



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
CEBIOMECH-UC



DETERMINACIÓN DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZO (MODO I) EN HUESO CORTICAL BOVINO

Carlos Ramos
Renny Barrientos

Naguanagua, 5 de Junio de 2012



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
CEBIOMECC-UC



DETERMINACIÓN DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE ESFUERZO (MODO I) EN HUESO CORTICAL BOVINO

*Trabajo especial de grado presentado ante la ilustre Universidad de
Carabobo para optar al título de Ingeniero Mecánico*

Tutor:
David Ojeda

Autores:
Carlos Ramos
Renny Barrientos

Naguanagua, 5 de Junio de 2012



UNIVERSIDAD DE CARABOBO
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA
CEBIOMECC-UC



CERTIFICADO DE APROBACIÓN

Quienes suscriben, Miembros del Jurado designado por el Consejo de Escuela de Ingeniería Mecánica para examinar la Tesis de Pregrado titulada “**Determinación del factor de intensidad de esfuerzo (modo I) en hueso cortical bovino**”, presentada por los bachilleres: **Carlos Ramos** y **Renny Barrientos**, portadores de la Cédula de Identidad N°: **17.251.734** y **18.468.773**, respectivamente; hacemos constar que hemos revisado y aprobado el mencionado trabajo.

Prof. David Ojeda, *Ing.*
Presidente del Jurado

Prof. xxxxx xxxxx, *Ing.*
Miembro del Jurado

Prof. xxxxx xxxxx, *Ing.*
Miembro del Jurado

Naguanagua, XX de mayo/junio de 2012

Agradecimientos

Quisiéramos expresar, sin tomar en consideración un orden específico, nuestro más sincero agradecimiento primeramente a *Dios* por darnos salud y permitirnos culminar este trabajo con gratificación, a nuestros *Padres, Familiares y Amigos* por el apoyo incondicional brindado en el transcurso de la carrera, y a los *Profesores Luis Escalona, Brizeida Gámez y David Ojeda*, por sus consejos, guiatura y sugerencias oportunas durante el desarrollo de este trabajo de investigación. De igual manera agradecemos a las siguientes instituciones por el apoyo prestado: Centro de Biomecánica de la Universidad de Carabobo (CEBIOMEC-UC); Laboratorio de Procesos y Fabricación; Laboratorio de Materiales; y a la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Carabobo.

Resumen

La siguiente investigación presenta el estudio del comportamiento del hueso cortical femoral de bovino, con la finalidad de determinar el factor de intensidad de esfuerzo en modo I. Dicha investigación se vale de un método experimental en el cuál las probetas de tipo compacto hechas de tejido cortical, son sometidas a carga de tracción hasta su colapso. Estos datos experimentales son comparados con un modelo computacional el cuál simula el crecimiento de grietas (Franc2D, V3.1) mediante el método de los elementos finitos, el cual arroja los resultados del factor de intensidad de esfuerzos de una manera precisa. Este estudio es de un gran aporte a la comunidad que está haciendo investigaciones en el campo de la bioingeniería ya que se puede predecir una falla inminente en el hueso antes de que esta misma se produzca, teniendo así una gran herramienta de evaluación clínica para deportistas, atletas y la comunidad en general.

Introducción

Las fracturas diafisarias del fémur que ocurren de una manera repentina sin una causa aparente, son más comunes de lo que en realidad todos piensan, y no solamente en el fémur, ocurre muy a menudo en huesos largos como: tibia, peroné, radio, cubito. Esto se debe principalmente al desgaste o fatiga que tienen que soportar los huesos debido a las cargas a las cuales estos se encuentran sometidos diariamente. Estas cargas o esfuerzos combinados hacen que el hueso sufra una serie de daños y se vaya debilitando poco a poco por lo que se forman microgrietas con el tiempo lo que conlleva a una fractura inminente.

Se sabe que el tejido cortical no es un material inerte, por lo que siempre se está regenerando constantemente y con ello repara todos los microdaños que pueda tener el hueso. No obstante, hay casos en los que el hueso no se puede regenerar con la velocidad que sufre los daños, como pasa por ejemplo en atletas y en personas con deficiencia en los huesos, por lo cual la regeneración es muy lenta y al final termina colapsando.

Dado lo anterior el Centro de Biomecánica de la Universidad de Carabobo, plantea la investigación y el desarrollo de un método para la reducción de fracturas, en este caso particular, se presenta una investigación cuyo propósito está orientado a determinar el factor de intensidad de esfuerzos (modo I) en hueso cortical bovino. Cabe destacar

que las propiedades mecánicas del hueso de bovino son muy similares a las del hueso humano.

Para lograr este propósito es necesario ensayar probetas de tipo compacto de hueso cortical a tracción y comparar los resultados con el programa computacional Franc2D el cual se encarga de simular el crecimiento de grietas y el comportamientos que ellas conlleva aplicando el método de los elementos finitos.

Con la determinación de este factor se puede predecir en cuanto tiempo puede crecer una grieta en el hueso y la tendencia que puede tener, siendo de gran aporte a la comunidad médica y científica.

Índice de figuras

2.1 Tipos de huesos según su forma y tamaño	12
2.2 Características de un hueso largo	13
2.3 Partes constitutivas de un hueso	16
2.4 Componentes del tejido óseo	17
2.5 Respuesta ósea ante los modos de carga básicos	21
2.6 Representación gráfica de la región de Paris	25
2.7 Placa infinita de espesor "t" sometida a un esfuerzo de tracción " σ "	31
2.8 Placa sometida a los diferentes tipos de cargas	33
2.9 Orientación de la probeta (ASTM E 399) referidas a la resistencia a la fractura	34
3.1 (a) Zona de concentración de esfuerzos. (b) Punto inicial de la grieta. (c) Inicio de la simulación de crecimiento de grieta. (d) Simulación terminada	41
3.2 Eliminación de irregularidades del hueso compacto en la desbastadora de banco	43
3.3 Cortes precisos de ángulos rectos con una cortadora de disco con punta de diamante	43
3.4 Agujeros hechos con un taladro de banco	44
3.5 Dimensiones estándares para la fabricación de probetas C(T)	45
3.6 Presentación de las probetas C(T) ya terminadas	46
4.1 Discretización con elementos finitos	48
4.2 Sistema de análisis	51
4.3 Viga de estudio	52
4.4 Discretización de la viga	52
4.5 Continuo elástico	54
4.6 Elemento triangular	60
5.1 Máquina de ensayo universal Galdabini	66

5.2 Orientación de la probeta tracción-compacta de fémur bovino para permitir la extensión de grietas en la dirección proximo-distal (eje Y)	67
5.3 Secuencia del estiramiento de la probeta hasta su colapso	68
5.4 Ensayo de tracción en dirección tangencial (X) a la probeta n° 1 de tejido cortical	69
5.5 Principales tipos de registros de carga-desplazamiento	69
5.6 Ensayo de tracción en dirección tangencial (X) a la probeta n° 2 de tejido cortical	72
5.7 Ensayo de tracción en dirección tangencial (X) a la probeta n° 3 de tejido cortical	72
5.8 Ensayo de tracción en dirección tangencial (X) a la probeta n° 4 de tejido cortical	73
5.9 Ensayo de tracción en dirección tangencial (X) a la probeta n° 5 de tejido cortical	73
5.10 Ensayo de tracción en dirección tangencial (X) a la probeta n°6 de tejido cortical	74
5.11 Ensayos de tracción en dirección tangencial (X) a todas las probetas de tejido cortical	74
5.12 Desviación estándar respecto al promedio de curvas	77
6.1 Probeta n° 1 C(T) (dimensiones en pulgadas)	82
6.2 Soporte cilíndrico y aplicación de la carga en ANSYS	83
6.3 Soporte cilíndrico y aplicación de la carga en FRANC2D	83
6.4 Esfuerzos de Von-Mises en ANSYS	84
6.5 Esfuerzos de Von-Mises en FRANC2D	84
6.6 Propiedades elásticas distribuidas en el hueso cortical	87
6.7 Carga y soporte cilíndrico en la probeta	88
6.8 Falla en el material	89
6.9 Elemento Q8	90
6.10 Discretizado tipo Q8	91
6.11 Factor de intensidad de esfuerzos probeta n° 1 C(T)	92
6.12 Factor de intensidad de esfuerzos (grieta propagada)	93
6.13 Grieta propagada probeta N° 1 y N° 5 respectivamente	94
6.14 Comportamiento del factor de intensidad de esfuerzos vs grieta propagada probeta N° 1	95
6.15 Comportamiento del factor de intensidad de esfuerzos vs grieta propagada probeta N° 5	95
6.16 Grieta propagada probeta N° 1 y N° 5 respectivamente hasta casi su separación	96
6.17 Comportamiento asintótico del factor de intensidad de esfuerzos vs grieta propagada probeta N° 1	96

6.18 Comportamiento asintótico del factor de intensidad de esfuerzos vs grieta propagada probeta N° 5	97
6.19 Grieta propagada simulación (a la izquierda) y experimentalmente (a la derecha) probeta N° 5	101
6.20 Factor de intensidad vs. longitud de grieta de probeta N° 5	101
6.21 Numero de ciclos Vs Longitud de grieta de probeta N° 1	103
7.1 Propagación de grieta experimentalmente	107
7.2 Comportamiento de propagación de grieta en el hueso	107

Índice general

<i>Índice general</i>	i
<i>Índice de figuras</i>	v
<i>Índice de tablas</i>	ix
<i>Introducción</i>	1
CAPÍTULO 1. <i>El Problema</i>	3
1.1 Introducción	3
1.2 Situación problemática	4
1.3 Objetivos	5
1.3.1 Objetivo General	5
1.3.2 Objetivos Específicos	5
1.4 Justificación	5
1.5 Alcance	6
1.6 Limitaciones	6
1.7 Antecedentes	7
CAPÍTULO 2. <i>Marco Teórico</i>	11
2.1 Tejido óseo	11
2.2 Estructura del tejido óseo	14
2.3 Propiedades mecánicas del hueso cortical	17
2.4 Biomecánica y mecanismo de fractura ósea	19
2.5 Mecánica de la fractura y propagación de grietas a fatiga	22
2.5.1 Propagación de grietas a fatiga	23
2.6 Teoría de fracturas	29
2.6.1 Teoría de fracturas de Griffith's para materiales frágiles	30
2.6.2 Parámetros de fracturas basados en mecánica elasto-lineal de la fractura (MELF)	33
2.6.2.1 Modos primarios de carga	33
2.6.2.2 Efectos del modo de carga	34
2.6.2.3 Efectos de la orientación de la extracción de la probeta en	35

hueso	
2.6.2.4 Factor de intensidad de esfuerzo "K"	36
CAPÍTULO 3. Marco Metodológico	39
3.1 Investigación	39
3.2 Simulación de la propagación de grietas en el hueso cortical mediante un software de elementos finitos	40
3.3 Preparación del hueso y mecanizado de las probetas	41
3.3.1 Preparación del hueso femoral de bovino	41
3.3.2 Mecanizado de las probetas	42
3.3.2.1 Desbaste	42
3.3.2.2 Cortes	43
3.3.2.3 Agujeros	44
3.3.2.4 Entalladura	44
3.3.2.5 Pre-Grieta	44
3.3.3 Geometría de las probetas	45
3.4 Pruebas experimentales	46
CAPÍTULO 4. Método de Elementos Finitos	47
4.1 Breve historia del método de los elementos finitos	48
4.2 Conceptos generales del método	50
4.3 Principios generales aplicados a un continuo elástico	54
4.3.1 Ecuaciones de equilibrio. Principio de los trabajos virtuales	54
4.3.2 Funciones de interpolación	57
4.3.3 Síntesis de la características globales	58
4.3.4 Imposición de condiciones de contorno. Solución	59
4.4 Planteamiento y formulación genéricos del método de los elementos finitos	59
CAPÍTULO 5. Resultados Experimentales	65
5.1 Objetivo	65
5.2 Materiales y método	65
5.2.1 Materiales Utilizados	66
5.2.2 Método empleado	66
CAPÍTULO 6. Resultados Numéricos	81
6.1 Validación numérica	81
6.2 Diseño de la probeta	85
6.2.1 Material	86
6.2.2 Condiciones de contorno	87
6.3 Discretización de los especímenes mediante el método de los elementos finitos	89

6.4 Resultados obtenidos	91
6.4.1 Factor de intensidad de esfuerzo en modo I	92
6.4.1.1 Condición inicial	92
6.4.1.2 Propagación de la falla	93
6.5 Comparación de los resultados experimentales y numéricos	98
6.5.1 Factor de intensidad de esfuerzos	99
6.5.1.1 Condición inicial	99
6.5.1.2 Propagación de la falla	100
6.5.1.2.1 Propagación de la falla intermedia	100
CAPÍTULO 7. Conclusiones y Recomendaciones	105
7.1 Conclusiones	105
7.2 Recomendaciones	108
REFERENCIAS	109

Índice de tablas

2.1 Propiedades mecánicas del hueso	19
2.2 Valores típicos de ΔK_{lim} en materiales de ingeniería	26
2.3 Algunos valores típicos de C y m	27
5.1 Dimensiones de las probetas mecanizadas	67
5.2 Resultados de K_Q de cada probeta	75
5.3 Rango de valores del factor de intensidad de esfuerzo crítico (K_{Ic}) en hueso cortical	78
6.1 Propiedades elásticas del hueso cortical	82
6.2 Dimensiones de los especímenes a evaluar	86
6.3 Propiedades mecánicas ortotrópicas del hueso cortical	86
6.4 Cargas en las probetas	88
6.5 Factor de intensidad de esfuerzos en la condición inicial de las probetas	92
6.6 Factor de intensidad de esfuerzos luego de propagada la grieta	94
6.7 Factor de intensidad de esfuerzos luego de propagada la grieta hasta casi su rotura final	97
6.8 Factor de intensidad (experimental) probeta N° 1	99
6.9 Error porcentual entre los ensayos experimentales y los resultados numéricos en la condición inicial	99
6.10 Error porcentual entre los ensayos experimentales y los resultados numéricos luego de propagada la grieta	102
6.11 Error porcentual entre los ensayos experimentales y los resultados numéricos propagación de falla final	102
6.12 Vida útil de las probetas	104

CAPÍTULO 1

El Problema

1.1 INTRODUCCIÓN

Las cargas mecánicas cumplen un papel importante en el crecimiento y mantenimiento del esqueleto humano [Ramtani et al, 2004]. El microdaño es generado por las cargas cíclicas diarias a las cuales se someten los huesos; dicho microdaño es remodelado por sistemas naturales biológicos. Estos sistemas naturales son procesos de adaptación mediante los cuales el tejido óseo altera su masa y estructura para adaptarse al entorno mecánico al que se encuentra sometido [Burger et al, 1999].

Existen dos tipos básicos de tejido óseo, el hueso cortical (compacto) y el hueso poroso o trabecular. Independientemente de la anatomía microscópica, todos los segmentos de esqueleto se componen de una zona externa de hueso compacto (cortical) y una zona interna de hueso poroso. El hueso cortical es homogéneo, altamente organizado y orientado regularmente y muy resistente. El hueso poroso, en cambio, presenta una estructura poco organizada y orientada aleatoriamente, denominada trabecular (del latín “trabeculae” = vigas pequeñas). La diferencia principal entre ambos tejidos óseos viene dada por la porosidad que en el hueso cortical varía entre el 5% y el 30%, mientras que en el hueso trabecular varía entre el 30 y el 90%.

1.2 SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

Se sabe que la cantidad y la calidad del sistema musculoesquelético disminuye con el envejecimiento y resulta un alto riesgo a una fractura inminente del hueso, y que para los más ancianos, esto pudiera afectarlos de por vida [Nalla et al, 2005]. Desde el punto de vista científico, esto se traduce como la reducción de la densidad del hueso, los cambios en la microestructura, las variaciones en las propiedades del material y las acumulaciones de microgrietas [Najafi et al, 2007]. Además las evaluaciones clínicas con respecto a este tipo de fenómeno, no son tan precisas como lo fueran si se contara con estudios que predijeran el comportamiento mecánico del hueso cortical, es decir, datos de cómo se propagarían las microgrietas en el espécimen (hueso cortical) sometidas a fatiga.

El comportamiento de estructuras agrietadas puede ser determinado si se conocen los factores de intensidad de esfuerzo, razón por la cual durante las tres últimas décadas se han desarrollado numerosas investigaciones para evaluar con diferentes cargas y geometrías las soluciones de dicho factor, mediante la utilización de métodos numéricos.

Dado lo anterior se hace necesario comprender los mecanismos responsables del crecimiento de grietas por fatiga en el hueso cortical, así como los factores que afectan su iniciación y crecimiento, de forma de obtener un modelo de crecimiento de grieta de fatiga en hueso utilizando el método de elementos finitos, para ser empleado como herramienta de predicción en el campo de la medicina y así tener conocimiento sobre los aspectos que deben ser apuntados para reducir el riesgo de fracturas originadas por cargas cíclicas.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo General

Determinar el factor de intensidad de esfuerzo (Modo I) en hueso cortical bovino.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Determinar y ajustar el rango de valores y aplicación de las cargas para el ensayo.
- Estandarizar las probetas (forma y características) de acuerdo a la norma pertinente.
- Predecir y caracterizar las grietas originadas por cargas de fatiga para modelos en 2D de hueso cortical mediante un software de elementos finitos.
- Validar los resultados obtenidos a través del software de elementos finitos con los datos experimentales, obtenidos mediante el dispositivo para dicho propósito.

1.4 JUSTIFICACIÓN

Existen múltiples razones que justifican el interés en estudiar el crecimiento de grieta por fatiga en hueso. En principio porque la falla por fatiga ocurre en humanos y en animales, fenómeno que se ha descrito a través de dos términos médicos, “fractura por esfuerzos” la cual se atribuye a fallas por fatiga que ocurren por ejercicios excesivos, y “fractura por fragilidad” referida a fallas por fatiga causada por baja calidad ósea, como ocurre en personas de avanzada edad y aquellos que sufren de osteoporosis y condiciones asociadas a este padecimiento [Taylor y Lee, 2003].

Una de las propiedades que tiene el hueso es el de detectar y reparar las grietas que son originadas por fatiga, que a su vez es necesario para prevenir la falla del hueso (fractura). [Gámez_b et al, 2007].

Por estas razones se requiere de una investigación de cómo se propagan las grietas a causa de cargas cíclicas a tracción (modo I) a través de un banco de ensayos diseñado, y de la modelación en un programa computacional para predecir la tendencia que han de seguir dichas grietas.

Con esta investigación en el campo de la medicina, podría darse un mejor entendimiento del mecanismo de falla por fatiga y podría conducir a mejorar la evaluación clínica y a optimizar el diseño de implantes ortopédicos.

1.5 ALCANCE

- Desarrollar un modelo de crecimiento de grietas a fatiga en hueso cortical bovino que permita predecir de manera muy precisa la forma y las dimensiones de las grietas y la vida a los ciclos de fatiga; así como otros factores importantes.
- Comparar los resultados obtenidos mediante el software de elementos finitos con los datos experimentales arrojados por el banco de ensayo para la propagación de grietas.

1.6 LIMITACIONES

- Ausencia de un centro de mecanizado equipado adecuadamente para la fabricación de las probetas, de acuerdo con la norma ASTM E 399 - 90.
- Complejidad de las probetas a ser fabricadas debido a sus dimensiones geométricas.
- Dificultad de adquirir buenos especímenes o donantes de hueso femoral humano.

1.7 ANTECEDENTES

En el Laboratorio del Hospital Henry Ford en Detroit, se realizó una investigación en la que se determinó que la carga a fatiga provoca la acumulación de daños que pueden dar lugar al comienzo de una microfisura y dar lugar a una catastrófica falla de los huesos. El objetivo de este estudio fue la de examinar la influencia de cargas a fatiga en el crecimiento de la grieta del hueso cortical de la especie bovina. Las cargas a fatiga reducen la rigidez y la resistencia del hueso al principio de la fractura, la capacidad máxima de carga, y la flexión antes y después de la falla (fractura) en el hueso cortical [Yeni y Fyhrie, 2002].

En el 2005, se determinó que el hueso cortical es un compuesto natural que consiste de una matriz orgánica de un 90% de colágeno tipo I, y otros materiales orgánicos (principalmente proteínas) con una fase mineral de hidroxiapatita. Esto es similar para todos los tejidos mineralizados a base de colágeno, aunque la distribución y la relación de la variable orgánica y las fases minerales con la función del tejido en particular, para el hueso cortical humano, esta relación es aproximadamente de 1:1 por volumen y 1:3 en peso. La composición y estructura, sin embargo, varían de acuerdo a diferentes factores tales como la edad, el sexo, la función fisiológica y la carga mecánica, haciendo del hueso un material muy heterogéneo, con la necesidad de añadir vascularización a la complejidad del tejido [Yang et al, 2005].

En el Laboratorio Nacional Lawrence Berkeley, en Berkeley; California, se investigó que la resistencia a la fractura ha sido el foco de la mecánica de la mayoría de las fracturas en estudios de hueso cortical humano, los huesos vivos siempre están esforzados multiaxialmente. En consecuencia, comprender la fractura en modo mixto, es necesario para determinar si un modo de resistencia a la fractura proporciona la

información adecuada para cuantificar con precisión el riesgo de fractura. En este estudio, se examinó la fractura en modo mixto de hueso cortical humano mediante la caracterización de la tenacidad de fractura de fisuración de iniciación en la orientación transversal del hueso (rotura) en el modo combinado I (apertura a la tracción), además de modo II (Corte) a partir de muestras simétricas y asimétricas cargadas de cuatro puntos de flexión. Considerando que en la mayoría de materiales estructurales, la tenacidad de fractura se incrementa con el modo de aumento-mixidad (es decir, donde el componente de carga de cizallamiento se hace más grande), en la orientación transversal del hueso la situación es bastante diferente. De hecho, la competencia entre la fuerza motriz mecánica máxima aplicada de modo mixto y los más débiles caminos microestructurales del hueso arroja resultados de un comportamiento que es claramente diferente a la mayoría de los materiales frágiles homogéneos. En concreto, en esta orientación, la tenacidad de fractura del hueso disminuyó marcadamente con el modo de aumentar-mixidad. [Zimmermann et al, 2009].

