos. El conocimiento de lo real es una luz que proyecta siempre algunas sombras. Ella no es inmediata y plena nunca. Las revelaciones de lo real son siempre recurrentes. Lo real no será jamás "aquello que podamos creer" pero esto es aquello que siempre debemos pensar. El pensamiento empírico es claro, sobre todo, cuando el aparato de razones ha estado puesto a punto. En correspondencia con un pasado de errores, encontramos la verdad en un verdadero arrepentimiento intelectual. De hecho, conocemos; en contra de un conocimiento anterior, en destrucción de conocimientos mal hechos, en dominación dentro del espíritu mismo, que obstaculiza la espiritualización (Bachelard, 1983, citado por Artigue, 1990, p.6)

Posteriormente, Brousseau, partiendo de los estudios de Bachelard conceptualiza la noción de obstáculo y la define del siguiente modo:

> Un obstáculo es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un aprendizaje posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. (Brousseau, 1983, citado por Barrantes, 2006; p. 3)

En relación con lo anterior expuesto, Cescutti y Ortega (2010) explican lo concerniente al reconocimiento del obstáculo a partir del error manifestado por el estudiante en su praxis, por lo que afirman:

> Así pues, el error viene a ser el indicativo para reconocer la existencia del obstáculo en el individuo, puesto que estos son predecibles, pueden ser identificados por medio del conocimiento del ambiente o la situación, es decir el medio didáctico en el cual el obstáculo fue construido como conocimiento, ya sea este conocimiento edificado por el estudiante de manera correcta o

> incorrecta, atendiendo a que el obstáculo epistemológico tiene validez en su constructo, ya que es resultado de un conocimiento previo que ahora se presenta extemporáneo para adquirir uno nuevo. (p. 37)

Asimismo, Brousseau (1983; citado por Artigue, 1990) plantea una serie de características que satisfacen los obstáculos, estas son:

> a) Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento;
> b) El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto que encuentra con frecuencia;
> c) Cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigiría un punto de vista diferente;
> d) El alumno resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber;
> e) Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo, de forma esporádica. (p.8)

Y señala además, que los obstáculos que se encuentran en la enseñanza de las matemáticas pueden ser originados de tres formas distintas, estableciendo así una tipología de los obstáculos, la cual se menciona a continuación:

> a) Un origen ontogenético, correspondiente a los obstáculos unidos a las limitaciones de las capacidades cognitivas de los estudiantes comprometidos dentro del proceso de enseñanza.
> b) Un origen didáctico para los obstáculos ligados a las opciones del sistema de enseñanza.
> c) Un origen epistemológico, finalmente, para los obstáculos relacionados a la resistencia a un saber mal adaptado, es decir los obstáculos al sentido de Bachelard. (Brousseau, 1983, citado por Artigue, 1990, p.8)

Hechas las consideraciones anteriores, como complemento, vale la pena mencionar lo expresado por Belmonte (2009) en lo concerniente a los obstáculos epistemológicos, el cual explica que:

> Se pueden encontrar en la historia de los propios conceptos, lo que no quiere decir que se deba amplificar su efecto ni que se deban reproducir en el medio escolar las condiciones históricas donde han sido vencidos. Los conceptos, aunque son imágenes mentales que subyacen bajo las palabras o símbolos con los que se expresan regularidades, suelen tener elementos comunes en todas las personas como producto del proceso de enseñanza y aprendizaje; pero, también pueden poseer matices individuales. Si el obstáculo es epistemológico, aparecerá en casi todos los estudiantes de manera normal y recurrente. Los obstáculos

> epistemológicos pueden presentar diferentes aspectos. En primer lugar, los obstáculos que manifiestan los alumnos al utilizar el lenguaje cotidiano como lenguaje matemático, la terminología y notación matemáticas. En segundo lugar, el obstáculo que surge al intentar crear estructuras conceptuales acordes con la estructura lógica que guía la construcción del conocimiento matemático. Y, en tercer lugar, los obstáculos que surgen al no poder relacionar un concepto con una estructura conceptual, que impide que el alumno generalice dicha noción. Esta última dificulta también se puede considerar como obstáculo ontogénico. (p.108)

Por su parte, Artigue (1990) destaca la importancia que representa para el didáctico el análisis epistemológico, debido a la identificación de los obstáculos que ello permite, "dando la posibilidad de escoger, en medio de las dificultades que generalmente se encuentran por la enseñanza dentro del aprendizaje de tal o cual noción, aquellas que son realmente inevitables porque constituyen el desarrollo del conocimiento"(p. 8). Dentro de este orden de ideas, la noción de *infinito* matemático ha presentado desde sus inicios obstáculos asociados a su naturaleza y son esos conflictos cognitivos los que pueden reconocerse en el proceso de construcción de esta noción, dichos obstáculos han sido estudiados por varios teóricos entre los cuales se encuentra D'Amore, más específicamente en el tópico de los obstáculos epistemológicos y didácticos (Cescutti y Ortega, 2010).

De esta manera, las razones que hacen que el *Infinito* se presente como un obstáculo epistemológico en la enseñanza de contenidos matemáticos, D'Amore (2005) manifiesta:

> "¿Cuándo y en ocasión de cuáles ideas matemáticas es probable que se tenga un obstáculo epistemológico?
>
> - Se tiene casi siempre un obstáculo epistemológico a propósito de aquellas ideas para las cuales en un análisis histórico de estas se reconoce una fractura, un pasaje brusco, una no continuidad en la evolución histórico – crítica de la misma idea.
> - Se tiene un obstáculo epistemológico a propósito de una idea cuando el mismo error se verifica como recurrente más o menos en los mismos términos alrededor de dicha idea.
>
> La búsqueda de los obstáculos va entonces hecha contemporáneamente, y este ligamen es muy interesante:

> • en la escuela, en la práctica didáctica;
> • en el estudio de la historia de la Matemática, uniendo una investigación con la otra." (D'Amore, 2005, p. 66)

Por su parte, en las investigaciones efectuadas por Arrigo y D`Amore (1999,2002), Arrigo y D`Amore (2004), así como también el estudio ejecutado por D'Amore y otros (2006); los investigadores identificaron y describieron ciertos fenómenos que se presentan cuando se miden obstáculos epistemológicos asociados al infinito actual; estos son:

Dependencia: Fenómeno que se caracteriza como procesos mentales y convicciones intuitivas que llevan al estudiante a pensar que:

> (…) la cardinalidad de un conjunto infinito depende de su extensión, sobre la base de un modelo gráfico; en este sentido, un segmento largo tiene más puntos que un segmento corto, mientras un conjunto A, con $A \subset B$, tiene menos elementos que B" (D'Amore y otros, 2006; p.4).

Aplastamiento: Es un fenómeno según el cual "el estudiante considera que todos los conjuntos son infinitos, en cuanto infinitos, tienen la misma cardinalidad" (D'Amore, y otros, 2006). En pocas palabras:

> Sobre la base del cual el estudiante, impulsado por la solicitud del profesor o del investigador, acepta que algunos conjuntos infinitos sean entre ellos equipotentes (como N y Z) y lo hace porque piensa que esto está ligado con el hecho de ser infinitos, por tanto, como generalización, todos los conjuntos infinitos son equipotentes (Arrigo y D`Amore, 2004, p.8).

Asimismo, la forma patológica de aplastamiento tiene su origen, de acuerdo a Arrigo y D'Amore (2004) en:

> La aplicación incondicional a los conjuntos infinitos los procesos propios de los conjuntos finitos. Esta actitud es resultado de una evidente falsa concepción, generada de años de aplicación de determinados procesos siempre y únicamente en el ámbito finito, procesos que con el tiempo se convierten en verdaderos y propios modelos universales (p.13).

Y por último, el fenómeno de deslizamiento, el cual se define a continuación:

Deslizamiento: "Se tiene cuando se está hablando de alguna cosa (o en un cierto modo o en el ámbito de un cierto lenguaje) e, improvisadamente, nos hallamos hablando de otra cosa (o en otro modo o en otro lenguaje)" (Arrigo y D'Amore, 1999, p.8). Además, en el caso más específico, reseña "el doble pasaje y el hecho de que es relativo a una demostración. Se debe también hacer referencia a la dificultad de parte de los estudiantes en el pasaje entre diversos sistemas de representación" (Duval, 1995, Ob. Cit., p. 8), es decir, si se consideran los registros de representación lingüísticos u otros registros este fenómeno se entendería como "(…) la conversión de la representación de alguna cosa en una representación de esta misma cosa en otro sistema semiótico" (Duval, 1996, 1999; citado por Azcaráte y Camacho 2003, p. 140).

Por ejemplo el pasaje del contexto geométrico al aritmético y viceversa se inserta en el *"jeu de cadres"* de Douady (1984-86), (citado por Arrigo y D'Amore, 1999, p.8), o también si se está hablando de una lista de números en una sucesión, se pasa a consideraciones sobre las modalidades de escribir los mismos números (Arrigo y D'Amore, 2004, p.8). Otro ejemplo con respecto a este fenómeno es señalado por Azcaráte y Camacho (2003) las cuales plantean "al resolver un problema matemático usamos un gráfico cartesiano para representar una función y en el siguiente paso de la resolución, expresamos con una ecuación algebraica la misma función" (p. 140).En tal sentido, la problemática llamada deslizamiento, es de carácter lingüístico y semiótico en donde el estudiante manifiesta una conflicto, ya sea explicito o implícito, en aceptar o no el hecho de una demostración en la cual se emplee el paso de un tipo de discurso a otro.

Teniendo en cuenta lo anterior, se puede observar que la estimación de los/las estudiantes tiene un papel importante en el estudio de los obstáculos en la enseñanza de la matemática, puesto que la estimación "Es el resultado de un procedimiento (consciente o inconsciente) que tiende a determinar el valor desconocido de una cantidad o de una magnitud" (Pellegrino, 1999, p. 145; citado porD'Amore et al. 2006, p. 2). Con lo que respecta al tópico de *Infinito actual* D'Amore y otros (2006) explican: "No se trata, por tanto, de "aproximar" un resultado, sino de captar la esencia del cardinal de una colección." (p. 2), por lo tanto, se tiene que el problema ocurre cuando los estudiantes realizan estimaciones donde mezclan números finitos e infinitos de forma natural sin advertir, por otro lado, que los procesos que se aplican a colecciones finitas son diferentes a las aplicables a colecciones infinitas.

c. El fenómeno de la Transposición Didáctica (TD).

Antes de plantear lo que es la transposición didáctica, se debe de describir algunos de los fundamentos de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica desde el enfoque antropológico, es decir, tener presente la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) desarrollada por Chevallard (1999) la cual podría describirse de la siguiente forma:

> La Teoría Antropológica de lo Didáctico se centra casi de manera exclusiva en la dimensión institucional del conocimiento matemático, siendo un desarrollo del programa de investigación iniciado con la *didáctica fundamental* (Gascón, 1998). El punto crucial radica en que la TAD *"ponela actividad matemática y, por tanto, la actividad de estudio de la matemática, en el conjunto de la actividad humana y de las instituciones sociales"* (Chevallard, 1999, citado por D'Amore y Godino, 2007, p. 197).

Asimismo, la definición de objeto matemático dada por Chevallard (1991) en la que expresa que es:

> Un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito. (p. 8)

Por otro lado, Chevallard (1999) explica con relación a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) lo siguiente:

> La TAD introduce una conceptualización unitaria en términos de praxeologías –unión de los términos griegos praxis y logos– para referirse a esa unidad indivisible formada por la actividad y el conocimiento humanos. Se parte del postulado que afirma que toda actividad humana se puede describir como la activación de praxeologías, asumiendo así que toda práctica o saber hacer (praxis)aparece siempre acompañada de un discurso o saber (logos); es decir, una descripción, explicación oracionalidad mínima sobre lo que se hace, el cómo se hace y el porqué de lo que se hace. La praxisestá formada, a su vez, por dos componentes, [T/τ] un tipo de tareas T y una técnica τ o manera institucionalizada y compartida de llevar a cabo las tareas del tipo T en cierta institución. El logos, a su vez, tiene otras dos componentes [θ/Θ], una tecnología θ o discurso razonado (logos) sobre latécnica (para hacer inteligible la técnica τ como medio para realizar T) y un componente teórico Θ que rige la propia tecnología θ, aportando elementos descriptivos, justificativos y generativos de los demás componentes de la praxeología. Al unir la praxis y el logos tenemos la praxeología, que se designa como [T/τ/?θ/Θ]. Hablaremos así de praxeologías matemáticas (u organizacionesmatemáticas, OM) y praxeologías didácticas (u organizaciones didácticas, OD). (p. 9)

Por lo que, la TAD desarrolló su modelo en términos de praxeologías tanto Matemáticas y Didácticas. La primera hace referencia según D'Amore y Godino (2007) a "sistemas de prácticas que una institución considerada apropiadas para resolver un tipo de tareas, de acuerdo con Chavellard, Bosh y Gascón (1997)" (p. 198); y la segunda:

> (…) coincide con la praxeología matemática, pero la componente praxémica alude a las tareas del profesor y de los alumnos, técnicas de estudio, etc. Incluye referencias problemáticas al lenguaje específico (dialógico) que se instaura entre el profesor y el alumno y al objeto llamado trayectoria didáctica (proyecto didáctico), en el cual asume significado específico el tiempo durante el cual se desarrolla (Chevallard, 1999, citado por D'Amore y Godino, 2007, p. 198)

Donde estas se constituyen por cuatro elementos, estos son: Tipos de tareas, técnicas, tecnología y teoría (Bosch, Espinoza y Gascón, 2003) son pues las cuatro categorías de elementos que componen una organización o praxeología matemática, organizadas en dos niveles distintos; en este orden de ideas, se tiene que el primer nivel "es el que remite a la práctica que se realiza, la *praxis* o *saber-hacer*, es decir, los *tipos de problemas* o *tareas* que se estudian y las *técnicas* que se construyen y utilizan para abordarlos" (Ob. Cit.,p. 5). Mientras que el segundo nivel alude a "la parte descriptiva, organizadora y justificadora de la actividad, que llamaremos *logos* o, simplemente, *saber"* (Ob. Cit., p. 5), por lo tanto, recoge las descripciones y las explicaciones que se conciben para hacer entendibles las técnicas, "esto es, el discurso *tecnológico* (…) y la *teoría* que da sentido a los problemas planteados, permite interpretar las técnicas y fundamentar las descripciones y demostraciones tecnológicas" (Ob. Cit., p. 5).

En relación con este último, hay que plantear, además, la existencia de la relación ternaria entre el docente, alumno y el saber matemático, el cual ha sido un esquema polémico desde su implementación, pero que funciona, ya que incorpora el saber como un término de suma importancia involucrado en el proceso de enseñanza y aprendizaje, originando preguntas de interés para la didáctica, tales como: ¿qué es aquello al cual hace referencia el saber dentro del sistema didáctico?, y por otro lado, se comienza a plantear ¿qué relación guarda el saber enseñado que encuentra el observador con el saber sabio que se maneja en la comunidades científicas – matemáticas?, así como también las distancias que guardan entre sí.

Siguiendo este orden de ideas, la transposición didáctica es explicada por De Faria (2006) siguiendo la definición dada por Chevallard (1991) de esta manera:

> Chevallard sugiere que el conocimiento designado como "Saber a Enseñar" sufre un conjunto de *transformaciones adaptativas* que lo hará apto para ocupar un lugar entre los Objetos de Enseñanza. La *Transposición Didáctica* se ocupa y toma un lugar dentro de este conjunto de transformaciones.
> Así: "el trabajo que transforma un Objeto de Saber a Enseñar en un Objeto de Enseñanza" (o bien, la traslación de conocimientos científicos a conocimientos escolares) corresponde a la Transposición Didáctica. De esta forma, su objeto de estudio es el *saber* y las *transformaciones* que sufre este saber desde su origen hasta su puesta en práctica en la sociedad. (p.1)

Ahora bien, ya descrito en una primera instancia lo relacionado al fenómeno de transposición didáctica, esta revela a su vez la existencia de diversos géneros o modos del saber, por el movimiento del saber de una comunidad "científica" a otra "escolar" (De Faria, 2006) debido a las diferentes transformaciones que sufre, por lo que el saber desempeña diferentes funciones de acuerdo al contexto en que este sea manejado. En relación a los modos de saber, De Faria (2006) explica lo siguiente:

> El primer modo del saber corresponde al *Saber Sabio*. Éste se refiere al saber que es generado por el matemático profesional, el investigador en matemática. Este saber es desarrollado en los centros o institutos de investigación, laboratorios, Universidades, etc. (…) es un saber especializado; logrado a partir de un conjunto o procedimientos que se llevaron a cabo en algún lugar, espacio y tiempo (…). El saber científico no puede ser enseñado en la forma como se encuentra redactado en los textos técnicos-científicos y esto constituye un obstáculo a considerar en el proceso de aprendizaje. Por lo cual, es transformado en un *Saber a Enseñar*, el cual ocupa lugar en los programas de estudio (currículo). Se trata de un saber ligado a una forma didáctica que sirve para presentar el saber al estudiante (…) Finalmente (…) el *Saber Enseñado* (…) es aquél saber registrado en el plano de aula del docente, que no coincide necesariamente con la intención prevista en los objetivos programados al nivel del saber a enseñar. Este saber está ubicado en los Sistemas Didácticos, los cuales, corresponden propiamente a la relación ternaria: profesor-estudiante-saber. (p.2)

Por lo tanto, el saber sabio está ligado a una clase de saber especializado desarrollado en una comunidad científica, institución, laboratorio o universidad; que responde a intereses políticos, económicos, tecnológicos, entre otros; y que se maneja a través de un tipo de lenguaje tecnificado distinto al manejado por el resto de la sociedad. Asimismo se tendrá el saber a enseñar, el cual es un tipo de saber presentado al estudiante de manera didáctica para así facilitar la comprensión del saber científico en el proceso de aprendizaje, esto queda evidenciado en los programas de estudio, y está orientado por una teoría didáctica o modelo teórico que será la base del trabajo docente. Y por último, el saber enseñado, el cual es una clase de saber manejado a un nivel micro que se da a través de la relación del tridente profesor – estudiante – saber, por medio de los sistemas didácticos y al trabajo del docente en el aula. Estos modos de saber son producto de dos transformaciones, que según Chevallard, seguido por De Faria (2006) son: la transformación externa y la transformación interna. Entendido esto, se entiende por transformación externa al proceso de descontextualización que sufre el saber sabio dentro de su contexto, lenguaje e historia para que este sea apto de ser enseñado y admitido dentro de los programas oficiales, eliminado la historicidad de su construcción o descubrimiento. Por otro lado, la transformación interna responde a la manera en que el docente interpreta el documento oficial del ministerio y lo lleva al aula por medio de la planificación de sus lecciones (De Faria, 2006).

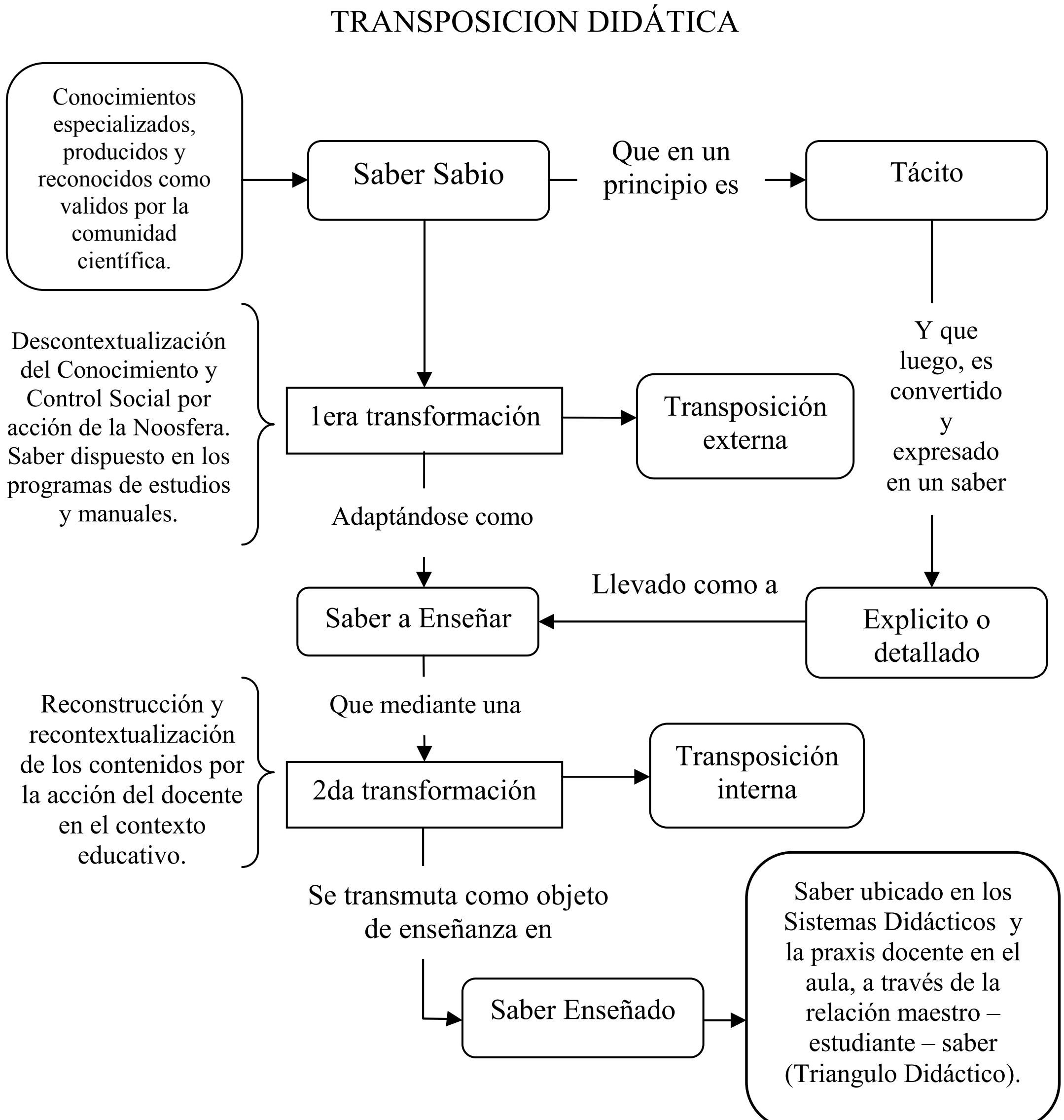
Ahora, sobre la base de lo explicado en los párrafos anteriores, se puede decir, en segunda instancia, que lo denominado transposición didáctica hace referencia al paso que existe del saber sabio al saber enseñado, y a su vez a la distancia eventual que los separa, es decir, la transposición didáctica es un proceso que se da dentro de un conjunto de transformaciones adaptativas que buscan trasladar los conocimientos científicos a conocimientos escolares, esto es, el paso que se da en la traducción del contexto del conocimiento especializado a un contexto de conocimientos que resulten de fácil aprensión para el estudiante, donde el objeto de saber a enseñar se transmuta a objeto de enseñanza. Esta transposición es realizada por el docente quien reconstruye y recontextualiza, a su modo de ver, el saber sabio para que se dé a lugar un aprendizaje significativo, dicho camino de adaptación da orígenes a distintos modos de saber, convirtiéndose así en una herramienta para el didacta que permite recapacitar, tomar distancia, interrogar las evidencias, poner en cuestión la ideas simples, desprenderse de la familiaridad engañosa de su objeto de estudio, es decir, ejercer una vigilancia epistemológica del objeto a estudiar.

Por otro lado, la transposición didáctica busca aproximar las dos clases de saberes, el saber sabio y el saber enseñado, los cuales se encuentran distanciados, por así decirlo, ya que el saber tal como es enseñado, el saber enseñado, es necesariamente distinto del saber inicialmente designado como el que debe ser enseñado, el saber a enseñar, este distanciamiento se debe a la brecha creada en sí por el mismo sistema y a su vez por el envejecimiento de los sistemas de enseñanza, ya sea biológico o moral, por lo que dicha transposición debe mantener constante la duda sistémica o vigilancia epistemológica con respecto al objeto cuya enseñanza se proyecta, para así evitar que se origine un distanciamiento demasiado grande entre estos dos saberes, por lo que se hace imprescindible la búsqueda de la génesis y evolución de los objetos determinados a los cuales se hace referencia, esto ocurre en el proceso de reconstrucción y recontextualización al cual es sometido el saber por parte del docente en su praxis en las aulas .

En relación con lo anterior, hay que señalar que la transposición didáctica genera un tipo de saber exiliado de sus orígenes y separado de su producción histórica en la esfera del saber sabio, por lo que el saber enseñado es presentado como algo que no viene de algún tiempo ni de ningún lugar (Chevallard, 1991), sino que ya viene dado o acabado dentro del funcionamiento de la institución, debido a que el sistema didáctico es un sistema abierto destinado a ser compatible con su entorno, pero que contradictoriamente esta compatibilidad trae consigo la disminución de la conciencia del entorno por parte de los agentes que integran el sistema, ya que la conciencia didáctica es cerrada y responde subjetivamente a la autonomía relativa del sistema didáctico, es decir la forma vivida de la condición de posibilidad de enseñanza.

Por el contrario, cuando se le asigna al saber sabio el justo lugar en el proceso de transposición, esto es que el análisis de la transposición didáctica no sustituya indebidamente el análisis epistemológico, se verifica que el concepto de transposición didáctica es el que permite la articulación del análisis epistemológico con el análisis didáctico, convirtiéndose así en guía para el correcto uso de la epistemología para la didáctica. Ahora, dicho concepto existe debido a que el funcionamiento didáctico del saber es distinto del funcionamiento académico, por lo que plantean dos regímenes del saber que se interrelacionan entre sí pero que no se pueden hacer coincidir exactamente, pero donde el saber enseñado debe ser lo suficientemente cercano al saber sabio, puesto que de no ser así se produciría la desautorización por parte de los matemáticos, lo cual socavaría la legitimidad del proyecto socialmente aceptado y sostenido de su enseñanza; y a su vez lo suficientemente alejado del saber banalizado en la sociedad que es manejado de una forma tan simple e informal.

Diagrama representativo sobre el fenómeno de la Transposición Didáctica del conocimiento.



Fuente: Cescutti, R. (2014).

Cabe señalar, que un objeto de enseñanza existe como tal cuando su inserción en el sistema de los objetos a enseñar se presenta como útil para la simplificación del sistema didáctico, lo cual significa que un objeto de saber solo se identifica y se designa como objeto a enseñar desde el momento en que problema didáctico que ocurre en su transposición a objeto de enseñanza estuviera resuelto. Además, dentro de los objetos de saber se encuentra lo que se conoce como nociones matemáticas y las nociones paramatemáticas, donde la primeras son construidas por demostración, que poseen propiedades y ocasiones de uso por lo que son candidatos a ser objetos de enseñanza, mientras que las segundas son preconstruidas, siendo además nociones herramientas de la actividad matemática, por lo que no constituyen el objeto de una enseñanza como tal, sino que son objetos de saber auxiliares que permitan la aprensión de los objetos matemáticos.

En relación a esto último, hay que hacer el señalamiento en cuanto a la utilidad del aprendizaje matemático de contenidos curriculares en la vida cotidiana, esta es una cuestión muy cierta, muchos estudiantes manifiestan esa inquietud a sus profesores, en una primera instancia, a la hora de aprender y construir dichos contenidos, los cuales parecen extraños a cualquier correspondencia con la vida real. “Por tanto ellos *deben* saber, es justo que sepan, si su empeño, su tiempo, su energía tienen o tendrán una razón en su futuro cotidiano, si le aportarán un beneficio por lo menos a distancia del tiempo…” (D’Amore y Fandiño, 2001, p. 64). Sin embargo, el profesor ante esta inquietud responde tratando de justificar el conocimiento que está impartiendo, para así no perder la atención del estudiante, pero incurren según D’Amore y Fandiño (2001) en una respuesta falsa, puesto que:

> (…) es falsa la promesa que el aprendizaje matemático será útil en la cotidianidad de su vida futura (sabemos bien que la gran mayoría de los aprendizajes matemáticos escolares son funcionales solo al interior de la escuela) y por tanto el profesor recurre a aquella parte del contrato didáctico cuya cláusula se puede llamar: *confianzaen el maestro*. El estudiante, en la escuela reconoce la función institucional del profesor y le reconoce la tarea de elegir sobre cuales contenidos del currículo de matemáticas se debe concentrar.

> Pero la promesa que los logaritmos, el algoritmo de la raíz cuadrada, la solución de ecuaciones, fórmulas de prostaféresis, (…) le serán útiles en la cotidianidad de su vida es falsa, por lo menos en la gran mayoría de los casos. (p. 64)

En función de esta consideración, desde la perspectiva de D'Amore y Fandiño (2001) en la gran mayoría de los maestros y profesores del nivel que sea, se reconoce lo siguiente:

> No saben responder a la pregunta del estudiante y se refugian detrás de hipótesis educativas vagas y no probadas (banalidades, estereotipos del género: «en matemáticas se ejercita el razonamiento, se aprende a razonar…» como si en geografía, en historia, en literatura, en educación física se aprendiese a ser incoherente y no se necesitara de razones lógicas!). No tiene alternativas culturales, repite aquello que sufrió como estudiante y reproduce un modelo didáctico-cultural banal, no estando preparado para alguna otra cosa diversa. (p. 64)

Por tal motivo, la preparación profesional de los docentes de matemática debe estar orientada a reconocer dicho problema y a estar cerca del saber en diversos contextos, para así dar una respuesta satisfactoria al estudiante en cuanto a la utilidad de estos contenidos, viendo de esta manera a la Didáctica de la Matemática no como un problema de enseñanza, sino como un problema de origen epistemológico en relación al aprendizaje. De igual forma, se debe prepararlos para abordar el problema "de la integración en el currículo de matemática de hechos, casos, ejemplos de aplicación (verdadera!) de la matemática en la vida real" (D'Amore y Fandiño, 2001, p. 64). Esto es el denominado fenómeno de la *escolarización de los saberes*, entendiéndose este de acuerdo a la definición establecida por D'Amore (1999, citado por D'Amore y Fandiño, 2001), la cual se menciona a continuación:

> Con el término "escolarización del saber" entiendo (…) al hecho (…) mediante el cual el alumno, en cierto momento de su vida social y escolar (…) delega a la Escuela (como institución) y al profesor (como representante de la institución) la tarea de *seleccionar para él los saberes significativos* (aquellos que lo son socialmente, por estatus reconocidos y legitimados de la noosfera), renunciando a hacerse cargo directamente de su elección sobre la base de cualquier criterio personal (…). Dado que esta escolarización trae con si el reconocimiento del profesor como depositario de los saberes que socialmente cuentan, es también obvio que se da (…) una escolarización de las relaciones interpersonales (entre

> alumno y profesor y entre estudiantes y compañeros) y de la relación entre alumno y saber: es esto lo que […] se llama "escolarización de las relaciones". (p.65)

Ahora bien, en la enseñanza del concepto de Límite a nivel universitario presupone que los estudiantes conocen, comprenden y manejan correctamente nociones fundamentales tales como la de número, la de infinito, la de cardinal, la de conjunto, la de punto geométrico, entre otras nociones, lo cual no es totalmente cierto. Puesto que, en la instituciones educativas no se enseñan estos tópicos de una manera profunda debido al distanciamiento originado por la transposición didáctica que genera un saber alejado de sus orígenes; ejemplo de ello, la noción de *Infinito*, que desde inicios en la etapa de bachillerato solo es asociado a un número muy grande imposible de contabilizar o reduciéndolo a un símbolo "∞" sin algún origen o evolución histórica, por lo que este hecho acarrea el surgimiento de obstáculos a la hora de adquirir un nuevo conocimiento relacionado a esta noción, imposibilitando el aprendizaje adecuado del mismo.

Dicho esto, la vigilancia epistemológica es fundamental para evitar la virtualización de los saberes o la descontextualización de los mismos, ya que el debido análisis epistemológico, en este caso la noción de Infinito, puede procurar una transposición apropiada para conceptos como el de Límite, reduciendo en la medida de lo posibles los obstáculos ya investigados por Arrigo y D`Amore (1999,2002, 2004) en relación a la noción de *Infinito*. Otro hecho que es importante recalcar, es la banalización del lenguaje y de los términos que se utilizan en la enseñanza de las matemáticas (similitudes o acepciones que emplea el docente para lograr el entendimiento en el estudiante) muchas veces estos difieren del lenguaje técnico – académico de origen, lo que trae consigo la conformación de una lógica en el sujeto a modo de red, estructurada con informaciones que son difíciles de remover o cambiar a través del trabajo didáctico del docente, lo que conlleva a la conformación de conflictos cognitivos.

d. El Enfoque Ontosemiótico (EOS).

Antes de dilucidar lo concerniente a este tópico, hay que señalar primeramente que el Enfoque Ontosemiótico (EOS) surge como una necesidad de dar respuesta a las limitaciones que manifestaba la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) en cuanto a la forma de interpretar la cognición matemática, puesto que esta solo aborda la dimensión institucional del conocimiento matemático dejando a un lado la cognición personal que posee el individuo, por lo que el EOS considera los conocimientos subjetivos y los conocimientos institucionales como procesos importantes para la cognición general incluyendo la matemática, entrelazando así el aspecto psicológico, antropológico y epistémico. Entendido esto, dicho problema se puede formular de manera siguiente:

> *PE (problema epistemológico):* ¿Qué es un objeto matemático?; o de manera equivalente, ¿Cuál es el significado de un objeto matemático (número, derivada, media,...) en un contexto o marco institucional determinado?
> Este problema epistemológico, esto es, referido al objeto matemático como entidad cultural o institucional, se complementa dialécticamente con el problema cognitivo asociado, o sea, el objeto como entidad personal o psicológica:
> *PC (problema cognitivo)*: ¿Qué significa el objeto O para un sujeto en un momento y circunstancias dadas? (Godino, 2012; p. 52)

Ahora, el EOS plantea la no disociación entre la teoría realista y la teoría pragmática del conocimiento, por lo cual alude a que el significado de un objeto no puede ser reducido a su definición, sino por el contrario, estos objetos deben ser analizados como símbolos de unidades culturales que tienen su origen a través de su aplicación en determinadas actividades de resolución de problemas, por lo que el significado se encuentra ligado a la praxis empleada. Por consiguiente, la enseñanza y el aprendizaje en un primer momento son de origen pragmático, ya que depende del contexto y aplicación, pero que a través de ciertos usos se puede redirigir esa enseñanza y aprendizaje de objetos matemáticos a usos objetivados por medio del lenguaje y el léxico institucional, planteándose así las relaciones de dependencia entre expresión y contenido, de este modo la esencia de los objetos es aceptada y no puesta a duda, pero que a su vez son resultado de la práctica. (D'Amore y Godino, 2007).

Por lo tanto, el EOS según Godino (2012):

> (…) propone articular las aproximaciones epistemológica y cognitiva, al establecer como hipótesis básica que los hechos y fenómenos didácticos tienen una doble dimensión personal – institucional. La descripción y explicación de la dialéctica personal – institucional precisa realizar análisis microdidácticos, tanto de los comportamientos de los sujetos agentes como de la ecología de los significados, en los procesos de estudio matemáticos. (p. 56)

Esto se debe al problema que surge dentro de la correspondencia existente entre la representación y significación de una entidad con otra, generalmente de tipo lingüístico, en donde para el didacta es de interés "los tipos de objetos que se relacionan, los criterios de correspondencia y la finalidad con la que se establecen las relaciones" (Font, Godino y D`Amore, 2005; p.3). Específicamente, el conflicto subyace en el momento "cuando junto al lenguaje y los objetos del mundo que nos rodea se ponen en juego entidades no ostensivas que solemos designar como conceptos, nociones, ideas, abstracciones,…" (Font, Godino y D`Amore, 2005; p.3).

De esta manera, dentro de este enfoque teórico existen una serie de conceptos fundamentales que deben ser considerados para entender los procesos a los cuales es sometido el conocimiento y a la forma con que este es adquirido y manipulado por el estudiante. En este orden de ideas, se mencionan los siguientes:

- ***El significado personal e institucional de un objeto matemático***: "se define como un sistema de prácticas operativas y discursivas realizadas por una persona o en el interior de una institución para resolver un campo de problemas" (Godino y Batanero, 1994; citado por D'Amore y Godino, 2007; p. 208).

- ***Sistema de prácticas***: sean operativas, discursivas y normativas, estas son tomadas desde un enfoque pragmático y antropológico de las matemáticas, asumidas desde la perspectiva institucional y personal. Por lo tanto, la construcción del conocimiento matemático viene dada desde la actividad de resolución de problemas (Godino, 2012).
- ***La práctica matemática***: es la referida a "toda actuación o expresión –verbal, gráfica, etc.– que efectúa alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1998; citado por D'Amore y Godino, 2007; p. 208).
- ***Objeto matemático***: hace alusión a "todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se constituye, comunica o aprende matemáticas" (Godino, 2002; citado por D'Amore y Godino, 2007; p. 208). Cabe señalar que es similar a la definición dada por Chevallard (1991) ya formulada anteriormente. Los objetos matemáticos son:
    - *i.* *Lenguaje*: son todas aquellas expresiones, términos o gráficos en sus diversas manifestaciones (D'Amore y Godino, 2007).
    - *ii.* *Situaciones*: son escenarios donde se expresan problemas, ejercicios o aplicaciones extra – matemática en sí misma (D'Amore y Godino, 2007).
    - *iii.* *Procedimientos*: hace referencia a lo concerniente a las operaciones, algoritmos y a las técnicas de cálculo (D'Amore y Godino, 2007).
    - *iv.* *Conceptos*: estos son los introducidos por medio de definiciones o descripciones (D'Amore y Godino, 2007).
    - *v.* *Propiedad o atributo de los objetos*: son los relacionados a los enunciados que se realizan a partir de los conceptos (D'Amore y Godino, 2007).

vi. *Argumentos* “(por ejemplo, los que se usan para validar o explicar los enunciados por deducción o de otro tipo)”(D’Amore y Godino, 2007; p.209).

Estos seis objetos vienen a ampliar el enfoque tradicionalista que se viene manifestando, en el cual solo se hace referencia a entidades conceptuales y procedimentales, tales entidades u objetos surgen puesto que los anteriores (las entidades conceptuales y procedimentales) no eran adecuados para describir en su totalidad los objetos intervinientes y emergente de la actividad matemática. En este sentido, Godino, Font, Contreras y Wilhelmi (2006) expresan:

> Las situaciones problemas son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje (…) representan las restantes entidades y sirve como instrumento para la acción, mientras que los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí. Se trata de entidades funcionales y relativas a los juegos de lenguaje en que participan (marcos institucionales y contextos de uso); tienen también un carácter recursivo, en el sentido de cada objeto, dependiendo del nivel de análisis, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos (un argumento puede poner en juego conceptos, proposiciones o procedimientos). (p. 122)

- ***Función semiótica***: es la relacionada con “las correspondencias –ya sea relaciones de dependencia o función– entre un antecedente (expresión, significante o representante) y un consecuente (contenido, significado o representado) que establece un sujeto (persona o institución), de acuerdo con cierto criterio o código de correspondencia” (D’Amore y Godino, 2007; p. 209). Entre estas relaciones de correspondencia, es decir, las relaciones de dependencia existentes entre expresión y contenido, se manifiestan de diversas manera, estas son:

  i. *Representacional*: cuando un objeto se ubica en lugar de otro para un determinado fin o propósito (D’Amore y Godino, 2007).

  ii. *Instrumental*: está ligado al uso que efectúa un objeto sobre otro(s) objeto(s) como instrumento (D’Amore y Godino, 2007).

iii. *Estructural*: hace referencia cuando emergen nuevos objetos debido a la composición de un sistema por parte de dos o más objetos (D'Amore y Godino, 2007).

- ***Signo***: se entiende como todo aquello "que determina a alguna otra (su interpretante) para que se refiera a un objeto al cual ella misma se refiere (su objeto) de la misma manera; el interpretante se convierte a su vez en un signo, y así ad infinitum" (Pierce, 1931 – 1958; citado por D'Amore y Godino, 2007; p. 210).
- ***Configuración de objetos y procesos matemáticos***: es aquella que emergen e intervienen en la actividad matemática. Por lo que, "se asume una noción interaccionista de objeto y pragmatista del significado (contenido de funciones semióticas) articulando de manera coherente la concepción antropológica (Wittgenstein) con posiciones realistas (no platónicas) de las matemáticas"(Godino, 2012; p.55). Teniendo en cuenta, que "los diversos medios de expresión (lenguajes) desempeñan el doble papel de instrumentos del trabajo matemático y de representación de los restantes objetos matemáticos"(Godino, 2012; p.55).
- ***Configuración didáctica***: derivada de la configuración de objetos y procesos matemáticos en una determinada situación – problema, es establecida como un sistema donde se articulan los roles docentes y discentes, esta es planteada según Godino (2012) como una herramienta fundamental para el análisis de la instrucción matemática. Por otro lado, "las configuraciones didácticas y su secuencia en trayectorias didácticas tienen en cuenta las facetas epistémica (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales), afectiva, mediacional (recursos tecnológicos y temporales), interaccional y ecológica que caracterizan los procesos de estudio matemático" (Godino, 2012; p.55).

- ***Dimensión normativa***: hace alusión al "sistema de reglas, hábitos, normas que restringen y soportan las prácticas matemáticas y didácticas, generaliza la noción de contrato didáctico y normas socio-matemáticas" (Godino, 2012; p.55).

Ahora bien, volviendo a lo concerniente a lo del objeto matemático, desde esta perspectiva, los que intervienen y surgen de las prácticas matemáticas pueden ser clasificados de acuerdos a unas dimensiones de carácter dual, esta clasificación, en palabras de (Godino 2002; citado por D'Amore y Godino, 2007), es la subsiguiente:

> – *Personal – institucional*: Si los sistemas de prácticas son compartidos en el seno de una institución, sus objetos emergentes se consideran *institucionales*, mientras que los sistemas son específicos de una persona, los objetos serán *personales*.
> – *Ostensivos (gráficos o símbolos) – no ostensivos (entidades que se evocan al hacer matemática, y se representan en forma textual, oral, grafica o gestual).*
> – *Extensivos – intensivo*: Tal dualidad atañe a la relación entre un objeto que interviene en un juego de lenguaje como un caso particular (por ejemplo la función $y = 2x + 1$) y una clase más general o abstracta (por ejemplo, la familia de funciones $y = mx + n$).
> – *Elemental – sistémico*: en algunas circunstancias los objetos matemáticos intervienen como entidades unitarias –que, se supone, son conocidas previamente–, y en otras como sistemas que se deben descomponer para su estudio.
> – *Expresión – contenido*: Alude al antecedente y consecuente de cualquier función semiótica. (p. 211)

Por otro lado, de acuerdo a Rubio, Font y Planas (2008), haciendo referencia a la EOS, manifiestan que en "D'Amore y Godino (2007); (…) Font y Godino (2006); Godino y Batanero (1994); Godino, Contreras y Font (2006); Godino, Font y Wilhelmi (2006) y Godino, Font, Wilhelmi y Castro (2008) proponen, cinco niveles para el análisis de procesos de estudio" (p. 160). Estos son:

1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
4. Identificación del sistema de normas y metanormas.
5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio. (p.160)

En este sentido, cabe agregar lo manifestado por Font, Planas y Godino (2009), donde ilustran lo siguiente:

> Estos niveles son el resultado de un trabajo de síntesis teórica de diferentes análisis parciales consolidados en el área de didáctica de la matemática. (…)Hasta el momento, desde el enfoque ontosemiótico se han realizado análisis didácticos a episodios de aula 3 pero no se han aplicado conjuntamente todos los niveles anteriores a un mismo proceso de instrucción. Por ejemplo, en Godino, Font y Wilhelmi (2006) se han aplicado parcialmente los niveles 1 y 2 al estudio de una lección de un libro de texto sobre los conceptos de suma y resta. En Font, Godino y Contreras (2008) se han aplicado los niveles 1 y 2 al análisis de una tarea de aula para justificar la derivada de la función $f_{(x)} = x^2$. En Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) se ha aplicado el nivel 5 a una sesión de clase para la enseñanza de la noción de función con estudiantes de primer curso de una escuela de ingeniería. (p.3)

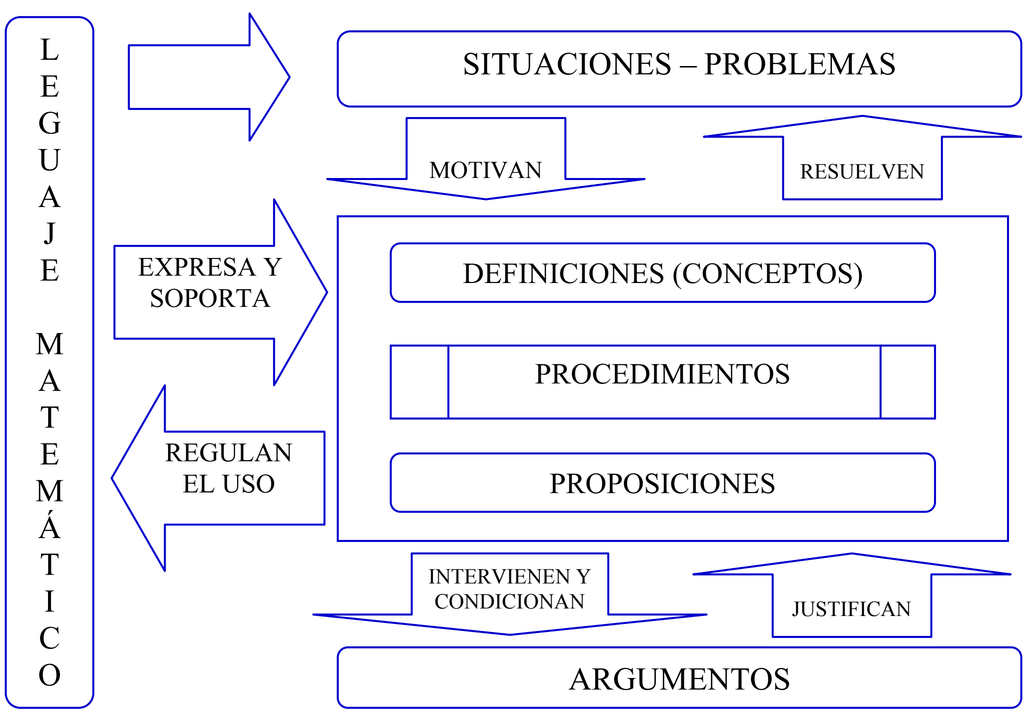
Dichos modelos están orientados a desarrollar un análisis completo que permita describir, explicar y valorar los procesos de estudio, aunque dicho análisis está condicionado al episodio de aula a considerar, puesto que a algunos no necesariamente hay que aplicarles todos los niveles, esto fue mencionado en la cita anterior. Profundizando, en cuanto a los niveles de análisis estos son explicados a continuación:

- ***Nivel 1. Identificación de prácticas matemáticas***: Consiste en "describir la secuencia de prácticas matemáticas, durante las cuales se activan elementos distintos, a saber, un agente (institución o persona) que realiza la práctica y un medio donde se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etc.) (Rubio, Font y Planas, 2008; p.160).
- ***Nivel 2. Identificación de los objetos y procesos matemáticos***: este nivel tiene por objeto describir las prácticas matemáticas teniendo en cuenta los diferentes objetos y procesos que intervienen en la resolución de situaciones – problemas, así como también las configuraciones de objetos y procesos matemáticos (Rubio y otros, 2008). En este sentido, cabe mencionar lo manifestado por Font, Planas y Godino (2009), en relación a la identificación de los objetos matemáticos, donde explican que:

> Para realizar una práctica matemática, el agente necesita conocimientos que son básicos tanto para su realización como para la interpretación de sus resultados como satisfactorios. Si consideramos los componentes del conocimiento que es necesario que el agente tenga para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación problema (e.g., primero plantear y después resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas) vemos que ha de utilizar un determinado lenguaje verbal (e.g, solución, ecuación) y simbólico (e.g., x, =). Este lenguaje es la parte ostensiva de una serie de conceptos (e.g., ecuación, solución), proposiciones (e.g., si se suma el mismo término a los dos miembros de la ecuación se obtiene una ecuación equivalente) y procedimientos (e.g., resolución por sustitución, por igualación) a utilizar en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella misma entendida como acción compuesta, son satisfactorias. (p.7)

Ahora bien, para conocer los objetos activados, más relevantes, en la práctica matemática durante un episodio de clase, se puede utilizar el diagrama sobre la configuración de objetos, donde se detallan la manera en que se articulan lo diferentes objetos matemáticos, este es la siguiente:

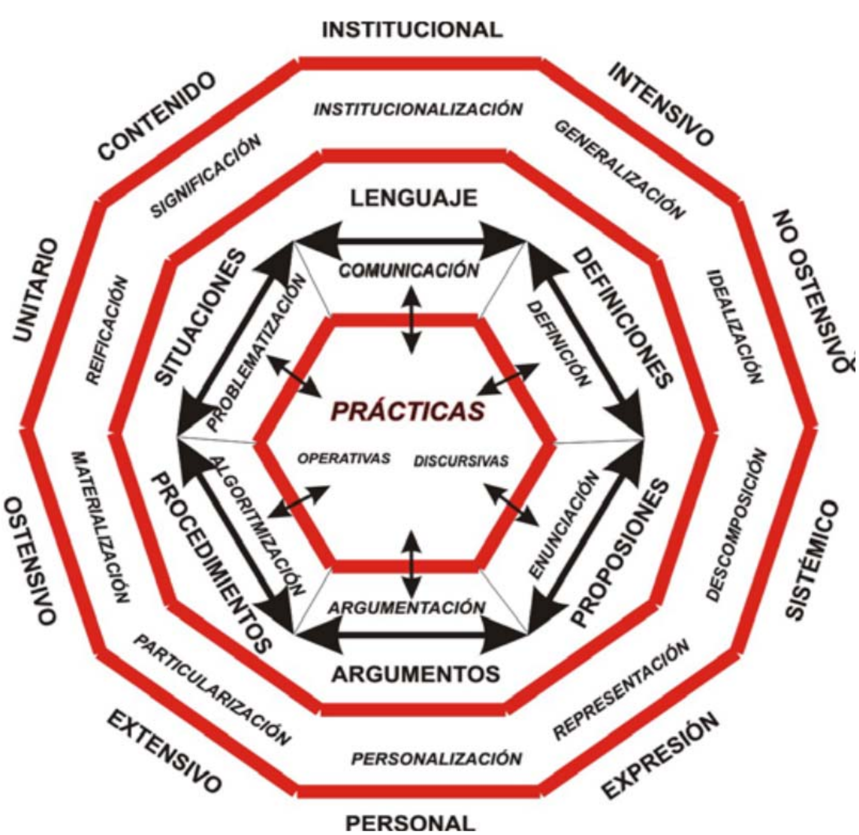
Configuración de objetos



Fuente: Font y Godino (2006, p.69)

Sin embargo, sí es necesario conocer cómo interactúan los objetos, es decir, su funcionamiento como sistema integrado desde un punto de vista temporal y dinámico, es preciso recurrir a la tipología de procesos propuestos por el EOS. Puesto que, de acuerdo a Font y otros (2009), “La actividad matemática queda modelada en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen diferentes tipos de objetos matemáticos (lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) (…). Estos tipos de objetos pueden considerarse en base a cinco dimensiones duales” (p.9), ya explicadas anteriormente. De lo anteriormente señalado, se puede observar la interacción de los objetos y procesos matemáticos, dispuesta en la siguiente figura:

Representación ontosemiótica del conocimiento matemático.



Fuente: Font y otros (2009; p.10)

- ***Nivel 3. Descripción de interacciones en torno a conflictos***: esta se centra en las interacciones en relación a los conflictos de carácter semiótico, entendiendo este conflicto como "cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos, personas o instituciones" (Godino, Batanero y Font, 2007; citados por Font y otros, 2009; p.11).
- ***Nivel 4. Identificación de normas y metanormas***: en este nivel se debe tener en consideración lo expuesto por Font, et al. (2009), donde plantean que toda "la actividad matemática en el aula tiene una dimensión social ya que la clase es una micro-sociedad donde tiene lugar la difusión y construcción de conocimiento matemático a través de la interacción social entre alumnos y profesor" (p.11). Por lo tanto, "el aprendizaje matemático está condicionado por metaconocimientos matemáticos y didácticos, tales como las normas sociomatemáticas y las cláusulas del contrato didáctico" (Ob. Cit., p.11). De aquí, que en este nivel solo se considera como se vinculan y se soportan las prácticas matemáticas en función de las normas y metanormas que las regulan.

Resulta oportuno agregar, lo mencionado por D'Amore, Font y Godino (2007; citado por Font y otros, 2009), en donde explican que:

> (…) hay diferentes criterios de clasificación de las normas: según el momento en que intervienen (diseño curricular, planificación, implementación y evaluación), según el aspecto del proceso de instrucción a que se refieren (epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional…), según su origen (disciplina, escuela, aula, sociedad…), según el tipo y grado de coerción (social y disciplinar), etc. (p.161)

Todos los niveles de análisis anteriores son en sí mismos instrumentos para la didáctica descriptiva y explicativa, puesto que permiten comprender lo que ha ocurrido en el proceso de instrucción respondiendo al ¿qué? y ¿por qué? (Rubio, y otros, 2008).

- ***Nivel 5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio***: Este análisis valorativo se realiza basándose "en los cuatro análisis previos y constituye una síntesis orientada a la identificación de potenciales mejoras del proceso de instrucción" (Fonty otros, 2009; p.13). Por lo tanto, en concordancia con Rubioy otros (2008), se tiene que:

> (…) son necesarios, por tanto, criterios de idoneidad o adecuación que permitan valorar los procesos de instrucción efectivamente realizados y "guiar" su mejora, evaluando la pertinencia del proceso de instrucción matemática y señalando pautas para la mejora del diseño y la implementación del proceso de estudio. (p.161)

En relación a esto último, existen varios criterios propuestos para valorar la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción matemática, siguiendo a Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006; citados por Fonty otros, 2009), estas son:

> *1. Idoneidad epistémica*, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas "buenas matemáticas".
> 2. *Idoneidad cognitiva*, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar.
> 3. *Idoneidad interaccional*, para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos.
> 4. *Idoneidad mediacional*, para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.
> 5. *Idoneidad emocional*, para valorar la implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de instrucción.
> 6. *Idoneidad ecológica,* para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc. (p.14)

2.2.4 Bases legales

La educación venezolana se encuentra fundamentada tanto en la Constitución de la República Bolivariana de Venezuela (1999), Ley Orgánica de Educación (2009), Ley de Universidades, la, así como también en el Reglamento del Ejercicio de la profesión Docente y la Ley Orgánica para la Protección del Niño y Adolecente (LOPNA), entre otras.

Constitución de la República Bolivariana de Venezuela (1999).

La investigación tiene su fundamente en los artículos *Nº 109* y Nº *110* de la misma, puesto que, en estos se plantean el reconocimiento de aspectos fundamentales por parte del Estado, tales como: la autonomía universitaria como principio y jerarquía que permite a los profesores, profesoras, estudiantes, egresados y egresadas de su comunidad dedicarse a la búsqueda del conocimiento a través de la investigación científica, humanística y tecnológica, para beneficio espiritual y material de la Nación. Así como también, el interés público de la ciencia, la tecnología, el conocimiento, la innovación y sus aplicaciones y los servicios de información necesarios por ser instrumentos fundamentales para el desarrollo económico, social y político del país, así como para la seguridad y soberanía nacional, entre otras cosas. Lo cual, garantiza el desarrollo de la presente investigación.

Ley Orgánica de Educación (2009).

Ahora bien, es preciso también señalar el *Artículo Nº 15, numeral 8 de los fines de la educación*, debido a que expresa el derecho a desarrollar la capacidad de abstracción y el pensamiento crítico mediante la formación en filosofía, lógica y matemáticas, con métodos innovadores que privilegien el aprendizaje desde la cotidianidad y la experiencia. Lo que implica, a este trabajo investigativo, que busca analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos, en este caso la noción de *Infinito* y todo aquello que se suscite alrededor de tal noción, como lo son los obstáculos de origen epistemológico y didáctico, así como también la formación de esquemas conceptuales.

Cabe agregar, además, los artículos *Nº 32* y *Nº 38* en los que se insta a la profundización del proceso de formación integral y permanente de ciudadanos críticos y ciudadanas críticas, reflexivos o reflexivas, sensibles y comprometidos o comprometidas, social y éticamente con el desarrollo del país, por parte de las instituciones universitarias. Asimismo, tiene como función la creación, difusión, sociabilización, producción, apropiación y conservación del conocimiento en la sociedad, así como el estimulo de la creación intelectual y cultural en todas sus formas. De igual manera, la formación permanente del docente quien actualiza y mejora el nivel de conocimientos y desempeño de los y las responsables y los y las corresponsables en la formación de ciudadanos y ciudadanas.

Reglamento del Ejercicio de la Profesión Docente (2002) y Ley de Universidades (2008).

Por otro lado, hay que mencionar el artículo *Nº 139* del *Reglamento del Ejercicio de la Profesión Docente y el articulo Nº 3 de la Ley de Universidades (2008)*, en donde se manifiesta lo relacionado a la actualización de conocimientos, la especialización de las funciones, el mejoramiento profesional y el perfeccionamiento, como carácter obligatorio y a la vez un derecho para todo el personal docente en servicio. Con el cual se fundamenta la idea de la búsqueda de conocimientos y nuevos métodos que permitan el mejoramiento de la actividad docente y del proceso de enseñanza de la matemática en mano de los educadores.

2.3 Definición de términos básicos:

Antinomia: n.f. Contradicción entre dos sistemas, o dos conceptos. 2. Filos Para Kant, contradicción inevitable resultante de las propias leyes de la razón pura. (Castell, 1985; p. 95).

Apodíctico, a: adj. Log Demostrativo, convincente, que no admite contradicción. (Castell, 1985; p. 102).

Cardinalidad: Herramienta para comparar conjuntos numerables. Dos conjuntos A y B tienen la misma cardinalidad si es posible definir una relación biyectiva de A sobre B (Revista Matemática Digital. Nº 18, abril 2009, sección currículo y matemática, disponible en www.mendomatica.mendoza.edu.ar).

Esquema conceptual: "Describe la estructura cognitiva de un individuo, asociada a un concepto matemático, y se define como el conjunto de todas las imágenes mentales (cualquier clase de representación: forma simbólica, diagrama, gráfica, etc.) del estudiante asociadas al concepto con todas las propiedades y procedimientos que lo caracterizan" (Azcárate, 1955; citado por Cuestas, 2007, p. 22).

Infinito actual: Noción de infinito que se constituye en una cantidad (quantum) en sí fija y constante que se encuentra más allá de toda magnitud finita (Cantor, 2004; p.182). Es decir, surge al considerarlo como una unidad y que lo tratamos como si fuese un elemento que surge al superar el paso al límite (Cescutti y Ortega, 2010; p. 46)

Infinito potencial: Noción de infinito que se centra en la operación reiterativa e ilimitada, es decir, en la recursividad interminable, por muy grande que sea un número natural siempre podemos concebir uno mayor, y uno mayor que este último y *así sucesivamente*, donde esta última expresión y «*así sucesivamente*» encierra la misma idea de reiteración ilimitada, al infinito. Este tipo de infinito potencial es el que sirve de base a la noción de límite del cálculo infinitesimal. (Ortiz, 1994; p.61).

Límite: Función $\boldsymbol{f}$ uniforme definida para todos los valores de $\boldsymbol{x}$ en entorno a $\boldsymbol{x = x_o}$ con posible excepción de $\boldsymbol{x = x_o}$ (o sea, en un entorno$\boldsymbol{\delta}$ reducido de $\boldsymbol{x_0}$). Se dice que el numero $\boldsymbol{l}$es el límite de $\boldsymbol{f(x)}$ cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\boldsymbol{x_0}$, lo que se escribe $\mathbf{lim}_{x\to 0}\, \boldsymbol{f(x) = l}$ si para todo número positivo $\boldsymbol{\varepsilon}$ (por pequeño que sea) se puede hallar un número positivo $\boldsymbol{\delta}$ (por lo general dependiente de $\boldsymbol{\varepsilon}$) tal que $|\, \boldsymbol{f(x) - l}| < \varepsilon$, siempre que $\mathbf{0} < |\boldsymbol{x - x_0}| < \delta$ (Spiegel, 1989; p.23).

Obstáculo: Término analizado por Brousseau (1983, 1986) en educación matemática, como una pieza del conocimiento que puede ser satisfactoria en un determinado momento y para ciertos problemas, pero que puede convertirse en inadecuado para el estudiante cuando intenta acceder a otras etapas del aprendizaje. “El error no es solamente efecto de la ignorancia, de la incertidumbre del azar, que son creídas en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, más bien son efecto de un conocimiento anterior que tuvo su interés, que fue exitoso, y que ahora se revela como falso o simplemente inadecuado” (Brousseau, 1983; p. 177) (Cuestas, 2007; p. 24).

DESCRIPCIÓN METODOLÓGICA

3.1 Naturaleza de la investigación

La presente investigación está enmarcada en un *enfoque cualitativo*, que según Hernández, Fernández y Baptista (2008) es aquel que "utiliza la recolección de datos sin mediación numérica para descubrir o afinar preguntas de investigación en el proceso de interpretación" (p.8). Hay que señalar, además, que "la investigación cualitativa se basa, ante todo, en el proceso mismo de recolección y análisis. Recordemos que es interpretativa, ya que el investigador hace su propia descripción y valoración de los datos" (Hernándezy otros, 2008, p. 527). Por lo que, en este enfoque "el diseño se refiere al abordaje general que habremos de utilizar en el proceso de investigación. Álvarez – Gayou (2003) lo denominan marco interpretativo" (Hernándezy otros, 2008, p. 686), esto es debido a que las investigaciones de carácter cualitativo dependen del ambiente o de un escenario determinado, ya que sus procedimientos no son estandarizados.

Asimismo, en concordancia con lo manifestado porHernándezy otros (2008), en relación a este enfoque expresan lo siguiente:

> (…) Bajo la búsqueda cualitativa, en lugar de iniciar con una teoría particular y luego "voltear" al mundo empírico para confirmar si esta es apoyada por los hechos, el investigador comienza examinando el mundo social y en este proceso desarrolla una teoría coherente con lo que observa qué ocurre – con frecuencia denominada *teoría fundamentada* (Esterberg, 2002) –. Dicho de otra forma, las investigaciones cualitativas se fundamentan mas en un proceso inductivo (explorar y describir, y luego generar perspectivas teóricas). Van de lo particular a lo general. (p.8)

Por lo tanto, las metodologías de naturaleza cualitativa están orientadas hacia la comprensión y el análisis de aquellas situaciones únicas y particulares, es decir, siguen un método inductivo para la generación de hipótesis y de conocimientos validos, por medio de la reconstrucción de la realidad a través de la interpretación de la experiencia, atendiendo con especial ahínco a la búsqueda de significado y de sentido que son otorgados por los actores a los hechos que ocurren ante una determinada situación, así como también, al aspecto vivencial, el cual responde al ¿cómo? viven y experimentan algunos fenómenos o experiencias los individuos o los grupos sociales que son sujeto de investigación (Rodríguez y Valldeoriola, 2012).

3.2 Tipo de Investigación

Una vez descrita la naturaleza del trabajo, se debe aclarar el tipo de investigación, en este caso el tipo de investigación acogido es del tipo descriptivo, la cual "tiene como objeto lograr la precisión y caracterización del evento de estudio dentro de un contexto particular" (Hurtado, 2012; p.413), es decir, los estudios descriptivos son aquellos que "buscan especificar propiedades, características y los perfiles de las personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis" (Danhke, 1989, citado por Hernández, Fernández y Baptista, 2008, p. 102).

3.3 Diseño de la investigación

Ahora bien, el diseño de investigación que se adoptó fue un diseño *transeccional contemporáneo univariable documental*, estos tipos de diseños son entendidos como "diseños cuyo objetivo es describir un evento, situación, hecho o contexto, y cuya base o fuente de datos está constituida por documentos (escritos, cartas, videos, grabaciones de audio, restos)" (Hurtado, 2012; p.423), en otras palabras, es de diseño *documental*, el cual es definido por Hurtado (2012) como "aquel en el cual el investigador recurre a documentos diversos como fuentes para la recolección de los datos que le van a permitir responder su pregunta de investigación" (p.706).

No obstante, es necesario aclarar la diferencia que existe entre el proceso de investigación y la investigación de diseño documental, de esta manera, la primera hace referencia a “la revisión bibliográfica organizada y exhaustiva que hace todo investigador, en cualquier tipo de investigación y en cualquier diseño, para construir una fundamentación noológica acorde y coherente con sus objetivos y sus eventos de estudio” (Hurtado, 2012; p.707), y como no es una investigación propiamente dicha no origina conocimiento nuevo. Mientras que, el segundo, el diseño documental “es una forma de llevar a cabo una investigación, y por tanto, genera conocimiento nuevo, tanto para el investigador como para la comunidad científica” (Hurtado, 2012; p. 707).

Por lo tanto, la condición única que hace que una investigación sea de diseño documental es descrita por Hurtado (2012) como aquella en la cual “la fuente de los datos que se van a analizar para llegar a las conclusiones, son documentos, y estos datos están dirigidos a obtener conocimiento nuevo” (p.707). De esta manera, sintetizado estos aspectos mencionados, se tiene que:

Diseño documental	**Documentación**
Se aplica cuando los datos están contenidos en documentos.	Se aplica a cualquier tipo de investigación y a cualquier tipo de diseño.
Corresponde a la recolección de los datos.	Corresponde al proceso de fundamentación noológica, basado en la revisión bibliográfica.
La información extraída de los documentos se analiza mediante alguna técnica.	La información extraída de los documentos se organiza y se reporta como un estado del arte.
Genera conocimiento nuevo, el cual se presenta en los resultados.	Permite recopilar conocimiento existente acerca del tema, y se coloca en la fundamentación noológica.
Utilizan las técnicas de revisión documental, con énfasis en instrumentos de recolección de datos como matrices de análisis, matrices de registro y matrices de categorías.	Utilizan las técnicas de revisión documental, pero básicamente Raceer.

Fuente: Hurtado (2012; p. 707)

En este sentido, Suárez (2007) manifiesta que:

> (…) en la investigación documental, es la reconstrucción de la información la que genera aportes teóricos y permite hacer propuestas de trabajo (…). Ella no se queda en la recuperación de información por la información misma, sino que va más allá, recreando y redefiniendo nuevas situaciones, enfoques y criterios que enriquecen y profundizan el bagaje del investigador. (p.47)

Cabe destacar, que la presente investigación se adscribe a la investigación documental de característica *estudios de desarrollo teórico*, que consiste, de acuerdo a la UPEL (2008), en la "presentación de nuevas teorías, conceptualizaciones o modelos interpretativos originales del autor, a partir del análisis crítico de la información empírica y teorías existentes" (p.20); y a su vez con carácter de *estudios de investigación matemática* y *estudios de educación comparada*, esta última, se fundamenta en el "análisis de semejanzas, diferencias y tendencias sobre características o problemas de la educación en el contexto de realidades socioculturales, geográficas o históricas diversas, con fundamento en información publicada" (p.20).