En el Departamento de Ingeniería Mecánica e Industrial de la Universidad de Ryerson, en Ontario; Toronto, se elaboró un modelo para evaluar los daños por fatiga del hueso cortical en cadáveres humanos mediante la incorporación de reducción de la rigidez de los materiales del hueso a medida que progresa el número de ciclos de fatiga. La estructura de la corteza ósea ha sido caracterizada como un material compuesto natural reforzado con fibra que consta de osteonas Havers (Fibras) inserta en el hueso intersticial (matriz) y separados por una débil línea de interfaces de cemento. El modelo propuesto incluye daños, tales como parámetros mecánicos e histológicos como el volumen de fracción de osteonas, edad del donante, la magnitud del esfuerzo cíclico, módulo secante de osteonas, y la fuerza de la línea de cemento de la interfase. La capacidad del modelo de daño se evaluó con base en datos

experimentales, daños por fatiga de las muestras de hueso cortical humano de diferentes grupos de edad, tanto como magnitudes y el número de ciclos de esfuerzos variados. Los resultados obtenidos de las muestras fueron daños del hueso cortical probado por diferentes laboratorios. [Varvani y Najmi, 2009].

La mayoría de los estudios de mecánica de la fractura en la dureza del hueso se han realizado con cargas a tracción. Sin embargo, recientemente en abril de 2010, se demostró que la dureza del hueso cortical humano en la orientación transversal (Corte) es en realidad mucho menor en cortante (modo II) que a la tracción (modo I); un hecho que es fisiológicamente relevante porque el hueso vivo siempre está sometido a cargas multiaxiales. Dado que el hueso es un material que deriva su resistencia a la fractura, principalmente, durante el crecimiento de grieta a través de mecanismos de endurecimiento extrínsecos, tales como la desviación de la grieta y de transición, la evaluación de su dureza se logra mejor a través de mediciones de la grieta de resistencia o por una curva-R, que describe la resistencia a la fractura en función de fisuras de extensión. En consecuencia, en este estudio, se trata de medir por primera vez la dureza a la fractura mediante la curva-R del hueso cortical humano bajo condiciones fisiológicamente relevantes de carga en modo mixto. Se observa que el resultado en modo mixto (modo I y II) la dureza depende en gran medida de la trayectoria de la grieta y es el resultado de la competencia entre los caminos de la fuerza máxima de conducción mecánica y "más débiles" resistencia microestructural. [Zimmermann et al, 2010].

La búsqueda de nuevos materiales para el cuidado de la salud y especialmente para la cirugía reconstructiva de tejidos duros (huesos y dientes) es, en la actualidad, uno de los campos de investigación más interesantes de la ciencia de materiales. El aumento de fracturas

relacionadas con la osteoporosis y pérdida ósea representa actualmente uno de los mayores problemas en este campo. En el futuro, otras enfermedades como la osteoartritis, tendrán una importante repercusión en la salud de la población. Se estima que más de un cincuenta por ciento de todas las personas mayores de 60 años sufrirán enfermedades degenerativas de las articulaciones. Por tanto, ésta área está experimentando un espectacular avance como consecuencia de la necesidad de tratar a un gran número de pacientes, unido al aumento de la expectativa de vida y a la obligación de asegurar a la población una mejor calidad de vida. [Gutiérrez, 2009]

CAPÍTULO 2

Marco Teórico

A continuación se presenta una explicación detallada del tejido óseo a nivel estructural y celular, así como también sus propiedades mecánicas, biomecánica y dinámica, los cuales son puntos muy importantes para el desarrollo de esta investigación. Además se debe considerar la resistencia mecánica del hueso, las ecuaciones matemáticas que rigen su comportamiento y las fuerzas que actúan sobre el tejido óseo a través de un estudio biomecánico. Todo esto es de vital importancia para la evaluación del crecimiento de grietas por fatiga en el hueso, haciendo un especial énfasis en el estudio del hueso cortical.

2.1 TEJIDO ÓSEO

El tejido óseo es un tejido conectivo especializado que está compuesto por células y una sustancia intercelular mineralizada. El hueso cumple muchas funciones como el de sostener el sistema musculoesquelético, proteger los órganos vitales y almacenar minerales. Si bien no todos los huesos son iguales en tamaño y consistencia, en promedio, su composición química es de un 25% de agua, 45% de minerales como fosfato y carbonato de calcio y 30% de materia orgánica, principalmente colágeno y otras proteínas [Gartner et al, 2008].

Los minerales de los huesos no son componentes inertes ni permanecen fijos sino que son constantemente intercambiados y reemplazados junto con los componentes orgánicos en un proceso que se conoce como *remodelación ósea* [Gartner et al, 2008].

El esqueleto proporciona la forma básica del cuerpo, facilita los movimientos, y protege los órganos internos de fuerzas externas. Además, sirve como almacén de sales de calcio y por lo tanto juega un papel importante en el metabolismo del cuerpo. El sistema esquelético de un humano adulto está formado por más de 200 huesos, los cuales pudieran agruparse como cortos, largos, planos o irregulares [Warwick y Williams, 1973], como se muestra en la **Figura 2.1**.

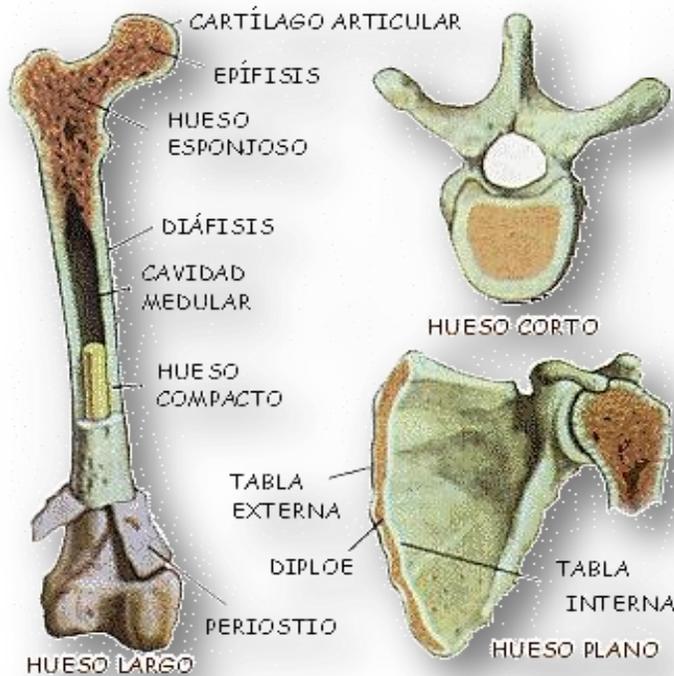


Figura 2.1. Tipos de huesos según su forma y tamaño. [Nather, 2005]

- **Los huesos planos**, tal es el caso de la escápula, están formados por una capa de hueso denso y su interior por una red porosa denominada hueso esponjoso o trabecular. Los intersticios del hueso esponjoso están formados por un tuétano rojo (hematopoiéticos) y/o amarillo (grasa).
- **Los huesos cortos**, tales como el carpo, tarso, y cuerpos de la columna vertebral están formados por hueso trabecular rodeados por una fina capa de hueso cortical.
- **Los huesos largos**, se encuentran en los miembros y están caracterizados por tener una longitud elevada comparada con el diámetro del hueso como por ejemplo: el fémur, la tibia, radio, entre otros (ver Figura 2.2).

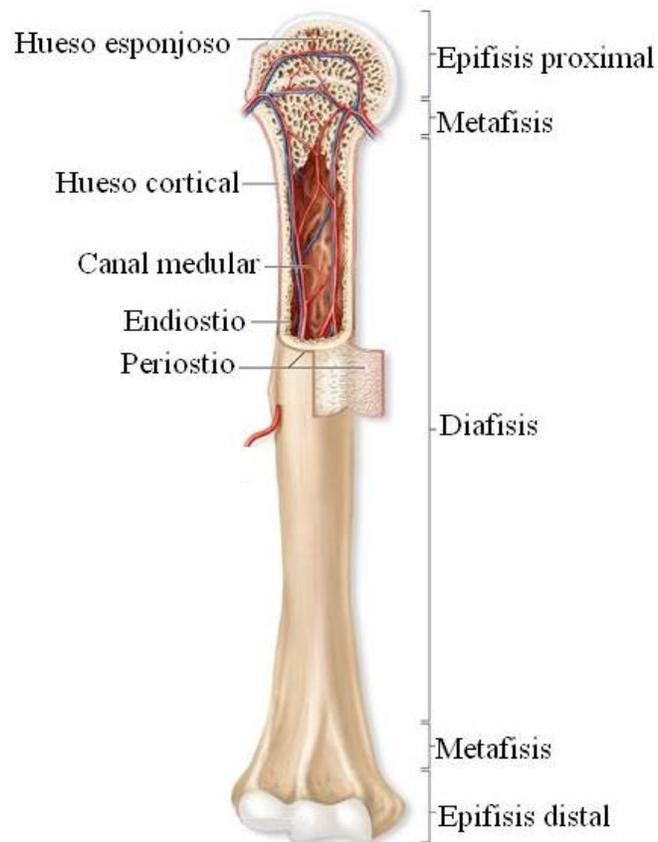


Figura 2.2. Características de un hueso largo. [Gámez_a et al, 2007]

Un hueso largo está conformado por una zona tubular llamada diáfisis ubicada en la zona central de la metáfisis y epífisis que será donde se conectará con otros huesos. En los extremos existe una capa que cubre el hueso llamada cartílago que tiene como función minimizar la fricción en las uniones. El cartílago articular está apoyado por una capa delgada de hueso llamada plato subcondral que delinea el contorno entre el cartílago y el hueso trabecular subyacente de la epífisis. La zona de conexión entre la epífisis y la diáfisis se denomina metáfisis. La diáfisis es referida también como la corteza denominándose como hueso compacto o hueso cortical. Dentro del tubo diafiseal, se encuentra la médula o cavidad del tuétano. La superficie interna de la diáfisis se llama endostio [Gámez_a et al, 2007]. El periostio es la vaina o capa fibrosa que cubre los huesos, la cual contiene vasos sanguíneos y nervios que nutren y le dan sensibilidad al hueso.

2.2 ESTRUCTURA DEL TEJIDO ÓSEO

Todos los huesos a nivel macroscópico están estructurados por dos componentes principales independientemente de que sean huesos cortos, largos, planos o irregulares; dichos componentes son:

Hueso cortical o compacto: Es el componente principal de las zonas externas de todos los huesos [Comín et al, 1999] y se caracteriza por ser homogéneo, denso, compacto y muy resistente. Representa aproximadamente el 85% del hueso corporal, se encuentra en las diáfisis de huesos largos, tales como fémur, tibia, húmero y radio. Forma un conducto tubular que encierra la cavidad medular, donde asientan las principales estructuras neurovasculares junto con la médula ósea amarilla. La superficie externa está cubierta por el periostio formado por una capa exterior del tejido fibroso rica en vasos, nervios y terminaciones sensitivas, en la cual se insertan ligamentos y tendones. La capa interior del periostio es una delgada lámina osteogénica formada por osteoblastos. La superficie

interna, por su parte, está tapizada con una capa osteogénica similar a la perióstica, pero sin tejido fibroso denominada endostio, el cual tapiza la cavidad medular, las cavidades del hueso trabecular y los canales haversianos. El volumen del hueso cortical está regulado por la formación de hueso periosteal, remodelación dentro del sistema haversiano y resorción ósea endosteal. Es removido principalmente por resorción endosteal y resorción dentro de los canales haversianos [Ardila, 1997].

Hueso esponjoso o trabecular: Se localiza en la epífisis y metáfisis y en el interior de la mayoría de los huesos planos. Proporciona un área superficial grande para las actividades metabólicas del hueso, además de ofrecerle resistencia mecánica al tejido [Nather, 2005]. Estos dos tipos de hueso tienen muchas diferencias en composición, organización, crecimiento y propiedades mecánicas [Doblaré et al, 2004]. En la **Figura 2.1**, se muestra la estructura típica de un hueso largo, y una sección longitudinal de fémur, respectivamente. Se observa claramente un eje compuesto del hueso compacto que rodea una cavidad central que contiene el hueso trabecular. Además el hueso cortical presenta su porción más densa en la mitad de la porción del eje (diáfisis), en la cual estarán basados los análisis de la presente investigación, mientras que el hueso trabecular es más denso en los extremos del mismo (epífisis) [Nather, 2005].

A nivel microscópico, el tejido óseo está formado por cuatro tipos de células óseas responsables de producir, mantener y modificar la estructura de dicho tejido. Se reconocen cuatro tipos de células óseas: osteoblastos, osteocitos, osteoclastos y células de revestimiento [Comín et al 1999]. En la **Figura 2.3** se muestra una sección del tejido óseo indicando sus componentes.

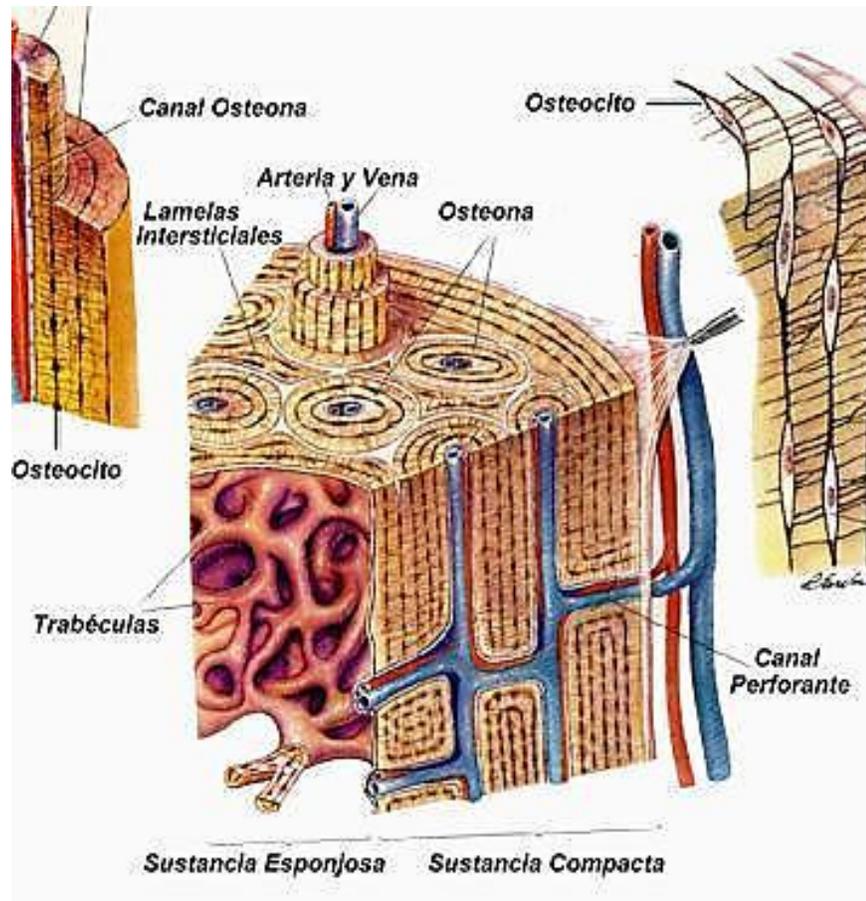


Figura 2.3. Partes constitutivas de un hueso [Martin et al, 1998]

- **Osteoblastos**, encargados de sintetizar y secretar la parte orgánica de la matriz ósea durante su formación. Se ubican siempre en la superficie del tejido óseo ya que este sólo puede crecer por aposición.
- **Osteocitos**, responsables de la mantención de la matriz ósea, que se ubican en cavidades o lagunas rodeadas por el material intercelular calcificado. La nutrición de los osteocitos depende de canaliculos que penetran la matriz ósea y conectan a los osteocitos vecinos entre sí y con canales vasculares que penetran al hueso o que se ubican en las membranas conjuntivas que revisten la superficie del hueso (periostio y endostio). De hecho ningún osteocito se encuentra a más de una fracción de milímetro de un capilar sanguíneo.

- **Osteoclastos**, células responsables de la reabsorción del tejido óseo, que participan en los procesos de remodelación de los huesos y pueden encontrarse en depresiones superficiales de la matriz ósea llamadas lagunas de Howship.
- **Células de revestimiento**, son células en reposo que se localizan en superficies óseas inactivas.

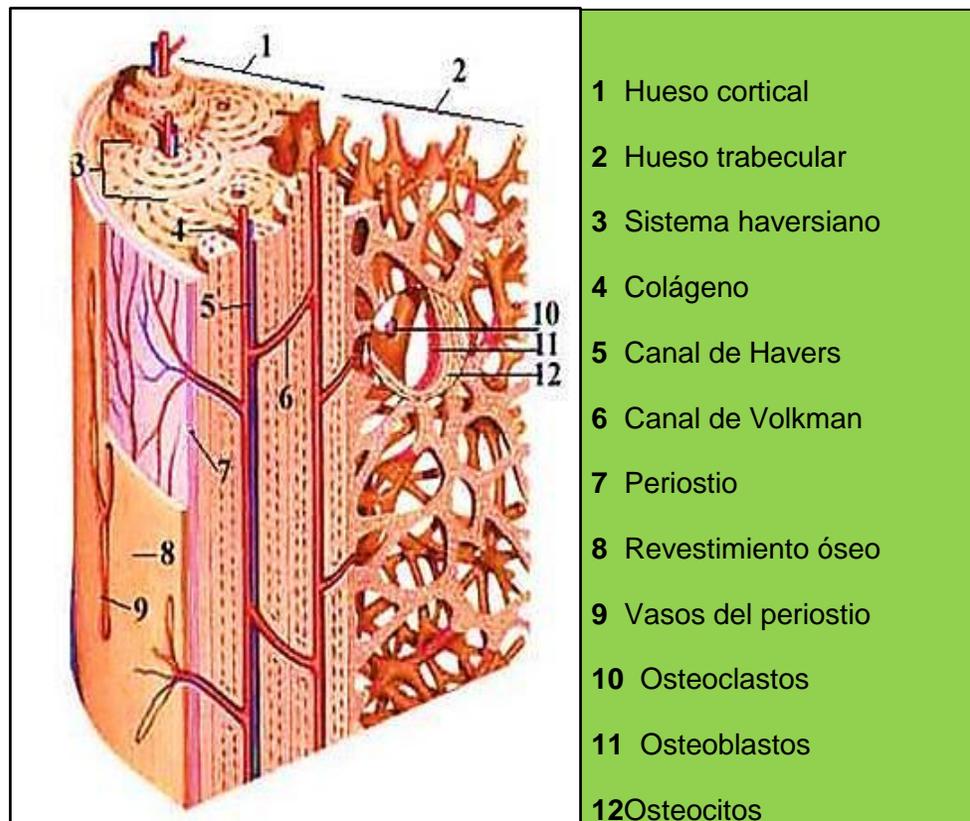


Figura 2.4. Componentes del tejido óseo. [Wilson, 2003]

2.3 PROPIEDADES MECÁNICAS DEL HUESO CORTICAL

El hueso constituye el primer elemento estructural del cuerpo humano; sirve de protección a los órganos vitales internos, además de servir como un almacén para los recursos minerales del organismo. El sistema esquelético soporta cargas de diferentes tipos debido a las diversas

actividades de un individuo, tanto compresivas como de tracción o de cizalladura [Martin et al, 1998].

Las propiedades elásticas del hueso cortical humano aplicando la carga en el plano transversal al eje longitudinal son aproximadamente isotrópicas, y a su vez son substancialmente diferentes a aquellas obtenidas al aplicar cargas en la dirección longitudinal, la cual es paralela al eje de las osteonas (a lo largo del eje longitudinal de la diáfisis). Por lo tanto, el hueso cortical humano es considerado como un material ortotrópico [Ginebra et al, 2000].

En el caso de la resistencia mecánica del hueso, ésta depende también de la dirección en la cual es cargado el hueso. Al igual que en el caso anterior, se considera como un material ortotrópico. La resistencia mecánica depende también de si el hueso es cargado a flexión, compresión o tracción.

Por todo esto, no es posible especificar la resistencia o las propiedades elásticas del hueso cortical con un único valor. Las propiedades mecánicas del hueso cortical ensayado a tracción y a compresión en la dirección transversal y longitudinal, así como la resistencia a la cizalladura se presentan en la **Tabla 2.1** [Cowin, 1989]. Los valores mostrados en ella son sólo indicativos del orden de magnitud de cada propiedad, dependiendo mucho cada una de las condiciones de ensayo, y pudiendo variar en cada dirección del espacio, según el tipo de simetría presente.

Además de la anisotropía del hueso ya mencionada, el hueso presenta un comportamiento viscoelástico, ya que sus propiedades mecánicas son sensibles tanto a la velocidad de deformación como al tiempo de aplicación de la carga.

Tabla 2.1. Propiedades mecánicas del hueso. [Comín et al, 1999]

Longitudinal		Transversal	
Resistencia a Tracción. (MPa)	78,8 - 151	Resistencia a Tracción. (MPa)	51 - 56
Resistencia a compresión (MPa)	131 - 224	Resistencia a compresión (MPa)	106 - 133
Módulo de Young (GPa)	17 - 20	Módulo de Young (GPa)	6 - 13
Resistencia a Cizalladura (MPa)		53,1-70	
Módulo a Cizalladura (GPa)		3,3	

Las propiedades del hueso trabecular no han sido estudiadas con la profundidad con la que lo han sido las del hueso cortical. Las propiedades de este tipo de hueso dependen altamente de la densidad del mismo [Comín et al, 1999]. Aunque el rango de variación es muy amplio, se ha visto que los valores referentes al módulo elástico se encuentran entre los 50 y 100 MPa, mientras que los valores relativos a la resistencia a la compresión están entre 5 y 10 MPa.

2.4 BIOMECÁNICA Y MECANISMO DE FRACTURA ÓSEA

En el curso de las actividades diarias, el hueso humano está sometido a una gran variedad de patrones de carga, los cuales varían en dirección, magnitud, frecuencia y sentido [Zioupos y Casinos, 1998]. Cuando una carga externa o momento es aplicado a un tejido, la respuesta inicial del tejido es resistir a la carga aplicada. El tejido comienza a deformarse cuando la carga aplicada supera la resistencia interna [Nather, 2005].

De esta manera, los huesos se deforman por acción de las fuerzas derivadas de la carga del cuerpo, de la actividad muscular o cargas externas. En general, los huesos sobrellevan formas combinadas de deformación, cuyos tipos básicos son la carga axial a tracción (alargamiento) y a compresión (acortamiento), la flexión (arqueado), la torsión (enroscado), y el cortante (desplazamiento paralelo de secciones). Todas ellas, se reducen a una sola condición, porque su resultado es siempre la producción de una compresión o de una tracción (acortamiento o alargamiento de distancias en el seno del tejido óseo), con base a lo cual se interpretan sus efectos [Cortés et al, 2001]. En la **Figura 2.5** se muestra la respuesta del hueso frente a los modos de carga básicos.