Ahora, al realizar este tipo de diseño de investigación hay que mantener una aptitud y cierto carácter hermenéutico que viene en función de lo planteado por Cisterna (2005), el cual alega que "investigar desde una racionalidad hermenéutica significa una forma de abordar, estudiar, entender, analizar y construir conocimiento a partir de procesos de interpretación, donde la validez y confiabilidad del conocimiento descansa en última instancia en el rigor del investigador" (p. 62). De tal manera que:

> (…) se asume la cuestión de la construcción del conocimiento como un proceso subjetivo e intersubjetivo, en tanto es el sujeto quien construye el diseño de investigación, recopila la información, la organiza y le da sentido, tanto desde sus estructuras conceptuales previas, como desde aquellos hallazgos que surgen de la propia investigación, la que luego se colectiviza y discute en la comunidad académica. (p. 62)

Hechas las observaciones anteriores, al analizar la constitución lingüística de un texto como un todo, destacando a su vez su estructura semántica, se evidencian numerosos aspectos en relación con la hermenéutica y el lenguaje, los cuales valen la pena señalar y describir; según Gadamer (1998), la hermenéutica tiene su cimiento en:

> (…) el hecho de que el lenguaje apunta siempre más allá de sí mismo y de lo que dice explícitamente. No se resuelve en lo que expresa, en lo que verbaliza. La dimensión hermenéutica que aquí se abre supone evidentemente una limitación en objeti-vabilidad de lo que pensamos y comunicamos. No es que la expresión verbal sea inexacta y esté necesitada de mejora, sino que justamente cuando es lo que puede ser, transciende lo que evoca y comunica. Porque el lenguaje lleva siempre implícito un sentido depositado en él y que sólo ejerce su función como sentido subyacente y que pierde esa función si se explicita. (p. 175)

De donde se puede observar, que "la hermenéutica aborda el aspecto interno en el uso de ese mundo semiótico; o, más exactamente, el hecho interno del habla, que visto desde fuera aparece como la utilización de un mundo de signos" (Gadamer, 1998; p.171). En este orden de ideas, Gadamer (1998) distingue dos maneras de retracción que el lenguaje esconde detrás de sí, los cuales son denominados por él cómo "lo callado en el lenguaje" y "lo encubierto en el lenguaje". El primero, hace referencia al aspecto del "gran ámbito de la ocasionalidad[35] de todo discurso y que interviene en la constitución de su sentido" (p.175). Por lo que, de acuerdo a Gadamer (1998), con relación al análisis hermenéutico, este:

> (…) puede mostrar que esa dependencia de la ocasión no es a su vez algo ocasional, al modo de las expresiones denominadas, ocasionales como «aquí» o «esto», que no poseen evidentemente en su peculiaridad semántica ningún contenido fijo y señalable, sino que son utilizables en los distintos contenidos como formas vacías. (p.175)

Ahora, con respecto al segundo, lo encubierto en el lenguaje, está ligado con la mentira y la mendacidad. Por un lado, la mentira es el modo de encubrimiento dentro

[35] Por ocasionalidad, en el sentido entendido por Gadamer (1998), "significa la dependencia de la ocasión en que se utiliza un lenguaje" (175).

de la totalidad lingüística de un conjunto literario, el cual tiene su propia estructura semántica. En otras palabras, citando a Gadamer (1998), se tiene que:

> La mentira no es simplemente la afirmación de algo falso. Se trata de un lenguaje encubridor que sabe lo que dice. Y por eso la tarea de la exposición lingüística en el contexto literario es el descubrimiento de la mentira o, más exactamente, la comprensión del carácter falaz de la mentira en cuanto que ésta responde a la verdadera intención del hablante. (p.176)

Añadiendo, seguidamente que:

> (…) el encubrimiento en tanto que error es de otra naturaleza. La conducta lingüística en el caso de la afirmación correcta no difiere en nada de la conducta lingüística en el caso de la afirmación errónea. El error no es un fenómeno semántico, pero tampoco un fenómeno hermenéutico, aunque intervienen ambos aspectos. Los enunciados erróneos son una expresión «correcta» de opiniones erróneas, pero como fenómeno expresivo y lingüístico no son específicos frente a la expresión de opiniones correctas. (p.176)

Sin embargo, a lo que respecta a la mendacidad, este es un fenómeno que ocurre "solo cuando la mentira no es consciente de sí misma en tanto que encubrimiento adquiere un nuevo carácter que determina la relación global con el mundo" (Gadamer, 1998; p.176), es decir, punto en el cual se ha "perdido el sentido de la verdad y la verdad en general. Esa mendacidad no se reconoce a sí misma y se asegura contra su desenmascaramiento mediante el discurso mismo." (p.176). Así, "la mendacidad se convierte así en ejemplo de la autoalienación que puede sufrir la conciencia lingüística y que reclama una disolución mediante el esfuerzo de reflexión hermenéutica" (Gadamer, 1998; p.176).

En consecuencia, "(…) las dos formas más importantes de encubrimiento mediante el lenguaje que ha de abordar sobre todo la reflexión hermenéutica (…) atañen a este encubrimiento mediante el lenguaje que determina toda la relación con el mundo" (Gadamer, 1998; p.177). Una de estas formas de encubrimiento, es la que se constituye en la aceptación de prejuicios de manera dogmática, es decir, sin inconveniente alguno; en palabras de Gadamer (1998), esta:

> Constituye una estructura fundamental de nuestro lenguaje el que seamos dirigidos por ciertos preconceptos y por una precomprensión en nuestro discurso, de suerte que esos preconceptos y esa precomprensión permanecen siempre encubiertos y se precisa una ruptura de lo que subyace en la orientación del discurso para hacer explícitos los prejuicios como tales. (p.177)

Ahora, en otro orden de ideas, el procedimiento a seguir en los diseños documentales cumplen con cada una de las fases a seguir por cualquier investigación, pero a su vez, necesitan de una serie de procedimientos los cuales están relacionados a la fase interactiva (recolección de datos) de igual forma a la fase confirmatoria propia del análisis de datos. (Hurtado, 2012).

3.4. Población y muestra.

Para efectos de lograr distinguir los esquemas conceptuales que poseen los estudiantes sobre la noción de *Infinito* en dos niveles diferentes del sistema educativo venezolano se hizo necesario escoger dos poblaciones, entendiéndose como población: "El conjunto de todos los casos que concuerdan con una serie de especificaciones" (Selltiz et al., 1980,citado por Hernándezy otros, 2008, p. 238). Se tomó para efectos de este trabajo como población para el caso de la Educación Media General a 75 estudiantes de 5to año de la Unidad Educativa "El Siervo de Dios", mientras para el caso de la Educación Universitaria se eligió a estudiantes del 4to semestre de Educación Mención Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de Carabobo del turno de la mañana.

Una vez seleccionada la población, se escogió la muestra, cabe señalar que la muestra, en el proceso cualitativo "es un grupo de personas, eventos, sucesos, comunidades, etcétera, sobre el cual se habrán de recolectar los datos, sin que necesariamente sea representativo del universo o población que se estudia" (Hernándezy otros, 2008, p. 562). Por lo que, se tratan de muestras no probabilísticas, es decir, que son muestras donde “la elección de los elementos o casos no depende de la probabilidad, sino de razones relacionadas con las características de la investigación o de quien realiza la muestra”(Hernándezy otros, 2008, p. 565). El tipo de muestra empleada es la de muestras homogéneas, que es un tipo de muestra cualitativa en la que “las unidades a seleccionar poseen un mismo perfil o características, o bien, comparten rasgos similares. Su propósito es centrarse en el tema a investigar o resaltar situaciones, procesos o episodios en un grupo social”(Hernándezy otros, 2008, p. 567).

Para efectos de la investigación se tomó una muestra de treinta (30) estudiantes de Educación Media General a estudiantes de 5to año de la Unidad Educativa “El Siervo de Dios” y doce (12) estudiantes del 4to semestre de Educación Mención Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de Carabobo del turno de la mañana.

3.5. Técnica e instrumento de recolección de datos:

Una vez realizado los planteamientos anteriores, se tiene que la investigación recaudó la información y construyó el marco de referencia a través de la técnica de *revisión documental*, para lo concerniente, entre otras cosas, a la identificación de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de *Infinito Actual* y su categorización (en función de los periodos históricos tomados en consideración para el presente trabajo), dicha revisión, en palabras de Hurtado (2012) consiste en:

> Un proceso que abarca la ubicación, recopilación, selección, revisión, análisis, extracción y registro de información contenida en documentos. (…) se utiliza para la construcción de la fundamentación noológica de la investigación y, en ese caso, la búsqueda de información está orientada a configurar un punto de partida teórico, conceptual, histórico, legal y contextual. (p.851)

Por lo que, consiguientemente se hizo un arqueo general de fuentes documentales, que consiste según Suárez (2007) en “la localización, identificación y registro de la información, a través de la técnica de documentación conocida como la referencia bibliográfica y hemerográfica" (p.44), en relación al tópico estudiado: la noción de *Infinito*. Por otro lado, también se le empleó para distinguir los esquemas conceptuales que poseen los estudiantes asociados a la noción de *Infinito* y a la manera en que lo perciben (en dos niveles diferentes del sistema educativo venezolano: Educación Media General y Educación Universitaria) por medio de la aplicación de un instrumento, cuestionario de respuestas de tipo abiertas que consto de 9 items para los estudiantes Educación Media General y de 16 items para estudiantes de Educación Universitaria (los cuestionarios se pueden observar en los anexos).

Ahora bien, antes de abordar el instrumento utilizado para la recolección de datos y su posterior análisis, resulta oportuno aclarar lo concerniente a las fuentes en general, siguiendo a Suárez (2007), una fuente "es aquella que concentra y transmite el dato y la información valiosa e idónea al proceso de investigación documental o bibliografía" (p.45). En tal sentido, hay que señalar que:

> Una fuente documental es el centro donde podemos localizar la información: centros de documentación, sistemas bibliotecarios, bancos de datos. Por su parte, la documentación presupone el dato propiamente tal, entendiendo por dato aquella partícula o elemento de naturaleza física o social que, una vez sistematizado, transmite determinada información. (p.46)

Asimismo, de acuerdo al lugar de procedencia de la obtención del dato, este puede clasificarse en "dato primario, secundario y terciario, o de fuentes de transmisión técnica" (Suárez, 2007; p.46). Haciendo especial énfasis a lo relacionado al dato primario este "es obtenido y registrado directamente por el investigador de la realidad objeto de estudio, sin intermediarios. Ese dato, produce desde ya información o conduce a ella, la crea y la transmite" (p.46). Mientras que el dato secundario Suárez (2007) lo describe de manera siguiente:

> (…) no podemos hablar de su recuperación y registro, sino a la inversa, de su registro y recuperación, ya que si una fuente directa conduce al dato, una fuente

> indirecta lleva a la información, a una gran masa documental que debe ser procesada (localización, identificación, registro y recuperación) para llegar al dato. Una vez recuperados los datos afines al problema, continúa el proceso (organización, análisis e interpretación) y se reconstruye y obtiene nueva información. En síntesis, la fuente primaria produce información a partir del dato; la fuente secundaria parte de la información como materia prima para llegar al dato, y con él se reconstruye y obtiene nueva información. (p.46)

Ya hechas las aclaraciones pertinentes, el instrumento empleado para los fines de esta investigación fueron las *matrices de análisis*, las cuales Hurtado (2012) las define como:

> Instrumentos diseñados para extraer información, por lo regular no tan evidente, ya sea de un documento o de una situación real. La matriz de análisis proporciona criterios para reagrupar o relacionar entre sí los indicios de un evento en nuevas sinergias que permiten descubrir en ese evento aspectos inexplorados, emitir una crítica o hacer una interpretación del evento. Se aplica particularmente en las investigaciones analíticas, aunque también es útil en cualquier otro tipo de investigación que requiera un proceso de análisis de documentos. (p.855)

3.5.1.1 Validez de la matriz de análisis:

Esta se obtiene por medio de la validez de constructo, que no es más que "determinar en qué medida un instrumento mide el evento en términos de la manera como este se contextualiza y en la relación con la teoría que sustenta la investigación" (Hurtado, 2012; p.790), puesto que cuando el investigador, "formula su pregunta de investigación y delimita su tema, atiende a cierta concepción de la realidad basada en conceptos de los eventos que pretende estudiar", la validez se calcula con la técnica de validación por jueces o expertos "por medio de la proporción de acuerdo entre jueces, con respecto a la correspondencia entre los ítemes de la matriz y los indicios y sinergias del evento de estudio" (Hurtado, 2012; p.857).

3.5.1.2 Confiabilidad de la matriz de análisis:

La confiabilidad se aplica según lo planteado por Bermúdez (1982), quien expresa que "depende de una buena definición de las categorías y de la observación de ciertas reglas de parte de los codificadores, ya que los resultados no deben enviar de un codificador a otro en el análisis de un mismo contenido" (p.79). En consecuencia, la confiabilidad cualitativa, también llamada dependencia o consistencia lógica (Guba y Lincoln, 1989; Sandín, 2003; citado por Hernándezy otros, 2008), se puede obtener por medio de dos maneras, siguiendo a Hernándezy otros(2008), por dependencia interna o dependencia externa, "(…) interna (grado en el cual diversos investigadores, al menos dos, generan temas similares con los mismos datos)" (p. 662), mientras que la "externa (grado en que diversos investigadores generan temas similares en el mismo ambiente y periodo, pero cada quien recaba sus propios datos)" (p.662).

Adicionalmente, específicamente para el aspecto de distinguir los esquemas conceptuales que poseen los estudiantes sobre la noción de *Infinito*, además de la realización del análisis de contenido, resultó pertinente la ejecución de un análisis didáctico a un episodio de clase, desde la perspectiva de las teorías abordas en las bases teóricas.

3.6 Técnica de análisis de la información:

En este sentido, el método empleado para análisis de los datos fue el de la técnica del *análisis de contenido*, con la finalidad de derivar la aproximación epistemológica de la noción de *Infinito Actual*, por tal motivo, es de suma importancia conocer lo concerniente a esta técnica, puesto que es una herramienta fundamental para la investigación, el cual se entiende como "técnica para estudiar la comunicación de una manera objetiva, sistemática y que cuantifica los contenidos en categorías" (Hernándezy otros, 2008; p.356); por otro lado, cabe agregar lo descrito en el

Cuadernillo de Trabajo de la Cátedra: Técnicas de investigación Científica de la Universidad Nacional de Córdoba (s/f), donde se plantea que "el análisis de contenido es una técnica de investigación que consiste en el estudio de la realidad social a través de la observación y del análisis de los documentos que se crean o producen en el seno de una o varias sociedades" (p.74).

Con relación a lo ya mencionado, como complemento, Piñuel (2002), define el análisis de contenido como:

> (…) conjunto de procedimientos interpretativos de productos comunicativos (mensajes, textos o discursos) que proceden de procesos singulares de comunicación previamente registrados, y que, basados en técnicas de medida, a veces cuantitativas (estadísticas basadas en el recuento de unidades), a veces cualitativas (lógicas basadas en la combinación de categorías) tienen por objeto elaborar y procesar datos relevantes sobre las condiciones mismas en que se han producido aquellos textos, o sobre las condiciones que puedan darse para su empleo posterior. (p. 2)

Por tanto, es conveniente mencionar, lo explicado por Hurtado (2012) en cuanto a la objetividad de la técnica; la autora expresa que "la objetividad del análisis de contenido se manifiesta en la medida en que responde a ciertas normas, ello implica plantear los criterios de análisis, seleccionar las categorías y definirlas operacionalmente" (p.1176). De esta manera, en el análisis de contenido ciertas aplicaciones "contienen procedimientos más estandarizados, mediante los cuales se divide el texto en función de ciertas ideas o palabras, las cuales se cuantifican posteriormente" (Hurtado, 2012; p.1176). Donde la sistematización se expresa en la forma como el contenido es ordenado e integrado en las categorías elegidas en función del propósito de la investigación Mientras que, "la cuantificación viene dada por el cálculo de las frecuencias de las frases o palabras significativas, o por los elementos asignados a cada categoría" (Hurtado Op. Cit.; p.1176).

Hechas las consideraciones anteriores, resulta oportuno describir como se realizó dicho análisis, este fue realizado de acuerdo a lo explicado por Hernándezy otros (2008), quienes detallan el procedimiento a seguir, de la manera siguiente:

> El análisis de contenido se efectúa por medio de la codificación, es decir, el proceso en virtud del cual las características relevantes del contenido de un mensaje se transforman a unidades que permitan su descripción y análisis precisos. Lo importante del mensaje se convierte en algo susceptible de describir y analizar. Para codificar es necesario definir el universo, las unidades de análisis y las categorías de análisis. (p. 357)

En concordancia con lo anterior, el conjunto de métodos interpretativos, estrategias y técnicas, válidos para una investigación, requiere de la elaboración anticipada de una serie de categorías que surgen a través del marco metodológico en que se determina como objeto de estudio la comunicación (Piñuel, 2002). Y es en este marco metodológico donde se originan "las hipótesis y objetivos que sostienen el procedimiento de normalización de la diversidad superficial del corpus textual o material de análisis, con vistas al registro de los datos, a su procesamiento estadístico y/o lógico y a su posterior interpretación" (Piñuel, 2002; p. 7). Entendiendo así, el análisis de contenido como:

> (…) un metatexto resultado de la transformación de un texto primitivo (o conjunto de ellos) sobre el que se ha operado aquella transformación para modificarlo (controladamente) de acuerdo a unas reglas de procedimiento, de análisis y de refutación (metodología) confiables y válidas, y que se hayan justificado metodológicamente. (Piñuel, 2002; p. 7)

Por otro lado, el análisis de contenido debe estar dirigido hacia el objetivo de alcanzar, que según Piñuel (2002) hace referencia a "la emergencia de aquel sentido latente que procede de las prácticas sociales y cognitivas que instrumentalmente recurren a la comunicación para facilitar la interacción que subyace a los actos comunicativos concretos y subtiende la superficie material del texto" (p. 4). Además, en relación a esto Piñuel (2002) elucida lo siguiente:

> Pero esta nueva perspectiva no sólo amplía el campo de estudio del análisis de contenido hacia la dimensión no manifiesta del texto cuanto que, dada su complejidad, exige introducir nuevas variables en el análisis a fin de que el texto

> cobre el sentido requerido para el analista. Esto sólo es posible si tal texto se abre –teóricamente hablando– a las condiciones contextuales del producto comunicativo, al proceso de comunicación en el que se inscribe, y por tanto a las circunstancias psicológicas, sociales, culturales e históricas de producción y de recepción de las expresiones comunicativas con que aparece. (p. 4)

En suma, metodológicamente, según Hurtado (2012) el análisis general cualitativo realizado para la investigación consta de los siguientes pasos:

- Revisión y organización del material.
- Categorización de la información.
- Codificación de las categorías
- Calificación (solo se usa alguna técnica de análisis cuantitativo).
- Tabulación de los datos.
- Procesamiento de los datos (aplicación de la técnica de análisis).
- Interpretación de los resultados.
- Discusión de resultados. (p.1182)

En consecuencia, atendiendo a ello, se escogió una serie de unidades de análisis o de registro, entendiendo estas, de acuerdo a lo planteado por Hernándezy otros (2008), como aquellos “segmentos del contenido de los mensajes que son caracterizados para ubicarlos dentro de las categorías” (p.358). Asimismo, cabe señalar que las unidades de análisis más importantes son: a) La palabra, la cual es la unidad más simple de análisis; b) el tema, hace referencia a un enunciado con relación a algún tópico; c) el ítem, unidad de registro mayormente utilizada que analiza el material simbólico total, este puede ser desde un libro o hasta una respuesta a una pregunta abierta; d) el personaje, no es más que el sujeto el cual es objeto de análisis; y por último e) medidas de espacio – tiempo, referidas a unidades físicas, también llamadas unidades de enumeración, como la línea, el minuto, cada pausa que se realice en un discurso, entre otras (Hernández y otros, 2008).

Siguiendo el mismo orden de ideas, según Hernándezy otros (2008) estas unidades “se insertan, colocan o caracterizan en categorías y/o subcategorías” (p.358). Estas categorías son definidas por los mismos autores “como los niveles donde serán caracterizadas las unidades de análisis" (p.359). De esta manera, "cada unidad de análisis se categoriza o encasilla en uno o más sistemas de categorías" (p.359), es decir, "una vez que el investigador ha revisado y organizado la información, debe comenzar a agrupar la unidades de análisis dentro de conceptos más abstractos" (Hurtado, 2012; p.1197).

Por lo tanto, el análisis se efectuó a través de dos etapas, la primera, la categorización, definida por Hurtado (2012) como un proceso que:

> Consiste en ubicar, cada una de las unidades de análisis correspondientes al texto, o a la imagen estudiada, dentro de un tema, tópico, un concepto, o atribuirle un significado. A medida que se ubican, tales unidades se identifican mediante una palabra o una frase. De esta manera se conforman grupos de unidades de análisis identificados con la misma categoría. (p.1197)

Atendiendo para ello, a lo planteado por Hernándezy otros (2008), en cuanto a lo primordial en el análisis cualitativo es darle sentido a:

1. *Las descripciones de cada categoría*. Esto implica ofrecer una descripción completa de cada categoría y ubicarla en el fenómeno que estudiamos (…).
2. *Los significados de cada categoría*. Ello quiere decir analizar el significado de la categoría para los participantes (…).
3. *La presencia de cada categoría*. La frecuencia con la cual aparece en los materiales (cierto sentido cuantitativo) (…).
4. *Las relaciones entre categorías*. Encontrar vinculaciones, nexos y asociaciones entre categorías. Algunas relaciones comunes entre categorías son:
   - Temporales: Cuando una categoría siempre o casi siempre precede a otra, aunque no necesariamente la primera es causa de la segunda.
   - Causales: cuando una categoría es la causa de otra. (…). Pero debe tenerse precaución con la atribución de causalidad, ya que no disponemos de pruebas estadísticas que la apoyen, tenemos que documentarla con diversos ejemplos (…).
   - De conjunto – subconjunto: Cuando una categoría está contenida dentro de otra. (p. 654)

Y que además, deben satisfacer una serie de requisitos, por lo que, de acuerdo Hernándezy otros (2008), debe cumplir los siguientes:

1. Las categorías y subcategoría deben ser *exhaustivas*. Es decir, abarcar todas las posibles subcategorías de lo que se va a codificar. Por ejemplo, la categoría "ideología del esposo" no podría prescindir de la subcategoría "neutral".
2. La subcategoría deben ser de preferencia *mutuamente excluyentes*, de tal manera que una unidad de análisis clasifique en una y solo una de las subcategorías de cada categoría. Por ejemplo, un personaje no puede ser "bueno" y "malo" a la vez.
   (…)
3. Las categorías y subcategorías *deben derivarse del marco teórico y de una profunda evaluación de la situación*. (p. 364)

Ahora bien, la segunda etapa, la codificación, que de acuerdo a la Hurtado (2012), "consiste en asignar un símbolo a cada categoría (…) en el caso de las técnicas cualitativas, éstos símbolos son palabras, o figuras cargadas de significado" (p.1197).

ANÁLISIS E INTERPTRETACIÓN DE LA INFORMACIÓN

4.1. Análisis documental:

Ya aplicadas las técnicas y elaborados los instrumentos, así como los métodos para la recolección de datos, se procede a la realización de su análisis. Por lo que, se inicia el proceso de fragmentación de la información obtenida de los datos no estructurados provenientes de la recolección, para así disponer y organizar la información y construir un análisis interpretativo de la información recibida, es decir, la elaboración de una síntesis "de alto orden que emergen en la forma de descripciones, expresiones, temas, patrones, hipótesis y teoría" (Mertens, 2005; citado porHernándezy otros, 2008; p. 625).

Por otro lado, cabe destacar algunas de las características que definen al análisis cualitativo, siguiendo a Hernández y otros (2008), se tienen:

1. El Proceso esencial del análisis consiste en que recibimos datos no estructurados y los estructuramos.
2. Los propósitos centrales del análisis cualitativo son:

- Darle estructura a los datos (Patton, 2002), lo cual implica organizar las unidades, las categorías, los temas y los patrones (Grinnell, 1997).
- Describir las experiencias de las personas estudiadas bajo su óptica, en su lenguaje y con sus expresiones (Grinnell, 1997, Ceswell, 2005).
- Comprender en profundidad el contexto que rodea los datos.
- Interpretar y evaluar unidades, categorías, temas y patrones (Patton, 2002).
- Explicar ambientes, situaciones, hechos, fenómenos (Baptiste, 2001).
- Reconstruir historias (Baptiste, 2001).
- Encontrar sentido a los datos en el marco del planteamiento del problema.
- Relacionar los resultados del análisis con la teoría fundamentada o construir teorías (Chamaz, 2000, Baptiste, 2001).

3. El logro de tales propósitos es una labor paulatina, para cumplirlos debemos organizar y evaluar grandes volúmenes de datos recolectados (generados), de tal manera que las interpretaciones surgidas en el proceso se dirijan al planteamiento del problema. (p.624)

De esta manera, la información recogida mediante la técnica del *análisis de contenido* aplicada a la reconstrucción histórica de la noción de *Infinito*, realizada anteriormente, permitió identificar una serie de esquemas conceptuales asociados a esta noción, que dominaron el pensamiento del hombre durante ciertos periodos históricos; para esta investigación se consideraron cuatro periodos, los cuales son: *1º Preludio. Egipto y Mesopotamia, las civilizaciones de los valles fluviales*; *2º El Pensamiento Helénico*; *3º Interludio Medieval y Moderno*; y *4º La Matemática Contemporánea. Siglos XIX – XX.*

Además, se aplicó dicha técnica de análisis a la perspectiva cantoriana del *Infinito* (denominada el Paraíso de Cantor para efectos de este trabajo), es decir, la manera en que es manejada la noción de *Infinito* según Georg Cantor(1845 - 1918). Estos esquemas fueron categorizados y descritos de acuerdo a la información que iba emergiendo como resultado de los segmentos relevantes y significativos de cada unidad de análisis que fueron considerados en la reconstrucción histórica de la noción de *Infinito*. Estos fueron analizados por medio de una matriz de análisis, tomando en cuenta las diversas situaciones, las actividades, los procedimientos empleados, representación graficas, los métodos y técnicas, y los conceptos relacionados como: el número, el límite, la derivada, la integral, entre otros, así como también las ideas más resaltantes que expresaron y desarrollaron algunos matemáticos y filósofos más distintivos de cada época.

La información recolectada se agrupó en categorías provisionales que iban siendo modificadas a medida que surgían otros datos u observaciones y mientras se comparaba la información que se encontraba bajo cada categoría provisoria (primer plano de categorización). Ahora, como resultado de este proceso, se identificaron ocho esquemas conceptuales asociados a la noción de *Infinito* los cuales fueron dispuestos y descritos en la matriz de análisis que se presenta a continuación.

Matriz de Análisis. Esquemas conceptuales asociados a la noción de *Infinito*.

		Metacategorías:	Categorías: Esquema Conceptual Dominante	Descripción	Código
Noción de Infinito	Periodo Histórico	*Preludio. Egipto y Mesopotamia, las civilizaciones de los valles fluviales.*	Esquema de *Infinito* en su Acepción más Primitiva, asociada a la idea de número.	Carácter a priori de la infinitud a través de magnitudes muy elevadas.	EIAP
		El Pensamiento Helénico.	Esquema de *Infinito* Potencial asociado a una división o adición de magnitudes de manera reiterativa e ilimitada, es decir, esquema asociado a una razón.	Visión Potencial de Infinito que responde a dos cosas, lo infinitamente grande y la que atañe a lo infinitamente pequeño (noción clara de lo infinitesimal).	EIP
			Esquema de *Infinito* Metafísico asociado a lo eterno o a una sustancia eterna principio originador de todo que trasciende.	Manifestación de la idea de que el concepto de eternidad inmutable es igual al de infinidad de los tiempos, es decir la infinitud temporal concebida como eterna.	EIM
		Interludio Medieval y Moderno.	Esquema de *Infinito* asociado a una Perspectiva Teológica como propiedad exclusiva de Dios. El Infinito Absoluto.	Surge la Diatriba entre la potencialidad y la actualidad con respecto a la idea de Dios y su atributo de infinitud. El *Infinito* es categorizado, de acuerdo a su naturaleza, en dos aspectos diferentes, tales como: en relación a la idea de forma y en relación a la idea de materia.	EIPT
			Esquema de *Infinito* asociado a lo Infinitesimal y a una unidad invisible (punto). Existencia de elementos infinitésimos e indivisibles.	Manifestación de la noción de *Infinito* atribuida a su relación con los infinitesimales en cuanto a tres aspectos: como *diferencia*, como *razón aritmética* y como un *incremento*. Como consecuencia de la introducción de los infinitesimales en los nuevos procedimientos del cálculo, es decir magnitudes actuales que no son ni finitas, ni nulas y cuya naturaleza se desconoce, pero que en ausencia de una noción precisa de *Infinito* y de infinitesimal esta será aceptada en cuanto a su carácter práctico, basados en la lógica proposicional que establece de premisas falsas se deducen fórmulas verdaderas. Así como también en la noción de continuidad.	EII

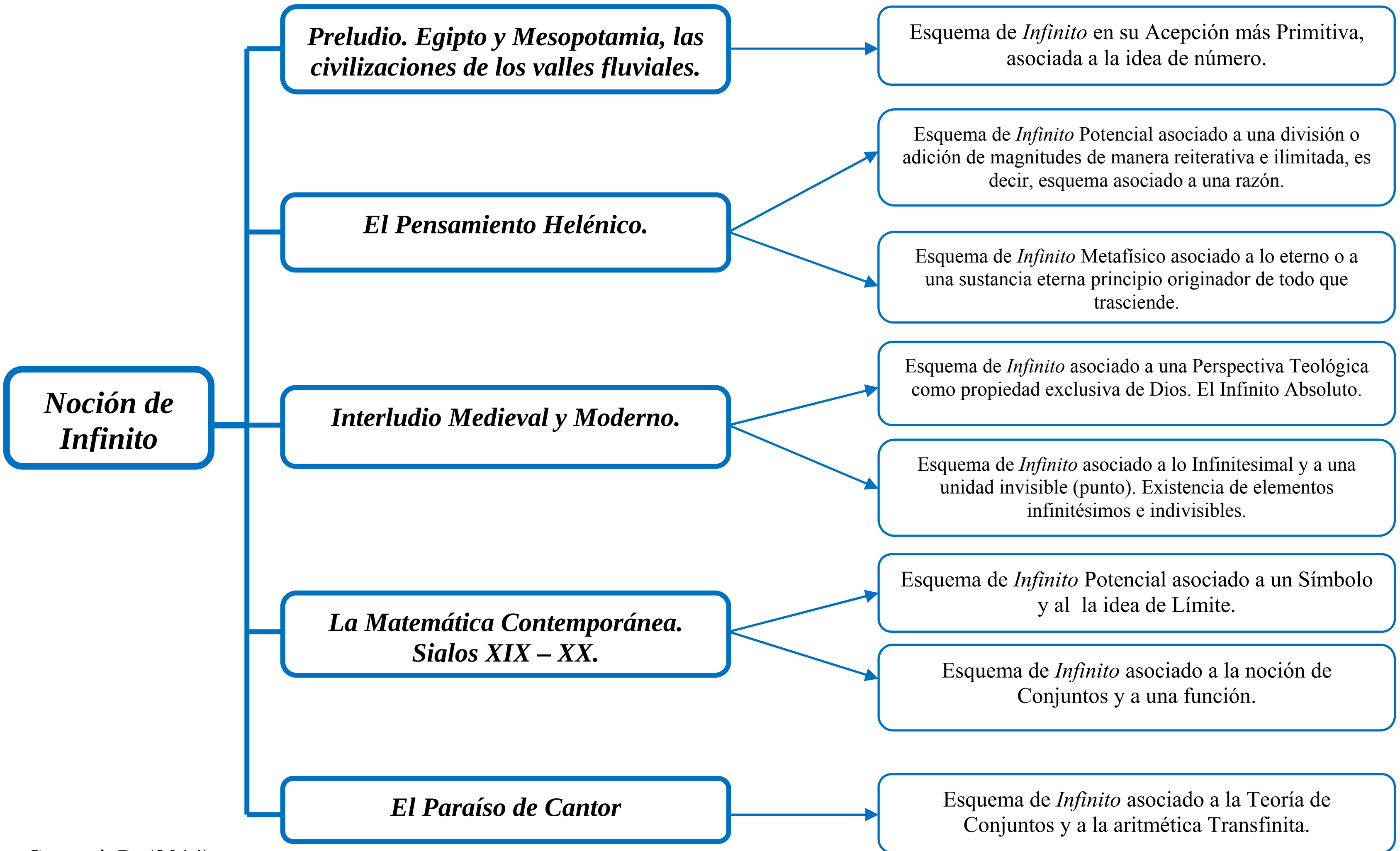
Fuente: Cescutti, R. (2014).

Matriz de Análisis. Esquemas conceptuales asociados a la noción de *Infinito*.

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Metacategorías:</th><th>Categorías:
Esquema Conceptual Dominante</th><th>Descripción</th><th>Código</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Noción de Infinito</td><td rowspan="2">Periodo Histórico</td><td rowspan="2">La Matemática Contemporánea. Siglos XIX – XX.</td><td>Esquema de Infinito Potencial asociado a un Símbolo y al la idea de Límite.</td><td>Noción Potencial de Infinito basada en la teoría de límites y la convergencia de series infinitas.</td><td>EIPSL</td></tr>
<tr><td>Esquema de Infinito asociado a la noción de Conjuntos y a una Función.</td><td>Perspectiva de Infinito Actual, explicada mediante: 1. La relación de equipotencia entre conjuntos a través de una relación biyectiva (con lo cual se puede distinguir entre conjuntos numerables y no numerables); 2. Definición la Cardinalidad, Cardinal y Ordenalidad. 3. La relación de equipotencia que se puede establecer entre dimensiones, como por ejemplo entre una línea y un plano.</td><td>EICF</td></tr>
<tr><td>Perspectiva Cantoniana del infinito</td><td>El Paraíso de Cantor.</td><td>Esquema de Infinito asociado a la Teoría de Conjuntos y a la aritmética Transfinita.</td><td>Noción de Infinito Actual que manifiesta lo siguiente: 1. La existencia de varios órdenes o tamaños de infinitud; 2. La invención del concepto de función biyectiva como herramienta para establecer la relación exhaustiva y uno a uno para compara conjuntos y establecer así si eran equivalentes o no; 3. Definición de Conjunto potencia o numero cardinal; 4. Numeros transfinitos o números hechos infinitos. Planteando, además, el Infinito como una cantidad en sí fija y constante que va mas allá de toda magnitud finita y que surge al superar el paso de la idea de Límite.</td><td>EITCAT</td></tr>
</table>

Fuente: Cescutti, R. (2014).

Representación de los diversos Esquemas conceptuales asociados a la noción de Infinito agrupados por periodos históricos.



Fuente: Cescutti, R. (2014).

4.1.1. *Descripción y análisis de los esquemas*:

Los esquemas conceptuales obtenidos mediante el análisis de contenido realizado son descritos y analizados a continuación:

1. *Esquema de Infinito en su acepción más primitiva (EIAP):* Este esquema conceptual está conformado por todas aquellas representaciones de carácter a priori de la infinitud, que en principio giraban en relación a la distinción primitiva entre uno y muchos, y que luego, por la invención de sistemas numéricos básicos mediante los cuales se podían representar magnitudes, se llega a la concepción de un infinito ligado a la expresión de una cantidad muy elevada, producto de procesos iterativos como resultado del desarrollo e implementación de estos sistemas numéricos antiguos.

2. *Esquema de Infinito Potencial (EIP):* Esquema ligado a procedimientos que involucran la división o adición de magnitudes de manera reiterativa e ilimitada, como por ejemplo lo evidenciado en la teoría atomista de Demócrito, los trabajos de Antifón y la cuadratura del círculo, la postura de Aristóteles y su forma de idealización de *Infinito*, las paradojas de Zenón con respecto al tiempo y al movimiento, y las definiciones dadas por Euclides en su obra los *Elementos*, como por ejemplo la de las rectas paralelas y la prolongación de rectas, en las cuales se puede apreciar estas operaciones, entre otros.

   Este tipo de esquema conceptual responde a dos cosas, lo infinitamente grande y a lo infinitamente pequeño, relacionadas a una razón, basada en la intuición del sentido común y en una explicación finita del mundo. Por lo que, se centra en el alegato de que por muy grande que sea una cantidad numérica siempre se puede pensar en uno mayor que este y así sucesivamente, de esta manera la operación así descrita nunca tendrá fin o término, debido a la recursividad interminable a la cual está sometida. Manifestándose así, la dificultad de distinguir entre el continuo y el *Infinito*, en este esquema no existe *Infinito* en acto, sino como proceso de crecimiento ilimitado o de subdivisión sin final.

3. *Esquema de Infinito Metafísico (EIM):*Es el que está asociado a lo eterno o a una sustancia eterna principio originador de todo lo que trasciende. Su manifestación a partir de la idea de que el concepto de eternidad inmutable es percibida como atributo del ser universal y que es igual al de infinidad de los tiempos, es decir la infinitud temporal es concebida como eterna, donde el *ápeiron*es el principio y elemento primordial de los seres, es decir es el generador de todo en la naturaleza y el universo. Esta postura se puede observar en la mentalidad griega.

4. *Esquema de Infinito asociado a una Perspectiva Teológica (EIPT):*Se retoman algunos aspectos de la filosofía aristotélica y platónica, más específicamente las ligadas a la relación entre punto, línea y el continuo. Por lo tanto, bajo esta perspectiva, el *Infinito* es categorizado, de acuerdo a su naturaleza, en dos aspectos diferentes, tales como: en relación a la idea de forma y en relación a la idea de materia, como atributos y propiedad exclusiva de Dios, puesto que él "es infinito, y eterno, e incircunscribible" tal como afirma Santo Tomás de Aquino, postura ampliada por Descartes quien alegaba que "concibo a Dios como un ser eterno, infinito, omnisciente, omnipotente, creador de todas las cosas que existen, excepto de sí mismo, que aquellas por las que se presentan las substancias finitas" (p.25), además explicita que Dios es un ser *Infinito* en acto ya que en su perfección ya nada puede ser añadido; y que su naturaleza es distinta a la del hombre que es un ser finito, y aunque el conocimiento que va adquiriendo este crezca paulatinamente y potencialmente este nunca será *Infinito* en acto como el de Dios.

De aquí surge la Diatriba entre la potencialidad y la actualidad con respecto a la idea de Dios la cual domina durante la mayoría de la edad media. Por otro lado, Bruno (tr.1972), manifiesta la creencia de infinitos mundos en el universo y aunque sea innumerable cada parte de él se pueden considerar finitas cada una de ellas, “la cual está totalmente en todo y no en las partes” (p.71), en contraste con la magnificencia infinita de Dios que es absoluto, ya que esta “está en todo el mundo y está infinita y totalmente en cada una de sus partes” (p.71).

5. *Esquema de Infinito asociado a lo Infinitesimal (EII):*Manifestación de la noción de *Infinito* atribuida a su relación con los infinitesimales en cuanto a tres aspectos: como diferencia, como razón aritmética y como un incremento. Esto originado por la introducción de los infinitesimales en los nuevos procedimientos del cálculo, en la geometría y en los estudios astronómicos; esto se evidencian en los trabajos de Kepler, Wallis, Cavalieri, Pascal, Leibniz, Newton, entre otros. Por otro lado, estas magnitudes actuales (los infinitesimales) son de naturaleza desconocida y no son consideradas ni finitas, ni nulas, pero que en ausencia de una noción precisa de *Infinito* y de infinitesimal esta fue aceptada en cuanto a su carácter práctico y utilitario, basados en la lógica proposicional que establece que de premisas falsas se deducen fórmulas verdaderas. Así como también en la noción de continuidad, estos conceptos y nociones no eran muy claros pero las herramientas desarrolladas a partir de ellos permitían encontrar resultados consistentes con la realidad.

   Por tanto, lo infinitesimales se veían como algo incomprensible que no podrían ser representados de forma explícita, pero que eran un principio originario inevitable de carácter geométrico. Se comienzan a trabajar con las series infinitas y aparecen nomenclaturas que hacían posible tratar con los infinitesimales y las pequeñas variaciones que experimentaban las variables en determinados intervalos de tiempo, con lo que se inicia el desarrollo de los primeros fundamentos del cálculo. Además, se rechaza la idea de un *Infinito* actual en la matemática debido a las contradicciones que este genera, ejemplo de ello la paradoja de Galileo donde se colocan en correspondencia biunívoca los puntos de dos segmentos de diferente longitud, lo cual escapaba a la razón de época.

6. *Esquema de Infinito Potencial asociado a un Símbolo y a la idea de Límite (EIPSL):* Esta acepción es la versión evolucionada del esquema EII, solo se acepta el *Infinito* potencial estudiado y avalado por la teoría de límites fundamentada principalmente en los trabajos de Cavalieri y Weierstrass; concebidos desde una perspectiva aritmética y sin hacer uso de la geometría y de los infinitesimales. La derivada y la integral se desarrollaron en relación al concepto de límite y de función; y se establecen criterios de convergencias para series infinitas. El *Infinito* actual era rechazado por las anomalías que se presentaban, ejemplo los estudios realizados por Bolzano en su obra Paradojas de lo infinito (1851).

7. *Esquema de Infinito asociado a la noción de Conjuntos y a una Función (EICF):* Este esquema presenta la manera como era concebido o ideada la noción de *Infinito* por parte de Georg Cantor y otros Matemáticos posteriores. Para él, la noción de *Infinito* aceptada era noción de *Infinito actual*,donde se puede observar dicha noción juega un papel preponderante para el desarrollo de su Teoría de Conjuntos en la cual se manifiesta la existencia de varios ordenes o tamaños de infinitud expresadas a través de la idea de cardinal de un conjunto, llegando a descubrir la presencia de conjuntos infinitos numerables y no numerables, y demostrando la diferencia entre ambos, por medio de la invención del concepto de función biyectiva como herramienta

para establecer la relación exhaustiva y uno a uno para compara conjuntos y establecer así si eran equipotentes o no.

De allí, surge la definición de Conjunto potencia o numero cardinal para poder proseguir con su idealización de una Teoría de Conjuntos que diera respuesta a aquellos conflictos surgidos por la invención del cálculo integral, unos de estos la noción de infinitesimal, la convergencia o no de series numéricas, los diferenciales, la noción de Infinito en sí misma, las porciones área de bajo de la curva que escapaban al rectángulo de integración, entre otros.

Por otro lado, ideo los números transfinitos o números hechos infinitos, para los cuales construyo una axiomática convincente basada en los resultados de trabajos e investigaciones, y en los trabajos de Peano. Plantea, además, el *Infinito* actual como una cantidad en sí fija y constante que va mas allá de toda magnitud finita y que surge al superar el paso de la idea de Límite.

8. *Esquema de Infinito asociado a la Teoría de Conjuntos y a la aritmética Transfinita (EITCAT):*Noción de *Infinito actual* que manifiesta las ideas de Cantor, aunque fueron rechazadas y no obtuvieron críticas favorables en sus comienzos, debido a los usos que realizó de la noción de *Infinito actual*, así como de la existencia de conjuntos infinitos equipolentes y de diversos ordenes; estas fueron aceptadas y respaldadas por la comunidad matemática e incluso otros continuaron con sus trabajos, pero ocurrido ya cuando se había retirado de sus investigaciones, entrando el siglo XX. Su pensamiento y sus trabajos contemplaron creación de una Teoría de Conjuntos por medio de una noción clave, la noción de *Infinito actual*, la cual comprendió y desarrolló de una manera original para la época.

En su teoría, se puede apreciar una noción de *Infinito* que declara y aboga por los siguientes aspectos: 1) La existencia de varios órdenes o tamaños de infinitud; 2) La invención del concepto de función biyectiva como herramienta para establecer la relación exhaustiva y uno a uno para compara conjuntos y establecer así si eran equivalentes o no; 3) Definición de Conjunto potencia o numero cardinal; y por último, 4) Números transfinitos o números hechos infinitos. Dicha noción es referida a la noción de *Infinito actual*, ya intuida y rechazada en la historia por los matemáticos, filósofos y científicos más influyentes. La noción de *Infinito actual* para Cantor era la validad y la aceptaba tanto en concreto como en abstracto, veía el *Infinito* como una cantidad en sí fija y constante que va mas allá de toda magnitud finita y que surge al superar el paso de la idea de Límite.

4.2. Descripción y análisis de los esquemas conceptuales que operan en los estudiantes:

Los datos recolectados a través de la aplicación de los cuestionarios a estudiantes pertenecientes al último año de educación media y general y a estudiantes cursantes de la asignatura de Cálculo II del cuarto semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación arrojaron una serie de información relevante para la presente investigación, puesto que permite un análisis y un mayor entendimiento de cómo se da la comprensión de la noción de *Infinito*, así como también la formación de los esquemas mentales en los estudiantes, las dificultades y obstáculos asociados a tal concepción. De esta manera, en la recolección de información se aplicó dos talleres, uno a los estudiantes de educación media y general, y otro a los estudiantes de la asignatura de Cálculo II, donde se les planteó todo lo relacionado al tópico de la noción de *Infinito* descrito y elaborado atendiendo al proceso Transposición Didáctica, ya descrito por Chevallard (1991).

4.2.1. Registros obtenidos de los Estudiantes del 5to año de educación media y general.

Ahora bien, para el taller aplicado a los estudiantes del último año de Educación Media y General se dispuso a los jóvenes en grupos de tres alumnos (estudiantes con edades comprendidas de 15 a 17 años) cada grupo, abordando el contenido en función de la Teoría de las Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986), desarrollado ampliamente en la fundamentación teórica, donde el problema central era la noción de *Infinito*, estructurado en una serie de planteamientos expresados en diversas representaciones semióticas dispuestos en un instrumento para tal fin. Una vez realizado el taller, en un episodio de clases, se obtuvo una serie de datos los cuales se les realizó la técnica del *análisis de contenido* y un *análisis didáctico* en función de los aspectos más relevantes de las teorías explicadas en el marco teórico.

Análisis de la información obtenida:

1. ¿Has escuchado alguna vez la palabra *Infinito*? ¿Qué significado tiene para ti dicha palabra? ¿Cómo lo describirías, da algunos ejemplos?
Grupo Nº 1: Si. Es cuando un número dado tiene más infinitos de lo que realmente es. Ejemplo: En la recta se coloca el signo ∞ se porque se supone que el número sigue o continua.
Grupo Nº 2: La palabra infinito significa algo que no tiene fin, que siempre seguirá, o sea siempre habrá más. Ejemplo: Los números son infinitos ya que siempre combinándolos habrá más. Ejemplo: 0, 1, 2, 3,.. y -1, -2, -3,...
Grupo Nº 3: La hemos escuchado en términos matemáticos como algo que no tiene final o algo que no acaba. Ejemplo: los números.
Grupo Nº 4: Si la escuchamos, puede ser cuando hablamos de números infinitos en matemática. Ejemplo: cuando contamos sabemos por dónde empezar, pero por donde terminar no.
Grupo Nº 5: Es un símbolo que se utiliza en matemática pera decir que un número no tiene fin.
Grupo Nº 6: La palabra Infinito para nosotros significa sin límites, una cantidad que no tiene fin. Ejemplo: los números, las estrellas.
Grupo Nº 7: Si. La palabra infinito significa que los números no tienen fin, son infinitos. Por ejemplo: El plano cartesiano y las rectas numéricas.

Grupo Nº 8: El infinito son todos aquellos números que en el cual no tienen ningún límite. Para esas cantidades se usa ∞
Grupo Nº 9: No tiene fin. Ejemplo: los números.
Grupo Nº 10: Infinito es algo que nunca se acaba. Ejemplo: El universo, el cielo, ∞.

Análisis:

En esta interrogante se le plantea a los grupos que significado personal posee para ellos el objeto matemático *Infinito*, y que según sus experiencias que características le atribuirían para describirlo. En esta, cada grupo manifiesta su respuesta de acuerdo a su opinión en consenso a los integrantes de su mismo grupo, se puede observar que todos los grupos coinciden en relacionar o representar semánticamente el término *Infinito* con algo que no posee fin o no tiene límite, donde para mayoría tiene que ver con los números y conjuntos numéricos, mientras que para algunos está relacionado a un numero como tal, representado a través de un símbolo ∞ o por medio dereferencias a un marco espacial.

De lo anterior dicho, se evidencia, entre otros aspectos, la existencia en el esquema conceptual de imágenes asociadas realidad física y cotidiana cuya finitud se extrapola y de otras con un sentido abstracto y formal ligado a lógica del lenguaje. Por lo que, la correcta interpretación de este tipo de respuestas contribuye de manera significativa en el estudio de los esquemas adquiridos que poseen los estudiantes.

Dentro de los objetos que intervienen en la práctica matemática, tales como el lenguaje, los conceptos, las proposiciones, las propiedades, los procedimientos y los argumentos, dispuestos en una configuración epistémica global se puede observar el uso del lenguaje verbal y simbólico, entre ellos verbal: recta, sin límites, que continua, no tiene fin, número, que siempre seguirá, entre otros y simbólicos: ∞; 0, 1, 2, 3,.. y -1, -2, -3,..., así como el empleo de conceptos de recta, número, plano cartesiano, cantidad. Cabe agregar, que la noción predominante en los estudiantes es la noción de *Infinito potencial*, EIP, debido a que la concepción generalizada mantiene la idea que por más grande que sea un número siempre se puede concebir uno más grande y así sucesivamente.

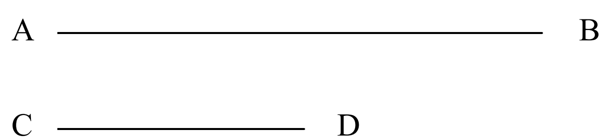
2. **Considere la siguiente suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\ldots$ ¿Cuál crees que es el valor de esta suma? Explica tu respuesta. (Garbín, 2000)**
Grupo Nº 1: 1+0,5+0,25,+0,125+0,0625 = 1,9375. Se Dividen las fracciones y sus resultados se suman con los siguientes.
Grupo Nº 2: Se aproxima a dos por que se dividen las fracciones y se suman.
Grupo Nº 3: Según nuestra intuición va a dar +∞ porque la suma de los números va a ser mas pequeños pero nunca va terminar.
Grupo Nº 4: Se considera infinito, ya que los términos son infinitos y el resultado será infinito.
Grupo Nº 5: El valor de esta suma es 2 porque se sumaría el uno más un cuarto y así sucesivamente sacaríamos el resultado.
Grupo Nº 6: No sabríamos como explicarlo.
Grupo Nº 7: El valor de esta suma es 2. Porque así lo pensamos.
Grupo Nº 8: El valor de esta suma es $\frac{1}{30}$.
Grupo Nº 9: El resultado es infinito porque se suman infinitos números.
Grupo Nº 10: La suma de las fracciones es ∞ porque siempre sumamos un número más y otro más y así hasta el infinito.

Análisis:

Como resultado a este problema, se observa que los grupos 1, 2, 5, 7 plantean su solución a través de la suma del cociente obtenido a través de la fracción y aunque al ser un proceso *Infinito* logran intuir que dicha suma da como resultado 2, puesto que siempre se va a ir adicionado un número muy pequeño a la cantidad obtenida y este se va aproximando a 2, este tipo de esquema responde al *Esquema de Infinito asociado a lo Infinitesimal* (EII). Por otro lado, los grupos 3, 4, 9 y 10 coinciden en manifestar que el resultado es *Infinito* alegando que al ser un proceso infinito en el cual se adiciona una cantidad a otra, de manera reiterada y aunque sea muy pequeña cada vez más la cantidad resultante será infinita. Al repetirse de manera ilimitada el procedimiento, se observa que surge un obstáculo epistemológico, ya estudiado por D'Amore y otros (2006), que guarda relación al fenómeno de *Dependencia* y tiene su origen en el desarrollo dentro del estudiante del *Esquema de Infinito Potencial* (EIP) ya identificado por medio del análisis histórico.

Por otro lado, a lo concerniente a los grupos 6 y 8, hay que mencionar que el grupo 6 no supo contestar, tal vez por la imposibilidad de saber operar con fracciones, lo cual indica conflictos u obstáculos de otra índole, lo mismo se puede decir del grupo 8, ya que su respuesta no es correcta y nada lógica.

3. **Dados dos segmentos de recta *AB* y *CD* que se muestran a continuación:**



¿En cuál de los dos segmentos existe una mayor cantidad de puntos? Justifique su respuesta.

Grupo Nº 1: Es la línea AB, porque la línea está formada por una sucesión de puntos más extensos.
Grupo Nº 2: Es la recta AB ya que es una línea más grande.
Grupo Nº 3: AB. Porque la recta es una sucesión de puntos en un plano y como vemos según lo explicado la recta AB es más larga o sea tiene más puntos.
Grupo Nº 4: La mayor cantidad de números esta AB porque es la más larga.
Grupo Nº 5: Es el AB porque tiene gran cantidad de puntos que el CD y es más grande la distancia que existe en ese segmento.
Grupo Nº 6: AB. Porque es más larga la cantidad de puntos.
Grupo Nº 7: AB ya que su recta es más larga que la de CD.
Grupo Nº 8: A y B porque lo cual tiene una mayor cantidad de números, etc. Y es más larga.
Grupo Nº 9: AB. Mientras más larga mayor cantidad.
Grupo Nº 10: La recta que tendría mayor número de puntos es la AB ya que la línea es más larga.

Análisis:

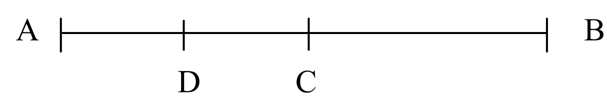
Es de notar, que ante esta interrogante, la totalidad de los grupos, en base a un modelo gráfico, manifiestan que un segmento de mayor longitud existe una mayor cantidad de puntos en comparación a otro segmento de menor tamaño, y esto es atribuido a la extensión del segmento; puesto que, al evocar que una recta es una sucesión de puntos en un mismo plano llegan a la conclusión que una mayor extensión en el segmento es garantía de un mayor número de puntos en este. Esto tiene que ver a lo descrito y explicado anteriormente en lo concerniente al fenómeno de *Dependencia* (D'Amore y otros, 2006), este esquema conceptual guarda relación al EIAP.

4. **¿Tendrá el conjunto de los números naturales $\boldsymbol{N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, n\}}$ más elementos que el conjunto $\boldsymbol{[0, 1]}$ de lo números reales? Justifique su respuesta.**
Grupo Nº 1: El de los números naturales porque son una sucesión de números hasta el infinito igual al conjunto $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$
Grupo Nº 2: Los dos conjuntos tienen números infinitos porque los números naturales y el conjunto $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ siguen hasta el infinito.
Grupo Nº 3: Los números reales tienen menos elementos porque los números naturales son infinitos y los reales nos dicen que solo es $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.
Grupo Nº 4: N tiene más porque los números reales tiene de $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ y los números naturales son de 0 hasta mas infinito.
Grupo Nº 5: Los números naturales tienen más elementos porque son infinitos.
Grupo Nº 6: Los números naturales tienen más elementos porque son infinitos.
Grupo Nº 7: Los números naturales tienen más, ya que los naturales llegarían en este caso hasta el infinito.
Grupo Nº 8: No sabríamos explicarlo, los dos son infinitos.
Grupo Nº 9: Los números naturales tienen más porque son de 0 al infinito.
Grupo Nº 10: Los números naturales tienen más elementos ya que tiene más números.

Análisis:

La presente interrogante plantea que conjunto posee mayor cantidad de elementos, si el conjunto de los números naturales o el conjunto conformado por el intervalo $[0,1]$ de los números reales, ante tal problemática los grupos 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9 y 10 expresan que el conjunto de los números naturales es el que ostenta mayor cuantía de elementos. Puesto, los elementos que integran dicho conjunto son vistos como una sucesión de números que comienzan con el 0 siguen hasta el infinito. El esquema predominante es el EIP y el obstáculo epistemológico presente el de *Dependencia*. Sin embargo, en los grupos 2 y 8 se observa la patología del *Aplastamiento* (Arrigo y D'Amore, 2004) incurriendo así en la equipotencia entre estos dos conjuntos, solo por el hecho de ser infinitos llegan a pensar que son iguales.

5. Dado el segmento *AB*:



Si este se divide a la mitad, digamos en el punto *C*, se forma el segmento *AC*. Si este segmento se divide a la mitad, en el punto *D*, se obtiene el segmento *AD*. Si este proceso continua realizándose ¿Tendría fin este proceso? Explique su respuesta.

Grupo Nº 1: No tendría fin porque se podría seguir dividiendo el segmento.
Grupo Nº 2: No tendría fin, ya que se podría seguir dividiendo a la mitad todos los segmentos.
Grupo Nº 3: No tendrían fin porque cada vez que dividimos tendríamos otro punto es decir seria infinito.
Grupo Nº 4: Claro que seguiría realizándose para conseguir la mitad de AD y si tendría fin porque ya no hay mas línea.
Grupo Nº 5: No tendría fin, ya que esa recta se podría dividir en infinidades de puntos.
Grupo Nº 6: Si, si el proceso continua se llegaría al punto A.
Grupo Nº 7: Si, hasta llegar a A.
Grupo Nº 8: No, pues se seguiría realizándose.
Grupo Nº 9: Se podría realizar el proceso pero si tiene fin porque no hay más espacio.
Grupo Nº 10: Si tendría fin ya que el punto final es B.

Análisis:

En este ítems se busca obtener información con relación al esquema que poseen los sujetos ante lo posibilidad de aplicar un proceso de subdivisión infinita en un segmento de recta, trabajando así sobre la base de un modelo gráfico, al igual que en el ítems Nº 3. Como resultado, se obtuvo que al aplicar el análisis de contenido a las respuestas dadas por los grupos establecidos, se evidenció que los grupos Nº: 1, 2, 3, 5 y 8 manifiestan que dicha subdivisión si se podría seguir realizando al infinito, puesto que siempre que se realice la subdivisión continua del segmento se podrá conseguir un nuevo punto que determine el punto medio del segmento obtenido por este proceso. Este esquema, responde al EIP ya identificado anteriormente. Por otro lado, este tipo de esquema adolece del obstáculo epistemológico de *Dependencia* (D'Amore y otros, 2006).

De igual manera, en los grupos Nº: 4, 6, 7, 9 y 10 se pudo constatar otro tipo de respuesta, para los cuales el proceso de subdivisión del segmento si tiene fin y alcanza al punto A, dando el paso a la idea de límite y logrando alcanzar el extremo del segmento. Este esquema, está asociado EICF, en su forma más simple, debido a que aunque el proceso se realice de manera ilimitada se llega a un momento en el proceso donde se alcanza la magnitud, en este caso el puto extremo.

6. **Dados dos conjuntos, el conjunto $A = \{-5, 0, 2, 4, 6, 8\}$ y el conjunto $B = \{-8, -1, 3, 5, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}\}$. ¿Cuántos elementos posee cada conjunto? además explique si los dos conjuntos poseen una mayor o menor o igual cantidad de elementos. Justifique su respuesta.**
Grupo Nº 1: El conjunto A contiene 6 elementos y el B contiene 5. Porque el caso del B los números están encerrados con llaves y se cuenta como uno solo.
Grupo Nº 2: El conjunto A posee 6 elementos y el conjunto B posee 5 elementos. El conjunto A posee mayores elementos que el conjunto B.
Grupo Nº 3: El conjuntos A posee 6 elementos y el conjunto B es la sucesión de números o sea es

infinito nunca va terminar, eso quiere decir que el conjunto B contiene más elementos por qué no va a terminar.
Grupo Nº 4: El conjunto A tiene 6 elementos y el conjunto B tiene 11. El conjunto A tiene una menor cantidad y el conjunto B tiene mayor cantidad.
Grupo Nº 5: No saben, no respondieron.
Grupo Nº 6: El conjunto A posee 6 elementos y el conjunto B posee elementos en infinito.
Grupo Nº 7: No saben, no respondieron.
Grupo Nº 8: El conjunto A tiene más elementos que el conjunto B. Por lo cual el B tiene 5 elementos mientras que el A tiene 6 elementos.
Grupo Nº 9: No saben, no respondieron.
Grupo Nº 10: El conjunto A posee 6 elementos y el conjunto B posee 5. El conjunto A posee más elementos.

Análisis:

El problema descrito tiene como fundamento la teoría de conjunto y en él se busca obtener información relacionada a la noción de infinito actual ligada a la idea de un todo en un solo conjunto y que este a su vez es elemento de otro conjunto. Como consecuencia de esta, se obtuvieron una serie de respuestas que giran en torno a tres vertientes. La primera, manifiesta que el conjunto A contiene 6 elementos mientras el conjunto B contiene 5 (grupos: 1, 2, 8 y 10), y esto se debe, a que logran intuir que el conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,\ldots\}$ es también un elemento que pertenece al conjunto B. Aquí se puede observar que el esquema que predomina es el EICF.

Por su parte, el segundo tipo de respuesta expresa que el conjunto B posee más elementos que el conjunto A, alegando que el conjunto B posee infinitos elementos. Esto se debe a que no comprenden la idea de conjunto como una totalidad de los elementos que lo conforman, aunque estos elementos sean infinitos, es decir, que el esquema que opera en ellos es el EIAP. Cabe agregar, que el grupo Nº 4 su respuesta la manifiesta desde una confusión al determinar mal los elementos de B al no entender la simbología empleada. Asimismo, se obtiene otro tipo de respuesta ligada quizás a conflictos semióticos al no entender el significado ciertos signos, símbolos, el lenguaje empleado o la comprensión de conceptos previos, en este tipo de respuesta se encuentran los grupos Nº: 5, 7 y 9; puesto que no saben, no contestaron.

7. **Un día Aquiles y la Tortuga compiten en una carrera. Si la tortuga inicia la carrera con una leve ventaja con respecto al heleno, antes de alcanzar a la Tortuga, Aquiles debe recorrer el espacio que le separaba inicialmente de ella y, mientras tanto, la Tortuga habrá avanzado una distancia, por pequeña que sea. De igual manera, Aquiles debe recorrer esta distancia que ahora le separa de la Tortuga antes de alcanzarla, dando ocasión al animal de avanzar otro poco, aunque sea una distancia pequeña, con lo que de nuevo surge una separación entre ambos corredores que Aquiles ha de cubrir en un tiempo durante el cual la Tortuga adelantará otra distancia muy minúscula, y así, sucesivamente, siempre existirá una separación entre los dos corredores. ¿Podrá o no Aquiles alcanzar a la Tortuga? Explique su respuesta.**
Grupo Nº 1: No, porque mientras Aquiles se cansa, la tortuga va avanzando más y más. Así sea tan poco. Lo que avance la tortuga Aquiles no lo va alcanzar.
Grupo Nº 2: No porque mientras él intenta alcanzarla la tortuga avanza una distancia más pequeña cada vez y mientras él se cansa ella continua adelante.
Grupo Nº 3: No la podrá alcanzar porque cada vez que el alcance lo que llevo la tortuga, la tortuga va a avanzar también.
Grupo Nº 4: Si existe una separación pero si se puede alcanzar con solo aumentar el paso de su carrera y si no lo hace no lo alcanzaría nunca.
Grupo Nº 5: No alcanzaría a la tortuga porque habrá una mínima distancia que hace que permita a la tortuga avanzar una distancia más para que ella llegue a la carrera.
Grupo Nº 6: No porque mientras el alcance la distancia por más pequeña que sea la tortuga va avanzando un poco más y más.
Grupo Nº 7: ´No, ya que Aquiles permitirá que avance una pequeña distancia y siempre habrá una distancia entre ellas.
Grupo Nº 8: Si alcanza a la tortuga.
Grupo Nº 9: Si Aquiles corre mucho más rápido puede alcanzar la distancia porque la tortuga necesita apresurarse.
Grupo Nº 10: Aquiles si alcanza la tortuga ya que es una tortuga y Aquiles es más rápido.

Análisis:

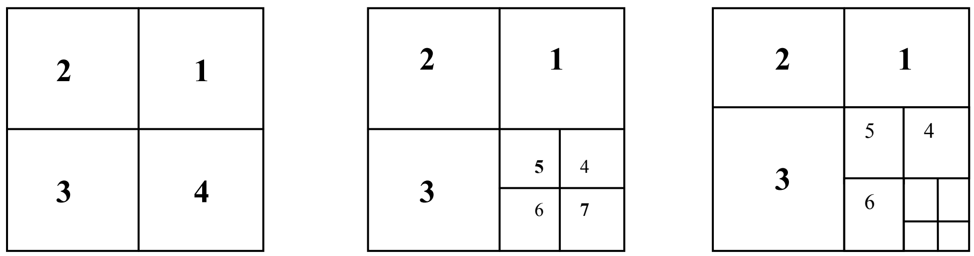
El problema presentado a los estudiantes alude a una de las paradojas de Zenón, la paradoja de Aquiles y la tortuga, en este se describe un proceso de subdivisión infinita que se obtiene al dividir infinitamente el camino que recorren por una distancia determinada por: el movimiento, tiempo y el espacio que se da a lugar entre ambos, pidiéndole a los sujetos, a groso modo, que determine si el proceso tendrá fin justificando al hacerlo.

Sin embargo, estas respuestas dependen de la naturaleza del objeto, es decir, si este es matemático se considera que el proceso descrito es infinito, aunque de resolución a través la teoría de límites. Mientras, si trata de un objeto físico el proceso es finito. Esta dualidad es observada en las respuestas manifestada por los individuos, puesto que la mayoría de los grupos participantes (6 de 10) responden siguiendo el EIP, por lo que llegan a pensar que si se mantiene dicho proceso durante la carrera, jamás Aquiles alcanzara a la tortuga.

En este punto, se puede observar además, que tal concepción puede ser impulsada o fundamentada por la falsa creencia en su subconsciente de que la suma de un número infinitamente grande de magnitudes finitas y extensas, por pequeñas que sean, constituye una magnitud infinitamente grande, pensamiento dominante en la cultura griega. Por otro lado, 4 de 10 grupos manifiestan que si es posible que Aquiles alcance a la tortuga, pero sus respuestas están basadas más desde su experiencia cotidiana y abordadas desde una perspectiva física, más que producto de un análisis lógico – matemático, por lo que para ellos el proceso detallado durante la carrera es finito.

8. **Dado un cuadrado de 4cm de lado y de área 16 cm^2 y que se divide en cuatro partes iguales como se muestra en la *figura (a)*, Luego, a ese mismo cuadrado se le vuelve a aplicar una subdivisión pero ahora al cuadrado Nº 4, obteniendo otros cuatro cuadrados iguales, como se observa en la *figura (b)*. Si se sigue realizando este proceso de subdivisión al último cuadrado de los cuadrados que resulten de la subdivisión anterior, como se ejemplifica en la *figura (c)*, y así realizándose sucesivamente de manera como se ha ido describiendo, tantas veces como se pueda efectuar ¿Cuántos cuadrados se pueden obtener? Justifique su respuesta.**

Figura (a) ***Figura (b)*** ***Figura (c)***



Además, si se suma el área de todos los cuadrados conseguidos como resultados de las subdivisiones progresivas ¿Cuál sería el valor total de esta área? Argumente razonadamente su respuesta.

Grupo Nº 1: R1[36]: Se puede subdividir cuantas veces quieres, es infinito este procedimiento. R2: Son infinitos como ya se dijo en la respuesta anterior, no podría decir algo en especifico, ya que es infinito.
Grupo Nº 2: R1: Los cuadros van a ser infinitos porque siempre el último cuadro se va a dividir en 4 y así sucesivamente. R2: El valor del área no se podría saber ya que también el número sería infinito.
Grupo Nº 3: R1: Se debe obtener una sucesión de cuadrado que nunca va a terminar, ya que siempre se puede dividir. R2: El área seria infinita porque por más pequeña que sea el cuadrado va a tener área, y se va a seguir sumando por cada subdivisión que se haga.
Grupo Nº 4: R1: Solo los que tenemos en las figuras, ya que si hacemos otros cuadros más no cabría en el cuadro inicial. R2: No tendría valor porque son infinitos.
Grupo Nº 5: R1: Infinidades de cuadrados, ya que seguimos dividiendo cada último cuadro por 4. R2: Infinita. Pues son infinitos cuadrados.
Grupo Nº 6: No contestaron.
Grupo Nº 7: R1: Infinitos cuadrados. R2: 16 y hasta el infinito.
Grupo Nº 8: R1: Infinitos. Se realizan indefinidamente los cuadrados. R2: El valor total sería la misma porque estas subdivisiones se obtendrían de la misma de 4cm de lado y de área 16 cm^2.
Grupo Nº 9: R1: Podría ser cuadro sobre cuadro hasta donde la vista pueda llega. R2:12 si son 4 cuadrados en cada cuadro.
Grupo Nº 10: R1: 14 cuadrados ya que al último cuadrado sería imposible sacarle una subdivisión. R2: No contestaron.