Cuando un hueso es colocado en riesgo de fracturarse debido a una carga o traumatismo, entran en juego tres factores diferentes: la carga o el traumatismo cuyas características comprenden la participación eventual de amortiguadores anatómicos (tejidos blandos) y fisiológicos (reflejos, coordinación neuromuscular); la actuación del hueso como palanca "columna" o "viga" en función de la fuerza que lo va a deformar y la biomecánica ósea "dinámica" que analiza la cantidad de deformación que se va a producir conforme a la manera de actuar de la fuerza sobre el cuerpo, en función de la misma y de los brazos de palanca y momentos dinámicos a que su acción diere lugar [Cortés et al, 2001].

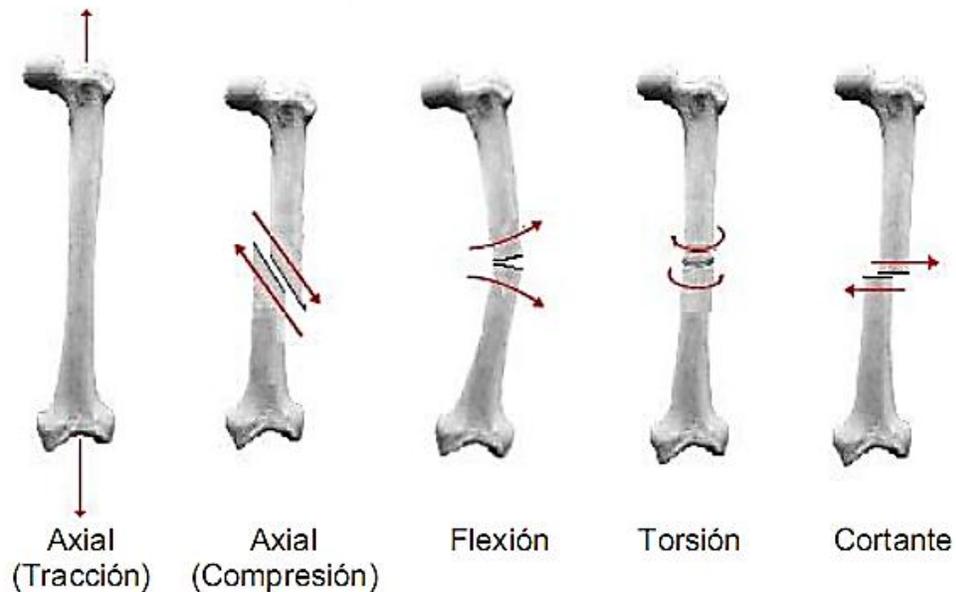


Figura 2.5 Respuesta ósea ante los modos de carga básicos. [Claiborne, 1998]

El primer mecanismo de la fractura ósea aparece cuando una carga accidental excede el intervalo fisiológico, induciendo esfuerzos que superan la resistencia del tejido óseo, lo que se conoce como fractura por traumatismos.

El segundo tipo de fractura es producido por creep (fluencia lenta) o fatiga. Los huesos frecuentemente soportan cargas más o menos constantes por prolongados períodos de tiempo y ciclos de carga que pueden producir micro daño. Si la acumulación de microdaño es más rápida que la reparación por remodelación, las microgrietas pueden multiplicarse para producir macrogrietas y fracturas [Doblaré et al, 2004], o de manera más específica, el esfuerzo derivado de la historia de mini-deformaciones cotidianas determina ocasionalmente microfracturas, a cuya producción el tejido óseo opone su capacidad de reparación. Cuando la tasa de producción supera a la de reparación, las microfracturas tienden a acumularse. Una acumulación suficiente de microfracturas, así como una

producción rápida a causa de un traumatismo, puede ocasionar la fractura del hueso. Clínicamente esto es llamado fractura por esfuerzos.

Por otra parte, si la fuerza actuante no es muy intensa como para provocar microfracturas, el hueso deformado mantiene la capacidad de retornar a sus dimensiones y forma inicial al cesar su acción (deformación "elástica", reversible). Durante el comportamiento elástico, el hueso es también capaz de devolver la energía empleada en deformarlo. Más allá de cierto límite, la fuerza puede provocar microfracturas las cuales ocasionan la pérdida de elasticidad (deformación "plástica" irreversible) o, en caso extremo, la fractura [Cortés et al, 2001].

El hueso cortical, como material es más débil a tracción y a esfuerzo cortante que a compresión y además por ser anisótropo su resistencia también depende de la dirección. La susceptibilidad del hueso a fracturarse bajo cargas fluctuantes está relacionada con la estructura cristalina y la orientación del colágeno que son responsables del comportamiento viscoelástico. El hueso cortical es vulnerable a bajas cargas de tracción y de compresión cuando éstas son fluctuantes. En cada ciclo de carga una pequeña cantidad de energía de deformación puede emplearse en la producción de microgrietas a lo largo de las líneas cementantes. Cuando dicho defecto se prolonga en el tiempo, se van acumulando microdefectos hasta el momento en el que el hueso puede fallar debido a la propagación de una de estas grietas [Comín et al, 1999].

2.5 MECÁNICA DE LA FRACTURA Y PROPAGACIÓN DE GRIETAS A FATIGA

El uso de las leyes de propagación de grietas basadas en alcances del factor de intensidad de esfuerzos (K) es la aplicación más acertada de la ingeniería de la mecánica de la fractura. En contraste con el esfuerzo y las aproximaciones tradicionales de la deformación a la fatiga se debe asumir que las grietas existen en materiales y estructuras, dentro del

contexto de la mecánica de la fractura. Alguno de los parámetros de la mecánica de fractura tal como el factor “K” se puede utilizar para caracterizar las cargas y deformaciones en el entorno de una grieta. Es fundamental comprender que para modelar la propagación de una grieta a fatiga usando la mecánica de la fractura y sus parámetros, esta se encuentra limitada al uso necesario y apropiado de las aplicaciones de la mecánica de fractura.

2.5.1 Propagación de grietas a fatiga

La fatiga es un proceso de acumulación de daño, agrietamiento y fractura de un cuerpo sometido a cargas fluctuantes, variables o cíclicas. Para que la fatiga ocurra se requiere de al menos tres condiciones:

- Una parte del ciclo de carga con un esfuerzo de tracción.
- Una amplitud de variación del esfuerzo superior a un valor mínimo llamado límite de fatiga.
- Un número suficiente de ciclos o fluctuaciones de esfuerzos.

Si alguna de estas condiciones no está presente no ocurre la fatiga. Durante la fatiga, la acumulación de daño interno en el material eventualmente conduce al desarrollo de una grieta que crece hasta alcanzar su tamaño crítico y causa la fractura final del cuerpo. Si el cuerpo fatigado posee grietas preexistentes o concentradores de esfuerzos agudos, la etapa de acumulación de daños se suprime y la grieta puede propagarse desde los primeros ciclos de carga.

Desde el punto de vista de la mecánica de la fractura, la propagación de grietas ocurre en condiciones subcríticas, es decir, antes de que se satisfaga el criterio de energía de Irwin y la grieta se propague inestablemente. Como en la gran mayoría de los componentes estructurales y mecánicos los esfuerzos de trabajo son menores que el esfuerzo de fluencia, la propagación de grietas por fatiga transcurre en un

cuerpo deformado elásticamente y los principios de la mecánica de la fractura elástico-lineal son válidas para caracterizar el comportamiento de los materiales en fatiga.

Paris (1962) fue uno de los primeros investigadores en notar que el incremento de longitud de la grieta por ciclo (da/dN) depende de ΔK . Paris graficó los datos (da/dN) versus ΔK en una gráfica logarítmica, tal como se muestra en la **Figura (2.6)** y encontró que la rapidez de propagación de grietas por fatiga presenta tres regiones bien definidas que corresponden a las etapas de crecimiento de grietas por fatiga. Nótese que en la región I hay un valor de ΔK debajo del cual la velocidad de propagación es prácticamente nula; este valor es llamado “límite o umbral de fatiga”. En la región II, $\log (da/dN)$ es proporcional al $\log (\Delta K)$ y se le ha llamado “región de Paris”. Finalmente la región III corresponde a valores de K cercanos a la tenacidad de la fractura, donde la propagación de grietas por fatiga se combina con modos estáticos de fallas [Pavlushevich, 1986].

Actualmente es aceptado que la propagación de grietas por fatiga ocurre en tres (3) etapas:

Etapas I. Nucleación y Crecimiento lento de grietas. (Ver región I **Figura 2.6)**

Etapas II. Propagación estable. (Ver región II en **Figura 2.6)**

Etapas III. Propagación rápida y falla final. (Ver región III en **Figura 2.6)**

En la región I, la rapidez de propagación de la grieta es fuertemente influenciada por el nivel de esfuerzos, es decir, por ΔK ; la trayectoria de la fractura es cristalina es decir, la grieta se propaga a lo largo de los planos cristalinos del material. Como la zona plástica es muy pequeña, esta queda contenida dentro de los granos del material, por lo que la etapa esta fuertemente influenciada por la microestructura.

En la región II del grafico, log (da/dN) versus log (ΔK), Paris encontró que para la mayoría de los materiales se cumple la siguiente relación [Pavlushevich, 1986]:

$$\frac{da}{dN} = C\Delta K^m \tag{2.1}$$

Donde C y m son constantes empíricas. Esta ecuación es la base para muchas aplicaciones de la mecánica de la fractura al análisis de la propagación de grietas por fatiga. La región II es fuertemente influenciada por el ambiente y es prácticamente independiente de la microestructura, siendo la fractura principalmente transgranular.

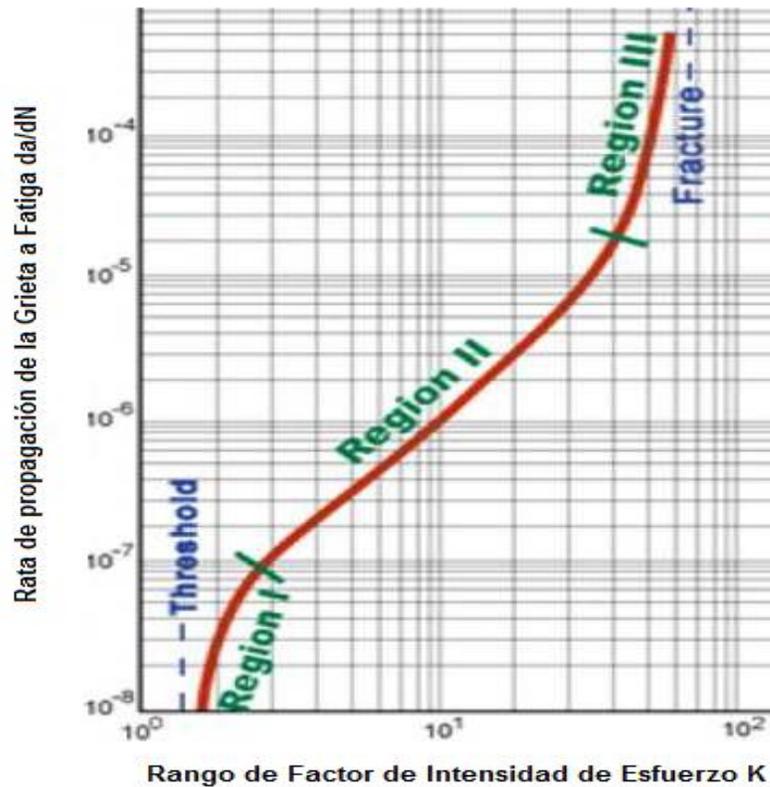


Figura 2.6. Representación gráfica de la región de Paris [Pavlushevich, 1986]

Tal y como se puede observar en la **Figura 2.6** existe una zona inicial conocida como “el umbral” o (threshold) límite de la fatiga (ΔK_{lim}), la cual

también es de gran interés en la selección de materiales, ya que en virtud de muchas aplicaciones mecánicas y estructurales buscan una vida infinita en fatiga, es impredecible conocer si una grieta, en caso de existir, se encuentra con un valor de ΔK por debajo de ΔK_{lim} a fin de asegurar que esta no se propagará. La **Tabla 2.2** muestra algunos valores típicos de ΔK_{lim} para una variedad de materiales de uso común en ingeniería, fatigados en aire a temperatura ambiente. Nótese que el valor de ΔK_{lim} depende del valor de R ($R = P_{m\acute{a}x}/P_{m\acute{i}n} = K_{m\acute{a}x}/K_{m\acute{i}n}$), teniendo el efecto a valores bajos de R, mientras que a valores altos de R, ΔK_{lim} permanece más o menos constante. Finalmente se observa que los aceros y las aleaciones base níquel poseen los mayores valores de: K_{lim} , mientras que las aleaciones no ferrosas de alta resistencia tienen los menores límites de fatiga.

Tabla 2.2. Valores típicos de ΔK_{lim} en materiales de ingeniería. [Khalmanov, 1973]

Material	R	ΔK_{lim}	
		Ksi \sqrt{in}	MPa \sqrt{m}
Acero A533	0,1	8	7,3
	0,5	4,8	4,4
	0,8	3	2,75
Acero ASTM 508	0,1	6,7	6,1
	0,5	5,6	5,1
	0,7	3,1	2,8
Acero Inoxidable 18-8	0	6,1	5,5
	0,33	5,9	5,4
	0,62	4,6	4,2
	0,74	4,1	3,7
Latón 60/40	0	0	3,2
	0,33	0,33	2,8
	0,56	0,56	2,4
	0,72	0,80	2,4
Acero 300-M	0,05	6,2	5,6
	0,70	2,7	2,4
Aluminio 2040-T3	0,80	1,7	1,5

El exponente m de la ecuación de Paris representa la sensibilidad al esfuerzo en la punta de la grieta y varía de 2 a 5, dependiendo del material, mientras que la constante C es muy sensible al ambiente [Khalmanov, 1973]. Algunos de los valores típicos de C y m se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 2.3. Algunos valores típicos de C y m . [Khalmanov, 1973]

Material	Valor de "m"	Valor de "C"
Acero al carbono	3	1×10^{-11}
Acero forjado	2 – 3	1×10^{-11}
Acero de alta resistencia	3	1×10^{-12}
Acero inoxidable austenítico	3,8	1×10^{-12}
Hierro gris (colado)	4	8×10^{-9}
Hierro nodular (tratado térmicamente)	3,5	1×10^{-8}
Aluminio 7021	2,5	1×10^{-8}
Aleación a base de Ni	3,3	4×10^{-12}
Aleación a base de Ti	5	1×10^{-11}

Nota: C y m están dadas para $\%K$ en $MPa\sqrt{m}$ y (da/dN) en $mm/ciclo$

La limitación de la ley de Paris (2.1) se basa en el hecho de que sólo es capaz de describir los datos en la región II (véase la **Figura 2.6**). Si los datos se presentan en la zona del umbral (región I) o en la zona de crecimiento acelerado (región III) de ley Paris no puede describir adecuadamente estas regiones. Dependiendo del análisis que se esté realizando, esta aproximación puede no ser suficiente. Por último, la ley de Paris no tiene en cuenta el efecto de la relación entre el esfuerzo y el material utilizado. Cuando se prueban distintos aceros con diferentes magnitudes de esfuerzos, se produce una familia de líneas rectas paralelas entre si. Esto significa que el valor de m es el mismo para todas las magnitudes de esfuerzos, pero el valor de C es específico para una relación de esfuerzo especial [Beden et al, 2009].

En las tres etapas, la rapidez de propagación de la grieta depende de la amplitud de la variación de los esfuerzos en la punta de la grieta, el cual, en condiciones elástico-lineales, depende del factor de propagación de grietas "K". Durante un ciclo, la carga varía sobre un intervalo definido como:

$$\Delta P = P_{m\acute{a}x} - P_{m\acute{i}n} \quad (2.2)$$

Como,

$$K = P\beta\sqrt{\pi a} \quad (2.3)$$

$$\Delta K = K_{m\acute{a}x} - K_{m\acute{i}n}$$

$$\Delta K = P_{m\acute{a}x}\beta\sqrt{\pi a} - P_{m\acute{i}n}\beta\sqrt{\pi a} \quad (2.4)$$

Entonces igualando (2.3) con (2.4) se tiene:

$$\Delta K = \Delta P\beta\sqrt{\pi a} \quad (2.5)$$

Dados los valores máximos y mínimos de carga, el ciclo queda completamente definido con la relación de cargas R, cuya definición matemática es:

$$R = P_{m\acute{a}x} / P_{m\acute{i}n} \quad (2.6)$$

$$R = K_{m\acute{a}x} / K_{m\acute{i}n} \quad (2.7)$$

El valor de R representa además el valor del esfuerzo promedio, si R aumenta el esfuerzo promedio también lo hace. Es muy común que la grieta por fatiga inicie en un concentrador de esfuerzos, el cual, en forma genérica, es una entalladura cuyo radio de raíz es ρ . Se ha encontrado que la relación $\Delta K / \sqrt{\rho}$ controla el número de ciclos de iniciación de grietas. Una interesante observación experimental es que ΔK tiene un límite, debajo de

la cual no hay crecimiento de grietas y, por lo tanto, la vida de fatiga del componente es infinita. Esta ΔK_{lim} está relacionada con el esfuerzo de fluencia y con el radio de la raíz del concentrador de esfuerzos (ρ), por lo que puede establecerse la relación empírica siguiente:

$$\frac{\Delta K}{\sqrt{\rho}} = \sqrt[10]{\sigma_0} \quad (2.8)$$

Una vez que se inicia una grieta por fatiga, ésta se propaga por el efecto de la variación de esfuerzos en la punta de la grieta. Si la amplitud de carga es constante, a medida que la grieta crece, el factor de intensidad de esfuerzo aumenta y consecuentemente la rapidez de propagación de la grieta aumenta. Este proceso transcurre hasta que el factor de intensidad de esfuerzos (K) iguala a la tenacidad de la fractura del material (K_{Ic}) y ocurre la fractura final.

El periodo en que la grieta se propaga a una rapidez (da/dN) que es proporcional a la amplitud del factor de intensidad de esfuerzos (ΔK), es el de mayor interés en el estudio de la mecánica de fractura, ya que es posible predecir la vida útil de un componente sujeto a condiciones de fatiga si este tiene una grieta propagándose a baja velocidad en condiciones elástico-lineales.

2.6 TEORÍA DE FRACTURAS

Para el estudio y análisis del crecimiento de fracturas en los materiales, se han establecido distintas normas a nivel internacional, las cuales presentan mucha similitud y permiten hallar los principales valores de estudio (K : factor de intensidad de esfuerzo y J : energía estimada de resistencia a la fractura) con muy poca diferencia entre sí. Las Normas ASTM E399, E1290, ASTM E1820 e ASTM 1823, permiten probar los

valores de K, J y CTOD, así como también incluye las curvas de resistencia a la fractura de múltiples materiales.

2.6.1 Teoría de fracturas de Griffith's para materiales frágiles

El primer intento significativo para analizar matemáticamente el fenómeno de fractura fue llevado a cabo por Griffith, quien derivó una expresión para determinar el esfuerzo de fractura de materiales muy frágiles como el vidrio. Griffith partió del hecho de que un cuerpo deformado elásticamente almacena una energía potencial y propuso que esta energía elástica almacenada es la fuerza impulsora del crecimiento de grietas, siempre y cuando la demanda de energía para la extensión de grieta sea satisfecha por la conversión de la energía elástica almacenada.

El criterio de Griffith para la propagación de una grieta es el siguiente:

“Una grieta se propagará cuando el decrecimiento de energía de deformación elástica sea al menos igual a la energía requerida para crear la nueva superficie de la grieta.”

Griffith estimó el cambio en la energía que resulta cuando una grieta elíptica es introducida en una placa infinita. Calculó el decrecimiento en la energía debido a la presencia de una grieta en una placa y descubrió que es equivalente a $\pi\sigma^2 a^2/E$ por unidad del espesor de la placa para la condición de esfuerzo plano. El incremento en la energía debido a la presencia de dos nuevas superficies equivale a $2a(2\gamma)$, donde “ γ ” es la energía superficial, por unidad del espesor de la placa. De esta manera, el cambio en la energía potencial de la placa cuando una grieta ha sido introducida podría ser escrito como:

$$U - U_0 = 4a\gamma - \frac{\pi\sigma^2 a^2}{E} \quad (2.9)$$

Donde U es la energía potencial por cada unidad del espesor de la placa en presencia de una grieta, U_0 la energía potencial por cada unidad del espesor de la placa en la ausencia de la grieta, σ el esfuerzo aplicado, “ a ” la mitad de la longitud de la grieta y γ_s , es la energía superficial específica.

Considere una placa infinita de espesor “ t ” conocido, sometida a un esfuerzo de tracción “ σ ”, tal como muestra la **Figura 2.2**. En el centro de la placa se tiene una grieta con una longitud igual a $2c$. Dicha placa se considera bajo condiciones de carga en el plano de esfuerzo. Según Griffith, la fractura ocurre cuando la disminución de la energía potencial debido a un incremento del área de la grieta iguala la energía superficial de la superficie agrietada creada [Lee et al, 2005]. Para una placa larga, la energía potencial puede escribirse en términos de σ como:

$$\phi = -\frac{\sigma^2}{2E}V - \pi \frac{\sigma^2 c^2}{E}t \quad (2.10)$$

Donde “ V ” representa el valor total del volumen de la placa.

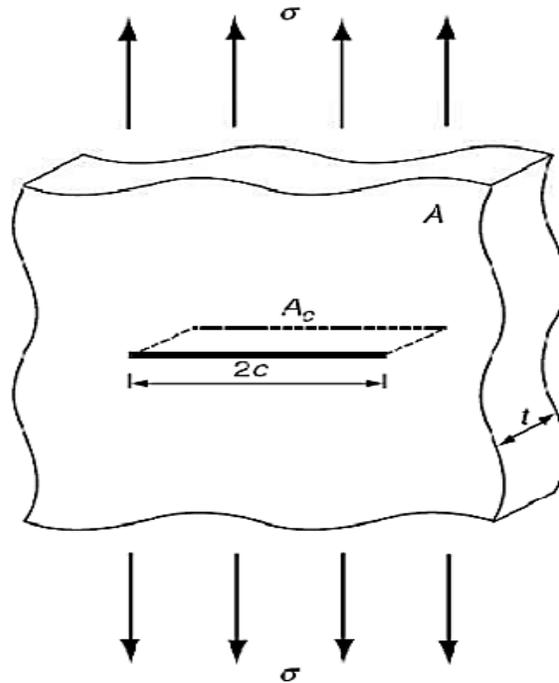


Figura 2.7. Placa infinita de espesor “t”, sometida a un esfuerzo de tensión “σ”.