[36] R1 alude a la respuesta de la primera parte del problema y R2 a la segunda.

Análisis:

De manera similar a las anteriores interrogantes, en esta pregunta se plantea el problema de la subdivisión infinita pero esta vez en un contexto geométrico relacionado a un problema de área de un cuadrado, así de esta manera se les pide determinar cuántos cuadrados pueden resultar si se continúa el proceso detallado en dicha pregunta. Por otro lado, se pide, además, el valor del área total del cuadrado, aquí lo que se busca es comprobar si los sujetos están en capacidad de comprender que aunque el cuadrado se subdivida en infinitos subcuadrados el área sigue permaneciendo igual sin variar visto desde la perspectiva del *Infinito actual*.

Como resultado se obtuvo, que 6 de 10 grupos manifestaron que la cantidad de cuadrados que se obtendrían a través del procedimiento descrito es *Infinito*, debido a la reiteratividad del proceso de subdivisión. Mientras que 3 de 10 grupos convergen en que el espacio del cuadrado determina la cantidad de cuadrados que se pueden obtener mediante este proceso. De igual forma, se puede observar que 1 de 10 grupos no respondió al problema planteado, esto puede ser debido a que no entendió la situación que se le planteaba convirtiéndose en un obstáculo semiótico al carecer de conceptos básicos para su entendimiento. El esquema dominante es el EIP.

En cuanto a la segunda parte del problema, 6 de 10 grupos convergen en que el área total del cuadrado es infinita, solo por el hecho de obtenerse infinitos cuadrados del de subdivisión ilimitada. Asimismo 1 de 10 grupos logró comprender que sin importar la cantidad de subcuadrados que se obtengan mediante ese proceso, el área total del cuadrado se mantendrá igual. Otros resultados hallados, 2 de 10 grupos no contestaron posiblemente porque no tenían las herramientas cognitivas o por conflictos semióticos, y 1 de 10 grupos que respondió desde un punto de vista finitista al manifestar una cantidad dependiendo del número de cuadrados obtenidos, no entendiendo el concepto de área, evidenciándose el obstáculo de Deslizamiento (Arrigo y D'Amore, 1999).

9. **Sean los siguientes conjuntos: el conjunto de los números naturales *N*, el conjunto de los números enteros *Z*, el conjunto de los números racionales *Q* y el conjunto de los números reales *R* ¿Qué relaciones y características podrías establecer entre ellos?** **Además, si se comparan entre sí, según tu opinión, ¿Quien tiene una mayor o menor o igual cantidad de elementos? De ser posible la clasificación, manifiéstala justificando tu respuesta.**
Grupo Nº 1: R1: Los Números N, Z y R son iguales porque son infinitos. Q dentro de los números reales. R2: Los conjuntos N, Z y R son infinitos los números racionales son fracciones que no tienen mucha extensión.
Grupo Nº 2: R1: los números N, Z y R son iguales, ya que todos son números enteros e infinitos. Y dentro de los números Reales (R) están o se encuentran los números N, Z y Q. R2: Los conjuntos N, Z y R son infinitos, los números racionales son fracciones pero no se extienden mucho.
Grupo Nº 3: R1: Todos son infinitos y ninguno tiene fin. R2: Todos son iguales, son infinitos o sea no hay número mayor.
Grupo Nº 4: No contestaron.
Grupo Nº 5: R1: Sus relaciones tendría como resultado una combinación de números. R2: Los números naturales tienen más elementos.
Grupo Nº 6: No contestaron.
Grupo Nº 7: R1: Que hay números entre ellos. R2: Todos son infinitos.
Grupo Nº 8: R1: Que ambos tienen conjunto en el cual están relacionados con los números naturales. R2: Los números N.
Grupo Nº 9: No contestaron.
Grupo Nº 10: R1: Que todos son números. R2: Los números naturales tendrían más elementos que los demás.

***Análisis*:**

De lo planteado, se puede observar que todos los grupos no tienen bien claro la definición que le corresponde a cada conjunto numérico, lo cual resulta un obstáculo para comprender otros conceptos relacionados con los conjuntos y así establecer comparaciones. Por otro parte, se evidencia la existencia del obstáculo epistemológico denominado *Aplastamiento* (D'Amore,y otros, 2006), ya que consideran que los distintos conjuntos numéricos son iguales, en cuanto infinitos estos tienen la misma cantidad de elementos. Es notorio señalar, que 3 de 10 grupos afirman que el conjunto de los números naturales poseen la mayor extensión de elementos, esto puede ser debido a nociones erróneas que se suscitaron al momento de comenzar a estudiar en los primeros años de educación media y general.

4.2.2. Resumen de los resultados obtenidos de la implementación y aplicación del taller y del instrumento a nivel del 5to año de educación media y general.

Como resultado del recolección, procesamiento y análisis de la información obtenida de los estudiantes del 5to año de educación media y general se pudo constatar una tendencia a relacionar o representar semánticamente el término *Infinito* con algo que no posee fin o ilimitado, atribuyéndole en la mayoría de los casos como propiedad o característica de los números y los conjuntos numéricos, no obstante algunos tiene un significado asociado a una especie de número representado a través de un símbolo ∞ o por medio dereferencias a un marco espacial. Además, se pudo observar que las respuestas emitidas por los jóvenes tienen su marco referencial desde su experiencia cotidiana abordadas desde una perspectiva física, producto de su relación con el entorno social y espacial, más que de un análisis lógico – matemático.

Por otro lado, se identificó una serie de esquemas conceptuales que operan dentro del modelo de pensamiento desarrollado por los sujetos, estos son en su mayoría el *Esquema de Infinito en su Acepción más Primitiva* (EIAP) y *Esquema de Infinito Potencial* (EIP). Mientras que, en pocos casos, se evidenció la existencia del *Esquema de Infinito asociado a lo Infinitesimal* (EII) y *Esquema de Infinito asociado a la noción de Conjuntos y a una Función*(EICF) en la resolución de cierto tipos de problemas. Cabe agregar, que además, se verificó la presencia de obstáculos de orden epistemológicos ligados a la noción de *Infinito* como lo son el fenómeno de *Dependencia* y el de *Aplastamiento*; así como también obstáculos relacionados al concepto de fracción, conjuntos y de orden semiótico al no entender el significado ciertos signos, símbolos, el lenguaje empleado o la comprensión de conceptos matemáticos previos. Estos podrían ser interés para futuras investigaciones para la mejor comprensión de la formación de los esquemas conceptuales de otros conceptos fundamentales para el entendimiento y desarrollo del pensamiento matemático avanzado.

4.2.3. Registros obtenidos de los estudiantes del cuarto semestre de Educación Mención Matemática, pertenecientes a la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo.

Para este caso se elaboró y se aplicó, de igual manera, un taller a doce (12) Estudiantes del cuarto semestre de Educación Mención Matemática pertenecientes a la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo, turno mañana, concerniente a la noción de *Infinito*. Este, comprendió en una primera fase en una Transposición Didáctica (TD) del tópico: *Infinito* mediante una presentación en Power Point explicada por el investigador, los puntos tratados fueron:

- Infinito potencial vs. Infinito actual.
- Noción de Conjunto y conjuntos numéricos.
- Función. Tipos. Función biyectiva.
- La idea de Número. Noción de clase. La Paradoja de Russell. El acto de contar.
- Conjuntos finitos y Conjuntos infinitos.
- Comparación entre los conjuntos numéricos (conjuntos infinitos numerables y no numerables). La idea de Cardinal de un conjunto. Conjuntos Equipotentes. Demostraciones de Georg Cantor.
- El conjunto Potencia.

- La hipótesis del continuo.
- La paradoja de Zenón.
- La idea de Límite.

Luego de esto, se procedió a la verificación de conocimientos, aplicando un instrumento a cada sujeto, teniendo en cuenta lo manifestado en la *TPMA* (la formación o construcción de esquemas mentales o conceptuales por medio de actividades donde la capacidad de razonamiento lógico y reflexivo de los participantes se vea aumentada, así como también el reajuste y la reorganizacion de sus conocimientos previos. Ahora, a las respuestas obtenidas, los métodos de resolución y las soluciones dadas por los participantes se les aplicó un análisis didáctico desde la perspectiva de las teorías ya mencionadas en la presente investigación.

Análisis de la información obtenida:

Como consecuencia de la actividad realizada se pudo obtener los siguientes registros, de acuerdo al orden de los ítems planteados en el cuestionario. A continuación se describen y analizan la información conseguida.

1. ¿Has escuchado alguna vez la palabra *Infinito*? ¿Qué significado tiene para ti dicha palabra? ¿Cómo lo describirías, da algunos ejemplos?
Sujeto Nº 1: Si, es un conjunto de elementos no contables.
Sujeto Nº 2: El infinito es una palabra que describe lo que no es tangible que está muy lejos de ser tangible. Ej.: El espacio (es infinito), no sabemos cuál es su límite.
Sujeto Nº 3: Si, mi significado para mí los números no tienen un infinito en si por ejemplos $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}. \mathbf{3}, \dots\}$
Sujeto Nº 4: Unapalabra que no posee ningún punto de llegada ej.: expresión de los naturales que van desde el 0 hasta ∞.

Sujeto Nº 5: Si, el significado es que es un digito o cifra de extensión incalculable.
Sujeto Nº 6: Si, esto quiere decir que significa que por más números o elementos que existan y se ordenen jamás tendrá fin ejemplo cuando hace la representación en una gráfica o una recta dices desde $-\infty, \dots, \boldsymbol{x_0}, \dots, +\infty$
Sujeto Nº 7: Si, que es una sucesión ilimitada. Ejm: $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \dots \infty$
Sujeto Nº 8: Si, para mi seria un conjunto de números de los cuales no tienen inicio ni final un ejemplo seria los números reales.
Sujeto Nº 9: Si la he escuchado, para mí significa un conjunto en el sus elementos son incontables sin un inicio y sin un fin. Un ejemplo seria el contar los granos de arena.
Sujeto Nº 10: Infinito podría ser la continuación de cualquier número que no tiene fin. Ejemplo: los números naturales: $\boldsymbol{A} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \dots, \boldsymbol{n}\}$
Sujeto Nº 11: Si, tiene como significado algo que no termina, puede ser un buen ejemplo los números reales.
Sujeto Nº 12: Si la he escuchado, pues para mí es un conjunto de números que no se pueden contar. Un ejemplo de ello son los intervalos que van de un numero a otro en los reales. Hay infinitos números.

Análisis:

En primera instancia se puede observar que el esquema imperante es el EIP, puesto prevalece la visión de un *Infinito* potencial en un 100% de los encuestados, por más grande que sea un número, siempre existirá otro más grande que este y así sucesivamente, esto se puede observar frases como “elementos son incontables sin un inicio y sin un fin”, “sucesión ilimitada”, conjunto de números que no se pueden contar, entre otros. Por otro lado, también se hace referencia al *Infinito* como algo intangible o en asociación a un símbolo ∞.

2. **Considere la siguiente suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\ldots$ ¿Cuál crees que es el valor de esta suma? Explica tu respuesta. (Garbín, 2000)**
Sujeto Nº 1: Es una suma infinita de fracciones.
Sujeto Nº 2: $\frac{1}{(n)^2}$; donde $\mathbf{n = número\ par}$. El valor de esta suma es infinito ya que se puede seguir sumando la sucesión de números.
Sujeto Nº 3: $\frac{5}{36}$ ese valor que creo porque sumo todo.
Sujeto Nº 4: No contesto.
Sujeto Nº 5: Considero que se aproxima a 2, puesto que a medida que crece el denominador se acerca a cero el valor de la fracción que posee dicho denominador.
Sujeto Nº 6: No contesto.
Sujeto Nº 7: $\frac{N}{N^2}+\infty$ es una sucesión ilimitada, no posee un fin.
Sujeto Nº 8: El valor seria $\frac{1}{32}$ por la sucesión de los términos.
Sujeto Nº 9: El valor seria $\frac{1}{2n}$
Sujeto Nº 10: El valor es infinito. Consecuencia en enteros de multiplicar el resultado por sí mismo.
Sujeto Nº 11: El resultado es infinito.
Sujeto Nº 12: Es $\frac{1}{n.2}$ ya que es una sucesión que va de 2 en 2.

Análisis:

En este se aprecia como la idea generalizada en relación a la sucesión $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\ldots$ es que su suma sea infinita o ilimitada, aunque algunos lo hayan explicado desde el termino general, no obstante en muchos casos equivocada, esto puede ser debido a conflictos semióticos u obstáculos adquiridos en el proceso de aprendizaje ajenos a la noción de *Infinito*, estos no son objeto de estudio para la presente investigación, pero son de interés relevante para futuros trabajos. Es conveniente señalar, que solo un individuo logro comprender el problema al plantear que dicha suma de sucesión ya mencionada es 2, comprendió que a medida que se va sumando fracciones estas van tendiendo a 0 debido a que el denominador se va haciendo más grande a medida que continua la sucesión. El esquema dominante en los sujetos es el EIP.

3. **Dada la siguiente sucesión** $\mathbf{1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \ldots}$ **¿Cuál crees que es el valor del último término de esta sucesión? Razone su respuesta.**
Sujeto Nº 1: El siguiente número de la sucesión es $\frac{1}{390625}$ al multiplicar el denominador $\frac{1}{625}$ dos veces, al seguir multiplicando se siguen generando más números.
Sujeto Nº 2: El patrón de esta sucesión es: $\frac{1}{5^n}$; donde n es desde 1 hasta el infinito numérico.
Sujeto Nº 3: $\frac{1}{1025}$ porque veo cuanto tengo que llegar.
Sujeto Nº 4: No contesto.
Sujeto Nº 5: No contesto.
Sujeto Nº 6: El término de esta sucesión es $\frac{1}{78125}$ porque se realiza una multiplicación entre fracciones de la sucesión.
Sujeto Nº 7: $\frac{1}{(N)^5} + \cdots$, no posee esuna sucesión ilimitada.
Sujeto Nº 8: Seria $\frac{1}{3125}$ también dada siguiendo la sucesión.
Sujeto Nº 9: No tiene, pero se puede expresar como $\frac{1}{5^n}$.
Sujeto Nº 10: $\frac{1}{3125}$ multiplique el resultado del denominador por 5.
Sujeto Nº 11: No contesto.
Sujeto Nº 12: Es $\frac{1}{5n}$ ya que es una sucesión que va de 5 en 5.

Análisis:

En este ítem se plantea algo similar a lo descrito en el ítem Nº 2, salvo que en vez de pedirles hallar la suma, se les pide encontrar el valor del término enésimo de la sucesión, en este caso 0. Aquí se puede ver que los sujetos presentan problemas al trabajar con secuencias sucesiones numéricas que involucren una serie infinita y fracciones, así como también la obtención del término enésimo. Por otro lado, no comprenden el hecho de que a medida que el denominador va tendiendo a una cantidad muy elevada, la sucesión se va acercándose al valor de 0. En algunos casos, se observo, a pesar de sus respuestas, la tendencia a manifestar que el valor no se podía hallar, que era ilimitada o era infinita, por lo que se releja en los sujetos el esquema EIP.

4. **Dados dos segmentos de recta *AB* y *CD* que se muestran a continuación:** A ———————————————— B C ———————— D **¿En cuál de los dos segmentos existe una mayor cantidad de puntos? Justifique su respuesta.**
Sujeto Nº 1: El segmento AB por ser este de mayor longitud que el segmento CD
Sujeto Nº 2: Donde existen más cantidad de números es el segmento AB ya que la distancia entre A y B es mayor que el CD; por lo tanto tiene más cantidad de puntos.
Sujeto Nº 3: AB porque la distancia que tiene en cambio CD no tiene mucha distancia.
Sujeto Nº 4: AB ya que la línea es una sucesión de puntos y si se observa la línea más amplia es del segmento AB.
Sujeto Nº 5: En el segmento AB, ya que es más extensa.
Sujeto Nº6: Desde C hasta D; porque si te vas a la representación puede existir la posibilidad que el segmento de recta AB tenga menos elementos que CD.
Sujeto Nº 7: AB, posee la mayor sucesión de puntos, ya que el segmento es mayor.
Sujeto Nº8: El segmento AB por tener una mayor sucesión de puntos que el otro segmento.
Sujeto Nº 9: El segmento AB tiene mayor cantidad de puntos, ya que por definición una recta (o en este caso un segmento, es una sucesión de puntos con una distancia muy aproximada, por figura se puede notar por figura que AB > CD.
Sujeto Nº 10: Es el segmento AB porque tiene mayor distancia.
Sujeto Nº 11: No sabe, no respondió.
Sujeto Nº 12: En la recta de AB, ya que mide más que la recta CD.

Análisis:

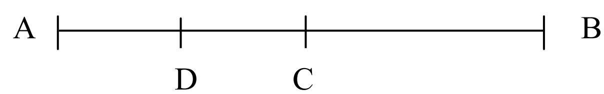
Como resultado del análisis se evidenció que un 83,33 % de los sujetos presentan el fenómeno de Dependencia (D’Amore y otros, 2006), puesto que la cantidad de elementos (puntos) existentes en el segmentos depende de su extensión, no comprendiendo que dichos segmentos pueden tener la misma cantidad. Pese a que este hecho fue explicado durante la presentación, los procesos mentales ya interiorizados y los obstáculos epistemológicos son persistentes y recurrentes, por lo que siguen respondiendo desde ese modelo cognitivo adquirido con el tiempo. Además, también se puede notar que el esquema que domina en sus procesos cognitivos es el EIAP.

5. ¿Tendrá el conjunto de los números naturales $N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ más elementos que el conjunto $[0, 1]$ de lo números reales? Justifique su respuesta.
Sujeto Nº 1: No, porque el conjunto N tiene una cantidad n de elementos que nos sirven para contar y el conjunto$[0, 1]$ tiene una cantidad infinita de decimales.
Sujeto Nº 2: Si, ya que dentro del intervalo de los números naturales existen más números que dentro del intervalo $[0, 1]$.
Sujeto Nº 3: Si, porque el conjunto N tiene más elementos que el conjunto $[0, 1]$.
*Sujeto Nº 4:*No, ya quedel 0 a 1 aparecerán progresivamente decimales como sea necesario (infinitos)
Sujeto Nº 5: evidentemente si ya que es más grande el conjunto N respecto al intervalo $[0, 1]$.
Sujeto Nº 6: No, porque si cuentas jamás llegara a 1 como lo explico en la exposición.
Sujeto Nº 7: No sabe, no respondió.
Sujeto Nº 8: No tiene porque entre $[0, 1]$ existen infinitos números.
Sujeto Nº 9: No, debido a que se puede ir asociando cada elementos del conjunto de los números naturales son los elementos del conjunto de los números naturales son los elementos de ese intervalo, pero dentro de ese intervalo irán apareciendo más elementos entre cada elemento.
Sujeto Nº 10: No, ya que el conjunto $[0, 1]$ tiene infinitos decimales entre ellos.
Sujeto Nº 11: no, ya que ambos conjuntos poseen infinitos números.
Sujeto Nº 12: No tiene más elementos como ya se dijo anteriormente en un intervalo pequeño de los números reales existen infinitos números, aunque se puede decir que son equivalentes.

Análisis:

En este caso se tiene que el 66,67 % de los sujetos, a los que se le aplicó el cuestionario, concuerda con que es imposible que el conjunto de los números naturales posea más elementos que el conjunto de elementos comprendidos en el intervalo real $[0,1]$, lo cual indica la comprensión del cardinal del conjunto de números reales y que este no puede ser dispuesto en correspondencia biunívoca con el conjuntos de los números naturales, esto puede ser debido a la demostración realizada durante la presentación, por lo que, a lo que respecta a este punto, parece haberse franqueado el obstáculo de *Aplastamiento*. No obstante, los obstáculos epistemológicos se presentan de forma recurrente en andamiaje cognoscitivo, aunque se hayan podido superar en un primer momento. El esquema manifestado es el EICF.

6. **Dado el segmento *AB*:**



Si este se divide a la mitad, digamos en el punto *C*, se forma el segmento *AC*. Si este segmento se divide a la mitad, en el punto *D*, se obtiene el segmento *AD*. Si este proceso continua realizándose ¿Tendría fin este proceso? Explique su respuesta.

Sujeto Nº 1: No, ya que la distancia entre de dos puntos hay números infinitesimales
Sujeto Nº 2: Si ya que un segmento se puede seguir dividendo hasta que su distancia no le permita seguir dividiéndose por la mitad.
Sujeto Nº 3: Claro que tendría fin porque si seguimos dividiendo vamos a tener fin en el conjunto.
Sujeto Nº 4: Si porque podrá realizarse cantidades de veces pero llegara un punto en que ya no se logre dividir a la mitad y el punto toque con el punto A.
Sujeto Nº 5: En teoría no tendría fin porque por más pequeño que fuere el segmento este siempre va a tener un punto medio que es infinitesimalmente pequeño respecto al anterior.
Sujeto Nº 6: Si tendría fin; porque una vez que se formen todos los elementos posibles de combinación no se podrá realiza más combinación de segmentos.
Sujeto Nº 7: No, ya que en cada punto se pueden generar más divisiones.
Sujeto Nº 8: Si porque el segmento tiene fin.
Sujeto Nº 9: Si, se tardara un buen tiempo en llegar al fin. Pero por definición de segmento: es un área de una línea con principio y fin sabemos que los segmentos no son infinitos.
Sujeto Nº 10: No tiene fin porque es una secuencia que conlleva a otros puntos igual a los números.
Sujeto Nº 11: No tendrá fin, ya que siempre existirán infinitos puntos entre cada nuevo segmento resultante.
Sujeto Nº 12: Si, ya que es una recta infinita. Este cerrada entre dos puntos.

Análisis:

Se puede observar que un 58,33 % de los estudiantes que participaron plantean que si es posible que el proceso termine ya que las sucesivas subdivisiones del segmento tienden al punto extremo, dando la idea de la noción de Infinito actual, aunque el tipo de respuesta dada por los sujetos implica al EIPSL, ya que se expresa en sus argumentos a modo de tendencia como se explica en la teoría de límites.

7. **Dados dos conjuntos, el conjunto $\boldsymbol{A = \{-5, 0, 2, 4, 6, 8\}}$ y el conjunto $\boldsymbol{B = \{-8, -1, 3, 5, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}\}}$. ¿Cuántos elementos posee cada conjunto? además explique si los dos conjuntos poseen una mayor o menor o igual cantidad de elementos. Justifique su respuesta.**
Sujeto Nº 1: No sabe, no respondió.
Sujeto Nº 2: Los conjuntos A y B poseen finitos elementos; pero en el conjunto B hay muchos más elementos.
Sujeto Nº 3: A posee 6 elementos en cambio B tiene 11 elementos, el conjunto B tiene mayor elementos que el conjunto A y ninguno tiene igual cantidad de elementos.
Sujeto Nº 4: El conjunto A posee los elementos de dos números enteros pero el conjunto B posee dentro de sus elementos enteros un subconjunto de los números naturales.
Sujeto Nº 5: A posee 6 elementos. B posee 5 elementos.
Sujeto Nº 6: Tendrán la misma cantidad de elementos.
Sujeto Nº 7: No sabe, no respondió.
Sujeto Nº 8: A tiene 6 elementos y B posee 11 elementos. B es mayor.
Sujeto Nº 9: A posee 6 elementos y B posee 5 elementos, $\boldsymbol{A > B}$ en cantidad de elementos, ya que en B se puede notar que su quinto elemento es $\boldsymbol{N - \{0\}}$
Sujeto Nº 10: El conjunto A posee 6 elementos y el conjunto B posee infinitos elementos.
Sujeto Nº 11: El conjunto A posee finitos elementos pero en el conjunto B son infinitos.
Sujeto Nº 12: A posee 6 elementos y B posee 5 elementos enteros, $\boldsymbol{A > B}$ en cuestión de elementos.

Análisis:

En este problema de orden algebraico, un 58,33%, lo que representa a siete individuos, respondieron incorrectamente al no entender bien el problema, las dificultades al parecer son de orden semiótico y de concepto, aunque cabe, destacar que de allí dos individuos, 16,67% del total, no son capaces de intuir la noción de infinito actual, puesto que un elemento perteneciente al conjunto B es otro conjunto, en este caso el conjunto de los números Naturales, y al mostrárseles como un subconjunto con sus elementos en llaves, surge la creencia que el conjunto B posee infinitos elementos.

8. **Un día Aquiles y la Tortuga compiten en una carrera. Si la tortuga inicia la carrera con una leve ventaja con respecto al heleno, antes de alcanzar a la Tortuga, Aquiles debe recorrer el espacio que le separaba inicialmente de ella y, mientras tanto, la Tortuga habrá avanzado una distancia, por pequeña que sea. De igual manera, Aquiles debe recorrer esta distancia que ahora le separa de la Tortuga antes de alcanzarla, dando ocasión al animal de avanzar otro poco, aunque sea una distancia pequeña, con lo que de nuevo surge una separación entre ambos corredores que Aquiles ha de cubrir en un tiempo durante el cual la Tortuga adelantará otra distancia muy minúscula, y así, sucesivamente, siempre existirá una separación entre los dos corredores. ¿Podrá o no Aquiles alcanzar a la Tortuga? Explique su respuesta.**
Sujeto Nº 1: Matemáticamente no es posible, ya que al salir la tortuga de primero siempre va a estar delante de Aquiles en distancia recorrida.
Sujeto Nº 2: Se dice que no, pero por medio de los límites se pueden alcanzar en algún punto.
Sujeto Nº 3: Si, pero a su vez no porque si la tortuga sigue con esa distancia y el sigue no podrá alcanzarla.
Sujeto Nº 4: No, porque siempre habrá esa pequeña distancia que los separa.
Sujeto Nº 5: No, sabe, no respondió.
Sujeto Nº 6: No, jamás podrá Alcanzarla porque Aquiles sea más veloz que la tortuga cuenta

con una leve desventaja el tiempo entre carrera o cuando tenga que disminuir la velocidad para descansar, mientras la tortuga jamás se tendrá que detener a descansar.
Sujeto Nº 7: Si podrá, según el punto físico, porque Aquiles posee mayor agilidad, por otro lado, no ya que la tortuga siempre poseerá una distancia más delante que Aquiles.
Sujeto Nº 8. No podrá porque siempre habrá una distancia entre las dos.
Sujeto Nº 9: Por lógica o realismo, si, ya que Aquiles es un humano, y suele ser más rápido que la tortuga, llegando a un punto en el que la alcanza.
Sujeto Nº 10: No la puede alcanzar según la teoría de un matemático antiguo que explica que mientras Aquiles trata de alcanzar la tortuga, la tortuga ya habrá avanzado un poco más.
Sujeto Nº 11: Puede acercarse pero no alcanzarla.
Sujeto Nº 12: Matemáticamente no, ya que la tortuga siempre tendrá una ligera ventaja con respecto a la tortuga.

Análisis:

Como ya se explicó anteriormente, este ítem está basado en la paradoja de Zenón como resultado se puede observar un 75% de los participantes manifiestan que no es posible que Aquiles alcance a la Tortuga, entre otras cosas concuerdan en decir, que esto es debido a la distancia inicial de la Tortuga con respecto a Aquiles y al hecho del avance, en términos de distancia, de la misma cada vez que Aquiles recorre un determinado espacio. Por lo que la Tortuga mantiene siempre su ventaja, por mínima que sea, con respecto al heleno.

Ahora bien, el esquema que se evidencia en este tipo de respuestas es el esquema denominado EIP. No obstante, 16,67% afirmaron que si es posible que Aquiles alcance a la Tortuga, pero esta repuesta es dada desde la perspectiva del sentido común del individuo y desde el punto de vista físico y biológico, basados en un conocimiento práctico de las cosas que acontecen en su vida diaria.

9. **Dado un cuadrado de 4cm de lado y de área 16 cm^2 y que se divide en cuatro partes iguales como se muestra en la *figura (a)*, Luego, a ese mismo cuadrado se le vuelve a aplicar una subdivisión pero ahora al cuadrado Nº 4, obteniendo otros cuatro cuadrados iguales, como se observa en la *figura (b)*. Si se sigue realizando este proceso de subdivisión al último cuadrado de los cuadrados que resulten de la subdivisión anterior, como se ejemplifica en la *figura (c)*, y así realizándose sucesivamente de manera como se ha ido describiendo, tantas veces como se pueda efectuar ¿Cuántos cuadrados se pueden obtener? Justifique su respuesta.**

Figura (a)

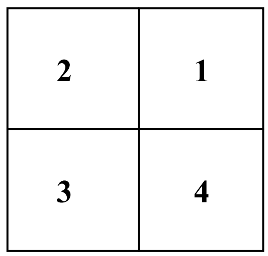


Figura (b)

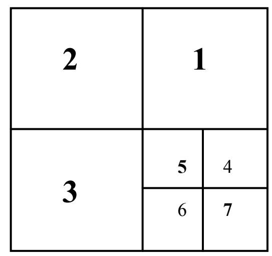
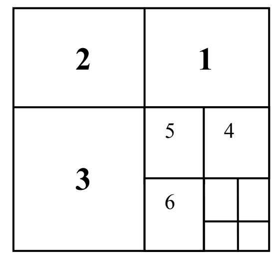


Figura (c)



Además, si se suma el área de todos los cuadrados conseguidos como resultados de las subdivisiones progresivas ¿Cuál sería el valor total de esta área? Argumente razonadamente su respuesta.

Sujeto Nº 1: R1: Puede llegar a existir una cantidad no contable de cuadros, por muy pequeños que sean pueden ser infinitos. R2: Es un área muy grande para poder calcular de forma finita.

Sujeto Nº 2: No sabe, no respondió.

Sujeto Nº 3: R1: Se puede obtener hasta 30 cuadros por cada figura. R2: El valor seria de 3 cm por cada cuadrado.

Sujeto Nº 4: R1:16 si en cada cuadrado se logra sacar 4 cuadrados subdivididos. R2: no sabe, no respondió.

Sujeto Nº 5: R1: Se obtendrán infinitos cuadrados y respectivamente el área de dicho cuadrado tendrá un área muy pequeña delante de los anteriores. R2: La suma de las áreas seria $\mathbf{16cm^2}$, ya que las sumas de sus partes dan el área entera.

Sujeto Nº 6: R1: Infinitos cuadrados porque mientras más se repita la operación cada vez más los cuadrados se irán haciendo más y más diminutos. R2: No sabe, no respondió.

Sujeto Nº 7: R1: Un ilimitado de cuadros.R2: Obtengo el cuadrado original ($\mathbf{4\ cm\ de\ lado\ y\ area\ 16cm^2}$).

Sujeto Nº 8: R1: Se puede obtener infinitos cuadrados porque la división no terminara, siempre habrá un espacio que dividir. R2: No sabe, no respondió.

Sujeto Nº 9: R1: Infinitos cuadrados, ya que en cada cuadro se puede hacer subdivisión. R2: De cada figura el área seria igual, pero en cada división seria $\mathbf{\frac{16}{4n}}$ siendo n el cm de los lados de cada subdivisión.

Sujeto Nº 10: R1: Infinitos cuadrados. R2: Infinito el área siempre se puede subdividir en muchas otras áreas.

Sujeto Nº 11: R1: Se obtendrán infinitos cuadros ya que siempre resultara un nuevo cuadro para subdividir. R2: Al sumar todas las áreas resultara el cuadro inicial.

Sujeto Nº 12: R1: Se puede obtener infinitos cuadros ya que la secuencia seguirá. R2: No sabe, no respondió.

Análisis:

De las preguntas formuladas en este ítem, se obtiene que un 83,33% de los individuos concuerdan en sus respuestas, al manifestar que se puede obtener una cantidad ilimitada de cuadrados mediante el proceso descrito en el problema. Sin embargo, solo un 30% de los mismos, al plantearse la segunda interrogante del ítem la referente suma de las áreas de infinitos subcuadrados, respondieron correctamente, es decir, expresaron que el área total sigue siendo la misma del cuadrado original, el resto manifestó que el área era infinita o no respondió. De esta manera, se evidencia que el esquema que se manifiesta con mayor frecuencia en los estudiantes es el relacionado al EIP.

Asimismo, se puede observar la existencia del obstáculo de *Deslizamiento* (Arrigo y D'Amore, 1999, p.8) en un 58,33% por la dificultad que presenta el estudiante al realizar el cambio en distintos contextos, en este caso del contexto algebraico-aritmético al geométrico y viceversas, lo cual lleva a expresar alegatos erróneos o incoherentes o a no responder al no entender lo que se le está planteando.

10. **El economista Vilfredo Pareto estableció la siguiente ley de distribución del ingreso: el número de individuos** N **de una población de tamaño** a**, cuyos ingresos exceden** x **es:** $\boldsymbol{N_{(x)} = \frac{a}{x^b}}$ **, donde** b **es un parámetro que depende de la población. Usualmente se toma 1,5 como valor aproximado de** b**. ¿Qué sucede con el número de individuos** N **si el ingreso se hace muy grande? Explique su respuesta. (UNA, 2005)**
Sujeto Nº 1: No sabe, no respondió.
Sujeto Nº 2: No sabe, no respondió.
Sujeto Nº 3: Sucede si el ingreso es grande, seria aumentar más el parámetro que el que tenía antes.
Sujeto Nº 4: No sabe, no respondió.
Sujeto Nº 5: No sabe, no respondió.
Sujeto Nº 6: El número de individuos disminuye mientras más aumente e ingreso menos individuos habrá.

Sujeto Nº 7: No sabe, no respondió.
Sujeto Nº 8: Crece el parámetro.
Sujeto Nº 9: No sabe, no respondió.
Sujeto Nº 10: No sabe, no respondió.
Sujeto Nº 11: No sabe, no respondió.
Sujeto Nº 12: No sabe, no respondió.

Análisis:

Se evidencia que una gran mayoría de los sujetos no demostró dominio al resolver un problema relacionado con el concepto de límite que involucra procesos infinitos, ya que un 75% de los encuestados no respondieron al ítem. Esto demuestra un grave problema para los estudiantes debido a que si no dominan estos tópicos se le dificultará el aprendizaje y la adquisición de otros conceptos tales como la derivada y la integral fundamentales en el cálculo. Además, es reflejo de la existencia de posibles obstáculos, ya sea epistemológico o didáctico, en la adquisición y encapsulación de la idea de límite, tema de una investigación a futuro. Por otro lado, solo un individuo respondió de una forma lógica y coherente en relación al problema planteado.

11. **Sean los siguientes conjuntos: el conjunto de los números naturales *N*, el conjunto de los números enteros *Z*, el conjunto de los números racionales *Q* y el conjunto de los números reales *R* ¿Qué relaciones y características podrías establecer entre ellos?** **Además, si se comparan entre sí, según tu opinión, ¿Quien tiene una mayor o menor o igual cantidad de elementos? De ser posible la clasificación, manifiéstala justificando tu respuesta.**
Sujeto Nº 1: R1: Todos comparten las mismas propiedades de adición, sustracción, multiplicación, división; todos tienen infinitos números. R2: Todos estos conjuntos están formados por funciones inyectivas, por lo tanto tienen la misma cantidad de elementos excepto el conjunto R.
Sujeto Nº 2: R1: La relación entre ellos es que todos son números, pero hay una característica que los números N se vuelven indispensables en los demás conjuntos. Ej.: 1, 2, 3, 4 ; ellos se repiten en otras

maneras en los demás conjuntos. R2: Todos tienen muchos elementos dentro de los conjuntos.
Sujeto Nº 3: R1: La relación que podía es que en algunos elementos debería ser iguales entre ello. R2: La mayor cantidad la tiene el conjunto N, no tiene igual cantidad que las demás.
Sujeto Nº 4: Cada uno de ellos tendrá la misma cantidad de elementos.
Sujeto Nº 5: R1: La relación clara es que están contenidos unos en otros $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$. R2: Todos tienen infinita cantidad de elementos es difícil establecer una relación donde se indique quien tiene más o menos elementos, pero se diría que todos pueden ser iguales.
Sujeto Nº 6: R1: Que todos siempre podrían llegar a tener la misma cantidad de elementos y en algunos casos elementos iguales. R2: Todos serian iguales porque todos tendrían la misma cantidad de elementos.
Sujeto Nº 7: No sabe, no respondió.
Sujeto Nº 8: R1: La relación sería cada conjunto tiene infinitos elementos. R2: Bueno para mí los reales porque este conjunto tiene a los naturales, enteros y racionales.
Sujeto Nº 9: R1: Ambos poseen valores o elementos numéricos. R2: N, Z y Q tienen una misma cantidad de elementos, pero la del conjunto de R es mayor.
Sujeto Nº 10: R1: Que tiene la misma cantidad de elementos. R2: Creería que los reales ya adentro de él están los demás conjuntos.
Sujeto Nº 11: R1: No sabe, no respondió. R2: Todos los conjuntos tienen infinitos números.
Sujeto Nº 12: R1: Si bien es cierto que hay una teoría que establece que N, Z y Q son infinitos. Se podrá decir que los números reales no tienen relación con ellos.

Análisis:

Al realizar un análisis de contenido a las respuestas dadas por los individuos se puede evidenciar que la mayoría convergen en la idea de que todos los conjuntos poseen una infinidad de números, pero divergen en cuanto a la equipotencia entre ellos, para un 41,67% de los encuestados todos los conjuntos son iguales entre sí al parecer por el hecho de ser infinitos, mientras que un 33,33% manifiesta la discrepancia entre los conjuntos N, Z y Q con respecto al conjunto R, puesto que expresan, entre otras cosas, que R es más grande debido a que es el conjunto que alberga a los demás conjuntos numéricos.

12. **Considera la siguiente suma $0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \cdots$ ¿Cuál crees que es el resultado?**
Sujeto Nº 1: $\mathbf{0,1111}$ ... y si se le sigue sumando números sigue aumentando en cantidad.
Sujeto Nº 2: El resultado va a resultar muy pequeño por la suma de cantidades muy pequeños.
Sujeto Nº 3: El resultado es 0, 1111 de esta suma en sí.
Sujeto Nº 4: No sabe, no respondió.
Sujeto Nº 5: Por aproximación 0,1 es su resultado.
Sujeto Nº 6: Infinito porque mientras más se sume se alejara del uno.
Sujeto Nº 7: Es una serie infinita, los decimales no poseen fin.
Sujeto Nº 8: El resultado es infinito no termina la suma.
Sujeto Nº 9: Ni idea, la suma seria infinita.
Sujeto Nº 10: Infinitos números.
Sujeto Nº 11: ∞
Sujeto Nº 12: La suma seria infinita.

Análisis:

En función a lo obtenido se puede apreciar que la mayoría de los individuos, un 58,33%, optan por manifestar que el resultado de la suma dispuesta en el ítem es infinito, de este hecho se puede determinar que el esquema que domina en los sujetos es el EIP. Puesto que, para ellos la suma no termina, siempre se le está agregando una cantidad por muy pequeña que sea, aunque este tipo de respuestas es incorrecto para el problema planteado, esto puede ser debido a la no comprensión de la noción de un número decimal. Mientras que un 33,33% de estos sí lograron comprende esta noción y la noción de suma infinitesimal.

13. **Considera un número positivo cualquiera; a continuación lo divides entre dos, el resultado lo vuelves a dividir entre dos, el resultado de nuevo entre dos y así sucesivamente. ¿Qué resultado se obtendrá al final?, ¿por qué? (Belmonte, 2010)**
Sujeto Nº 1: Cada vez que se divide un numero hasta su expresión mínima, encontramos que llegar a ser un numero infinitesimal.
Sujeto Nº 2: El resultado va a resultar muy pequeño ya que se sigue dividiendo.
Sujeto Nº 3: El número positivo es 8 y el resultado seria 1 si lo vas dividiendo tres veces entre dos.
Sujeto Nº 4: No sabe, no respondió.
Sujeto Nº 5: El resultado de esa división sucesiva es un número que tiende a cero.
Sujeto Nº 6: El mismo número positivo u otro numero positivo y se continua realizando jamás tendría o se podría llegar a ningún otro resultado.
Sujeto Nº 7: Una sucesión de decimales infinitos porque es continúa.
Sujeto Nº 8: Se obtendrá un número real.
Sujeto Nº 9: $\boldsymbol{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2n}}$; $\boldsymbol{n \in N - \{0\}}$
Sujeto Nº 10: Infinitos números porque al dividir el resultado siempre me va a dar infinitos decimales.
Sujeto Nº 11: La operación se puede repetir infinitas veces porque siempre tendremos un nuevo elemento divisible entre 2.
Sujeto Nº 12: Un número que cada vez se va acercando a cero.

Análisis:

Ante el problema señalado en esta pregunta se puede evidenciar que el esquema mental correspondiente es EIP, puesto que un 66,66% de los estudiantes concuerdan en que el proceso descrito en dicho problema es un proceso que se realiza indefinidamente y se obtendría un número infinitesimal cada vez más pequeño y, es decir, la división se realizaría infinitamente ya que siempre se podrá obtener un número por este medio. Lo que demuestra, que los estudiantes no logran intuir el hecho de que a medida que se van realizando las divisiones el numero va tendiendo a cero y que al dar el paso de la idea de limite este permite lograr una cantidad en si fija e invariable, implicando la noción de Infinito actual. No obstante, solo un 16,67% logro intuir este hecho.

14. Considera la siguiente circunferencia *(figura a)* si se traza un polígono regular de tres lados inscrito en esta, resulta un triángulo equilátero *(figura b)*. Si en vez de trazar un triangulo aumentáramos el numero de lados a cuatro, al polígono, obtendríamos un cuadrado *(figura c)*. Ahora, si en vez de ser cuatro lados fueran cinco, se tendría un pentágono *(figura d)*. Si fueran seis, un hexágono *(figura e)*. Y así sucesivamente, se van obteniendo polígonos regulares al ir aumentando el número de sus lados ¿este proceso tendrá fin o tiene un límite si se sigue el incremento? Justifique su respuesta.

Figura a

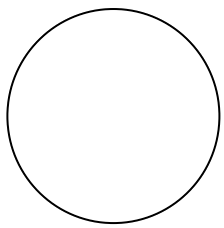


Figura b

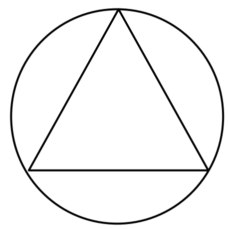


Figura c

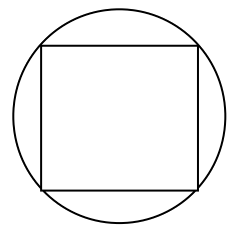


Figura d

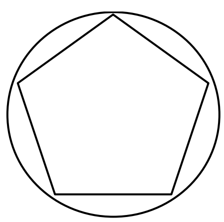
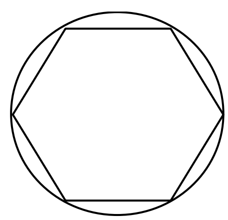


Figura e



.....

Si se sigue aumentando el número de lados hasta una cantidad muy elevada ¿Qué sucede con el polígono inscrito en la circunferencia? ¿Qué conclusiones se puede establecer al respecto?

Sujeto Nº 1: R1: No tiene fin, ya que siempre que se incrementen los lados va al salir un nuevo polígono. R2: Seria un polígono muy grande de lados muy pequeños.

Sujeto Nº 2: R1: Esta subdivisión va a tener un límite ya que cada vez va a tener menos subdivisiones hasta llegar a una línea recta. R2: Sucede que se convertirá en una circunferencia.

Sujeto Nº 3: R1: Si se sigue intentando no se tendría un fin como tal. R2: Lo que sucede con el polígono es que podemos llegar a tener un polígono más extenso, es decir cada vez más grande de lo previsto en el polígono.

Sujeto Nº 4: No sabe, no respondió.

Sujeto Nº 5: R1: Tiene un límite el cual es un polígono tal que se asemejara mucho a la forma de la circunferencia en donde está inscrito. R2: Se torna una casi una circunferencia dicho polígono.

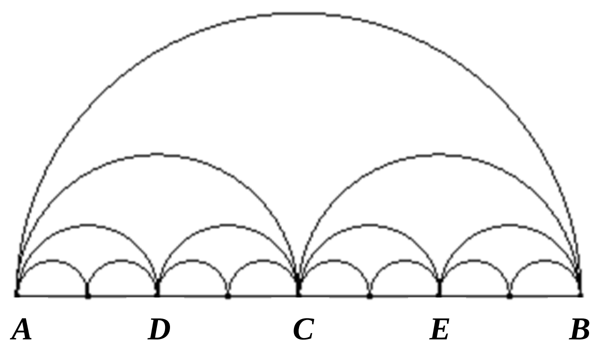
Sujeto Nº 6: R1: Si tendría fin porque en algún momento se volverá a formar el mismo círculo. R2:

No sabe, no respondió.
Sujeto Nº 7: R1: Si el segmento de dos lados va aumentando no tiene fin, ya que para que tuviera fin seria la circunferencia como tal. R2: El polígono tendrá una infinidad de lados.
Sujeto Nº 8: R1: Se tiene límite porque la circunferencia no aumenta solo el número de lados. R2: No sabe, no respondió.
*Sujeto Nº 9:*R1: No tiene un fin, ya que existe un límite en los polígonos regulares. R2: Cada vez sus lados se van haciendo más pequeños.
Sujeto Nº 10: R1: No tiene fin. R2: Que el espacio de la circunferencia se reduce y quedaría un polígono de muchos lados.
Sujeto Nº 11: R1: No tiene fin. R2: Al aumentar los lados serán casi imperceptibles pero siempre se podrá incluir otro más pequeño resultando otra figura.
Sujeto Nº 12: R1: Se tendría fin porque a medida que se aumente sus lados este va tomando la forma de la circunferencia y ya ella no tendría más lados. R2. Que se volverá una circunferencia.

Análisis:

Aunque, las respuestas de los estudiantes son variadas, se puede observar que un 50% de los sujetos convergen en la idea de que siempre que se incrementen los lados se va obtener un nuevo polígono, y que este, a medida que se realicen estos incrementos se obtendrán polígonos cuyos lados se van haciendo pequeños e infinitos. Por otro lado, un 41,67% de los encuestados expresa que si es posible que exista un límite y que este se logra cuando el polígono tienda a la circunferencia, indicando una cierta prenoción de *Infinito* actual. Sin embargo, el esquema con mayor frecuencia en los sujetos es el EIP.

15. Sea el semicírculo de diámetro *AB*, ver figura, en el cual se divide el diámetro en dos partes iguales, determinado por el punto medio *C*, obteniéndose los segmentos *AC* y *BC*. Luego, se trazan sobre ellos dos semicírculos, tal como se puede observar en la figura, para seguidamente repetir el procedimiento. Si se continúan dividiendo los segmentos obtenidos y trazando semicírculos sobre ellos ¿Qué sucede con la longitud de la línea del diámetro y los semicírculos que se van trazando a medida que se disminuye la longitud de cada subsegmento? Justifique su respuesta.



Además, si se suman las áreas de todos los semicírculos ¿Qué valor se obtendría? Explique su respuesta.

Sujeto Nº 1: R1: Cada vez van siendo más pequeños pero aun así pueden formarse una cantidad infinitas de semicírculos y el diámetro seria de longitud infinitesimal. R2: Seria una cantidad muy grande por la gran cantidad de semicírculos que pueden formar.

Sujeto Nº 2: No sabe, no respondió.

Sujeto Nº 3: R1: Si se sigue trazando vamos a obtener una medida muy pequeña a su vez. R2: Del valor al original.

Sujeto Nº 4: No sabe, no respondió.

*Sujeto Nº 5:*R1: Los semicírculos se volverán más pequeños al punto de llegar a ser en un punto una recta por ser cada vez menor su radio de amplitud. R2: Da el mismo resultado del área total.

Sujeto Nº 6:R1: No sabe, no respondió. R2: infinita porque se tendría que tener primero el valor de cada una de las áreas.

Sujeto Nº 7: R1: No sabe, no respondió.

Sujeto Nº 8: R1: No sabe, no respondió. R2: No sabe, no respondió.

Sujeto Nº 9: R1: Si cada subsegmento se va haciendo más pequeño en cada subdivisión. R2: El área total del semicírculo AB.

Sujeto Nº 10: R1: No sabe, no respondió. R2: El valor se acerca al original.

*Sujeto Nº 11:*R1: No sabe, no respondió. R2: Se obtendrá el área original.

Sujeto Nº 12:R1: Se van convirtiendo en puntos que se pueden confundir con la recta. R2: No sabe, no respondió.

Análisis:

Como resultado de este problema, se verifica que un 41,67% de los sujetos manifiestan, de un u otra forma, que los semicírculos se van haciendo más pequeños en un proceso de subdivisión infinita. Además, con igual porcentaje, pero no todos de los mismos sujetos, expresan que el área total que se obtendría seria la misma que la del semicírculo original. Es notorio señalar que un 58,33% de los encuestados optaron por no responder la primera interrogante la relacionada con la longitud de la línea. El esquema que domina es el EIP.

16. **Dada la siguiente función $f_{(x)} = \frac{1}{2^x}$, al darle valores enteros positivos, arbitrarios y consecutivos a la función ¿Qué Observa? Razone su respuesta.**   **¿Qué sucede cuando el valor de la variable se hace muy grande? Justifique su respuesta. Además, realice una grafica aproximada de esta función.**   ***Grafica:***
Sujeto Nº 1: R1: Cada vez el denominador se va haciendo más grande y se llega a un número infinito. R2: Son cantidades que no se pueden calcular.
Sujeto Nº 2: R1: Que la fracción se hace más pequeña. R2: Bueno se toma todos los valores dentro de la recta.
Sujeto Nº 3: R1: $\frac{1}{2^x}$ ese seria mi valor positivo. R2: Obtenemos una cantidad mas grande de los obtenidos en la gráfica.
Sujeto Nº 4: No sabe, no respondió.
Sujeto Nº 5: R1: Van decreciendo los valores. R2: Tiende a cero de tal manera que el eje c es asíntota horizontal de dicha gráfica.
Sujeto Nº 6: No sabe, no respondió.
Sujeto Nº 7: No sabe, no respondió.
Sujeto Nº 8: No sabe, no respondió.
Sujeto Nº 9: R1: Que el valor de la fracción va disminuyendo siendo la mitad exacta del valor anterior. R2: Se hace más pequeño el valor de la fracción.
Sujeto Nº 10: R1: El numerador se hace mayor y la fracción se hace más pequeña. R2: La fracción se hace más pequeña.
Sujeto Nº 11: R1: El denominador se hace mayor lo que hace que la fracción sea menor. R2. Al aumentar el valor de la variable la expresión se hace menor.
Sujeto Nº 12: R1: La función se va acercando a cero. No sabe, no respondió.

Análisis:

En este ítem se observa que un 50% de los estudiantes muestran una tendencia a afirmar que la fracción se va haciendo más pequeña a medida que el denominador va creciendo en cantidad, no obstante sólo un 16,67% logra comprender que la fracción va tendiendo a cero, lo cual demuestra graves conflictos epistemológicos y didácticos en relación a la noción de limite y de *Infinito*. Esto también se puede evidenciar por el porcentaje de estudiantes que no respondieron al ítem, el cual fue de un 33,33% de los mismos. El esquema que se manifiesta es el EIP. Asimismo, los sujetos no realizaron la gráfica concerniente a la función estipulada en el problema dando a entender problemas de comprensión de la noción de función y grafica de la misma.

4.2.4. Resumen de los resultados obtenidos de la aplicación del taller y del instrumento a concerniente a la noción de Infinito aplicados a nivel universitario.

Una vez hecho los análisis de los registros obtenidos, se logro evidenciar dentro de los Estudiantes del cuarto semestre de Educación Mención Matemática pertenecientes a la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo la idea generalizada de asociar la noción de *Infinito* como aquello cuyo fin o límite no se conoce, es decir, como algo muy grande o imposible de contar, y cuya representación inmediata según su intuición es explicada a partir de los conjuntos numéricos y del símbolo ∞, si bien es cierto que son estudiantes universitarios con conocimientos de la teoría de límites y de cálculo diferencial e integral, sus respuesta muestran debilidades en cuanto al manejo y dominio de conceptos como sucesión, suma de n términos, series, gráfica de funciones y hasta de la noción misma de limite, en algunos casos.

Esto demuestra la existencia de posibles obstáculos, ya sea epistemológico o didáctico, en la adquisición y encapsulación de la idea de límite y de otros conceptos matemáticos, así como también, de la presencia de conflictos semióticos adquiridos en el proceso de aprendizaje ajeno a la noción de *Infinito*. En este orden de ideas, se identificó, además, la existencia de los obstáculos de *Dependencia*, *Aplastamiento* y *Deslizamiento* en muchos de los casos, lo cual indica que aunque sean de un nivel avanzado de instrucción, estos son susceptibles a padecer de estas patologías sino lograron una adecuada y correcta formación de sus esquemas conceptuales al momento de precipitar el aprendizaje de ciertos conceptos que empleen la noción de *Infinito*.

De la misma manera, se identificó una serie de esquemas conceptuales que operan en el modo de pensar de los estudiantes, estos manifestaron en su mayoría el *Esquema de Infinito en su Acepción más Primitiva* (EIAP) y *Esquema de Infinito Potencial* (EIP) de una manera muy marcada. No obstante, en algunos casos, se observó la presencia del *Esquema de Infinito asociado a la noción de Conjuntos* (EICF)y *a una Función* y el *Esquema de Infinito Potencial asociado a un Símbolo y al la idea de Límite*(EIPSL), para cierto tipos de problemas con relación a la idea de límite.

4.3. Los procesos de aprendizaje de conceptos matemáticos asociados a la noción de Infinito.

Ahora bien, en cuanto a los procesos de aprendizaje de los conceptos matemáticos cuyas conceptualizaciones emplean los modelos intuitivos que poseen los estudiantes sobre la noción de *Infinito*, se debe entender primero una serie de aspectos fundamentales que permitan analizar este hecho: *el aprendizaje de entes matemáticos*. Como tal, este proceso se encuentra ligado profundamente a otros dos aspectos importantes como lo son el saber y la educación, los cuales interactúan en un devenir constante donde intervienen una gran diversidad de factores, ya sean pedagógicos, didácticos, psicológicos, culturales y sociales. Como se sabe, el hombre se encuentra rodeado de creencias, opiniones y teorías entorno a la realidad, que surgen de su sistema vivencial como consecuencia inmediata de la interacción vida – realidad que ocasiona que se encuentre con interpretaciones de lo real. Por tal motivo, se origina la ciencia, pues con ella se intenta validar esa realidad constitutiva (interpretación) a través de un método en función de la exigencia de inteligibilidad y la exigencia de positividad, para así despojarla de todo aquello que impida, en la medida de lo posible, ver la realidad tal cual es.

Este hecho, desemboca en adquisición de conocimientos, lo que trae consigo el origen del saber fundamentado. Pero como se discierne si este saber está acorde con lo que se muestra realmente, es decir, si este conocimiento es un reflejo fidedigno de la realidad inherente al objeto. De tal manera, que esta ciencia, requiere de un sistema de lógica simbólica, es decir un sistema de signos con reglas para su empleo, que sean validas para todos los casos posibles, o sea, propias a adaptarse a cualquier contenido o situación, es por ello que surge la matemática y la lógica como ciencias y a la vez como instrumentos idóneos para tal fin, ya sea por su aspecto homogéneo o por su carácter tautológico. Es preciso señalar, que la matemática como ciencia no ofrece un conocimiento propio de las cosas, sino que da las fórmulas que permiten transformar el discurso y descubrir las leyes que rigen los diversos fenómenos logrando la reconstrucción abstracta de lo real manejándose en un lenguaje coherente.

Entendido esto, se tiene que las verdades matemáticas son en parte verdades de definición, que representan a aspectos reales del mundo físico, y es por ello que siempre son exactas y demostrativas, pero a su vez, abstractas, intelectuales y arbitrarias, de allí su importancia de su instrucción. No obstante, no solo son relativas al sistema de axiomas arbitrariamente elegido, sino que el sentido de las palabras se reduce a las reglas de su uso fijadas implícitamente por estos axiomas. Ahora bien, al generarse este tipo de saber, el saber matemático, este al ser dispuesto sobre un lenguaje es inmediatamente susceptible al proceso de comunicación y difusión entre los seres humanos. De aquí, surge, entre otras cosas, el hecho educativo, ante dos inquietudes básicas, como lo son la del ¿cómo lograr transmitir a otra persona ese saber? y del ¿cómo lograr que esa otra persona interprete, comprenda, analice, juzgue y asimile internamente el saber que se le está transmitiendo?

Por lo tanto, para entender el hecho educativo matemático como un proceso dinámico y eminentemente comunicativo, hay que tener presente tres conceptos claves para la comprensión de la misma, y éstas son la *pedagogía*, la *didáctica* y la *educación*, el primer término etimológicamente proviene del griego y es producto de la unión de dos palabras "paidon", que significa niño, y "gogos", cuyo significado es conducir o dirigir, esto se traduce como dirigir al niño, pero, como es sabido, con el pasar del tiempo y el devenir de la historia el significado de los términos se van haciendo más complejos y a su vez son influenciados por una *solución genérica condicionante* que los ata de manera predeterminada a la postura asumida por el autor que las concibe y al contexto en el cual se desenvuelven y se desarrollan dichas definiciones.

Por lo que, cabe preguntarse *¿qué es la pedagogía realmente?*, ante esta interrogante surgen dos posturas: la primera, centra el objeto de estudio del proceso educativo en la reflexión, y la segunda, en función de la instrumentalización para transmitir contenidos disciplinares, de aquí surge que la concepción de pedagogía se maneja de manera dual, o la pedagogía es la ciencia de la educación o la pedagogía es el arte de educar, con la finalidad de responder a esta duplicidad se hizo necesario diferenciar lo que es la Pedagogía General (Filosofía de la Educación) y lo que son la Pedagogías Especiales o Practicas (las que dictan los lineamientos a los maestros para enseñar), esta última, al continuar el proceso del reduccionismo de los objetos de estudios debido a la pluralización de las ciencias se convierte en lo que se conoce como la didáctica, la cual alude tanto a una teoría, así como también a una metodología de la relación alumno y profesor mediada por los contenidos de las diferentes disciplinas.

Siguiendo este orden de ideas, el tercer término (educación), en su sentido más amplio proviene de dos vocablos latinos: “educere”, término que significa sacar o extraer de adentro hacia afuera, y “educare”, el cual significa conducir, alimentar, guiar, nutrir y criar. Entendiendo así la educación como una actividad que consiste en guiar o proporcionar, desde afuera, lo necesario para construir, encauzando las potencialidades ya existentes en el individuo como ser educable, puesto que es una actividad inherente al hombre y que se desarrolla por medio de la empíria, en pocas palabras la educación es toda aquella actividad o acción individual – colectivo que permite desarrollar o perfeccionar las facultades intelectuales – cognitivas, físicas y ético – morales del / los individuo(s), atendiendo a la mismisidad de la condición humana, la identidad colectiva – cultural y a la conciencia de nuestra temporalidad en el mundo, siendo un producto de la experiencia obtenida mediante la práctica educativa y, a su vez, reflexiva, concibiéndola más como una categoría sociológica que como una categoría pedagógica, ya que responde a una intencionalidad, ya sea política, económica o ideológica, y al marco epistemológico operante en la nación (Ugas, 2007).

No obstante, desde el instante que la *Didáctica de las Matemáticas* empieza a considerarse como una disciplina autónoma[37], surge la problemática epistemológica de cuál es su naturaleza, así como también cual es su ámbito dentro del cual ha de delimitarse su objeto de estudio. Ante estas cuestiones, se origina lo que se conoce como “el problema de la educación de la matemática” entendida por Gascón (1998)

[37]Consecuencia directa del fracaso de la respuesta pedagógica al problema de la Educación Matemática “que se constituyó, desde el principio, sobre el postulado de la necesidad de hacerse cargo, de forma integrada, de lo “pedagógico” y lo “matemático” (Gascón, 1998, p.6).

como el problema que genera el objeto de estudio de la Didáctica de las Matemáticas. Asimismo, hay que tener presente que la didáctica de las matemáticas en un principio fue considerada como un arte que no podía ser analizado, controlado y sometido a reglas, esta visón corresponde a la concepción precientífica de la enseñanza, pero una vez que crece el interés de extender y explicar los hechos didácticos.

Es decir, desde que se instaura la *Didáctica de las Matemáticas* como disciplina científica, se fue arraigando un punto de vista llamado clásico, el cual se caracteriza porque en la explicación de los hechos didácticos, toma como central la actividad cognitiva del sujeto presuponiendo, además, que dicha actividad puede ser descrita y explicada de manera relativamente independiente de los restantes aspectos de la relación didáctica (Brousseau,1986), por lo que la evolución de la *Didáctica de las Matemáticas* está determinada por sucesivas ampliaciones de la problemática didáctica, donde cada una de estas ampliaciones comporta cambios de su objeto primario de investigación, tal como lo afirma Josep Gascón (1998) en su obra *Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*.

En consecuencia, la epistemología proporciona a la didáctica una herramienta de análisis de los fundamentos científicos, por medio del análisis histórico – critico de algunos conceptos matemáticos que son presentados en la enseñanza, para así reducir la brecha que se suscita entre el saber sabio y el saber ensañado, es decir, estableciendo las diferencias existentes que se da entre el objeto de enseñanza y objeto de la ciencia, debido al reduccionismo al cual se ve sometido para garantizar su comprensión por parte de los estudiantes, esto es la ilusión de transparencia de los objetos que muchas veces introduce representaciones epistemológicas erróneas en el proceso de enseñanza.

En tal sentido, una vez que se da el fracaso de la respuesta pedagógica al problema de la educación surge la *Didáctica de las Matemáticas* partiendo de la necesidad de hacerse cargo de lo pedagógico y lo matemático de forma integral y no disociada, y que se puede llevar acabo de dos maneras diferentes de acuerdo a los Programas de Investigación o enfoques en Didáctica. El primero, conocido como el *Programa Cognitivo*, en el cual se considera los fenómenos didácticos como fenómenos esencialmente cognitivos en el sentido de la estructura de las concepciones del alumno y más recientemente las concepciones del profesor. El segundo, denominado el *Programa Epistemológico*, donde se integra lo pedagógico y lo matemático mediante el cuestionamiento y la ampliación de lo que se consideraba matemático en el modelo popular de las matemáticas (Gascón, 1998).

De esta manera, se tiene dos enfoques con los cuales el poder dar explicación a los procesos que ocurren en la educación matemática, una cuya hipótesis plantea que: "El problema de la educación Matemática puede ser abordado y resuelto a partir del análisis de ciertas características individuales de los sujetos (actitudinales, cognitivos, metacognitivos, motivacionales, lingüístico, etc) relativas a su relación con los objetos matemáticos"(Gascón, 1998; p.8); y otro, que tiene como hipótesis expresa que:"El problema de la Educación Matemática puede ser abordado a partir del análisis de las prácticas matemáticas que se llevan a cabo en las diferentes instituciones (no sólo docentes)" (Gascón, 1998; p.11). Las cuales, de lejos de ser opuestas, pueden ser complementarias, puesto que la primera enfoca aspectos que la segunda no considera y viceversa, llenando los vacios que pueden sucintarse.

Una vez dicho lo anterior, en los procesos de aprendizaje de conceptos matemáticos asociados a la noción de *Infinito*, se tiene que los estudios realizados sobre la evolución histórica y epistemológica de los conceptos fundamentales del Cálculo, tienen como finalidad la de dar a conocer a la actividad matemática como un proceso entramado y complejo que alberga en su seno todos aquellos significados, definiciones, teoremas, métodos y técnicas que se emplearon en diversos periodos de tiempo para abordar y dar solución cierta clase de problemas. De esta manera, se puede observar que en lo referente a las técnicas y métodos que antecedieron a la axiomatización de la noción de Límite, se encuentran que estos se basaron en procedimientos de procesos infinitos, procesos de aproximación y también en el continuo numérico. Por otro lado, el continuo numérico es un concepto base en la construcción del continuo matemático, y este, junto a la noción de Infinito juegan un papel preponderante para la comprensión de la idea de Límite.

Por otro lado, se pudo evidenciar en los registros obtenidos por medio de instrumento para ambas muestras de estudiantes, que el estudio de los conjuntos finitos no proporciona a los estudiantes un modo factible para la comprensión de los conjuntos infinitos, así como también el estudio de sus propiedades. Puesto que, los conjuntos infinitos no se sitúan en una realidad física a priori y palpable a sus sentidos, por lo que la extrapolación que realiza en relación a la definición, características y propiedades del conjunto finito con respecto a la definición, características y propiedades del conjunto infinito, por parte de los sujetos, en la mayoría de los casos son generadoras de obstáculos y conflictos, debido al choque que se da entre la intuición y la razón.

Esto quedo claro, en el caso de comparar el número de puntos que contienen dos segmentos de diferente longitud, puesto que los sujetos (de ambas muestras), entraron en contradicción, aunque se les enseño que ambos conjuntos son equivalentes en cuanto a su cardinal, esto no quedo claro, puesto que el obstáculo epistemológico de *Dependencia*, estudiado por D'Amore y otros (2006), está fuertemente arraigado en los individuos, debido a la falsa creencia que se suscita basados en un modelo grafico, por lo que los lleva a pensar de que un segmento de mayor longitud posee una cantidad aun mayor de puntos en comparación con otro de menor longitud, la raíz de esto puede estar involucrada a viejas estructura de pensamiento y a otros esquemas mentales operantes asociados a otros objetos y nociones matemáticas, como lo son la noción de punto, la línea, el plano cartesiano, el espacio euclideo, la idea de número, entre otros, que tuvieron su origen en determinadas etapas de su formación.

Aunque, se sabe que los puntos matemáticos no tienen dimensiones, la estructura cognitiva del estudiante sigue pensando manifiestamente e inconscientemente en términos de pequeñas marcas o manchas del mismo tamaño, por lo que, si se razona intuitivamente de esta manera se llega a la conclusión de que los dos conjuntos no son equivalentes. Al parecer, aunque se tenga diferentes grados de instrucción o un conocimiento matemático elevado, los sujetos siguen mostrando este tipo de patología por lo que se hace recurrente en sus modelos conceptuales y operacionales.

Por otro lado, se debe evitar caer en el aquivo de declarar que dos o más conjuntos al poseer infinitos elementos, estos son iguales entre sí por el hecho de ser infinitos, lo cual es un absurdo desde el punto de vista cantoriano, debido a que no todos los conjuntos infinitos son equivalentes entre sí, puesto que hay diversos ordenes de infinitud, por ejemplo el conjunto de los números naturales, puede ser equivalente con el conjunto de los números enteros y además con el conjuntos de números racionales, mas no con el conjunto de los números irracionales y conjunto de los números reales; lo mismo podría decirse a su vez del conjunto de los naturales y el conjunto de los puntos pertenecientes a un segmento de recta, pues no lo son aunque ambos sean infinitos. Esta incongruencia de manifestar que dos conjuntos por el hecho de ser infinitos son iguales, también se pudo observar en varios de los sujetos encuestados, aunque se les haya explicado durante el transcurso del taller, evidenciando otro tipo de obstáculo el denominado por D'Amore, y otros(2006) como *Aplastamiento*, el cual tiene que ver con este tipo de pensamiento a priori.

De igual modo, se puedo constatar que en los estudiantes de nivel universitario el concepto de función en su aparato cognitivo no está totalmente formado de una manera adecuada, los sujetos tal vez son capaces de reproducir la definición formal de función haciendo uso de sus propios esquemas conceptuales para resolver ciertas tareas o determinado tipo de problemas, pero al plantearse problemas donde intervienen indirectamente la noción de *Infinito*, entran en conflicto y no parecen comprender que lo principal en la noción de función, es la idea de una relación entre magnitudes variables.