[Lee et al, 2005]

La variación de la energía por unidad de área de la grieta puede expresarse como:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial A_c} = -\frac{1}{2t} \frac{d\phi}{dc} = \pi \frac{\sigma^2 c}{E} \quad (2.11)$$

Donde \$A_c\$ representa el área de la grieta. Para este caso particular \$A_c=2ct\$; el esfuerzo de la fractura puede ser indicado como \$\sigma_f\$. En la fractura, la variación de energía por unidad de área de la grieta debe ser igual al incremento de la energía superficial \$\gamma\$ de la grieta creada [Lee et al, 2005], por lo tanto:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial A_c} = \pi \frac{\sigma_f^2 c}{E} = 2\gamma \quad (2.12)$$

Finalmente el esfuerzo a la fractura se puede obtener mediante la ecuación:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi c}} \quad (2.13)$$

2.6.2 Parámetros de fracturas basados en la mecánica elasto-lineal de la fractura (MELF)

2.6.2.1 Modos primarios de carga

Considere que la grieta se encuentra en la parte frontal de la placa, tal como se muestra en la **Figura 2.7**. Debido a las diferentes condiciones de carga, la parte frontal de la placa puede estar sujeta a diversos tipos de aplicación de la carga, sin embargo, son tres las principales formas de carga que pueden darse. Se coloca un sistema coordenado cartesiano de modo que el frente de la grieta quede orientado en la dirección de z . Considere entonces los problemas de grietas en placas planas como ideales, en los cuales los esfuerzos y las deformaciones cerca del extremo de la grieta se pueden expresar en términos de coordenadas de los planos x e y solamente.

Según las indicaciones de la **Figura 2.8**, la probeta está bajo la aplicación del Modo I, “la apertura” o modo de tracción, donde los esfuerzos y las deformaciones del plano están simétricas con respecto al eje de x .

El siguiente modo principal de aplicación de esfuerzos es el Modo II conocido como “el deslizamiento” o modo de plano de corte, esto es cuando los esfuerzos y deformaciones se dan en un eje distinto al eje x . Este modo podemos visualizarlo en la **Figura 2.8**.

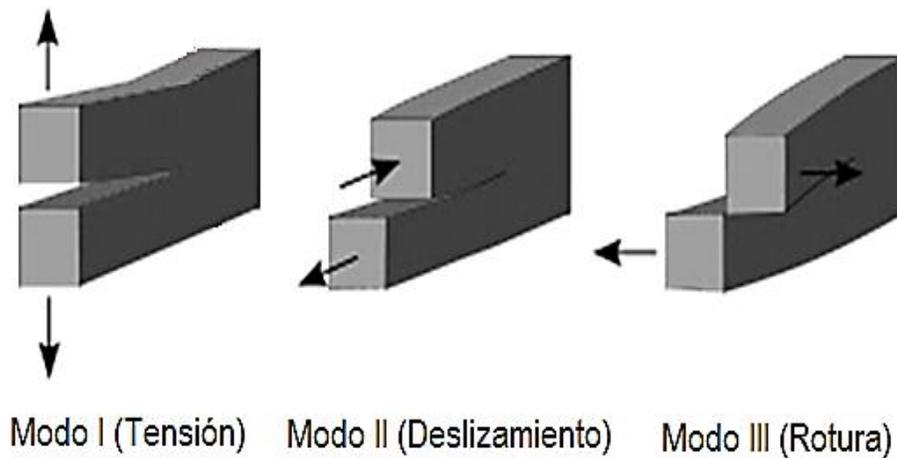


Figura 2.8. Placa sometida a los diferentes tipos de cargas.

[Lee et al, 2005]

El tercer modo principal de aplicación de cargas se le conoce como “Modo III” o “rotura”, donde los esfuerzos y deformaciones salen del plano con respecto al eje x . Este modo se puede observar en la **Figura 2.8**. [Lee et al, 2005].

2.6.2.2 Efectos del modo de carga

Similar a la mayoría de los materiales de ingeniería, el hueso cortical muestra la menor resistencia a la fractura bajo el Modo I de carga. De hecho, *Norman et al (1995)*, han mostrado los índices medios de K_{Ic} / K_{IIc} para una fractura longitudinal en la tibia humana y el fémur, respectivamente, en personas con edades comprendidas entre 50 y 90 años. Un estudio reciente se centro en los Modos de fractura I, II, y III, aunque tales resultados sugieran que la fractura con el Modo III pueda ser más fácil de ocurrir que la del Modo II, esto no resulta entendible puesto que si esto es cierto, deberá cumplirse para todas las probetas, situaciones, orientaciones, y demás variables incluidas en el estudio.

2.6.2.3 Efectos de la orientación de la extracción de la probeta en huesos

Estudios referentes al efecto de la orientación en la resistencia del hueso (ver **Figura 2.6**) muestran las direcciones transversales y longitudinales ideales para extraer una probeta, con el fin de obtener orientaciones con mejor resistencia a lo largo del eje longitudinal del hueso. En la tibia bovina, *Behiri y Bonfield, (1989)* demostraron un aumento progresivo de la resistencia (a partir de 3,2 a 6,5 MPa√m) con respecto a la orientación de los especímenes extraídos a lo largo de su sección transversal y longitudinal.

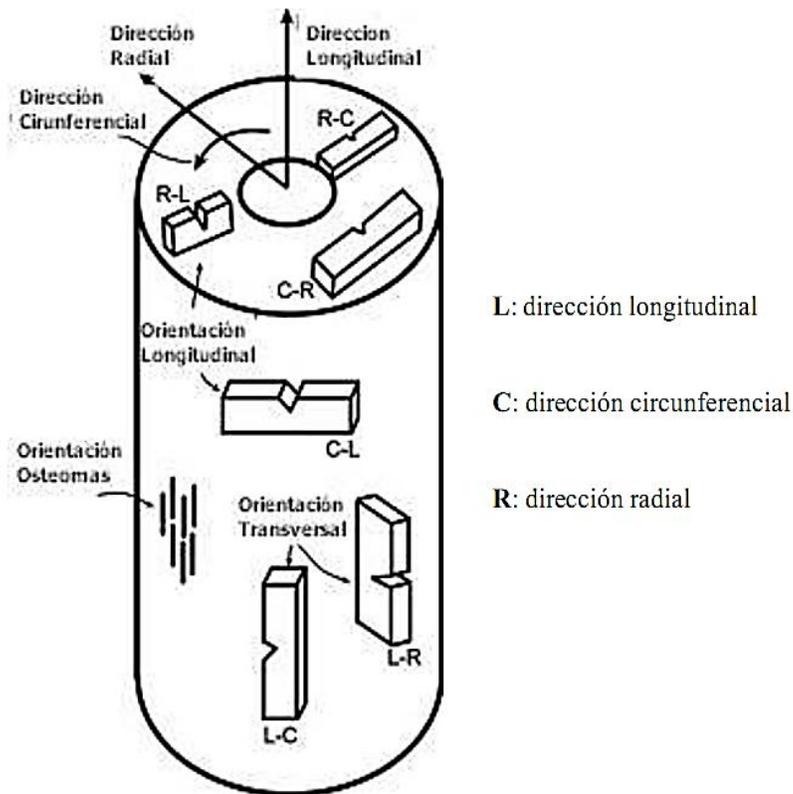


Figura 2.6. Orientación de la probeta (ASTM E 399-90) referidas a la resistencia a la fractura [Ritchie et al, 2006]

La primera letra en la designación se refiere a la dirección normal al plano de la grieta, mientras que la segunda letra se refiere a la dirección

prevista para la propagación de la grieta. Se ve que las orientaciones del L-C y de L-R implican un corte transversal del hueso y por consiguiente, estas orientaciones se refieren comúnmente en la literatura como aquellas que poseen orientación de la fractura distinta a la transversal. Contrario a esto, las orientaciones que parten de cortes del hueso a lo largo del eje longitudinal, R-L y C-L, se refieren comúnmente como orientaciones con fractura longitudinal. A menudo, no se especifica la orientación transversal o longitudinal; sin embargo, las orientaciones del L-C y del C-L son las más fáciles de maquinar, especialmente en huesos más pequeños. Finalmente, las orientaciones que salen a lo largo de las secciones circunferenciales del hueso, C-R y R-C, son las orientaciones menos comunes encontradas en la literatura de la fractura. [ASTM E399-90, 2002]

Este efecto de orientación hace realmente fuerte a los especímenes tanto que se hace necesario realizarle ranuras a los lados de las probetas para alcanzar la propagación correcta de la grieta para el caso longitudinal, ya que sin esto las grietas no se formarían hacia la dirección longitudinal de esta. De hecho, el K_{Ic} necesario para fracturar la probeta transversalmente resulta de la aplicación de una fuerza hasta dos veces el valor necesario para fracturar de forma longitudinal la tibia bovina y el fémur. Además, un estudio en fémures de bovinos mostró un efecto incluso mayor, con un K_{Ic} medio para la fractura en la dirección transversal unas 3,5 veces más alto que en la dirección longitudinal [Nalla et al, 2005]. Finalmente, en húmeros humanos, el comportamiento observado fue similar, con grietas dirigidas hacia la dirección longitudinal (anatómico próximo-distal), con una resistencia transversal alrededor de 1,5 veces la longitudinal.

2.6.2.4 Factor de intensidad de esfuerzo “K”

El factor de intensidad de esfuerzos “K” mide la intensificación del campo de esfuerzos alrededor de la punta de la grieta y no debe ser

confundido con el factor de concentración de esfuerzos K_t . El factor de intensidad de esfuerzos incluye la influencia del esfuerzo y las dimensiones apropiadas de la grieta. De este modo, “ K ” caracterizará las condiciones externas (el esfuerzo normal aplicado y la longitud de la grieta) que corresponden a fracturar cuando los esfuerzos y las deformaciones en la punta de la grieta alcanzan un valor crítico. [Lee et al, 2005].

El factor de intensidad de esfuerzos (K), en su forma general se expresa matemáticamente como:

$$K = \alpha \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2.14)$$

Donde el termino “ K ” representa el “factor de intensidad de esfuerzos” el cual envuelve condiciones de carga y geometría del cuerpo. Los esfuerzos principales para el Modo I son:

$$\sigma_1 = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.15)$$

$$\sigma_2 = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right) \quad (2.16)$$

De forma general, se puede decir que el factor de intensidad de esfuerzos “ K ” depende del esfuerzo aplicado, el tamaño de la grieta y su geometría es decir:

$$K = Y \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2.17)$$

Donde al término “ Y ” se le conoce como factor de geometría, el cual envuelve la geometría de un sistema de grietas en relación a la carga aplicada. Normalmente, los valores asociados a este factor “ Y ” pueden ser obtenidos a través de la búsqueda de información en bibliografías técnicas,

sin embargo, para una placa infinita con una grieta en su centro se tiene que $Y=1,0$. La geometría de un cuerpo agrietado impone un efecto ante el nuevo campo de esfuerzo del extremo de la grieta, modificando así el valor del factor de intensidad de esfuerzo. Generalmente, si el filo de la grieta se sitúa en una tira de ancho finito, “w”, luego el factor de corrección se convierte en una función de (a/w) [Wang, 1996].

$$Y = f(a/w) \quad (2.18)$$

El factor geométrico más simple de una grieta filosa de largo “a”, cuyo filo se encuentra en espacio semi-infinito aumenta la capacidad de la grieta a abrir, ocasionando que el factor de intensidad de esfuerzo aumente en al menos un 12%, siendo este representado como:

$$K_I = 1,12\sigma\sqrt{\pi a} \quad (2.19)$$

La determinación de este término geométrico es un problema de *Análisis de Esfuerzos*. Cualquier geometría real requiere de la utilización de métodos numéricos, puesto que existen pocas soluciones de la forma cerrada. El método más popular y más eficiente es análisis por elementos finitos. Otras técnicas incluyen estudios experimentales y semi-teórico [Wang, 1996].

El factor de intensidad de esfuerzo de la grieta y los factores de la geometría han sido tabulados en un número de configuraciones prácticas, específicamente para una probeta con una única muesca en el filo.

CAPÍTULO 3

Marco Metodológico

En este capítulo se describe de manera clara y precisa los pasos o procedimientos que se han de seguir para el desarrollo de esta investigación. Tales procedimientos involucran; la búsqueda previa de información para fomentar las bases teóricas y llevar a cabo dicha investigación, la simulación del comportamiento de las grietas en un programa computacional, el diseño y mecanizado de probetas, las pruebas experimentales y finalmente la comparación de los resultados obtenidos entre los ensayos experimentales y el software de crecimiento de grietas.

3.1 INVESTIGACIÓN

En esta etapa se pretende establecer los conocimientos o las bases teóricas necesarias para el desarrollo de este trabajo de investigación, por lo que es indispensable recopilar material informativo referente a los siguientes aspectos:

Biología y biomecánica del hueso cortical: características generales, estructura del tejido óseo, propiedades mecánicas, propiedades elásticas y plásticas, energía de deformación y resistencia a la fatiga que ofrece dicho material.

Biomecánica y mecanismo de fractura ósea: tipos de fracturas en el hueso cortical, inicio de fractura debido a microfisuras generadas por cargas cíclicas, y otros factores que intervienen en la falla del material.

Dinámica del hueso: diferentes comportamientos del hueso como el crecimiento, modelado, remodelado y reparación cuando se encuentra sometido a cargas u otros factores que puedan afectar.

Modelos de crecimiento de grietas: distintos modelos de crecimiento de grietas, basamentos y tipos de materiales a los que aplican.

Normas ASTM: todo lo referente a la norma ASTM E 399-90 para la estandarización de las probetas a ensayar.

Manuales y/o tutoriales: para el uso en general del programa computacional de elementos finitos de propagación de grietas (Franc 2D).

3.2 SIMULACIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE GRIETAS EN EL HUESO CORTICAL MEDIANTE UN SOFTWARE DE ELEMENTOS FINITOS

Para realizar la simulación por medio del método de elementos finitos se utilizará un programa especializado (Franc 2D) que permite observar la tendencia que puede seguir la propagación de las grietas en el material a ensayar, por lo que es de suma importancia adquirir destrezas a través de tutoriales o manuales para dominar a cabalidad dicho software.

Para hacer uso de esta herramienta es necesaria la modelación del prototipo (probeta) realizada previamente en un programa CAD, junto con la selección de las propiedades del material lo más parecida posible a las del hueso cortical. Además de especificar las cargas a fatiga a la que va a estar sujeta la simulación.

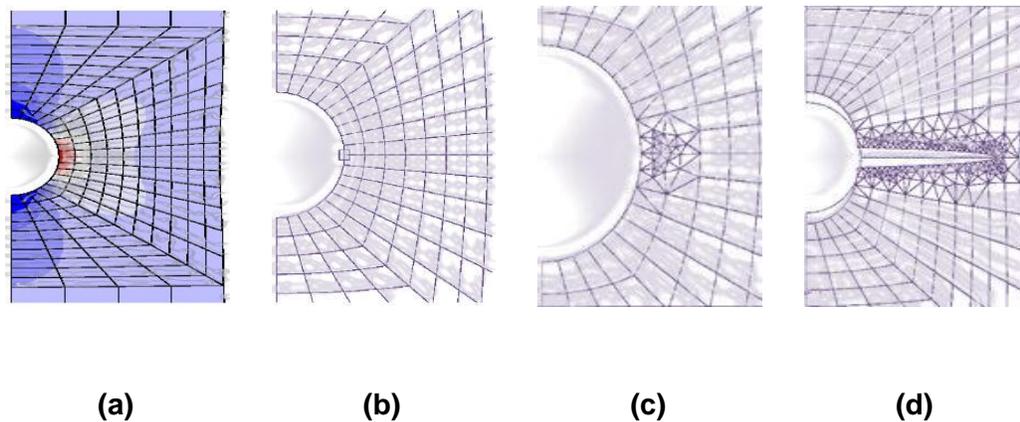


Figura 3.1. (a) Zona de concentración de esfuerzos. (b) Punto inicial de la grieta. (c) Inicio de la simulación de crecimiento de grieta. (d) Simulación terminada.

[Franc2D User's Guide V3.1, (1993)]

3.3 PREPARACIÓN DEL HUESO Y MECANIZADO DE LAS PROBETAS

En esta etapa para el mecanizado primero debe hacerse una respectiva limpieza de los huesos donados (hueso cortical femoral de bovino). Luego se desbasta la superficie para quitar las irregularidades que pueda tener y finalmente se hace el acabado superficial cumpliendo con los requerimientos para el ensayo.

3.3.1 Preparación del hueso femoral de bovino

Para la preparación del hueso se emplea una técnica basada en la **MACERACIÓN** que no es más que la acción de bacterias en el agua para limpiar huesos. Es el método más sencillo para limpiar hueso y funciona mejor en huesos grandes y robustos, como por ejemplo cráneos y huesos grandes de mamíferos. No es recomendado para huesos delicados como los que se encuentran en los reptiles o en los pájaros, ni para esqueletos en los que se desee mantener unidos (articulados), ya que todos los

huesos se separarán debido a que la maceración desprende el tejido conectivo que mantiene al esqueleto unido.

A continuación se muestran los pasos para la preparación del hueso de una forma más detallada:

- Retirar cualquier resto de tejido o piel que quede en el hueso lo mejor que se pueda. Esto acelerará el proceso de maceración.
- Taladrar el fémur por ambos extremos (epífisis distal y proximal) para así permitir el drenado de la medula ósea.
- Sumergir el hueso (femoral) en un recipiente con agua.
- Dejar el recipiente en un lugar cálido donde no moleste el mal olor.
- Cambiar periódicamente el agua grasienta y mal oliente.
- Cuando el agua permanezca limpia, la bacteria habrá terminado de descomponer el tejido que haya quedado.
- Remover el hueso esponjoso (trabecular) de forma tal que sólo quede como una especie de cilindro (hueso cortical).
- Para blanquear y/o esterilizar el hueso se coloca en un recipiente con agua oxigenada (peróxido de hidrógeno). Retirar cuando haya alcanzado el grado de blancura que se desee y dejar secar a temperatura ambiente.

3.3.2 Mecanizado de las probetas

3.3.2.1 Desbaste

Luego de cortar el fémur en partes aproximadamente equitativas, se debe proceder a aplanar el hueso compacto quitándole la curvatura natural que éste posee con una desbastadora de banco como se muestra en la **Figura 3.2.**



Figura 3.2. Eliminación de irregularidades del hueso compacto en la desbastadora de banco.

3.3.2.2 Cortes

Para los cortes en ángulos rectos es necesario utilizar una cortadora de disco con punta de diamante (Isomet Buehler) para una mayor precisión y obtener mejores resultados, En la **Figura 3.3** se ilustra una cortadora de disco con punta de diamante.

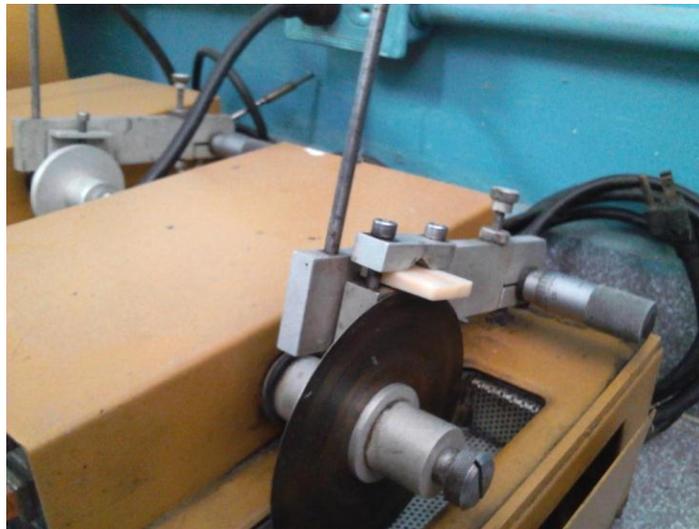


Figura 3.3. Cortes precisos de ángulos rectos con una cortadora de disco con punta de diamante.

3.3.2.3 Agujeros

Los agujeros pasantes se deben crear con sumo cuidado ya que el hueso cortical es un material frágil y se puede quebrar cuando se le aplique la fuerza para taladrarlo, es por ello que es imperioso utilizar un taladro de banco (**Figura 3.4**) ya que se puede graduar la velocidad de rotación y la fuerza que se le debe aplicar al material.

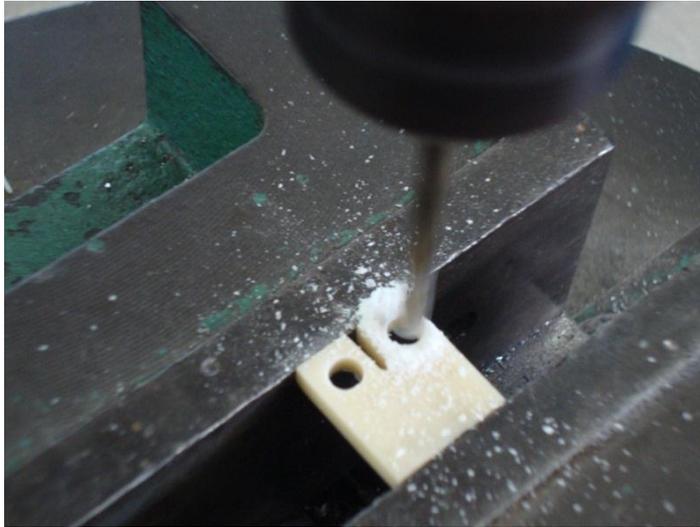


Figura 3.4. Agujeros hechos con un taladro de banco.

3.3.2.4 Entalladura

La obtención de la entalladura es uno de los pasos más críticos ya que cualquier error cometido podría partir el hueso a la mitad y así perder todo el trabajo que se haya realizado anteriormente, es por esto que se debe formar la entalladura cuidadosamente con un disco de corte de Dremel asentado debidamente en su base, graduando la velocidad de rotación para un corte limpio.

3.3.2.5 Pre-grieta

Debido a que el hueso compacto es extremadamente frágil no se puede originar la pre-grieta sometiendo las probetas a cargas en una máquina de ensayos a fatiga, ya que dicha probeta podría fracturar

súbitamente, por lo que se debe crear la pre-grieta con una cortadora de disco con punta de diamante de baja velocidad (Isomet Buehler) y así crear el concentrador de esfuerzos.

3.3.3 Geometría de las probetas

Para la estandarización de las probetas se debe cumplir con la *Norma ASTM E 399 – 90*. Esta norma describe que para la fabricación de dichas probetas todas las dimensiones dependerán del espesor (B) que éstas tengan, como se muestra en la **Figura 3.5**, En el caso directo de trabajar con hueso cortical (femoral) de bovino, casi todas las probetas tendrán diferentes dimensiones entre sí, debido a que el hueso compacto tiene forma tubular y su espesor no es constante a lo largo de toda su extensión.