Asimismo, en ambos casos, surge el problema entre lo discreto y lo continuo en relación a la idea de Límite, si bien es cierto de manera indirecta, si se alcanza o no en diversos contextos el aritmético, el algebraico y el geométrico. Además, de la existencia obstáculos relacionados con la simbología propia de la matemática, sin mencionar los obstáculos ligados a la noción de *Infinito* ya mencionados. Adicionalmente, también es evidente la aparente confusión con el infinito decimal (infinitésimos) que ocurre en aquellos estudiantes que se limitan a pensar que expresiones de la forma: $0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + \cdots$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \ldots$,o $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \ldots$, son un proceso continuo, es decir como una sucesión infinita, aunque conciban al número 0 y 2 como un objeto acabado, donde el proceso se concibe como algo que *se hace* y no como algo que *es*, debido a la fuerte influencia que ejerce el EIP en el sujeto.

CONCLUSIONES

Como resultado del proceso de análisis que se realizó en la presente investigación, se pudo demostrar la existencia de una serie de esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución de la noción de *Infinito*, a través de una reconstrucción histórica, en este sentido, se identificó ocho esquemas conceptuales asociados a dicha noción y categorizados en función a los periodos históricos siguientes: *1º Preludio. Egipto y Mesopotamia, las civilizaciones de los valles fluviales*; *2º El Pensamiento Helénico*; *3º Interludio Medieval y Moderno*; y *4º La Matemática Contemporánea. Siglos XIX – XX*y un *5º* denominado *el Paraíso de Cantor*, donde se analizó la perspectiva cantoriana del *Infinito*. Todo ello, permitió comprender los diversos puntos de vista, representaciones e ideas, así como también, las experiencias y los significados dados por los matemáticos a esta noción a lo largo de la historia, además, de los procedimientos y métodos ligados a otros conceptos u objetos matemáticos que tienen su fundamento en este.

Ahora bien, como producto de la actividad de análisis se logró identificar, describir y categorizar los siguientes esquemas conceptuales: *elEsquema de Infinito en su Acepción más Primitiva, asociada a la idea de número* (EIAP), *el Esquema de Infinito Potencial asociado a una división o adición de magnitudes de manera reiterativa e ilimitada, es decir, esquema asociado a una razón* (EIP), *el Esquema de Infinito Metafísico asociado a lo eterno o a una sustancia eterna principio originador de todo que trasciende(EIM)*, *el Esquema de Infinito asociado a una Perspectiva Teológica como propiedad exclusiva de Dios. El Infinito Absoluto* (EIPT), *el Esquema de Infinito asociado a lo Infinitesimal y a una unidad invisible (punto). Existencia de elementos infinitésimos e indivisibles* (EII), *el Esquema de Infinito Potencial asociado a un Símbolo y al la idea de Límite* (EIPSL), *el Esquema de Infinito asociado a la noción de Conjuntos y a una Función* (EICF) y por último *el*

Esquema de Infinito asociado a la Teoría de Conjuntos y a la aritmética Transfinita (EITCAT).

Asimismo, estos esquemas hallados fueron de gran relevancia, puesto que aportaron un marco de referencia para la distinción, descripción, interpretación y el estudio de los esquemas conceptuales presentes en los estudiantes pertenecientes a dos niveles diferentes de instrucción del sistema educativo venezolano, en este caso el nivel de Educación Media General (estudiantes del 5to año) y en el nivel de la educación Universitaria (estudiantes del 4to semestre de Educación Mención Matemática). Así como también, la identificación de obstáculos y conflictos semióticos en relación a la noción de *Infinito* y a otros objetos matemáticos como lo son el concepto de función, sucesión, Límite, conjunto, numero, entre otros.

En este orden de ideas, en el caso de la muestra seleccionada de estudiantes del 5to año de Educación Media General se identificó dos esquemas conceptuales preponderantes que operan cognitivamente en ellos, estos son: *Esquema de Infinito en su Acepción más Primitiva* (EIAP) y *Esquema de Infinito Potencial* (EIP). No obstante, en algunos estudiantes también se observo la existencia del *Esquema de Infinito asociado a lo Infinitesimal* (EII) y *Esquema de Infinito asociado a la noción de Conjuntos y a una Función* (EICF) al tratar con ciertos ejercicios específicos. Por otro lado, al tratarse de la muestra de los estudiantes universitarios esquemas conceptuales que operan de manera más significativa son el *Esquema de Infinito en su Acepción más Primitiva* (EIAP) y *Esquema de Infinito Potencial* (EIP). De igual manera, en algunos estudiantes al tratar con ejercicios que involucran la idea de Límite se observó el *Esquema de Infinito asociado a la noción de Conjuntos*(EICF)y *a una Función* y el *Esquema de Infinito Potencial asociado a un Símbolo y al la idea de Límite*(EIPSL).

En cuanto a los obstáculos, en ambas muestras se verificó la presencia de obstáculos de orden epistemológicos ligados a la noción de *Infinito*, tal es el caso del fenómeno de *Dependencia* y el de *Aplastamiento*, así como el de *Deslizamiento*. Igualmente, obstáculos relacionados en el aprendizaje de otros objetos matemáticos y de tipo semiótico al no entender el significado ciertos signos, símbolos, el lenguaje o en la comprensión de conceptos matemáticos previos. En este mismo sentido, cuanto a los procesos de aprendizaje de los conceptos matemáticos cuyas conceptualizaciones emplean los modelos intuitivos que tienen los estudiantes en torno a la noción de *Infinito*, el estudio de los conjuntos finitos no garantiza el entendimiento y la extrapolación de manera factible a los estudiantes para la comprensión de los conjuntos infinitos y de sus propiedades, ya que los conjuntos infinitos no se sitúan en una realidad física a priori y palpable a sus sentidos, por lo que el conflicto entre intuición y razón es generador de obstáculos.

Así, el fenómeno de *Dependencia* puede tener su génesis por el desarrollo estructuras cognitivas formadas en el estudiante alrededor de esquemas mentales operantes ligados a otras nociones matemáticas, como la noción de punto, de línea, de plano cartesiano, de espacio euclideo, de número, entre otros. De igual modo, la patología de *Aplastamiento* por la incongruencia que se suscita en los estudiantes al manifestar que dos conjuntos por el hecho de ser infinitos son iguales, algo que desde el punto de vista cantoriano no es correcto, ya que hay diversos ordenes de infinitos, dependiendo de su cardinal.

Por otro lado, la noción de *Infinito actual* al involucrar en él obstáculos epistémicos y didácticos, que pueden surgen en la transición de magnitud a número, como por ejemplo, la idea geométrica de que la diferencia entre una magnitud variable y una magnitud constante es su límite. Justamente magnitud y no número. Asimismo, la concepción de círculo como el límite, en polígonos inscritos o circunscritos, será un síntoma de algún obstáculo, ya que a medida en que son trazados los lados del polígono en la circunferencia la forma del polígono se acerca a la forma de un círculo. Por lo que, se plantea siguiendo la idea de Dalembert que una magnitud es el límite de otra magnitud, cuando la segunda puede aproximarse a la primera en más de una magnitud dada, por más pequeña que esta sea, aunque la primera magnitud no puede superar a la magnitud a la que se aproxime, de tal manera que la diferencia entre una cantidad y su límite es absolutamente inasignable, por lo que la noción potencial, así como también la noción actual de *infinito* aparecen dentro del estudio de los límites, debido a que el obstáculo se encuentra en la dificultad de hacer la relación entre cantidades o magnitudes.

Además, en el pensamiento del estudiante surge el problema entre lo discreto y lo continuo al plantearse problemas asociados a la idea de Límite, si bien es cierto de manera indirecta, si se alcanza o no en diversos contextos el geométrico, el algebraico y el geométrico. De igual manera, la confusión con respecto al infinito decimal (infinitésimos) que ocurre en aquellos estudiantes que se limitan a pensar que expresiones de la forma: $0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + \cdots$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ $+\ldots$,o $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \ldots$, son un proceso continuo, es decir como una sucesión infinitadebido a la fuerte influencia que ejerce el EIP en ellos.

RECOMENDACIONES

Como producto del análisis realizado en esta investigación, se exponen las siguientes recomendaciones que tienen la intensión de proponer ideas que sirvan para la optimización de los procesos de enseñanza y aprendizaje, asi como también en la didáctica de objetos matemáticos donde esté involucrada la noción de *Infinito*.

Hoy en día, en muchos de los libros de cálculo dan por entendido el hecho de que los estudiantes ya poseen una noción prefabricada del concepto de *Infinito*, y por lo general, lo comienzan a emplear al definir límites al infinito y límites infinitos pero sin hacer una introducción o referencia adecuada de dicho concepto, de igual manera se podría decir en el estudio de los conjuntos numéricos en la Teoría de Conjuntos, en la resolución de sucesiones y sumas infinitas, entre otros. Lo que trae como consecuencias, lagunas mentales y problemas a la hora de desarrollar su esquema cognitivo en relación a otros conceptos donde se halle inmerso este tópico. Por tal motivo, es conveniente que el docente, antes de iniciar la transposición didáctica de este tipo de objetos, debe realizar una reflexión crítica generalizada de *Infinito* donde se aborden las acepciones que fueron manejadas a través de la historia, para propiciar en los estudiantes un correcto manejo y entendimiento de estos objetos para evitar el surgimiento de contradicciones y la generación de obstáculos epistemológicos y didácticos en los mismos.

Como por ejemplo, en el campo de la enseñanza del contenido programado de la asignatura Cálculo I referido al Límite Infinitesimal, se sugiere a los docentes explicar la nociología que implica el *Infinito* como ente abstracto presente en el contenido de Límite, donde la construcción mental de la noción de *Infinito* no solamente sea referida como proceso inalcanzable (*Infinito potencial*),sino que también sea visto como un *Infinito* como unidad (*Infinito actual*), explicándoles a su vez, lo concerniente a los diversos ordenes de este por medio de la equipotencia entre ciertos conjuntos numéricos desde su cardinalidad y la existencia de infinitos numerables y no numerables. Con el objetivo de que los estudiantes puedan comprender el campo teórico con el cual se enfrentan, dando paso a la aplicación de razonamientos lógicos que les permitirán asimilar nociones posteriores (la Derivada y la Integral) si caer en la banalización del conocimiento que produce el pensamiento algorítmico, para así fomentar la capacidad de formular conjeturas, invención y resolución de problemas.

Ahora bien, además se debe considerar el lenguaje semiótico, el cual debe adaptarse a las capacidades y comprensión de los alumnos; así como también la secuencia de las unidades de aprendizaje que debe estar adaptado a la lógica interna de las matemáticas. Por otro lado, se sabe que la formación básica se instruye con el aprendizaje de los conceptos de conjunto y número, donde la idea de conjunto se establece como un concepto que debe ser comprendido por medio de la idea intuitiva de grupo o colecciòny que a su vez la noción de número se asocia con la idea de cantidad de elementos que posee un determinado conjunto. Indicando que todo conjunto posee una cantidad de elemento, partiendo del hecho de para cualquier número natural n existe al menos un conjunto con $n$elementos.

Por lo que, el uso de un lenguaje poco especializado basado en una extrapolación vulgar de los conceptos para facilitar la “comprensión” durante las primeras etapas de formación de los individuos provoca que dichos conceptos sufran una transmutación en entes que no tienen nada que ver con los originales, lo cual hace que a la hora de comprender otros conceptos que se estudian posteriormente en cursos superiores, tales como: cardinalidad, densidad, continuidad, convergencia, Limite, numerabilidad, no numerabilidad, número transfinito, entre otros, sean difíciles de entender debido a la falta de precisión que se generó en el aprendizaje generando esquemas incompletos o erróneos.

REFERENCIAS

Arana, R. (2010). *La idea de infinito en la filosofía de Descartes*. ISSN: 1576-2270. Ontology Studies 10, p.131-142. Disponible en: www.ontologia.net/studies

Aristóteles, (tr.1995). ***Física***. Traducción y notas Guillermo R. de Echandía Madrid - España. Editorial Gredos.

Arrigo, G. y D`Amore B. (1999). *"Lo veo y no lo creo". Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Cantor que involucra al infinito actual*. Educación matemática, México DF, vol. 11 (1) p. 5 – 24.

Arrigo G. e D'Amore B. (2002). *"Lo vedo ma non ci credo…", seconda parte*. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La Matematica e la suadidattica*. 1, p. 4 – 57.

Arrigo, G. y D`Amore B. (2004). *Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor*. Educación matemática, México DF, vol. 16 (2) p. 5 – 19.

Arrieta, L. (2010). *Perspectiva cognitivista. Fundamento para la investigación en Educación Matemática*. Universidad Nacional Experimental de Guayana. Revista: Kaleidoscopio.ISNN:1690-6054. Volumen 07. Número 13. p.30 – 39.

Artigue, M. (1990). *Epistemología y didáctica*. Revista: Reserches en Didactique des Mathématiques. Vol. 10, Nº 23. Traducción Espitia, M., p. 1 – 40.

Azcárate, C. (2003). *Definiciones, demostraciones, ¿Por qué?, ¿cuándo?, ¿cómo?*.X JAEM. Ponencia P21, p. 159-170

Azcárate C. y Camacho M. (2003). *Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, No. 2, p. 135 – 149.

Barrantes, H. (2006). *Los obstáculos epistemológicos*. Cuadernos de Investigación y formación en Educación Matemática. Año 1, Numero 2.

Barón, G.; Padilla; J.; Guerra, Y. (2009). *Obstáculos epistemológicos en la labor del docente neogranadino*. Revista Educación y Desarrollo Social. Octubre, Vol. 3. No. 2, p. 86 – 99.

Belmonte, J. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de Educación Primaria, Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad*. Tesis para optar al Grado de Doctor. Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca.

Belmonte, J. y Sierra, M. (2010).*Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2011 fecha de aceptación), 14 (2), p. 139 – 171.

Bermúdez, M. (1982). *El Análisis de contenido procedimientos y aplicaciones*. Revista Ciencias y Sociedad, volumen Nº 24; p. 71 – 80.

Blanché, R. (1973). *La epistemología*. Editorial Oikos – tau, s.a – ediciones. España.

Bosch, M., Espinoza, L. y Gascón, J. (2003). *El Profesor como Director de Procesos de Estudio: Análisis de Organizaciones Didácticas Espontaneas*. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 23, n° 1, p. 1 – 33.

Boyer, Carl B. (1986). *Historia de la matemática*. Versión de Mariano Martínez Pérez. Madrid - España. Editorial Alianza.

Brousseau, (1983). *Los Obstáculos Epistemológicos*. Argentina. Disponible: [online http://aportes.educ.ar/matematica/tipos_de_obstaculos.php?page=2] Consultado el día 20/06/12 a las 3:01 pm

Burbage, F. y Chouchan, N. (2002). *Leibniz y el infinito*.Paris – Francia. Editorial Philosophies, 1º edición 1993. Traducción Alejandro Martín Maldonado.

Cajori, F. (1915). *Historia de los argumentos de Zenón sobre el movimiento. Fases en el desarrollo de la teoría de límites*. Publicado en *American Mathematical*

Monthly volumen XXII. Traducción Eliza Zacarías México 1987. Revista del Seminario de Enseñanza y Titulación.

Camacho, A., y Aguirre, M. (2001). *Situacion didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar*. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa. Vol. 4. Nº. 3, Noviembre, p. 237 – 265.

Castell, H. (1985). *Diccionario Enciclopédico*. Ediciones Castell. Madrid – España.

Cescutti, R., y Ortega, R., (2010). *Obstáculos epistemológicos asociados a la noción actual de infinito para la comprensión de la idea de Límite en los estudiantes de pregrado cursantes de la asignatura Calculo I de la Mención Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo*. Tesis de grado para optar al Título de Licenciado en Educación Mención Matemática. Bárbula – Carabobo.

Cisterna, F. (2005). *Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa*. Departamento de Ciencias de la Educación, Facultad de Educación y Humanidades. Universidad del Bío-Bío, Chillán. Revista Theoria, Vol. 14 (1): p. 61-71. ISSN 0717-196X.

Constitución de la República Bolivariana de Venezuela(2000): Gaceta oficial de la República Bolivariana de Venezuela*;* 5.453 (Extraordinario).

Chavarria, J. (2006). *Teoría de las situaciones didácticas*. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. Año 1. Numero 2.

Chevallard, Y. (1991). *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Aique: Buenos Aires.

Chevallard, Y. (1999). L`analyse des practiques enseignantes en théorie anthrologique du didactique. Recherches en Didactique des Matemátiques 19(2), 221 – 226.

Crespo, C. (2002). *La noción de infinito a través de la historia*. En Crespo Crespo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. (Vol 15, Tomo I, p. 529-534). México.

Cuestas, A. (2007). *El Proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica*. Tesis Doctoral presentada en el Programa de Doctorado en Didáctica de las Matemáticas, Departamento de la Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales de la Universidad Autónoma de Barcelona.

D'Amore B. (1999). *Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica.L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, p. 247-276. [Un ampio sunto di questo articolo è stato pubblicato in: Jannamorelli B., Strizzi A. (eds) (1999). *Allievo,Insegnante, Sapere: dagli studi teorici alla pratica didattica*. Atti del 4° Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona 23-24-25 aprile 1999. Sulmona: Qualevita. 85-96. Un ampio sunto di questo articolo è stato pubblicato in lingua spagnola su: *Resúmenes de la XIII ReuniónLatinoamericana de Matemática Educativa*. Universidad Autonoma de Santo Domingo, Santo Domingo, República Dominicana, 12-16 luglio 1999, 27. Traduzione completa in lingua spagnola: *Laescolarización del saber y de las relaciones: los efectos sobre el aprendizaje de las matemáticas*. *Relime* (México D.F., México). 3, 3, 2000, p. 321-338].

D'Amore B. (2000). *La Didáctica de la Matemática a la vuelta del milenio: raíces, vínculos e intereses*. Revista Educación Matemática. Vol. 12, Nº 1; p. 39 – 50.

D'Amore B., Fandiño Pinilla MI. (2001). *Matemática de la cotidianidad*. *Paradigma*. (Maracay, Venezuela). XXII, 1, p. 59-72.

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática.* México DF: EditorialReverté.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). *Historia y Epistemología de la Matemática como bases éticas universales. Un homenaje a Ubiratan D'Ambrosio*. Trabajo desarrollado en el ámbito del Programa de Investigación: «*Aspectos metodológicos (teóricos y empíricos) de la formación inicial y en servicio de los docentes de matemática de todo nivel escolar*». Universidad de Bologna (Departamento de Matemática). *Acta Scientiae*. [Ulbra, Canoa, Brasile]. Vol. 7, Nº 1, p. 7-16.

D'Amore B., Arrigo G., Bonilla E., Fandiño M., Piatti A., Rodriguez J., Rojas P., Romero J. y Sbaragli S. (2006). *El "sentido del infinito"*. Epsilon. Sevilla, España Vol. 22(2), Nº 65, p. 187 – 216.

D’Amore, B. y Godino, J. (2007). *El Enfoque Ontosemiótico como un desarrollo de la Teoría Antropológica en Didáctica de la Matemática.* México. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Julio, año/vol. 10, numero 002; p. 191 – 218.

D’Amore B. (2011). *La didáctica del infinito matemático*. Sunto della Conferenza generale tenuta il 9 settembre 2011 al XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, promosso dalle Universdità Distrital, Nacional e Pedagógica de Bogotá. In: AA. VV. (2011). Memorias del XXIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Bogotá, 8-10 septiembre 2011. CD. ISBN: 978-958-57050-0-5; p. 21 – 29.

De Faria, E. (2006). *Transposición didáctica: Definición, Epistemología, objeto de estudio*. Universidad de Costa Rica, Año 1, Número 2.

Descartes, R. (1641). *Meditaciones Metafísicas*. Traducción de José Antonio Mígues. Edición electrónica disponible en la siguiente dirección electrónica www.philosophia.cl / Escuela de Filosofía Universidad ARCIS.

Di Tada, E. (2006). *Los números transfinitos*. Universidad de Palermo. Italia, p.101 – 156.

Fedriani E. y Tenorio A. (2010). *Matemáticas del más allá: el infinito*. Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Marzo 2010. Número 21, p. 37 – 58.

Fernandez, C. (2010). *Análisis epistemológico de la secuencia numérica*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Versión impresa ISSN 1665-2436, Vol.13. Nº 1, México; p. 1 – 25.

Fernández, J. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Estudio exploratorio*. Trabajo de investigación tutelado se ha realizado en el seno del grupo de investigación Didáctica de la Matemática. Pensamiento numérico (FQM-193) de la Universidad de Granada perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía.

Ferrante, J. (2009). *Guía de Estudio: Una introducción al concepto de Límite (dos mil años en un renglón)*. Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional

General Pacheco. Argentina. Editorial de la U. T. N. disponible en: http://www.edutecne.utn.edu.ar.

Font, V., Godino, J. y D`Amore, B. (2005). *Enfoque Ontosemiótico de las representaciones en educación Matemática*. Versión reducida del trabajo presentado en el Grupo de Trabajo DMDC en el IX Simposio de la SEIEM, Córdoba; p. 1 – 16. Versión ampliada disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/indice/eos.htm.

Font, V. & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao MatemáticaPesquisa*, *8* (1), 67-98.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2009) (en prensa). *Modelo para el análisis didáctico en educación matemática*. Infancia y Aprendizaje, 33 (2) (aceptado). Documento en línea disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/modelo_anadida_25junio09.pdf

Frank, B. y Nathalie, C. (2002). *Leibniz y el infinito* .Paris – Francia. Editorial Philosophies, 1º edición 1993. Traducción Alejandro Martín Maldonado.

Fuentes S., y Oktaç A. (2011). *El infinito y niñ@s talento en matemáticas: Una mirada desde APOE*. XIII CIAEM-IACME (XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática). Recife, Brasil; p. 1 – 12.

Gadamer, H. G. (1998).*Verdad y método II*. Ediciones Sígueme, Salamanca.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2001). *El concepto de infinito actual. Una investiugrgación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato*. Revista SUMA, volumen 38, p. 53 – 67.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2002). *Infinito actual e inconsistencias: Acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16 – 17 años*. Revista de Enseñanza de las Ciencias, volumen 20 (1) p. 87 – 113.

Garbin, S. (2005a). *Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: El caso de estudiantes con conocimientos previos al cálculo*. Revista de Enseñanza de las Ciencias, volumen 23 (1) p. 61 – 81.

Garbin, S. (2005b). *¿Cómo piensan los estudiantes entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajesmatemáticos*. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, volumen 8 (2) p. 169 – 193.

Garcia, F. (2003). *Aquiles, la Tortuga y el Infinito*. Revista de Filosofía. ISSN: 0034-8244.Vol. 28, Núm. 2; p. 215 – 236.

García, G., Serrano, C., y Díaz, H. (sf). *Una aproximación epistemológica, didáctica y cognitiva a nociones básicas y conceptos del Cálculo*.Universidad Pedagógica Nacional. Documento en línea, disponible en: http://www.pedagogica.edu.co/storage/ted/articulos/ted05_07arti.pdf

García, M. (2005). *Lecciones Preliminares de Filosofía*. Ediciones Universales. Bogotá – Colombia.

Gascón, J. (1998). *Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*. Universidad Autónoma de Barcelona, España; p. 12- 17.

Gascón, J. (2002). *El Problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas*. Trabajo realizado en el marco del proyecto BSO2000-0049 de la DGICYT “Matemáticas y Educación Matemática. ¿Hacia una futura convergencia?” en el ámbito del Congreso de la Real Sociedad Española de Matemáticas que se celebró en Puerto de la Cruz (Tenerife) entre el 27 de Enero y el 1 de Febrero, p. 1 – 19.

Gascón, J. (2011). *Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2011) 14 (2); p. 1-29.

Georg C. (1885). *Las diferentes posturas en relación al infinito actual*. Georg Cantor en la carta escrita a G. Enestöm, el 4 de noviembre de 1885. Carta publicada en la revista Signos Filosóficos vol. VI, número 11, enero – junio, 2004, p.175 – 185.

Giordano, B. (1584/1972).*Del infinito universo e mondi. Iniciación filosófica.* Traducción del italiano, prólogo y notas de Cappellentti Angel J. Buenos Aires – Argentina. Editorial Aguilar Argentina S.A.

Godino, J., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. (2006).*Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. México, año/vol. 9, número 001, p. 117 – 150.

Godino, J. (2012). *Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática*. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (p. 49 - 68). Jaén: SEIEM

Gómez, J. (2009). *La resolución de problemas en el pensamiento matemático avanzado: El caso de la elaboración de significados de la definición de espacio topológico*. 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. ASOLME (Asociación Colombiana de Matemática Educativa. Documento en línea, disponible en:http://www.funes.uniandes.edu.co/724/

Gómez, M. (2002). *Estudio teórico, desarrollo, implementación y evaluación de un entorno de enseñanza colaborativa con soporte informativo (CSCL) para matemáticas.* Tesis presentada para optar al grado de Doctor en la Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Educación. Departamento de Didáctica Organización Escolar. ISBN: 84-669-2339-X.

González, O. (2004). *El Cálculo infinitesimal Leibniciano: Una síntesis de las perspectivas de Brunschvicg e Isciguro*.Revista Signos Filosóficos vol. VI, núm. 11, enero – junio, p. 97 – 120.

Hernández S., R; Fernández, C. y Baptista, P. (2008). *Metodología de la Investigación*. México. Editorial: Mc Graw – Hill.

Hernández S., R; Fernández, C. y Baptista, P. (1998). *Metodología de la Investigación*. México. Editorial: Mc Graw – Hill.

Hitt, F. (2003). *Dificultades en el aprendizaje del cálculo*. Décimo primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia.

Hitt, F. y Páez, R. (2004). Dificultades de aprendizaje del concepto de límite y actividades de enseñanza. Documento en línea disponible en: http://www.fismat.umich.mx/mateduca/carlos/art_sem_nal.htm

Hitt, F. y Páez, R. (2003). *Dificultades de aprendizaje del concepto de límite de una función en un punto*. Revista Uno, (32), 97- 108.

Hurtado, J. (2012). *Metodología de la investigación: Guía para la comprensión holística de la ciencia*. Editorial: Quirón Ediciones. Bogotá – Caracas.

Larios, G. (2000). *Influencia del concepto metafísico de infinito en la matemática*. Tesis de Grado para optar por el Título: Licenciado en Filosofía y Educación. Universidad Francisco Marroquin. Guatemala.

Lavine, S. (2005). *Comprendiendo el infinito*. Editorial: Fondo de Cultura Económica. México.

Leibniz, G.W (1992). *Nuevos ensayossobre el entendimiento humano*. Madrid. Alianza Editorial.

León F. (2010). *Teoría del conocimiento*. Universidad de Carabobo, Colección Biblioteca Ciencias de la Educación serie Filosofía. Valencia – Venezuela.

Ley Orgánica de Educación (2009**)**. Gaceta Oficial, República Bolivariana de Venezuela Nº 5929 Extraordinario del 15 de agosto.

Ley de Universidades (1970). Gaceta oficial de la República Bolivariana de Venezuela, 1.429. (Extraordinario)*,* Septiembre 08.

Marc, J. y Leblond, L. (2004). *La piedra de torque. La ciencia a prueba*. México. Editorial Fondo de Cultura Económica.

Marías, J. (1971). *Introducción a la filosofía*. Madrid – España. Ediciones Castilla, S. A.

Meliujin, S. (1960). *El problema de lo Finito y lo Infinito*. Editorial Grijalbo, S.A. México.

Miranda, N., Navarro, C. y Maldonado, E. (2007). *Conflictos cognitivos que emergen en la resolución de problemas relativos al Límite***.** Categoría nº 1: Análisis del Curriculum y propuestas para la enseñanza de las matemáticas. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 20; p. 3 – 8.

Mondolfo, R. (1956). *El genio helénico*. Buenos Aires – Argentina. Editorial Columbia.

Montoro, V. y Sheuer, N. (2005). *Pensando el infinito. Concepciones de estudiantes universitarios*. Centro Regional Bariloche. Universidad Nacional del Comahue. República de Argentina, p. 1 – 13.

Ortiz, J. (1994). *El concepto de infinito*. Asociación Matemática Venezolana. Boletín 1(2), p. 59 – 81.

Panizza, M. (2003). *Conceptos básicos de la Teoría de las situaciones Didácticas*.Documento en línea disponible en:http://www.crecerysonreir.org/docs/matematicas_teorico.pdf

Pareja, D. (2007). *Breve historia de un gran problema. La hipótesis del continuo*. Notas para una charla, presentada en el Seminario Interno de Matemáticas en la Universidad del Quindío. Marzo 6, p. 1 – 14.

Piñuel, J. (2002). *Epistemología, metodología y técnicas del análisis de contenido*. Departamento de Sociología IV. Facultad de CC. De la Comunicación. Universidad Complutense de Madrid. Copyright © Estudios de Sociolingüística 3(1), p. 1 – 42.

Revista Matemática Digital. Nº 18, abril 2009, sección currículo y matemática, disponible en www.mendomatica.mendoza.edu.ar.

Rodríguez, D. y Vallldeoriola, J. (2012). *Metodología de la investigación*. Universitat Oberta de Catalunya. © FUOC • PID_00148555. Documento en línea disponible en: http://zanadoria.com/syllabi/m1019/mat_cast-nodef/PID_00148556-1.pdf

Rubio, G., Font, V. y Planas N. (2008). *Análisis Didáctico, una mirada desde el enfoque Ontosemiótico*.Documento en línea disponible en: http://pagines.uab.cat/nuria_planas/sites/pagines.uab.cat.nuria_planas/files/PERU2008.pdf

Salat, R. (2011). *El infinito en matemática*. NÚMEROS Revista de Didáctica de las Matemáticas. ISSN: 1887 – 1984. Vol. 77, p. 77 – 85. Disponible en http://www.sinewton.org/numeros.

Salgado, A. (2007). *Investigación Cualitativa: Diseños, Evaluación del Rigor Metodológico y Retos*. Universidad de San Martín de Porres. LIBERABIT: Lima (Perú) 13, p. 71-78. ISSN: 1729 – 4827.

Spiegel, M. (1989). *Cálculo superior*. Series y compendios Schaum. Madrid – España. Editorial McGraw – Hill.

Suarez, N. (2007). *La investigación documental paso a paso*. Universidad de los Andes. Consejo de Publicaciones. Colección: Ciencias Humanas. Serie Educación.ISBN 978-980-11-1050-7. Mérida, Venezuela.

Tall, D. (1986). Using the computer to represent calculus concepts. *Recueil des Textes et Comptes Rendus,* pp. 238-264. Le IVème École d'Été de Didactique des Mathématiques, Orleáns (sesión plenaria).

Tall, D. (1995). *Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical*. Thinking. Plenary lecture, *Proceedings of PME 19*, Recife (Brasil).

Tall, D. (2001). *Natural and Formal Infinities*.Educacional Studies in Mathematics 48 (21, 3), p. 199 – 238.

Tall, D.O & Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12, p. 151- 169.

Temas para la Educación (2010). *Evolución del concepto de número*. Revista Digital para Profesionales de la Enseñanza. Federación de Enseñanza de CC.OO de Andalucía. ISNN. 1989 – 4023. Nº 10.

Ugas, G. (2007). *Epistemología de la educación y la pedagogía*. Ediciones del Taller Permanente de Estudios Epistemológicos en Ciencias Sociales. Venezuela.

Universidad Pedagógica Experimental Libertador (2008). *Manual de Trabajos de Grado de especialización y Maestría y Tesis Doctorales*. Editorial: FEDUPEL. Caracas – Venezuela.

Universidad Nacional de Córdoba (sf.).*Cuadernillo de trabajode la Cátedra: Técnicas de investigación Científica*. Material elaborado en base al cuadernillo del Taller de Metodología de la Investigación de la carrera de Cs. de la Comunicación de la Universidad Nacional de Córdoba y cedidos gentilmente por la Prof. Titular de la misma, Dra. Paulina Emanuelli. Documento en línea disponible en: http://tecnicaymetodologia.files.wordpress.com/2008/10/cuadernillo-de-trabajo-de-tecnicas.pdf

Valdivé, C. (2008). *Los infinitesimales en el Cálculo: Un punto de vista sistémico*. EDUCERE. Artículos arbitrados. ISSN: 1316 – 4910. Año 12, Nº 42. Julio - Agosto - Septiembre, p. 531 – 538.

Valdivé y Garbin (2008). *Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal*. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, volumen 11 numero 3 p. 413 – 450.

Vargas, I. (2000). *Didáctica I de la matemática*. U.M.C.E. Departamento de Matemática. España, p. 1 – 12.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 14(3), 293-305.

ANEXOS

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE CARABOBO
DIRECCION DE POSTGRADO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AUTOR:
CESCUTTI A., ROMSTINE A.
TUTOR:
RAFAEL ASCANIO

Estimado Estudiante:

Ante todo, reciba un cordial saludo. A continuación se le presenta un instrumento de recolección de datos (cuestionario) cuya finalidad es obtener información necesaria para la investigación titulada: *Infinito ¿Antinomia o Apodíctico? Hacia una epistemología de la Noción de Infinito Actual. Análisis de los modelos intuitivos y esquemas conceptuales asociados al desarrollo histórico de esta noción*, la cual es un requisito para optar al Título de Magíster en Educación Matemática.

Los datos suministrados por usted serán de gran relevancia y de carácter confidencial, razón por la cual se le agradece contestar las preguntas con absoluta sinceridad, la prueba es individual.

Instrucciones:

1. Lea cuidadosamente y de manera detallada cada una de las siguientes preguntas antes de comenzar.
2. La prueba consta de 16 ítems de desarrollo, los cuales serán respondidos de acuerdo a lo planteado en cada una de ellas.
3. La prueba tendrá un límite de tiempo de duración de 40 min.

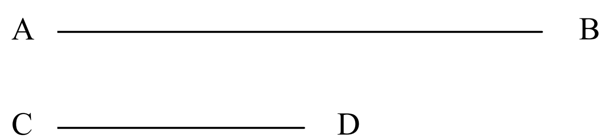
¡Muchas Gracias por su Colaboración!

Test.

1. ¿Has escuchado alguna vez la palabra *Infinito*? ¿Qué significado tiene para ti dicha palabra? ¿Cómo lo describirías, da algunos ejemplos?