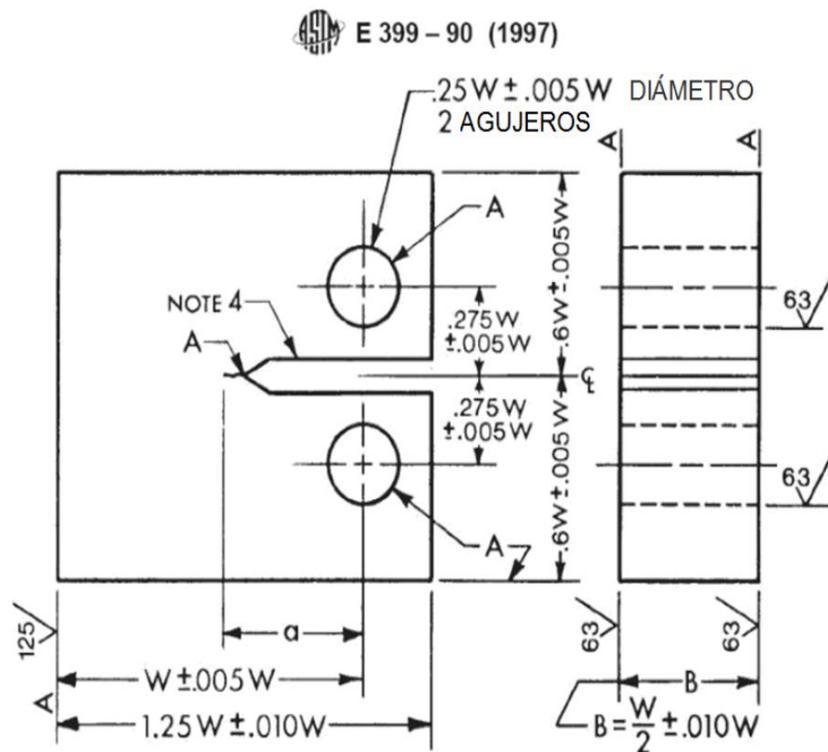


Figura 3.5. Dimensiones estándares para la fabricación de probetas C(T).

[ASTM E 399 – 90, 2002]

En la **Figura 3.6** se muestran las probetas CT (de tipo compacto) ya terminadas.

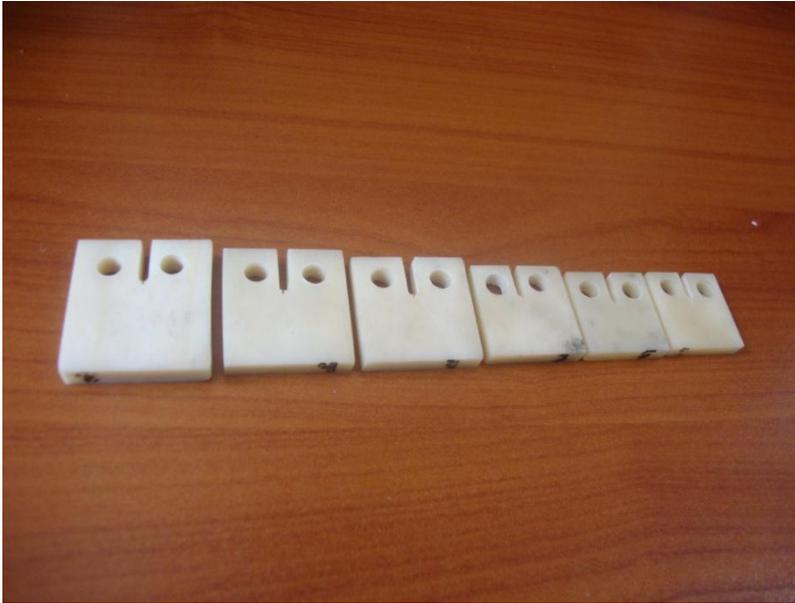


Figura 3.6. Presentación de las probetas C(T) ya terminadas. [Fuente Propia]

3.4 PRUEBAS EXPERIMENTALES

A modo de corroborar los resultados obtenidos a través del software de elementos finitos, en esta etapa se hace necesario realizar pruebas experimentales para la validación de este trabajo de investigación.

Las pruebas experimentales se realizarán en un banco de ensayos que dispone el Laboratorio de Materiales de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Carabobo.

Dicho banco de ensayos debe ser calibrado para operar a las cargas a tracción deseadas y las probetas a ensayar deben estar perfectamente mecanizadas para la minimización de errores y la buena obtención de resultados.

CAPÍTULO 4

Método de Elementos Finitos

El método de los elementos finitos (MEF) ha adquirido una gran importancia en la solución de problemas ingenieriles, físicos, etc., ya que permite resolver casos que hasta hace poco tiempo eran prácticamente imposibles de resolver por métodos matemáticos tradicionales. Esta circunstancia obligaba a realizar prototipos, ensayarlos e ir realizando mejoras de forma iterativa, lo que traía consigo un elevado coste tanto económico como en tiempo de desarrollo. El MEF permite realizar un modelo matemático de cálculo del sistema real, más fácil y económico de modificar que un prototipo. Sin embargo, no deja de ser un método aproximado de cálculo debido a las hipótesis básicas del método. Los prototipos, por lo tanto, siguen siendo necesarios, pero en menor número, ya que el primero puede acercarse bastante más al diseño óptimo.

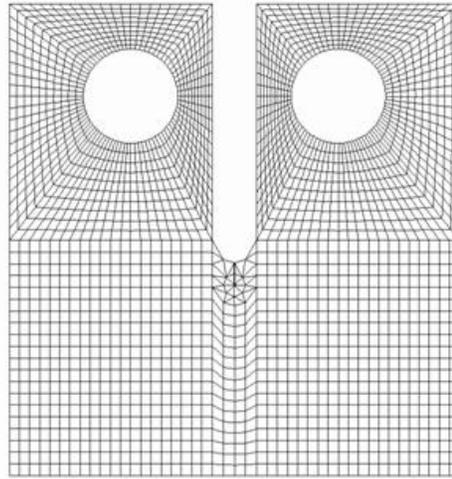


Figura 4.1. Discretización con elementos finitos. [FRANC2D]

El método de los elementos finitos como formulación matemática es relativamente nueva; aunque su estructura básica es conocida desde hace bastante tiempo, en los últimos años ha sufrido un gran desarrollo debido a los avances informáticos. Han sido precisamente estos avances informáticos los que han puesto a disposición de los usuarios gran cantidad de programas que permiten realizar cálculos con elementos finitos. Pero no hay que llevarse a engaño, el manejo correcto de este tipo de programas exige un profundo conocimiento no sólo del material con el que se trabaja, sino también de los principios del MEF. Sólo en este caso estaríamos en condiciones de garantizar que los resultados obtenidos en los análisis se ajustan a la realidad.

4.1 BREVE HISTORIA DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Aunque el nombre del MEF se ha establecido recientemente, el concepto se ha usado desde hace varios siglos. El empleo de métodos de discretizado espacial y temporal y la aproximación numérica para encontrar

soluciones a problemas ingenieriles o físicos es conocido desde antiguo. El concepto de “elementos finitos” parte de esa idea. Para encontrar vestigios de este tipo de cálculos hay que remontarse a la época de la construcción las pirámides egipcias. Los egipcios empleaban métodos de discretizado para determinar el volumen de las pirámides. Arquímedes (287-212 a.C.) empleaba el mismo método para calcular el volumen de todo tipo de sólidos o la superficie de áreas. En oriente también aparecen métodos de aproximación para realizar cálculos. Así el matemático chino Lui Hui (300 d.C.) empleaba un polígono regular de 3072 lados para calcular longitudes de circunferencias con lo que conseguía una aproximación al número Pi de 3.1416. El desarrollo de los elementos finitos tal y como se conocen hoy en día ha estado ligado al cálculo estructural fundamentalmente en el campo aeroespacial. En los años 40 Courant propone la utilización de funciones polinómicas para la formulación de problemas elásticos en subregiones triangulares, como un método especial del método variacional de Rayleigh-Ritz para aproximar soluciones. Fueron Turner, Clough, Martin y Topp quienes presentaron el MEF en la forma aceptada hoy en día. En su trabajo introdujeron la aplicación de elementos finitos simples (barras y placas triangulares con cargas en su plano) al análisis de estructuras aeronáuticas, utilizando los conceptos de discretizado y funciones de forma.

El trabajo de revisión de Oden presenta algunas de las contribuciones matemáticas importantes al MEF. Los libros de Przemieniecki y de Zienkiewicz y Holister presentan el MEF en su aplicación al análisis estructural. El libro de Zienkiewicz y Cheung o Zienkiewicz y Taylor presenta una interpretación amplia del MEF y su aplicación a cualquier problema de campos. En él se demuestra que las ecuaciones de los EF pueden obtenerse utilizando un método de aproximación de pesos residuales, tal como el método de Galerkin o el de mínimos cuadrados. Esta visión del problema

difundió un gran interés entre los matemáticos para la solución de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales mediante el MEF, que ha producido una gran cantidad de publicaciones hasta tal punto que hoy en día el MEF está considerado como una de las herramientas más potentes y probadas para la solución de problemas de ingeniería y ciencia aplicada.

Actualmente, el método se encuentra en una fase de gran expansión: es ampliamente utilizado en la industria y continúan apareciendo cientos de trabajos de investigación en este campo. Los ordenadores han aportado el medio eficaz de resolver la multitud de ecuaciones que se plantean en el MEF, cuyo desarrollo práctico ha ido caminando parejo de las innovaciones obtenidas en el campo de la arquitectura de los ordenadores. Entre éstas, además de permitir la descentralización de los programas de EF, ha contribuido a favorecer su uso a través de sofisticados paquetes gráficos que facilitan el modelado y la síntesis de resultados. Hoy en día ya se concibe la conexión inteligente entre las técnicas de análisis estructural, las técnicas de diseño (CAD), y las técnicas de fabricación.

4.2 CONCEPTOS GENERALES DEL MÉTODO

La idea general del método de los elementos finitos es la división de un continuo en un conjunto de pequeños elementos interconectados por una serie de puntos llamados nodos. Las ecuaciones que rigen el comportamiento del continuo regirán también el del elemento. De esta forma se consigue pasar de un sistema continuo (infinitos grados de libertad), que es regido por una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, a un sistema con un número de grados de libertad finito cuyo comportamiento se modela por un sistema de ecuaciones, lineales o no. En cualquier sistema a analizar se puede distinguir entre:

- **Dominio.** Espacio geométrico donde se va a analizar el sistema.
- **Condiciones de contorno.** Variables conocidas y que condicionan el cambio del sistema: cargas, desplazamientos, temperaturas, voltaje, focos de calor,...
- **Incógnitas.** Variables del sistema que se desean conocer después de que las condiciones de contorno han actuado sobre el sistema: desplazamientos, cargas, temperaturas,...

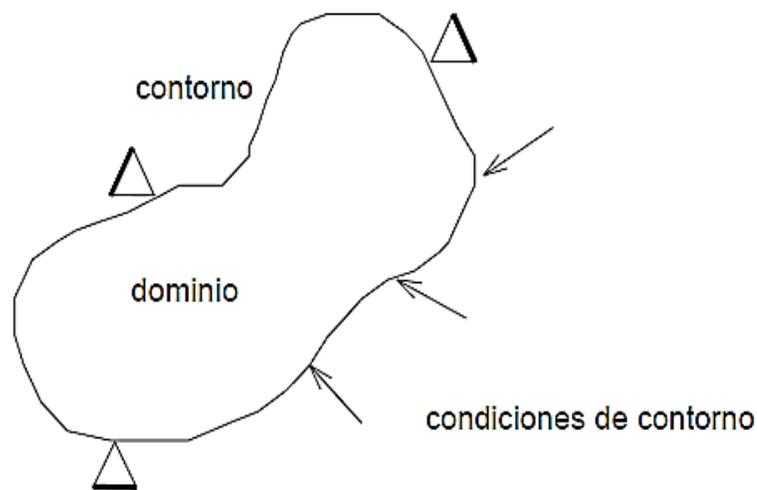


Figura 4.2. Sistema de análisis.

El método de los elementos finitos supone, para solucionar el problema, el dominio discretizado en subdominios denominados elementos. El dominio se divide mediante puntos (en el caso lineal), mediante líneas (en el caso bidimensional) o superficies (en el tridimensional) imaginarias, de forma que el dominio total en estudio se aproxime mediante el conjunto de porciones (elementos) en que se subdivide. Los elementos se definen por un número discreto de puntos, llamados nodos, que conectan entre sí los elementos. Sobre estos nodos se materializan las incógnitas fundamentales del problema. En el caso de elementos estructurales estas incógnitas son los

desplazamientos nodales, ya que a partir de éstos se pueden calcular el resto de incógnitas que son de interés: cargas, deformaciones,... A éstas incógnitas se les denomina grados de libertad de cada nodo del modelo. Los grados de libertad de un nodo son las variables que determinan el estado y/o posición del nodo.

Por ejemplo si el sistema a estudiar es una viga en voladizo con una carga puntual en el extremo y una distribución de temperaturas tal y como muestra la figura,

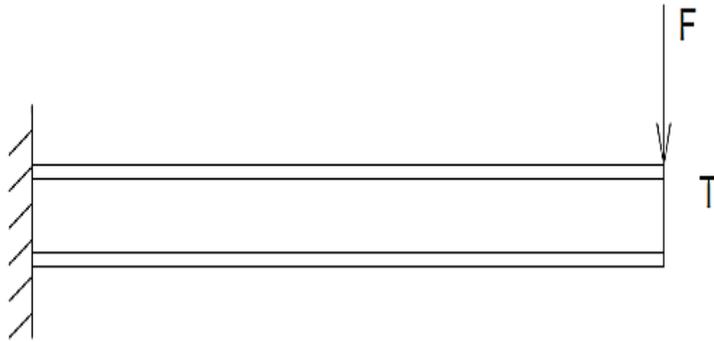


Figura 4.3. Viga de estudio.

Y el discretizado puede ser:

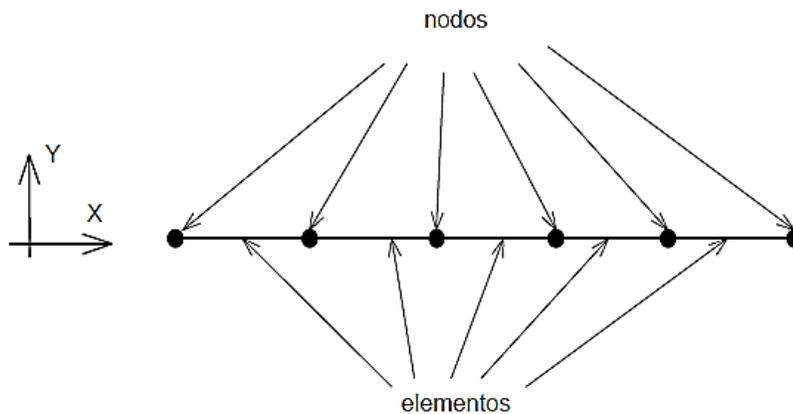


Figura 4.4. Discretización de la viga.

Los grados de libertad de cada nodo serán:

- Desplazamiento en dirección x
- Desplazamiento en dirección y
- Giro según z
- Temperatura.

El sistema, debido a las condiciones de contorno: empotramiento, fuerza puntual y temperatura, evoluciona hasta un estado final. En este estado final, conocidos los valores de los grados de libertad de los nodos del sistema se puede determinar cualquier otra incógnita deseada: cargas, deformaciones,... También sería posible obtener la evolución temporal de cualquiera de los grados de libertad.

Planteando la ecuación diferencial que rige el comportamiento del continuo para el elemento, se llega a fórmulas que relacionan el comportamiento en el interior del mismo con el valor que tomen los grados de libertad nodales. Este paso se realiza por medio de unas funciones llamadas de interpolación, ya que éstas 'interpolan' el valor de la variable nodal dentro del elemento.

El problema se formula en forma matricial debido a la facilidad de manipulación de las matrices mediante ordenador. Conocidas las matrices que definen el comportamiento del elemento (en el caso estructural serán las llamadas matrices de rigidez, amortiguamiento y masa, aunque esta terminología ha sido aceptada en otros campos de conocimiento) se ensamblan y se forma un conjunto de ecuaciones algebraicas, lineales o no, que resolviéndolas proporcionan los valores de los grados de libertad en los nodos del sistema.

presiones y el peso propio sería una fuerza por unidad de volumen). El vector desplazamiento se denota por $\{u\} = \{u, v, w\}^T$. Las deformaciones correspondientes a estos desplazamientos son

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T \quad (4.1)$$

Y los esfuerzos debido a estas deformaciones serán

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T \quad (4.2)$$

Las ecuaciones de equilibrio para un elemento diferencial de volumen pueden escribirse de la forma

$$\nabla\{s\} + \{X\} = 0 \quad (4.3)$$

Donde el vector $\{X\}$ incluye de forma general las fuerzas de inercia $\{X\} = \{X\} - \rho \ddot{u}$, es decir, se consideran las fuerzas de inercia como fuerzas por unidad de volumen. Multiplicando esta ecuación por una función de ponderación $\{du\}$ e integrando

$$\int_V \{du\}^T \nabla\{\sigma\} dv + \int_V \{du\}^T \{X\} dv = 0 \quad (4.4)$$

Utilizando la fórmula de Green se puede escribir

$$-\int_V \nabla\{\delta u\}^T \{\sigma\} dv + \int_S \{\delta u\}^T \{\sigma\} \bar{n} ds + \int_V \{\delta u\}^T \{X\} dv = 0 \quad (4.5)$$

Si se asocia la función de ponderación $\{du\}$ con un desplazamiento virtual, el operador ∇ actuando sobre él será una deformación virtual.

$$\{d\boldsymbol{\varepsilon}\} = \nabla\{d\boldsymbol{u}\} \quad (4.6)$$

El equilibrio en el contorno exige que se cumpla la relación $\{\boldsymbol{\sigma}\} \cdot \{n\} = \{t\}$ y sustituyendo en la expresión (4.5)

$$-\int_V \nabla\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dv + \int_S \{\delta\boldsymbol{u}\}^T \{t\} ds + \int_V \{\delta\boldsymbol{u}\}^T \{X\} dv = 0 \quad (4.7)$$

En la relación anterior es posible introducir la ley de comportamiento de material mediante a matriz elástica con las propiedades de éste, [C], de forma que

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [C](\{\boldsymbol{\varepsilon}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}) + \{\boldsymbol{\sigma}_0\} \quad (4.8)$$

Siendo los vectores $\{\boldsymbol{\varepsilon}_0\}^T$ y $\{\boldsymbol{\sigma}_0\}^T$ las deformaciones y las cargas iniciales respectivamente. Introduciendo la expresión (4.8), suponiendo deformaciones y esfuerzos iniciales nulos, en la ecuación (4.7), se obtiene

$$\int_V \{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}^T [C] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} dv = \int_V \{\delta\boldsymbol{u}\}^T (\{X\} - \rho \ddot{\boldsymbol{u}}) dv + \int_S \{\delta\boldsymbol{u}\}^T \{t\} ds = 0 \quad (4.9)$$

que constituye la formulación del PTV y relaciona el sistema de cargas real y esfuerzos con el virtual de desplazamientos.

4.3.2 Funciones de interpolación

Discretizado el continuo, la idea es tomar un conjunto de funciones (funciones de interpolación) que definan de manera única el campo de desplazamientos dentro del elemento en función de los desplazamientos en los nodos del mismo. Es decir

$$\{u(x, y, z)\} = [N(x, y, z)]\{U\} \quad (4.10)$$

Siendo $\{U\}$ el vector con los desplazamientos nodales. Una vez conocidos los desplazamientos en todos los nodos, se determinan las deformaciones

$$\{\varepsilon\} = [D]\{u\} \quad (4.11)$$

Donde $[D]$ es el operador diferencial que depende del problema en estudio.

Sustituyendo el valor del desplazamiento se tiene que

$$\{\varepsilon\} = [D][N]\{U\} = [B]\{U\} \quad (4.12)$$

Donde se obtiene el valor de las deformaciones en función de los desplazamientos nodales.

Sustituyendo la ecuación anterior en la expresión del PTV (4.9) se obtiene

$$-\int_V [B]^T [C] [B] \{U\} dv + \int_V [N]^T (\{X\} - \rho \ddot{u}) dv + \int_S [N]^T \{t\} ds = 0 \quad (4.13)$$

Reordenando esta ecuación se puede llegar a un sistema de la forma

$$[M]\{\ddot{U}\}+[K]\{U\} = \{P\} \quad (4.14)$$

Donde se definen:

- **Matriz de masa consistente**

$$[M] = \int_V [N]^T \rho [N] dv \quad (4.15)$$

- **Matriz de rigidez**

$$[K] = \int_V [B]^T [C] [B] dv \quad (4.16)$$

- **Matriz de cargas nodales consistentes**

$$\{P\} = \int_V [N]^T \{X\} dv + \int_S [N]^T \{t\} ds \quad (4.17)$$

La expresión anterior es general y permite determinar las matrices elementales para cualquier tipo de discretización.

4.3.3 Síntesis de las características globales

Las anteriores matrices se calculan para cada uno de los elementos. Realizando una transformación de coordenadas a las denominadas coordenadas unitarias del elemento, las matrices quedan en función de parámetros puramente geométricos y se facilita la integración numérica. Antes de proceder al ensamblaje de todas las ecuaciones hay que realizar la transformación a coordenadas globales con el objeto de tener todas las

matrices formuladas respecto al mismo sistema de coordenadas. Una vez que se dispone de las matrices y vectores elementales en coordenadas globales su acoplamiento en el sistema puede realizarse según el llamado método directo, por el que se suma en cada posición nodal la contribución realizada por los distintos elementos.

4.3.4 Imposición de condiciones de contorno. Solución

Antes de obtener la solución al sistema de ecuaciones planteado es necesario imponer las condiciones de desplazamientos nodales que sean conocidas. El sistema resultante se puede subdividir en dos términos: uno que contenga los desplazamientos impuestos y otro los incógnita. Resolviendo este sistema se tiene la solución.

Una vez conocidos los desplazamientos nodales es posible calcular otro tipo de magnitudes (deformaciones, esfuerzos,...).

4.4 PLANTEAMIENTO Y FORMULACIÓN GENÉRICOS DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Aunque las ecuaciones que se van a deducir son totalmente genéricas para cualquier tipo de elemento, y con objeto de facilitar la comprensión de las mismas, se plantean las ecuaciones del Método de los Elemento Finitos de una forma general, particularizando para el elemento triangular que se ha estudiado en el apartado anterior. Así, consideremos el elemento triangular de la **Figura 4.6**, en el que sus nodos vienen definidos por los números i , j , k .