2. Considere la siguiente suma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \ldots$ ¿Cuál crees que es el valor de esta suma? Explica tu respuesta. (Garbín, 2000)

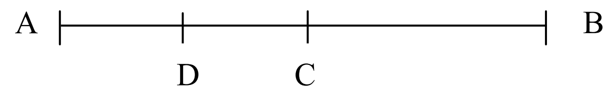
3. Dados dos segmentos de recta *AB* y *CD* que se muestran a continuación:



¿En cuál de los dos segmentos existe una mayor cantidad de puntos? Justifique su respuesta.

4. ¿Tendrá el conjunto de los números naturales $\boldsymbol{N} = \{0,1,2,3,4, \ldots, n\}$ más elementos que el conjunto $[0,1]$ de lo números reales? Justifique su respuesta.

5. Dado el segmento *AB*:



Si este se divide a la mitad, digamos en el punto *C*, se forma el segmento *AC*. Si este segmento se divide a la mitad, en el punto *D*, se obtiene el segmento *AD*. Si este proceso continua realizándose ¿Tendría fin este proceso? Explique su respuesta.

6. Dados dos conjuntos, el conjunto $\boldsymbol{A} = \{-5,0,2,4,6,8\}$ y el conjunto $\boldsymbol{B} = \{-8,-1,3,5,\{1,2,3,4,5,6,7,\ldots\}\}$. ¿Cuántos elementos posee cada conjunto? además explique si los dos conjuntos poseen una mayor o menor o igual cantidad de elementos. Justifique su respuesta.

7. Un día Aquiles y la Tortuga compiten en una carrera. Si la tortuga inicia la carrera con una leve ventaja con respecto al heleno, antes de alcanzar a la Tortuga, Aquiles debe recorrer el espacio que le separaba inicialmente de ella y, mientras tanto, la Tortuga habrá avanzado una distancia, por pequeña que sea. De igual manera, Aquiles debe recorrer esta distancia que ahora le separa de la Tortuga antes de alcanzarla, dando ocasión al animal de avanzar otro poco, aunque sea una distancia pequeña, con lo que de nuevo surge una separación entre ambos corredores que Aquiles ha de cubrir en un tiempo durante el cual la Tortuga adelantará otra distancia muy minúscula, y así, sucesivamente, siempre existirá una separación entre los dos corredores. ¿Podrá o no Aquiles alcanzar a la Tortuga? Explique su respuesta.

8. Dado un cuadrado de 4cm de lado y de área 16 cm^2 y que se divide en cuatro partes iguales como se muestra en la *figura (a)*, Luego, a ese mismo cuadrado se le vuelve a aplicar una subdivisión pero ahora al cuadrado Nº 4, obteniendo otros cuatro cuadrados iguales, como se observa en la *figura (b)*. Si se sigue realizando este proceso de subdivisión al último cuadrado de los cuadrados que resulten de la subdivisión anterior, como se ejemplifica en la *figura (c)*, y así realizándose sucesivamente de manera como se ha ido describiendo, tantas veces como se pueda efectuar ¿Cuántos cuadrados se pueden obtener? Justifique su respuesta.

Figura (a)

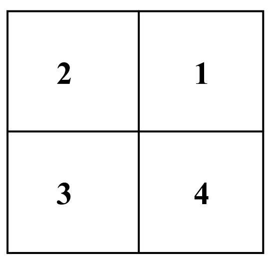


Figura (b)

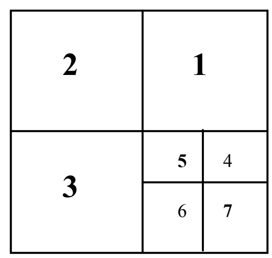
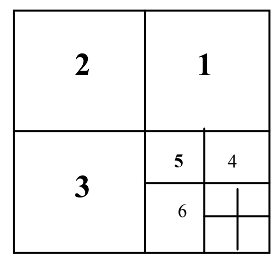


Figura (c)



Además, si se suma el área de todos los cuadrados conseguidos como resultados de las subdivisiones progresivas ¿Cuál sería el valor total de esta área? Argumente razonadamente su respuesta.

9. Sean los siguientes conjuntos: el conjunto de los números naturales ***N***, el conjunto de los números enteros ***Z***, el conjunto de los números racionales ***Q*** y el conjunto de los números reales ***R*** ¿Qué relaciones y características podrías establecer entre ellos?

Además, si se comparan entre sí, según tu opinión, ¿Quien tiene una mayor o menor o igual cantidad de elementos? De ser posible la clasificación, manifiéstala justificando tu respuesta.

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
UNIVERSIDAD DE CARABOBO
DIRECCION DE POSTGRADO
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

AUTOR:
CESCUTTI A., ROMSTINE A.
TUTOR:
RAFAEL ASCANIO

Estimado Estudiante:

Ante todo, reciba un cordial saludo. A continuación se le presenta un instrumento de recolección de datos (cuestionario) cuya finalidad es obtener información necesaria para la investigación titulada: *Infinito ¿Antinomia o Apodíctico? Hacia una epistemología de la Noción de Infinito Actual. Análisis de los modelos intuitivos y esquemas conceptuales asociados al desarrollo histórico de esta noción*, la cual es un requisito para optar al Título de Magíster en Educación Matemática.

Los datos suministrados por usted serán de gran relevancia y de carácter confidencial, razón por la cual se le agradece contestar las preguntas con absoluta sinceridad, la prueba es individual.

Instrucciones:

1. Lea cuidadosamente y de manera detallada cada una de las siguientes preguntas antes de comenzar.
2. La prueba consta de 16 ítems de desarrollo, los cuales serán respondidos de acuerdo a lo planteado en cada una de ellas.
3. La prueba tendrá un límite de tiempo de duración de 40 min.

¡Muchas Gracias por su Colaboración!

Test.

1. ¿Has escuchado alguna vez la palabra *Infinito*? ¿Qué significado tiene para ti dicha palabra? ¿Cómo lo describirías, da algunos ejemplos?

2. Considere la siguiente suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\ldots$ ¿Cuál crees que es el valor de esta suma? Explica tu respuesta. (Garbín, 2000)

3. Dada la siguiente sucesión $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \ldots$ ¿Cuál crees que es el valor del último término de esta sucesión? Razone su respuesta.

4. Dados dos segmentos de recta *AB* y *CD* que se muestran a continuación:

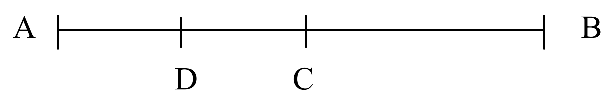
A ______________________________ B

C _______________ D

¿En cuál de los dos segmentos existe una mayor cantidad de puntos? Justifique su respuesta.

5. ¿Tendrá el conjunto de los números naturales $\boldsymbol{N} = \{0,1,2,3,4, \dots, n\}$ más elementos que el conjunto $[0,1]$ de lo números reales? Justifique su respuesta.

6. Dado el segmento *AB*:



Si este se divide a la mitad, digamos en el punto *C*, se forma el segmento *AC*. Si este segmento se divide a la mitad, en el punto *D*, se obtiene el segmento *AD*. Si este proceso continua realizándose ¿Tendría fin este proceso? Explique su respuesta.

7. Dados dos conjuntos, el conjunto $\boldsymbol{A} = \{-5,0,2,4,6,8\}$ y el conjunto $\boldsymbol{B} = \{-8, -1,3,5, \{1,2,3,4,5,6,7, \dots\}\}$. ¿Cuántos elementos posee cada conjunto? además explique si los dos conjuntos poseen una mayor o menor o igual cantidad de elementos. Justifique su respuesta.

8. Un día Aquiles y la Tortuga compiten en una carrera. Si la tortuga inicia la carrera con una leve ventaja con respecto al heleno, antes de alcanzar a la Tortuga, Aquiles debe recorrer el espacio que le separaba inicialmente de ella y, mientras tanto, la Tortuga habrá avanzado una distancia, por pequeña que sea. De igual manera, Aquiles debe recorrer esta distancia que ahora le separa de la Tortuga antes de alcanzarla, dando ocasión al animal de avanzar otro poco, aunque sea una distancia pequeña, con lo que de nuevo surge una separación entre ambos corredores que Aquiles ha de cubrir en un tiempo durante el cual la Tortuga adelantará otra distancia muy minúscula, y así,

sucesivamente, siempre existirá una separación entre los dos corredores. ¿Podrá o no Aquiles alcanzar a la Tortuga? Explique su respuesta.

9. Dado un cuadrado de 4cm de lado y de área 16 cm^2 y que se divide en cuatro partes iguales como se muestra en la *figura (a)*, Luego, a ese mismo cuadrado se le vuelve a aplicar una subdivisión pero ahora al cuadrado Nº 4, obteniendo otros cuatro cuadrados iguales, como se observa en la *figura (b)*. Si se sigue realizando este proceso de subdivisión al último cuadrado de los cuadrados que resulten de la subdivisión anterior, como se ejemplifica en la *figura (c)*, y así realizándose sucesivamente de manera como se ha ido describiendo, tantas veces como se pueda efectuar ¿Cuántos cuadrados se pueden obtener? Justifique su respuesta.

Figura (a)

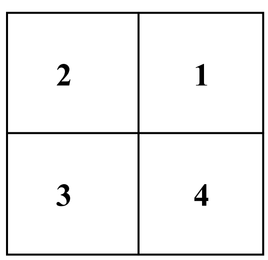


Figura (b)

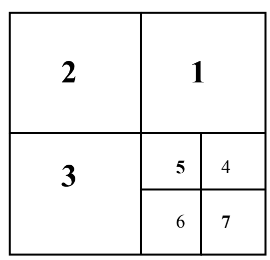
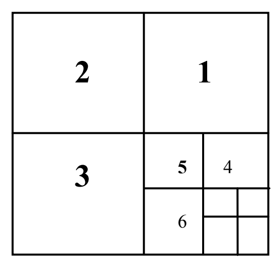


Figura (c)



Además, si se suma el área de todos los cuadrados conseguidos como resultados de las subdivisiones progresivas ¿Cuál sería el valor total de esta área? Argumente razonadamente su respuesta.

10. El economista Vilfredo Pareto estableció la siguiente ley de distribución del ingreso: el número de individuos ***N*** de una población de tamaño ***a***, cuyos ingresos exceden ***x*** es: $N_{(x)} = \frac{a}{x^b}$, donde ***b*** es un parámetro que depende de la población. Usualmente se toma 1,5 como valor aproximado de ***b***. ¿Qué sucede con el número de individuos ***N*** si el ingreso se hace muy grande? Explique su respuesta. (UNA, 2005)

11. Sean los siguientes conjuntos: el conjunto de los números naturales ***N***, el conjunto de los números enteros ***Z***, el conjunto de los números racionales ***Q*** y el conjunto de los números reales ***R*** ¿Qué relaciones y características podrías establecer entre ellos?

Además, si se comparan entre sí, según tu opinión, ¿Quien tiene una mayor o menor o igual cantidad de elementos? De ser posible la clasificación, manifiéstala justificando tu respuesta.

12. Considera la siguiente suma $0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + \cdots$ ¿Cuál crees que es el resultado?

13. Considera un número positivo cualquiera; a continuación lo divides entre dos, el resultado lo vuelves a dividir entre dos, el resultado de nuevo entre dos y así sucesivamente. ¿Qué resultado se obtendrá al final?, ¿por qué? (Belmonte, 2010)

____
____
____

14. Considera la siguiente circunferencia *(figura a)* si se traza un polígono regular de tres lados inscrito en esta, resulta un triángulo equilátero *(figura b)*. Si en vez de trazar un triangulo aumentáramos el numero de lados a cuatro, al polígono, obtendríamos un cuadrado *(figura c)*. Ahora, si en vez de ser cuatro lados fueran cinco, se tendría un pentágono *(figura d)*. Si fueran seis, un hexágono *(figura e)*. Y así sucesivamente, se van obteniendo polígonos regulares al ir aumentando el número de sus lados ¿este proceso tendrá fin o tiene un límite si se sigue el incremento? Justifique su respuesta.

Figura a

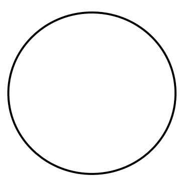


Figura b

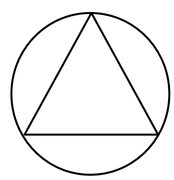


Figura c

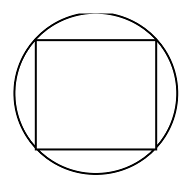


Figura d

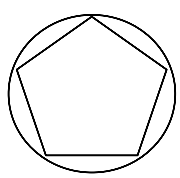
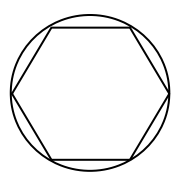


Figura e



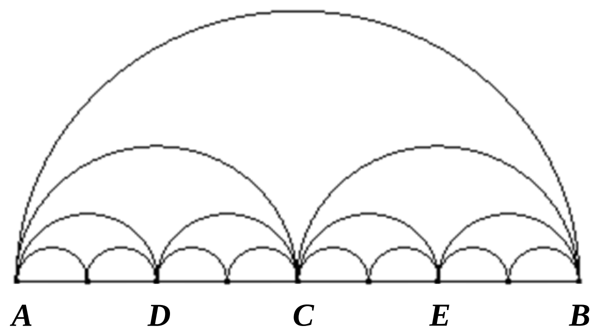
.....

____
____
____
____

Si se sigue aumentando el número de lados hasta una cantidad muy elevada ¿Qué sucede con el polígono inscrito en la circunferencia? ¿Qué conclusiones se puede establecer al respecto?

____
____
____
____

15. Sea el semicírculo de diámetro AB, ver figura, en el cual se divide el diámetro en dos partes iguales, determinado por el punto medio C, obteniéndose los segmentos AC y BC. Luego, se trazan sobre ellos dos semicírculos, tal como se puede observar en la figura, para seguidamente repetir el procedimiento. Si se continúan dividiendo los segmentos obtenidos y trazando semicírculos sobre ellos ¿Qué sucede con la longitud de la línea del diámetro y los semicírculos que se van trazando a medida que se disminuye la longitud de cada subsegmento? Justifique su respuesta.



____
____
____
____

Además, si se suman las áreas de todos los semicírculos ¿Qué valor se obtendría? Explique su respuesta

____
____
____

16. Dada la siguiente función $f_{(x)} = \frac{1}{2^x}$, al darle valores enteros positivos, arbitrarios y consecutivos a la función ¿Qué Observa? Razone su respuesta.

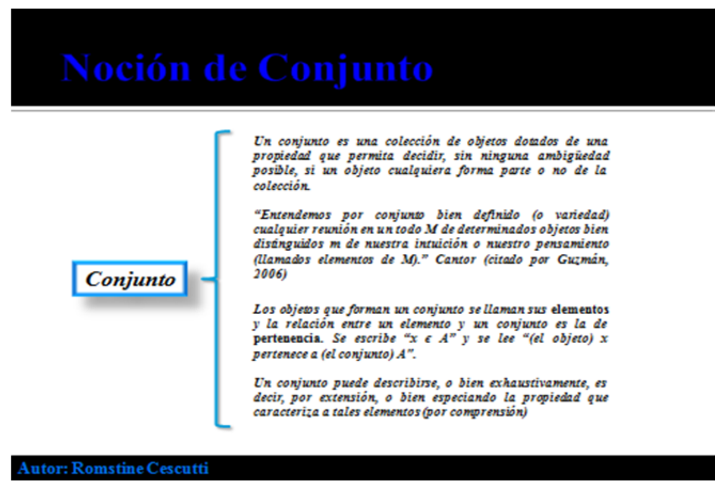
____
____
____

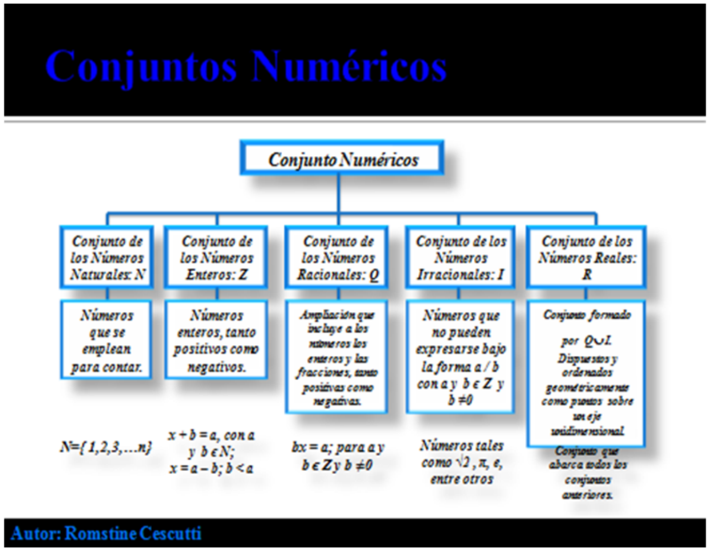
¿Qué sucede cuando el valor de la variable se hace muy grande? Justifique su respuesta. Además, realice una grafica aproximada de esta función.

____
____
____

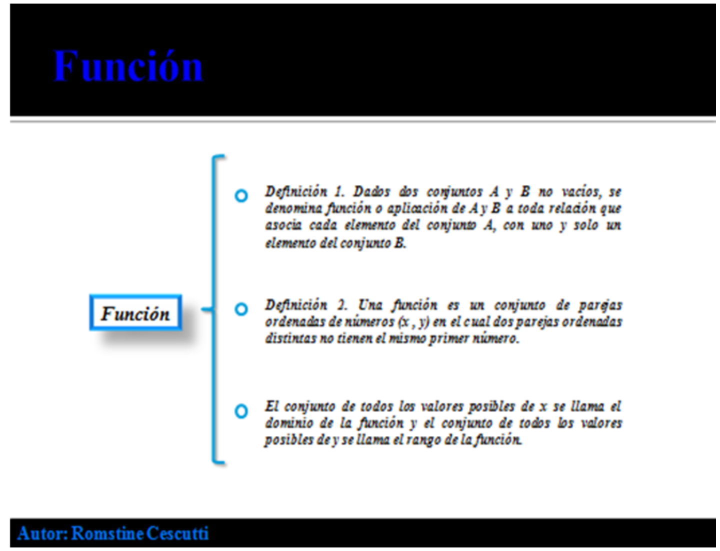
Gráfica:

Taller aplicado a los estudiantes de la asignatura de Calculo II pertenecientes a la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Carabobo.

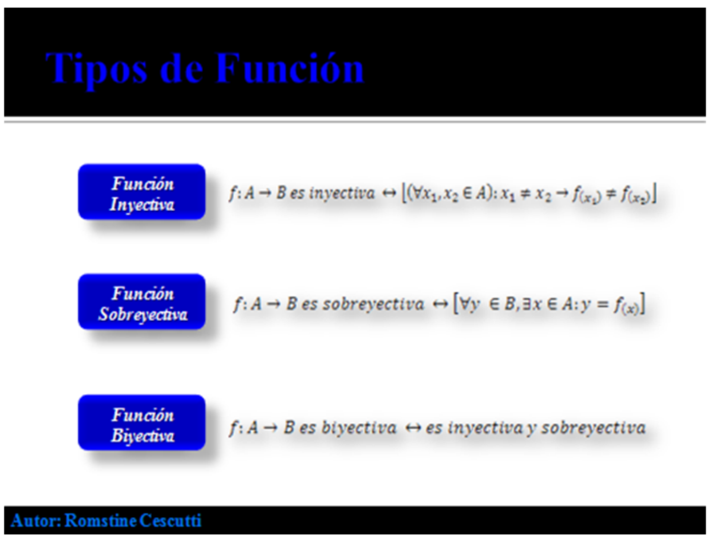




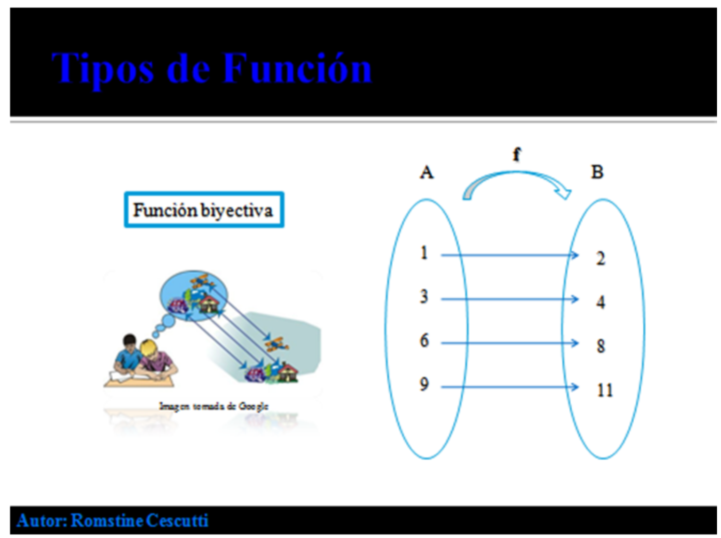
Conjuntos Numéricos
Conjunto Numéricos
Conjunto de los Números Naturales: N
Conjunto de los Números Enteros: Z
Conjunto de los Números Racionales: Q
Conjunto de los Números Irracionales: I
Conjunto de los Números Reales: R
Números que se emplean para contar.
Números enteros, tanto positivos como negativos.
Ampliación que incluye a los números los enteros y las fracciones, tanto positivas como negativas.
Números que no pueden expresarse bajo la forma a / b con a y b ϵ Z y b ≠0
Conjunto formado por Q∪I. Dispuestos y ordenados geométricamente como puntos sobre un eje unidimensional.
N={ 1,2,3,…n}
x + b = a, con a y b ϵ N; x = a – b; b < a
bx = a; para a y b ϵ Z y b ≠0
Números tales como √2 , π, e, entre otros
Conjunto que abarca todos los conjuntos anteriores.
Autor: Romstine Cescutti



Función
Función
Definición 1. Dados dos conjuntos A y B no vacios, se denomina función o aplicación de A y B a toda relación que asocia cada elemento del conjunto A, con uno y solo un elemento del conjunto B.
Definición 2. Una función es un conjunto de parejas ordenadas de números (x , y) en el cual dos parejas ordenadas distintas no tienen el mismo primer número.
El conjunto de todos los valores posibles de x se llama el dominio de la función y el conjunto de todos los valores posibles de y se llama el rango de la función.
Autor: Romstine Cescutti



Tipos de Función
Función Inyectiva
$f: A \to B$ es inyectiva $\leftrightarrow [(\forall x_1, x_2 \in A): x_1 \neq x_2 \to f_{(x_1)} \neq f_{(x_2)}]$
Función Sobreyectiva
$f: A \to B$ es sobreyectiva $\leftrightarrow [\forall y \in B, \exists x \in A: y = f_{(x)}]$
Función Biyectiva
$f: A \to B$ es biyectiva $\leftrightarrow$ es inyectiva y sobreyectiva
Autor: Romstine Cescutti



Tipos de Función
Función biyectiva
Imagen tomada de Google
A
f
B
1
3
6
9
2
4
8
11
Autor: Romstine Cescutti

La idea de Número

La Noción de Clase

"Se entiende por colección o clase a toda agrupación de objetos que está determinada o descrita por una propiedad enunciada por medio de un lenguaje preciso. Así, dada una propiedad, los objetos que cumplen esa propiedad son exactamente los que pertenecen a la clase o colección determinada por esa propiedad" *(UNAM).*

Sin embargo, hay que tener presente que:

Todo conjunto es una clase, pero no toda clase es un conjunto

Autor: Romstine Cescutti

La idea de Número

La Paradoja de Russell

Proposición

"La clase de todos los objetos x tales que cumplen la propiedad "x no pertenece a x", no es un conjunto".

Supongamos que la clase "C" es un conjunto, entonces:

Si C no pertenece a C, C cumple la propiedad que caracteriza a la clase, entonces C pertenece a C.

Si C pertenece a C, entonces C debe cumplir la propiedad que caracteriza a la clase, y por lo tanto, se tiene que C no pertenece a C.

Como se puede evidenciar, se tiene que si:

[(C no pertenece a C) ∨ (C pertenece a C)] → [(C pertenece a C) ∧ (C no pertenece a C)]

Lo cual es un absurdo, por lo tanto no es posible que dicha clase sea un conjunto. Esto lo llamo Russell Clase Propia.

Autor: Romstine Cescutti

La idea de Número

El acto de contar

Imagen tomada de Google

¿Qué tienen en común las imágenes mostradas?

1 = {•}
2 = {•, •}
3 = {•,•,•}
4 = {•,•,•, •}
⋮ ⋮ ⋮
N = {•,•,•,•,…}

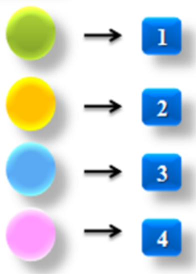
Autor: Romstine Cescutti

La idea de Número

El acto de contar

Correspondencia exhaustiva y uno a uno entre los elementos del conjunto con los elementos del conjunto {1,2,3,….,k}

Número es cualquier cosa que es el número de una clase.



Se dice que un conjunto A tiene cardinal n si existe una función biyectiva *f* : {1, . . . , *n*} → *A*, en este sentido se puede manifestar que el cardinal no es más que el número de elementos de un conjunto. Además, este cardinal, siempre y cuando sea finito, también recibe el nombre de tamaño del conjunto. Para un conjunto A denotamos Cardinal o Tamaño de A = |A| = #A

Autor: Romstine Cescutti

La idea de Número

De lo anterior, se desprenden tres aspectos:

1. "Si nos abstraemos de la naturaleza de los elementos y el orden en el cual están dados, lo que obtenemos será el cardinal o potencia del conjunto." Cantor (citado por *Guzmán, 2006*)

2. Se debe comprender "el número como el número de una cantidad" y proporcionar una aplicación para el concepto así definido demostrando la existencia de conjuntos de cardinalidad arbitraria (Russell, citado por Otte, 2003).

3. De esta manera "Un número es la clase de todos los conjuntos que son equivalentes (es decir, que tienen la misma cantidad de elementos)" (Tamariz, 2002)

Autor: Romstine Cescutti

Conjuntos Finitos e Infinitos

Georg Cantor

Concibió dos tipos de conjuntos

1. Conjuntos Finitos

2. Conjuntos Infinitos

"A es finito si es vacío o si existe un número natural k y una función biyectiva entre los elementos de A y los primeros k números naturales. Y un conjunto es infinito si no existe una función con estas características". (Tamariz, 2002)

Por otro lado, "Un conjunto A es infinito si algún subconjunto propio B de A es equipolente a A; en cualquier otro caso A es infinito" Dedekind (1882); donde el criterio de equipotencia viene dado por la relación exhaustiva uno a uno del conjunto con el conjunto de los números naturales.

Autor: Romstine Cescutti

Comparación entre Conjuntos Infinitos

Conjuntos Infinitos

1. Conjuntos Infinitos numerables. → *Se pueden colocar en relación biyectiva con N. su cardinal es $\aleph_0$*

2. Conjuntos Infinitos no numerables. → *Son aquellos para los cuales es imposible establecer una aplicación f: A→N que sea biyectiva. Su cardinal es identificado con $\aleph_1$*

En caso de no existir una aplicación "f" biyectiva, uno de los dos conjuntos tiene mas elementos que el otro.

1. A tiene más elementos que B si existe una aplicación g : A→B que sea sobreyectiva.

2. A tiene menos elementos que B si existe una aplicación h : A→B entre ellos que sea inyectiva.

Autor: Romstine Cescutti

Conjuntos Infinitos Numerables

Cantor demostró la numerabilidad de los conjuntos N, Z y Q al colocarlos en correspondencia biunívoca con el conjunto {1,2,3,…,n}

$|N| = |Z| = |Q| = \aleph_0$

Demostración 1. Numerabilidad del conjunto de los números pares 2n

1	2	3	…	n	…
↕	↕	↕	…	↕	…
2	4	6	…	2n	…

Autor: Romstine Cescutti

Conjuntos Infinitos Numerables

Numerabilidad del conjunto de los números naturales (N)

1	2	3	…	k	…
↕	↕	↕	…	↕	…
1	2	3	…	n	…

Numerabilidad del conjunto de los números enteros (Z). Por medio de la función:

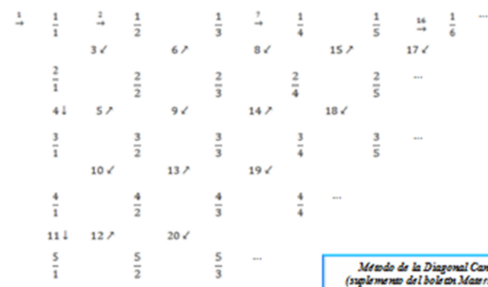
$$f: Z \to N, f_{(n)} = \begin{cases} 2n - 2 \text{ si } n \geq 1 \\ 2 - 2n \text{ si } n \leq 0 \end{cases}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	…
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	…
1	0	2	-1	3	-2	4	-3	…

Autor: Romstine Cescutti

Conjuntos Infinitos Numerables

Numerabilidad del conjunto de los números racionales (Q)



Método de la Diagonal Cantor (suplemento del boletín Materraña)

Autor: Romstine Cescutti

Conjuntos Infinitos no Numerables

Por otro lado, Cantor llego a descubrir la existencia de conjuntos no numerables, tal es el caso de los números reales (R). Al número de elementos en R lo denotamos por $\mathfrak{c}$ y recibe el nombre de el Continuo.

$$|R| = \aleph_1$$

decimal 1 ...... 0,164209876594 ...
decimal 2 ...... 0,314567345689 ...
decimal 3 ...... 0,333333333333 ...
decimal 4 ...... 0,521000099988 ...
decimal 5 ...... 0,444443190274 ...
decimal 6 ...... 0, 10004287581 ....
decimal 7 ...... 0, 23414159478 ....
decimal 8 ...... 0,543219876554 ...
decimal 9 ...... 0,123456789101 ...
decimal 10 ..... 0,888888888888 ...
decimal 11 ..... 0,122333444455 ...

Autor: Romstine Cescutti

El Continúo

Demostración

Supongamos que (0,1) es numerable, y supongamos expresados todos ellos como decimales que no terminan en una sucesión de ceros.

Si los números de $0 < x < 1$ pudieran ordenarse en un orden numerable, entonces:

$$a_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13} \dots$$
$$a_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23} \dots$$
$$a_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33} \dots$$
$$\dots$$

Donde a_{ij} es un dígito entre 0 y 9, ambos incluidos.

Cantor construye un decimal infinito distinto de todos los de la lista

$$0, b_1b_2b_3b_4 \dots \begin{cases} b_k = 9 \text{ si } a_{kk} = 1 \\ b_k = 1 \text{ si } a_{kk} \neq 1 \end{cases}$$

Por lo que se llega a un absurdo, ya que aparece un nuevo decimal que pertenece al intervalo (0,1), pero que es diferente a todos de la sucesión dada al principio.

$$|R| = \mathfrak{c} = \aleph_1$$

Autor: Romstine Cescutti

El Conjunto Potencia

Conjunto potencia

Dado un conjunto A podemos hablar del conjunto potencia P(A) que es el conjunto de todos los subconjuntos de A. si la cantidad de elementos de un conjunto A es n, entonces el número de elementos de P(A) es igual a 2^n

Ejemplo: A={1,3,6}, entonces la
$P(A) = \{\phi, \{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

De aquí surgen tres hechos importantes (Tamariz, 2002)

1. Para cualquier conjunto A, P(A) tiene estrictamente más elementos que A

2. Existe una infinidad de números infinitos diferentes.

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 <, \dots, < \aleph_k <, \dots$$

3. El conjunto de números reales R tiene la misma cantidad de elementos que P(N). Si A es infinito, entonces el numero de elementos de P(A) es $c = 2^{\aleph_0}$

Autor: Romstine Cescutti

La Hipótesis del Continúo

Se tiene que $\aleph_0$ es el número que designa a la cantidad que existe de números naturales, y *c* designa la cantidad de puntos que hay en una recta. Además, como hemos dicho, $\aleph_0 < c$.

Se le llama *el problema del continuo* problema que planteó Cantor y que no pudo resolver. El cual manifiesta: ¿Existe un número infinito *m* que satisfaga la relación $\aleph_0 < m < c$. *A la negación de tal afirmación se le denominó la hipótesis del continuo, esto es* $c = \aleph_1$

Autor: Romstine Cescutti

La Paradoja de Zenón

"Aquiles, el de los pies ligeros, nunca alcanzará a la tortuga que avanza lentamente unos cuantos metros por delante de él. Pues cuando Aquiles alcance donde estaba la tortuga, esta ya estará un poco más adelante; y cuando de nuevo Aquiles alcance ese lugar, la tortuga habrá avanzado un poco más. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo a donde estaba la tortuga, esta ha avanzado un poco más… De este modo, la tortuga estará siempre por delante de Aquiles" (Zenón de Elea, 490-425 AC).

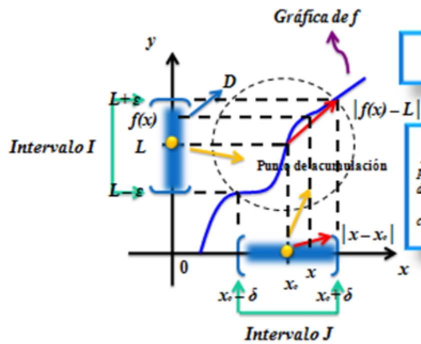
Autor: Romstine Cescutti

La Paradoja de Zenón

¿Alcanza o no a la tortuga?

Autor: Romstine Cescutti

La idea de Límite



$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
$f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

Sea D un conjunto de R. Un punto $x_0 \in R$ se dice que es un punto límite o de acumulación del conjunto D si todo intervalo abierto J que contiene a x_0, contiene puntos del conjunto D distintos de x_0.

Autor: Romstine Cescutti

"La cuestión del infinito, lejos de concernir tan solo a los intereses de disciplinas especializadas, concierne a la dignidad misma del espíritu humano".
David Hilbert (1921)

MUCHAS GRACIAS POR SU ATENCIÓN

Autor: Romstine Cescutti

Participación de los estudiantes pertenecientes a la asignatura de Calculo II en el Taller.