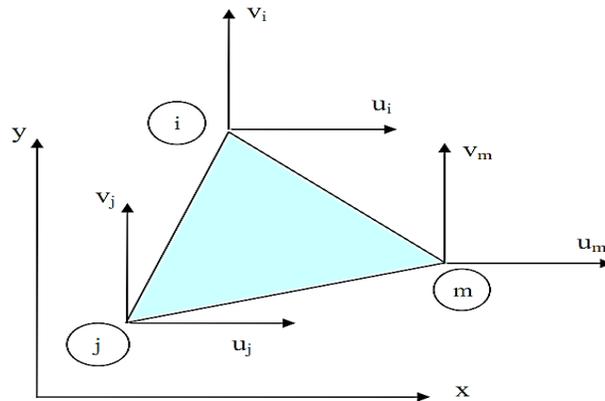


Figura 4.6. Elemento triangular.

Ahora se ha representado los desplazamientos en los nodos por la letra “u”, cuando se refieren a desplazamientos según el eje x, y por “v” cuando corresponden según el eje y.

El vector que agrupa los desplazamientos nodales se representarán por $\{a\}^e$, donde el superíndice “e” se refiere al elemento en cuestión considerado. En el caso del elemento triangular, se tendría:

$$\{a\}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

Nótese que, este vector se pudo haber obtenido poniendo consecutivamente, en forma de vector columna los vectores:

$$\{a\}_k = \begin{Bmatrix} u_k \\ v_k \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

Suponiendo que el subíndice “k” toma los valores “i, j, m”.

El vector $\{u\}$ que proporciona el campo de desplazamientos en el interior del elemento es:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

La idea clave del Método, consiste en suponer que el vector $\{u\}$ puede escribirse a partir del vector $\{a\}^e$; es decir, que los desplazamientos de cualquier punto del interior del elemento dependen, sólo y exclusivamente, de los desplazamientos de los nodos de dicho elemento.

Por tanto, se puede escribir:

$$\{u\} = \begin{bmatrix} [N_i(x, y)] & [N_j(x, y)] & [N_m(x, y)] \end{bmatrix} \{a\}^e \quad (4.21)$$

Este conjunto de matrices $([N_i(x, y)], [N_j(x, y)], [N_m(x, y)])$, que deben, para el caso del elemento triangular, cuadradas de orden 2, son las funciones de interpolación para determinar el campo de desplazamientos en el interior del elemento, y se conocen como funciones de forma del elemento, y deben cumplir lo siguiente:

$$\begin{aligned} [N_k(x_k, y_k)] &= [I] \text{ para } k = i, j, m \\ [N_k(x_n, y_n)] &= [0] \text{ si } n \neq k \end{aligned} \quad (4.22)$$

Donde $[I]$ es la matriz unidad. Aunque pueden parecer complicados estos nuevos desarrollos respecto de lo que se hizo con anterioridad, se evidenciará que el proceso es bastante más sencillo de lo que parece y, para

ello, se analizará un ejemplo. Para el caso del elemento triangular, se observó que, el campo de desplazamientos en el interior del elemento se aproximaba de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (4.23)$$

Nótese que, en la ecuación anterior, se tienen seis coeficientes por determinar ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$) y que se dispone de seis ecuaciones, las cuales se plantearán igualando, para las coordenadas x e y de cada nodo, los desplazamientos deducidos de la Ecuación (4.23) a los desplazamientos en los nodos correspondientes.

Particularizando la ecuación (4.23) para los tres nodos del elemento, se podría escribir que:

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ u_m &= \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m \\ v_i &= \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\ v_j &= \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\ v_m &= \alpha_4 + \alpha_5 x_m + \alpha_6 y_m \end{aligned} \quad (4.24)$$

Partiendo de las tres primeras ecuaciones, se pueden obtener los parámetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ en función de u_i, u_j, u_m , y los parámetros $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ en función de v_i, v_j, v_m , resultando que la ecuación (4.20) quedaría de la forma:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\Delta} ((a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m) \quad (4.25)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\Delta} ((a_i + b_i x + c_i y)v_i + (a_j + b_j x + c_j y)v_j + (a_m + b_m x + c_m y)v_m)$$

Dónde:

$$2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2 * \text{Área del triángulo } (i,j,k) \quad (4.26)$$

Y:

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j \\ b_i &= y_j - y_m \\ c_i &= x_m - x_j \end{aligned} \quad (4.27)$$

Y, por permutación cíclica, podrían obtenerse el resto de los coeficientes.

Por lo tanto, las expresiones de las funciones de forma serían:

$$\begin{aligned} N_i(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \\ N_j(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j x + c_j y) \\ N_m(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} (a_m + b_m x + c_m y) \end{aligned} \quad (4.28)$$

Con los coeficientes $a_i, b_i, c_i, a_j, b_j, c_j, a_m, b_m, c_m$, obtenidos de la ecuación (3.27). Volviendo a la ecuación (3.21), ésta quedaría como:

$$\{u\} = \left[[N_i(x, y)] \quad [N_j(x, y)] \quad [N_m(x, y)] \right] \{a\}^e$$

$$\{u\} = \begin{bmatrix} N_i(x, y) & 0 & N_j(x, y) & 0 & N_m(x, y) & 0 \\ 0 & N_i(x, y) & 0 & N_j(x, y) & 0 & N_m(x, y) \end{bmatrix} \{a\}^e \quad (4.29)$$

$$\{u\} = [N_i(x, y)] [I] \quad [N_j(x, y)] [I] \quad [N_m(x, y)] [I] \{a\}^e = [N] \{a\}^e$$

La matriz $[N]$, de orden 2x6 para un elemento triangular, recibe el nombre de **matriz de forma del elemento**.

CAPÍTULO 5

Resultados Experimentales

A continuación se presentan los resultados obtenidos en los ensayos experimentales con la finalidad de establecer una comparación con los resultados numéricos, esto permitirá concluir si dichos resultados obtenidos mediante el método de elementos finitos son veraces y si se acercan a la realidad.

5.1 OBJETIVO

Estudiar el comportamiento del hueso cortical cuando es sometido a carga de tracción en dirección transversal a la diáfisis del fémur con la finalidad de determinar el factor de intensidad de esfuerzos analíticamente.

5.2 MATERIALES Y MÉTODO

Para realizar los ensayos se emplearon las probetas de hueso compacto, éstas fueron concebidas tal como lo establece la norma ASTM E 399 -90. Hay que aclarar que tal norma fue hecha específicamente para materiales metálicos, sin embargo hay varios estudios ya realizados en los que se toma el hueso cortical para hacer las probetas de tipo compacto basándose en dicha norma [Zimmermann et al, 2010]. Tales ensayos de tracción se realizaron en una máquina universal para tal fin en el Laboratorio de Materiales de la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Carabobo.

5.2.1 Materiales Utilizados

- Probetas C(T) de hueso compacto, hechas según la norma ASTM E 399 – 90.
- Máquina de ensayo universal de materiales
 - Marca: GALDABINI
 - Modelo: CTM – 20
 - Capacidad: 20 Toneladas (200 KN)
 - Apreciación: 0,1 Kgf (1 N)



Figura 5.1. Máquina de ensayo universal Galdabini.

5.2.2 Método Empleado

Las dimensiones de cada probeta se muestran en la **Tabla 5.1**. Estas están concebidas bajo la norma ASTM E 399 – 90 como se menciona en el capítulo 3.

Tabla 5.1. Dimensiones de las probetas mecanizadas. [Fuente Propia]

Probeta N°	B	W	1,25W	0,6W	0,275W	0,25W	1,2W	a
1	4,20	16,80	21,00	10,00	4,62	4,20	20,16	8,48
2	4,40	17,60	22,00	10,56	4,84	4,40	21,12	9,00
3	4,40	17,60	22,00	10,56	4,84	4,40	21,12	9,00
4	4,70	18,80	23,50	11,28	5,17	4,70	22,56	9,60
5	5,20	20,80	26,00	12,48	5,70	5,20	24,96	10,39
6	5,50	22,00	27,50	13,20	6,00	5,50	26,40	10,90

Todas las dimensiones están en milímetros

Las probetas están dispuestas o sacadas del espécimen con la entalladura paralela al eje longitudinal de la diáfisis, es decir, en la dirección de los osteones como lo muestra la **Figura 5.2**. Esto se debe a que la mayoría de las fracturas que ocurren como consecuencia de la fatiga en huesos largos, se inician con pequeñas fisuras (microgrietas) orientadas en dirección próximo-distal debido a la esbeltez del mismo.

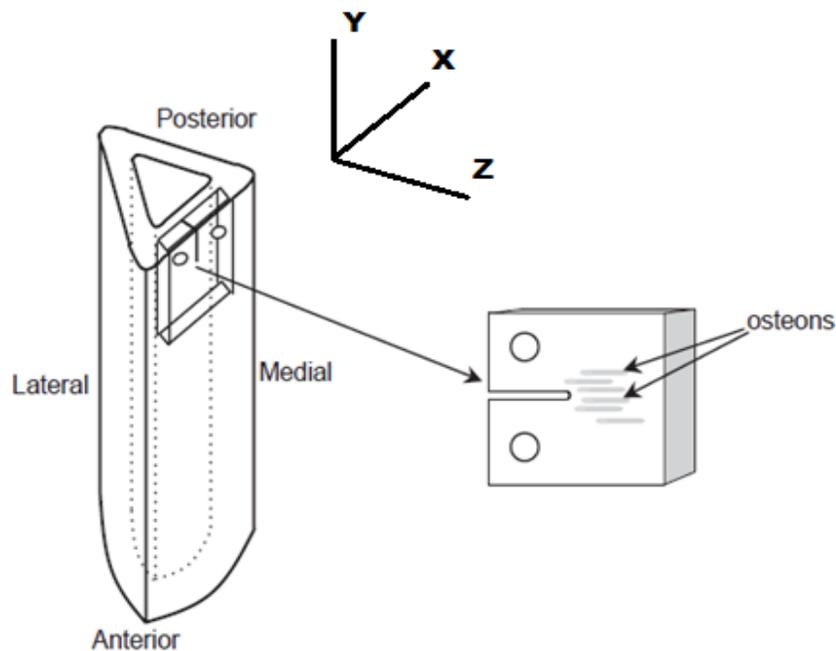


Figura 5.2. Orientación de la probeta tracción-compacción de fémur bovino para permitir la extensión de grietas en la dirección próximo-distal (eje Y). [Nalla_b et al, 2005]

Las probetas se sometieron a cargas de tracción hasta un punto donde no puedan sostener un nuevo aumento de carga [ASTM E399-90, 1997]. Sin embargo, la carga máxima que experimentó el hueso fue hasta su punto de rotura (Véase figura 5.3). Ahí se evidencia que se está lidiando con un material frágil debido a la linealidad que presenta la curva [Gómez et al, 2008] como se ilustra en la **Figura 5.4**.

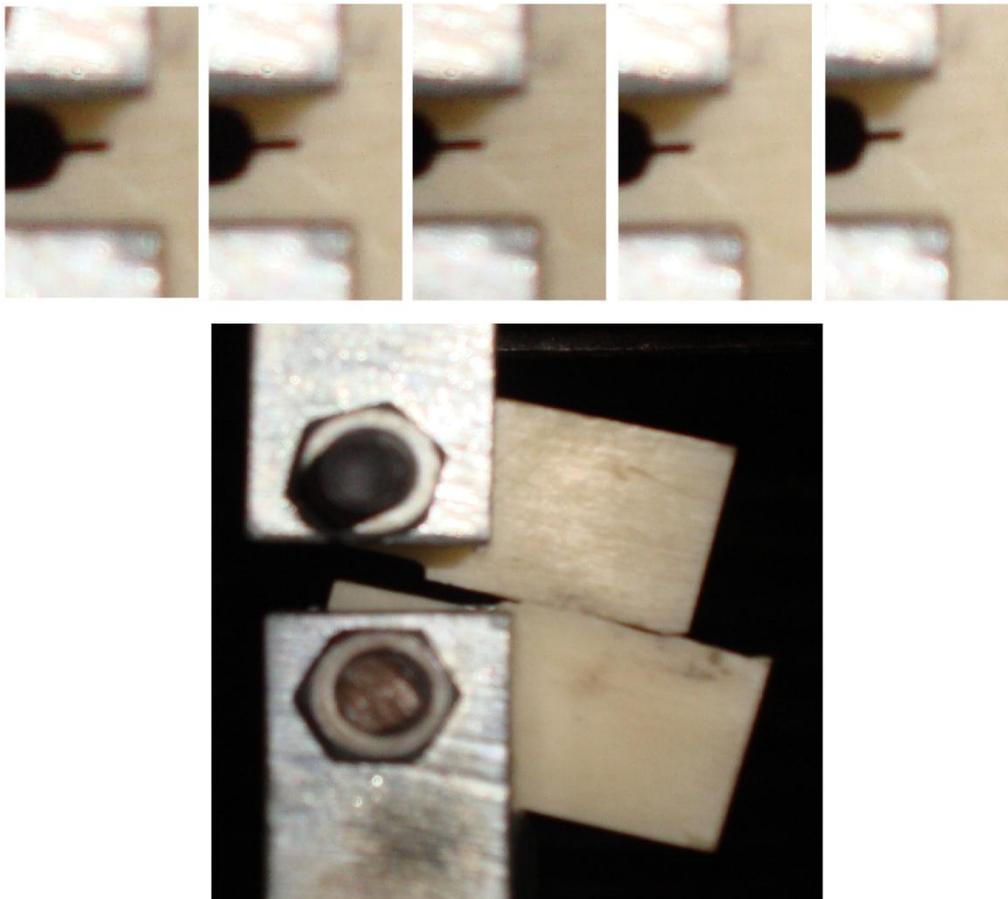


Figura 5.3. Secuencia del estiramiento de la probeta hasta su colapso.

[Fuente Propia]

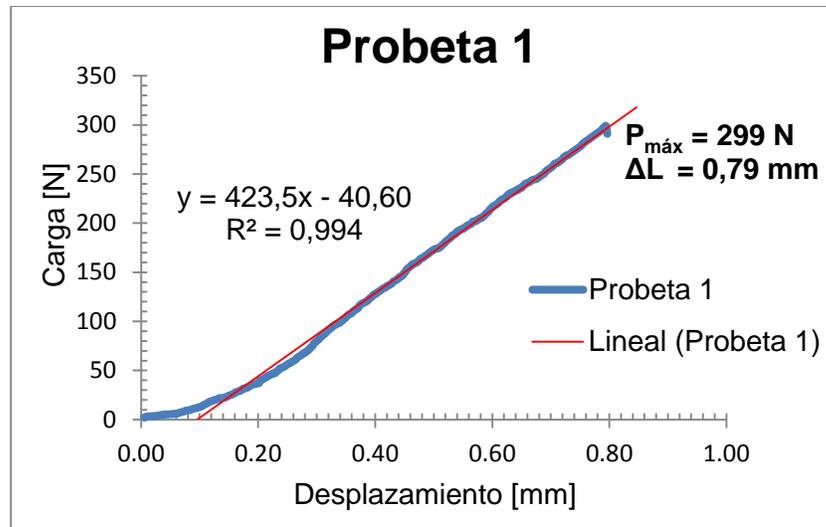


Figura 5.4. Ensayo de tracción en dirección tangencial (X) a la probeta nº 1 de tejido cortical.

Debido a la linealidad de la curva, la norma ASTM E 399 - 90 establece que la carga máxima ($P_{máx}$) a la cual rompe la probeta debe ser igual a la carga (P_Q) que se utiliza para determinar el factor de intensidad de esfuerzo analíticamente (ver **Figura 5.5**).

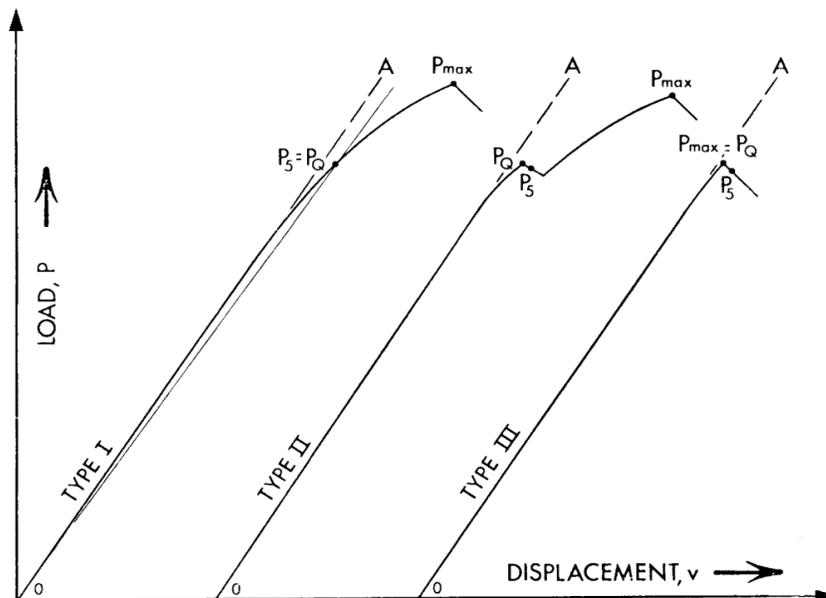


Figura 5.5. Principales tipos de registros de carga-desplazamiento.

[ASTM E 399 – 90, 2002]

Por lo que $P_Q = P_{\text{máx}} = 299 \text{ N}$, para la probeta n° 1 como se puede observar en la **Figura 5.4**.

Luego el factor de intensidad viene dado por:

$$K_Q = \left(\frac{P_Q}{BW^{1/2}} \right) \cdot f\left(\frac{a}{W}\right) \quad (5.1)$$

En donde:

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{(2 + a/W)(0,886 + 4,64a/W - 13,32a^2/W^2 + 14,72a^3/W^3 - 5,6a^4/W^4)}{(1 - a/W)^{3/2}} \quad (5.2)$$

Entonces, sustituyendo los valores correspondientes en la ecuación 5.2 y luego en la ecuación 5.1, se obtiene el K_Q experimental, como se muestra a continuación:

De la **Tabla 5.1** se obtiene $\frac{a}{W} = \frac{8,48\text{mm}}{16,80\text{mm}} = 0,504$

Luego:

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{(2 + 0,504)[0,886 + 4,64(0,504) - 13,32(0,504)^2 + 14,72(0,504)^3 - 5,6(0,504)^4]}{(1 - 0,504)^{3/2}} = 9,802$$

$$K_Q = \left(\frac{299\text{N}}{(4,20\text{mm})(16,80\text{mm})^{1/2}} \right) \cdot 9,802 = 170,254\text{MPa}\sqrt{\text{mm}} = 5,383\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$$

La norma ASTM E 399 – 90 establece que para que el factor de intensidad de esfuerzos calculado anteriormente sea el crítico ($K_Q = K_{Ic}$), tienen que cumplirse las siguientes condiciones:

1. La relación $P_{\text{máx}} / P_Q$ tiene que ser menor a 1,10.
2. Calcular la expresión $2,5(K_Q / \sigma_{YS})^2$, ésta cantidad no puede exceder al espesor de la muestra “B” y la longitud de la grieta “a”.

En este caso en particular la primera condición se cumple para todas las probetas ya que $P_{\text{máx}} = P_Q$ debido a la linealidad que presentan las curvas de los ensayos de tracción (ver **Figura 5.5**), por lo que la relación $P_{\text{máx}} / P_Q = 1$. En la segunda condición se utiliza la probeta n°1 para efectos de cálculos.

De la **Tabla 2.1** se obtiene el valor de la resistencia a la tracción (transversal) del hueso cortical.

Entonces:

$$2,5 \left(\frac{170,254 \text{MPa} \sqrt{\text{mm}}}{51 \text{Mpa}} \right)^2 = 27,86 \text{mm} \quad \begin{array}{l} > B = 4,20 \text{mm} \\ > a = 8,48 \text{mm} \end{array}$$

Es decir que no se cumple la segunda condición, por lo que $K_{Ic} \neq K_Q$, sin embargo esto no quiere decir que los ensayos realizados son inválidos, simplemente el factor de intensidad de esfuerzo obtenido (K_Q) no es el crítico.

A continuación se muestran los resultados (gráficos) del resto de las probetas ensayadas a tracción en dirección tangencial (eje x).

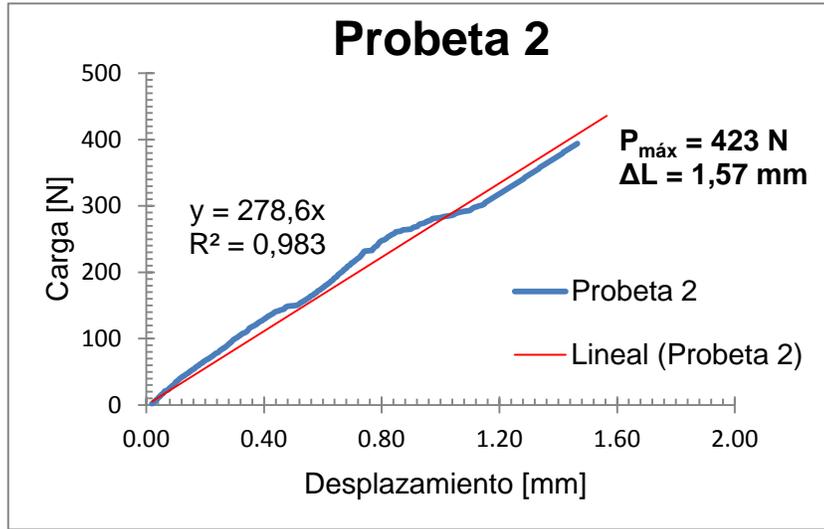


Figura 5.6. Ensayo de tracción en dirección tangencial (X) a la probeta n° 2 de tejido cortical.

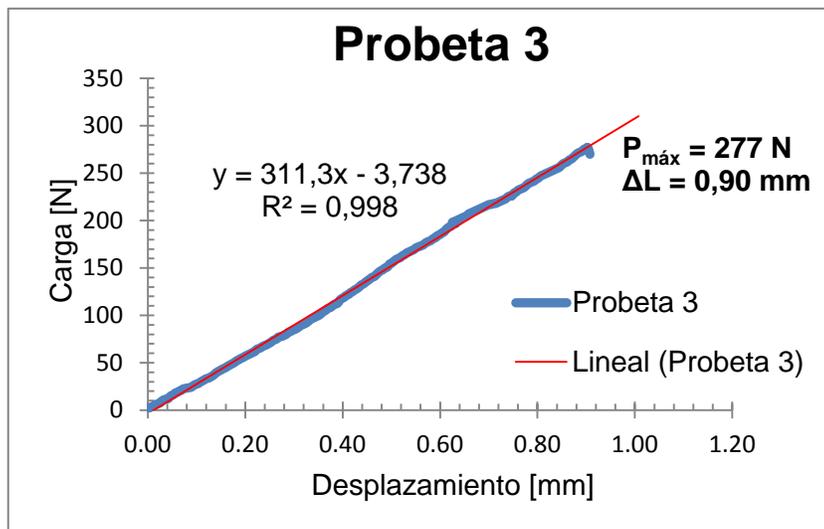


Figura 5.7. Ensayo de tracción en dirección tangencial (X) a la probeta n° 3 de tejido cortical.

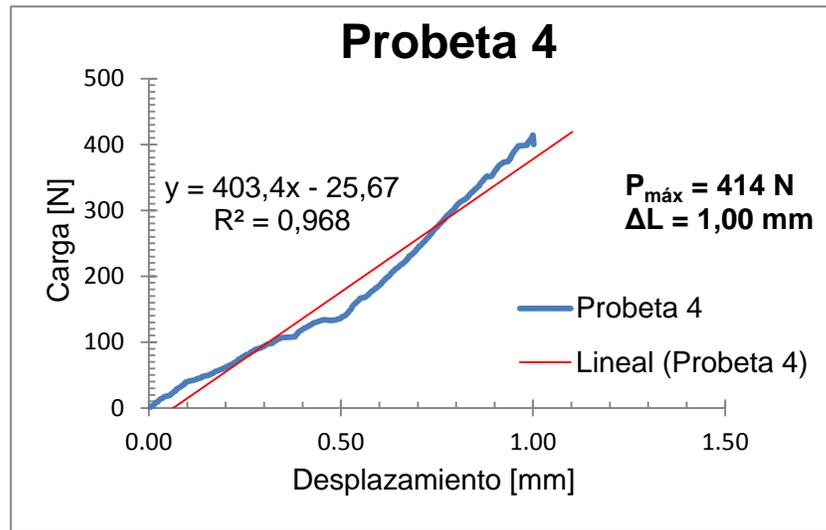


Figura 5.8. Ensayo de tracción en dirección tangencial (X) a la probeta n° 4 de tejido cortical.

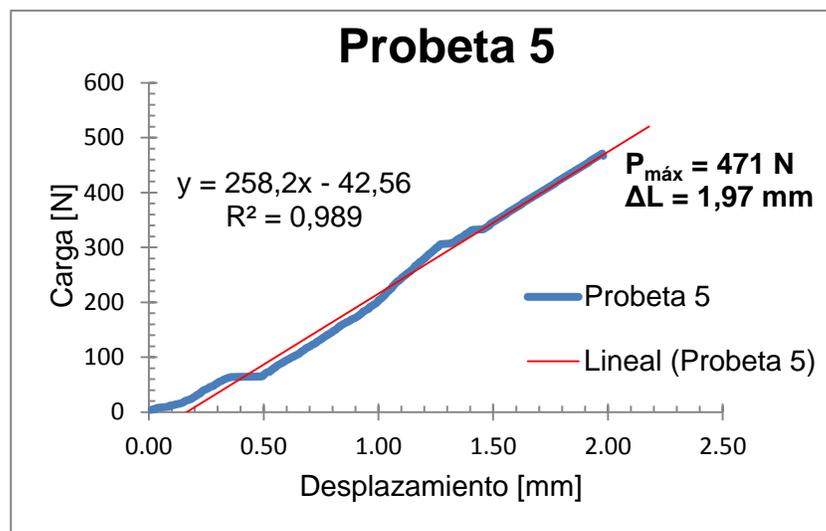


Figura 5.9. Ensayo de tracción en dirección tangencial (X) a la probeta n° 5 de tejido cortical.

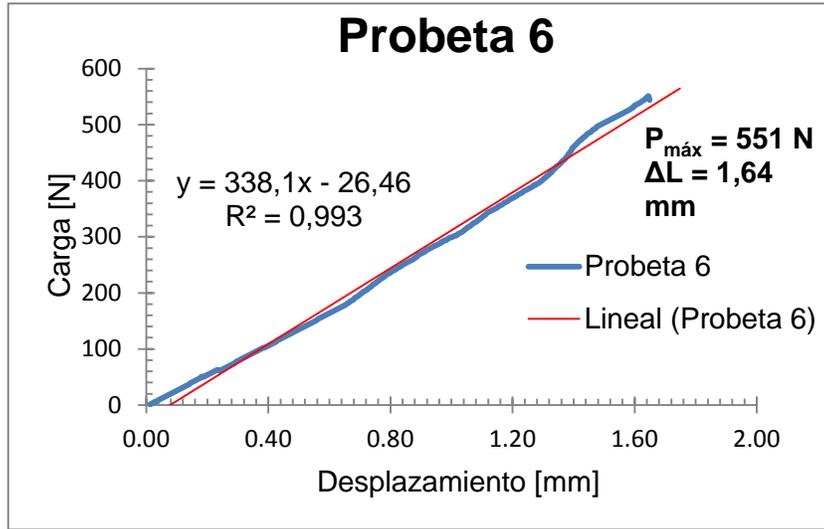


Figura 5.10. Ensayo de tracción en dirección tangencial (X) a la probeta n° 6 de tejido cortical.

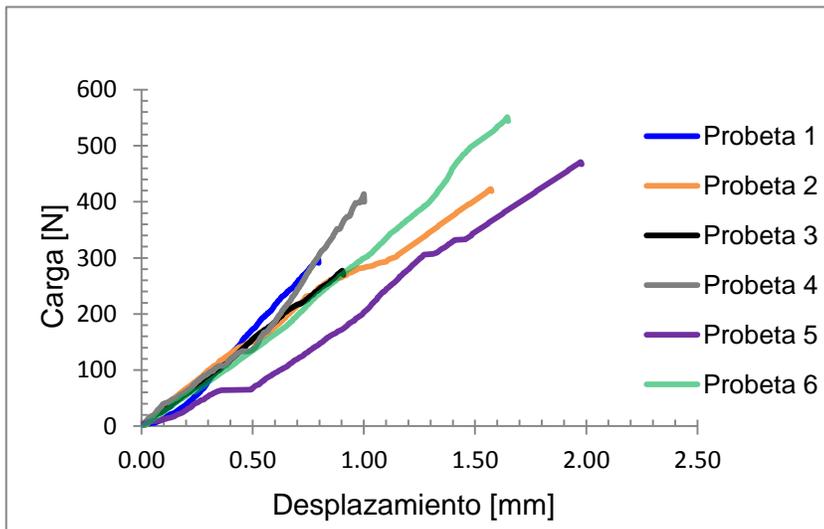


Figura 5.11. Ensayos de tracción en dirección tangencial (X) a todas las probetas de tejido cortical.

En la **Figura 5.11** se puede observar cómo se superponen las curvas de las seis probetas con la finalidad de poder comparar su comportamiento entre sí. Ahí se puede evidenciar que la fuerza necesaria para el colapso del material oscila entre **277 N** y **551 N**, estos límites están demarcados por las probetas **n° 3** y **n° 6** respectivamente. También se puede observar que la falla del hueso ocurre cuando las probetas sobrepasan los **0,5 mm** de deformación cuando son traccionadas (estiradas).

De igual forma obsérvese que a medida que las dimensiones de las probetas son más grandes también lo hace la carga P_Q (con la excepción de la probeta n° 2. Esto puede deberse a imperfecciones en la fabricación de la probeta y/o mal montaje en el banco de ensayos) como se ilustra en la **Figura 5.11**.

Ahora bien, para visualizar el grado de dispersión que tienen las curvas es necesario calcular y graficar la desviación estándar. Ésta desviación se basa en la media como punto de referencia y procede a tomar en consideración la magnitud y la ubicación de cada puntuación, cuán desviado o separado está cada puntuación respecto a la media.

La desviación estándar viene dada por la siguiente ecuación:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (5.3)$$

En donde:

n: Muestra o la población total.

\bar{x} : Promedio o media de la población.

La media viene expresada de la siguiente forma:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad (5.4)$$

Para determinar la media de todas las curvas (ver **Figura 5.11**) es necesario tomar punto a punto de cada una de las curvas (probeta n° 1 hasta la probeta n° 6) para poder sacar el promedio. Es importante destacar que cada curva no tiene el mismo número de datos (población "n"), por lo que el promedio se determinará a partir de la probeta que tenga la menor cantidad de números de datos, es decir, se toma la probeta n° 3 como punto de referencia ya que n = 220 (menor número de datos entre todas las probetas), y así poder promediar y hacer una comparación válida.

Luego de haber determinado el promedio de todas las probetas (n = 220 valores de datos promedios) se procede a calcular la desviación estándar con la ecuación 5.3, entonces:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \approx 68N$$

Esto quiere decir que existe una dispersión de los datos de unos 68 N por encima y por debajo del promedio. En la **Figura 5.12** se puede visualizar con mayor apreciación el umbral de la desviación estándar.

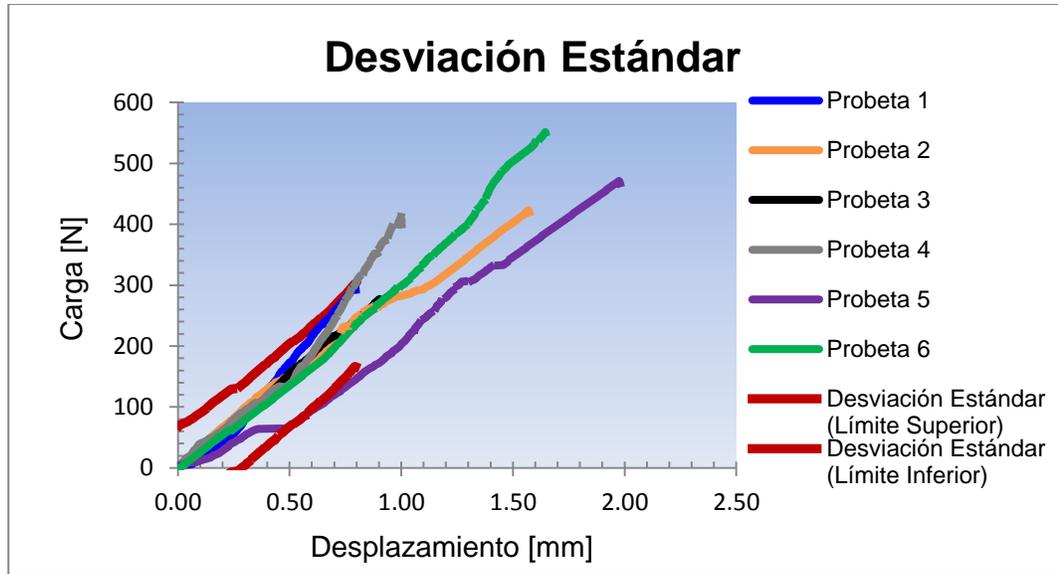


Figura 5.12. Desviación estándar respecto al promedio de curvas. [Fuente Propia]

En la figura anterior se pueden apreciar los límites (superior e inferior) de la desviación estándar demarcados por líneas discontinuas de color rojo. De igual forma se puede observar que las curvas de ensayo de las probetas tienen una parte continua y otra discontinua (excepto la probeta n° 3), esto quiere decir que la sección continua es en la que se puede establecer una comparación equivalente entre las curvas ya que $n \leq 220$. La sección discontinua indica que no se pueden comparar equitativamente porque no poseen igual número de datos ($n > 220$).

Véase que las curvas muestran un comportamiento muy similar unas de otras (**Figura 5.12**) y que además la mayoría se encuentran dentro de los límites de la desviación estándar, esto quiere decir que tienen una tendencia muy regular y que los resultados son coherentes.

En la **Tabla 5.2** se pueden observar los resultados de las pruebas hechas a cada muestra así como también los cálculos realizados para verificar si se trata del factor de intensidad de esfuerzo crítico (K_{Ic})

Tabla 5.2. Resultados de K_Q de cada probeta

Probeta N°	a/W [adim]	f(a/W) [adim]	P_Q [N]	K_Q [MPa√m]	$2,5(K_Q / \sigma_{YS})^2$ [mm]
1	0,504	9,802	299	5,383	27,861
2	0,511	10,007	423	7,251	50,544
3	0,511	10,007	277	4,748	21,674
4	0,510	9,984	414	6,414	39,543
5	0,499	9,644	471	6,057	35,266
6	0,495	9,525	551	6,433	39,785

Ninguno de los factores de intensidad de esfuerzo mostrados en la tabla anterior son críticos, sin embargo son factores puntuales válidos como se explicó anteriormente.

En la **Tabla 5.3** se muestra el rango de valores del factor de intensidad de esfuerzo crítico de un estudio experimental hecho por Bonfield et al, (1978) en hueso femoral cortical de bovino.

Tabla 5.3. Rango de valores del factor de intensidad de esfuerzo crítico (K_{Ic}) en hueso cortical. [Bonfield et al, 1978]

Especie	Hueso	Orientación	K_{Ic} (MPa√m)	G_c (J/m ²)	Geometría muestra
Bovino	Fémur	Longitudinal	2,4 – 5,2	920 - 2780	C(T)

Se puede observar que los resultados experimentales obtenidos están por encima del rango de la referencia tomada lo que pudo incurrir en algún tipo de error mientras se hacían los ensayos, sin embargo dichos resultados se encuentran muy cercanos a los valores citados.

CAPÍTULO 6

Resultados Numéricos

En este capítulo se muestra el diseño de la probeta compacta a tracción (C(T) Compact Specimen) según la norma ASTM E 399-90 para evaluar el factor de intensidad de esfuerzos. Inicialmente, se realiza la validación del programa FRANC2D, empleando la herramienta computacional ANSYS versión 13.0 al modelo de la probeta C(T) y comparando los resultados alcanzados con los que se obtienen, para el mismo caso, del programa FRANC2D. Posteriormente se aplican las condiciones del hueso cortical (carga, material orto-trópico, restricciones) para la evaluación y comparación de los resultados con el método experimental.

6.1 VALIDACIÓN NUMÉRICA

- **Geometría:** Se establece como en la **Figura 6.1**, utilizando el programa de diseño SolidWorks 2011 y la herramienta CASCA para su posterior análisis en ANSYS 13.0 y FRANC2D respectivamente. Las medidas están en pulgadas ya que el programa FRANC2D trabaja con el sistema inglés.

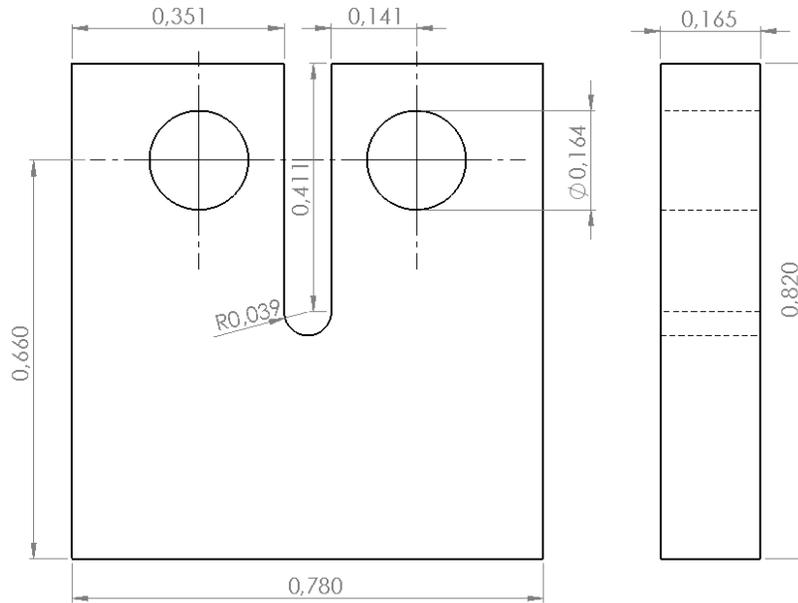


Figura 6.1. Probeta n° 1 C(T) (dimensiones en pulgadas).

[SolidWorks, 2011]

- **Material:** Para la simplicidad del estudio, se considera el hueso cortical como isotrópico, donde las propiedades son las siguientes:

Tabla 6.1. Propiedades elásticas del hueso cortical. [Cowin, 1989]

Modulo de Young	Relación de Poisson	Modulo de Rigidez
$E = 1,66E6$ psi	$\nu = 0,31$	$G = 0,47E6$ psi

- **Condiciones de contorno:** Se considera la fuerza máxima alcanzada en el ensayo a tracción de la probeta 1 que es de 299 N ($P_{\max 1} = 299$ N = 67,21 lbf) aplicada en uno de los agujeros en dirección perpendicular a la entalladura y soporte cilíndrico (restricción de movimiento) en el agujero restante tal como se ve en la **Figura 6.2** y la **Figura 6.3**.

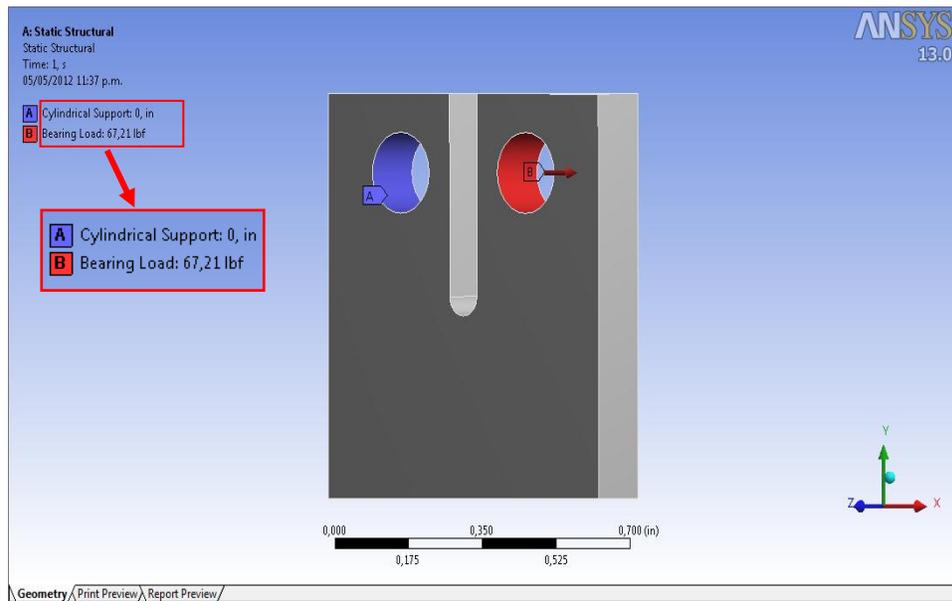


Figura 6.2. Soporte cilíndrico y aplicación de la carga en ANSYS [ANSYS versión 13.0]

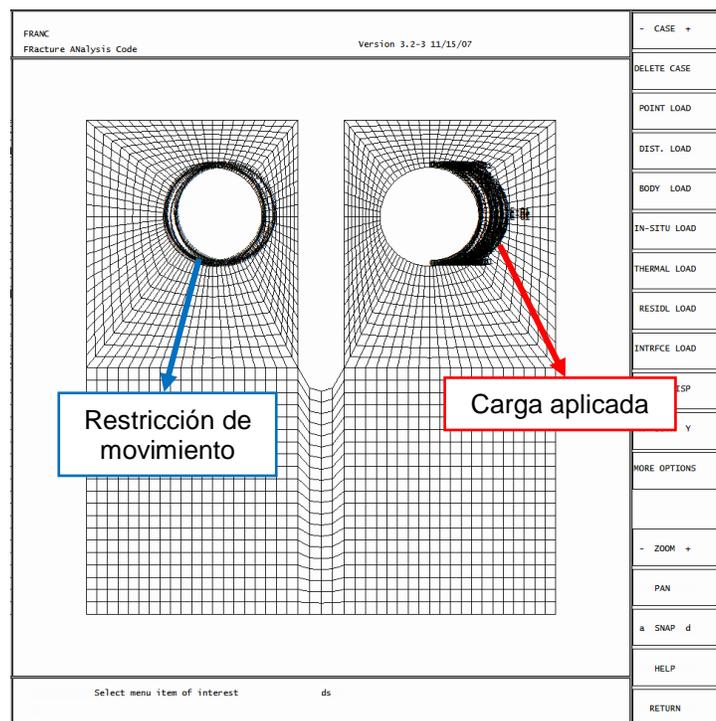


Figura 6.3. Soporte cilíndrico y aplicación de la carga en FRANC2D [FRANC2D V 3.1]

Luego se obtienen los esfuerzos máximos de Von-Mises siguientes: $\sigma_{\max} = 24475$ psi según ANSYS 13.0 y $\sigma_{\max} = 24300$ psi según FRANC2D, tal como se muestran en las **Figuras 6.4** y **6.5** respectivamente.

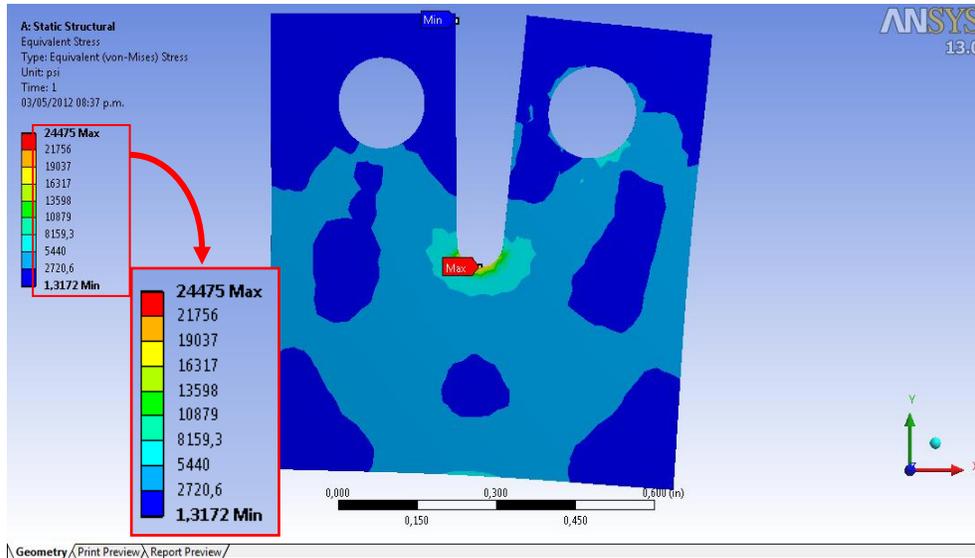


Figura 6.4. Esfuerzos de Von-Mises en ANSYS [ANSYS versión 13.0].

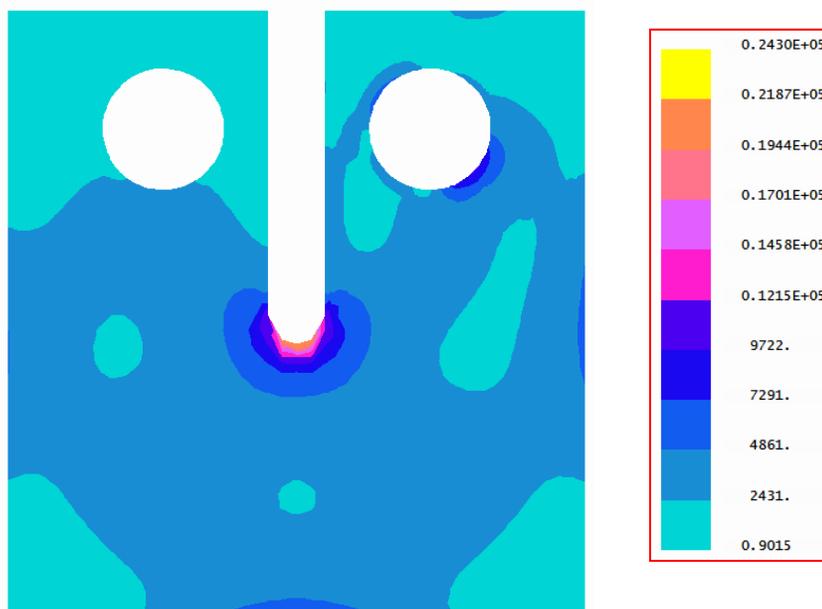


Figura 6.5. Esfuerzos de Von-Mises en FRANC2D [FRANC2D V3.1].

Donde el porcentaje de error es:

$$Error(\%) = \frac{\sigma_{MAX\ ANSYS} - \sigma_{MAX\ FRANC2D}}{\sigma_{MAX\ ANSYS}} * 100\% \quad (6.1)$$

$$Error(\%) = \frac{24475\psi - 24300\psi}{24495\psi} * 100\% = 0,71\%$$

Además nótese que la zona más esforzada coincide tanto en ANSYS 13.0 como en FRANC2D. Los resultados son bastantes cercanos y que el programa FRANC2D es tan preciso como cualquier otra herramienta computacional hasta la fecha.

6.2 DISEÑO DE LA PROBETA

El modelo propuesto para la determinación del factor de intensidad de esfuerzos en el hueso cortical, corresponde al anexo 4 de la norma ASTM E399-90, como se observa en la **Figura 3.5**, donde:

- B : Espesor de la probeta
- a : Longitud de la grieta
- W : Ancho. (Depende del espesor)

Se evalúan 6 especímenes, de los cuales presentan un espesor menor a media pulgada ($B < 0,5$ in), por lo tanto la relación espesor ancho será de:

$$\frac{W}{B} = 4 \rightarrow W = 4B \quad (6.2)$$

A continuación se determinan las dimensiones que definen cada una de las probetas (bajo los parámetros establecidos en la **Figura 6.5**) como lo muestra la siguiente tabla:

Tabla 6.2. Dimensiones de los especímenes a evaluar.

Probeta N°	B	W	1,25W	0,6W	0,275W	0,25W	1,2W	a
1	0,165	0,661	0,827	0,394	0,182	0,165	0,794	0,291
2	0,173	0,693	0,866	0,416	0,191	0,173	0,831	0,321
3	0,173	0,693	0,866	0,416	0,191	0,173	0,831	0,321
4	0,185	0,74	0,925	0,444	0,204	0,185	0,888	0,34
5	0,205	0,819	1,024	0,491	0,224	0,205	0,983	0,369
6	0,217	0,866	1,083	0,52	0,236	0,217	1,039	0,396

Todas las dimensiones están en pulgadas

6.2.1. Material

Para este análisis, las propiedades elásticas del hueso cortical humano aplicando la carga en el plano transversal al eje longitudinal son aproximadamente isotrópicas, y a su vez son substancialmente diferentes a aquellas obtenidas al aplicar cargas en la dirección longitudinal, la cual es paralela al eje de las osteonas (a lo largo del eje longitudinal de la diáfisis), por lo tanto, el hueso cortical humano es considerado como un material ortotrópico [Ginebra et al, 2000]. Las propiedades se muestran en la **Tabla 6.3**, además de las direcciones al cual pertenecen dichas propiedades en la **Figura 6.6** y la disposición de los especímenes en el hueso según la **Figura 5.2** (capítulo anterior).

Tabla 6.3. Propiedades mecánicas ortotrópicas del hueso cortical [Cowin, 1989]

Modulo de Young			Modulo de rigidez	Relación de Poisson		
E1 (GPa)	E2 (GPa)	E3 (GPa)	G12 (GPa)	v12	v13	v23
11,5	17	11,5	3,3	0,31	0,58	0,31

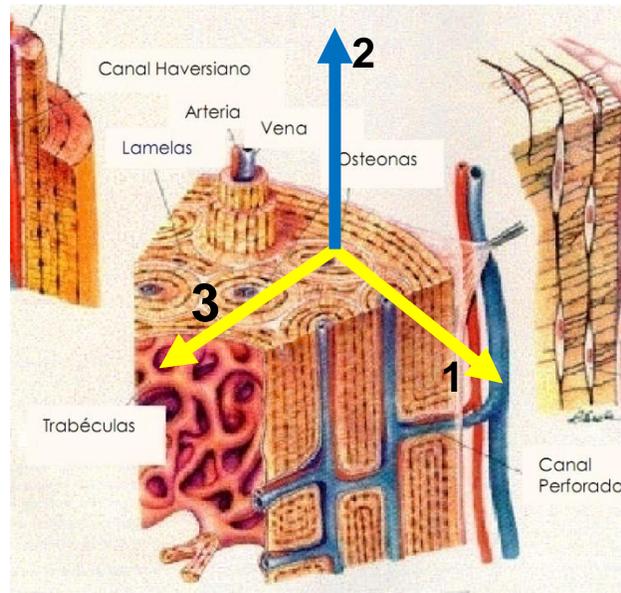


Figura 6.6. Propiedades elásticas distribuidas en el hueso cortical [Martin et al, 1998].

6.2.2. Condiciones de Contorno

Se aplica al igual que en las condiciones de contorno de la validación numérica del FRANC2D. Esta restricción y aplicación de carga van de acuerdo a como se realiza el método experimental ya que se hará la respectiva comparación de resultados y se requiere recrear o simular la misma situación experimental. También se asume el estado de esfuerzos planos, con la grieta a propagarse a lo largo del eje Y (paralelo al entalle) [Yang et al, 2005].

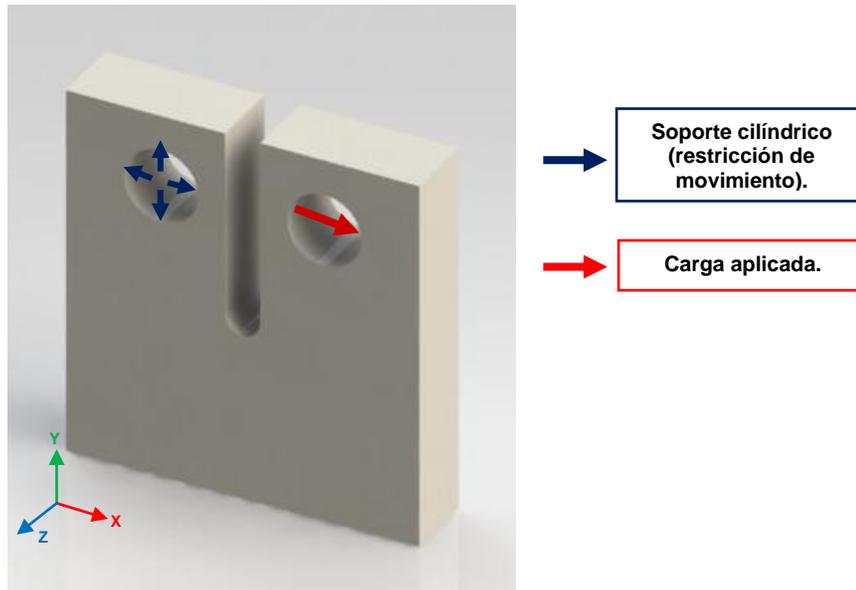


Figura 6.7. Carga y soporte cilíndrico en la probeta C(T) [Solidworks, 2011].

Tabla 6.4. Cargas en las probetas.

Probeta N°	Carga	
	N	lbf
1	299	67,22
2	423	95,09
3	277	62,27
4	414	93,07
5	471	105,89
6	551	123,87

Estas cargas fueron tomadas de los ensayos experimentales que en el capítulo anterior se explica con más detalle.

Además en FRANC2D se puede introducir fisuras o grietas como condición de falla en cualquier diseño a evaluar en el mismo. Por lo tanto y para dar cumplimiento a la norma se introduce dicha grieta de aproximadamente 1 mm (0.039 in) [ASTM E399-90, 1997] donde simula que el espécimen presenta una falla previa para la determinación del factor de intensidad de esfuerzos (véase **Figura 6.8**).

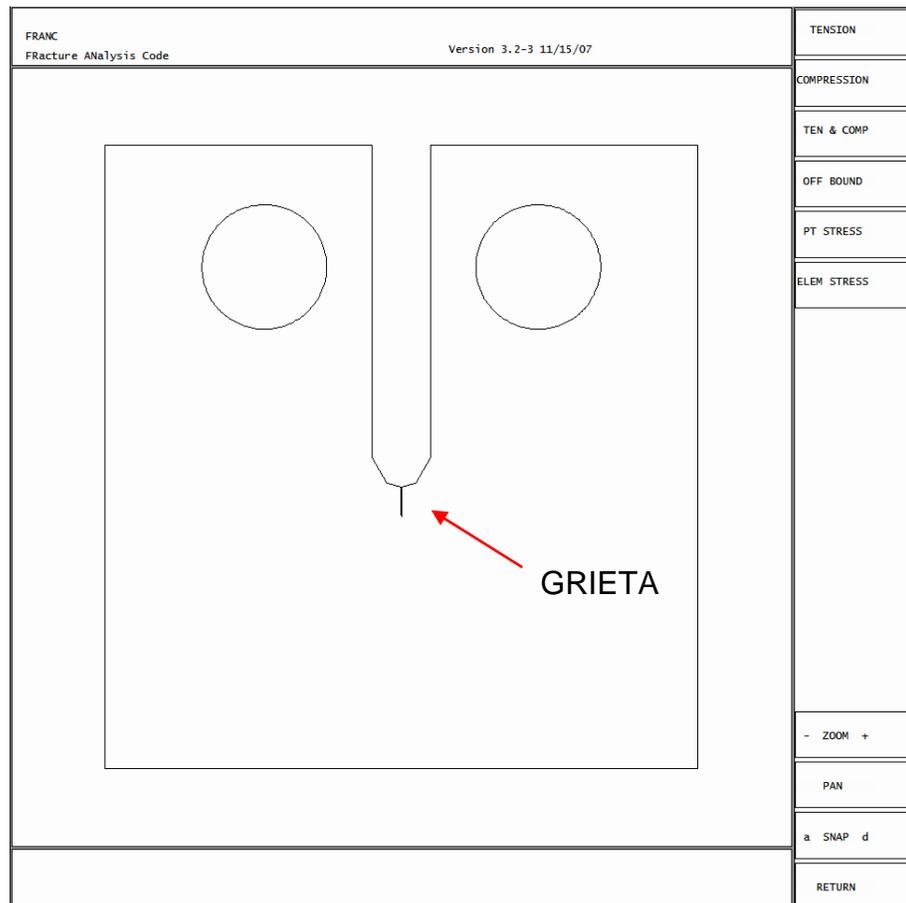


Figura 6.8. Falla en el material. [FRANC2D]

6.3 DISCRETIZACIÓN DE LOS ESPECÍMENES MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Un mallado óptimo es aquel que permite obtener un resultado aproximado al real en conjunción con un rápido cálculo computacional [Zienkiewicz, 1989]. Para este mallado se colocan 1680 elementos de forma cuadrilátero bicuadrático regular (Q8), este posee 8 nodos donde cada nodo posee 2 grados de libertad ya que estamos en el plano, y entre más grados de libertad tenga, se garantiza la convergencia del resultado [Aguiar Falconí et al, 2010], es el elemento con más nodos que tiene el FRANC2D. Con la propiedad Bilinear 4 side, se garantiza una mejor

distribución de los elementos que discretizan la probeta, debido a que este algoritmo requiere un área rectangular con igual cantidad de nodos en los lados opuestos [Swenson et al, 1997]. Este mismo discretizado fue utilizado para demostrar cuán preciso es el FRANC2D en comparación con el ANSYS 13.0 que ya se redactó al principio de este capítulo. Sin embargo, la zona donde se encuentra la falla (grieta) presenta elementos de forma irregular, pero ya es por defecto del FRANC2D (véase la **Figura 6.9** y **6.10**).

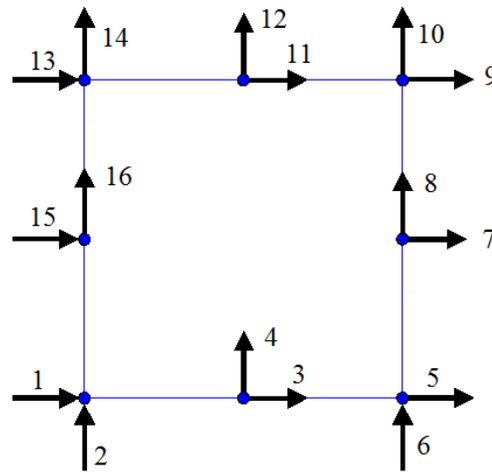


Figura 6.9. Elemento Q8 [Aguiar Falconí et al, 2010]

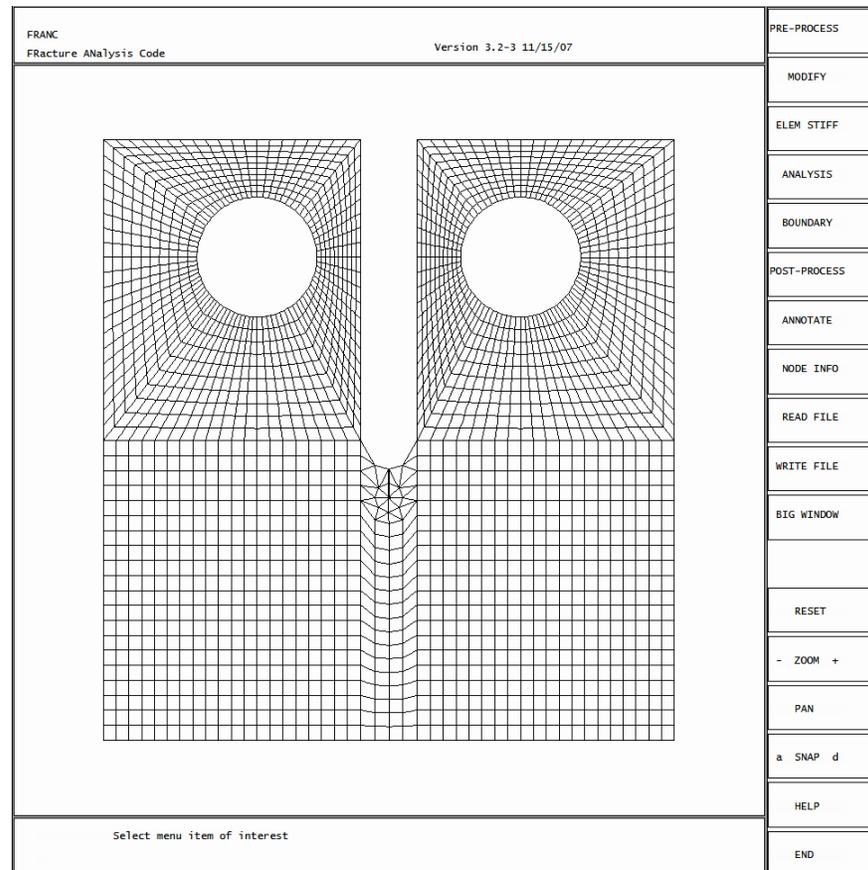


Figura 6.10. Discretizado tipo Q8. [FRANC2D]

6.4 RESULTADOS OBTENIDOS

Al realizar la simulación en FRANC2D, de el espécimen C(T) de material óseo, se obtienen los factores de intensidad de esfuerzos en modo I, también se determina la tendencia del crecimiento de la grieta, si se asemeja o no a la realidad ya que el FRANC2D puede predecir dicha tendencia.

6.4.1 Factor de intensidad de esfuerzos en modo I

6.4.1.1. Condición inicial

Se hace referencia a la condición inicial, cuando se determina el factor de intensidad de esfuerzo con la falla de 1mm (0.039 in), es decir, sin

ninguna propagación de la grieta, donde el valor es de $K_I = 4857 \text{ psi}\sqrt{\text{in}}$ para la probeta C(T) 1 como se muestra en la **Figura 6.11**, también se puede apreciar la deformación (apertura) por motivo de aplicación de la carga.

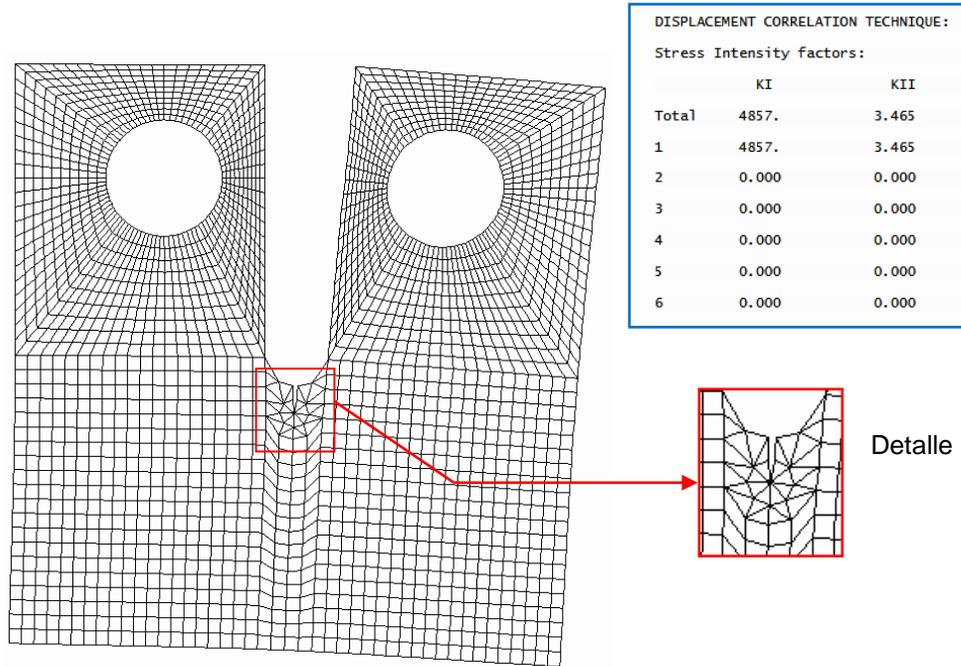


Figura 6.11. Factor de intensidad de esfuerzos probeta N° 1 C(T). [FRANC2D]

En la siguiente tabla se aprecia los resultados para las demás probetas.

Tabla 6.5. Factor de intensidad en la condición inicial de las probetas.

Probeta N°	1	2	3	4	5	6
Factor de Intensidad de Esfuerzos K_I (Psi $\sqrt{\text{in}}$)	4587	6055	3896	5659	5533	5817

De esta tabla se puede ver que el valor más alto de factor de intensidad es para la probeta N° 2 y el más bajo para la probeta N° 3, siendo estos dos especímenes de iguales dimensiones. Esta discrepancia se debe a las distintas fuerzas manejadas en el ensayo experimental, que pudo haber sido como causa, la anisotropía del material óseo, que define

(en algunos casos) de manera impredecible el comportamiento mecánico del hueso. Adicionalmente, el envejecimiento de dicho hueso, pudo haber generado una pérdida de densidad ósea, trayendo como consecuencia micro grietas y estas a su vez son causas de tal diferencia de fuerzas expuestas en el ensayo experimental.

6.4.1.2 Propagación de la falla

Se realiza la propagación de la grieta en el FRANC2D de forma automática y se vuelve a evaluar el factor de intensidad de esfuerzos, arrojando un valor para la nueva condición de falla de $K_I = 132200 \text{ psi}\sqrt{\text{in}}$ para la probeta N° 1 (véase la **Figura 6.13**), y una longitud de grieta de $\Delta a = 0,291 \text{ in}$.

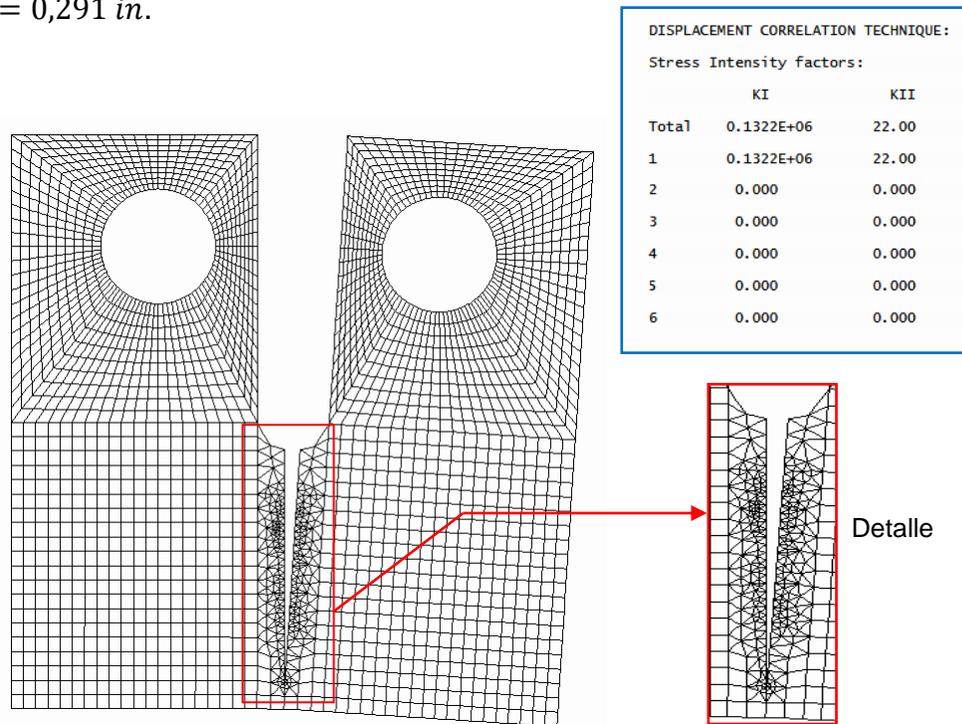


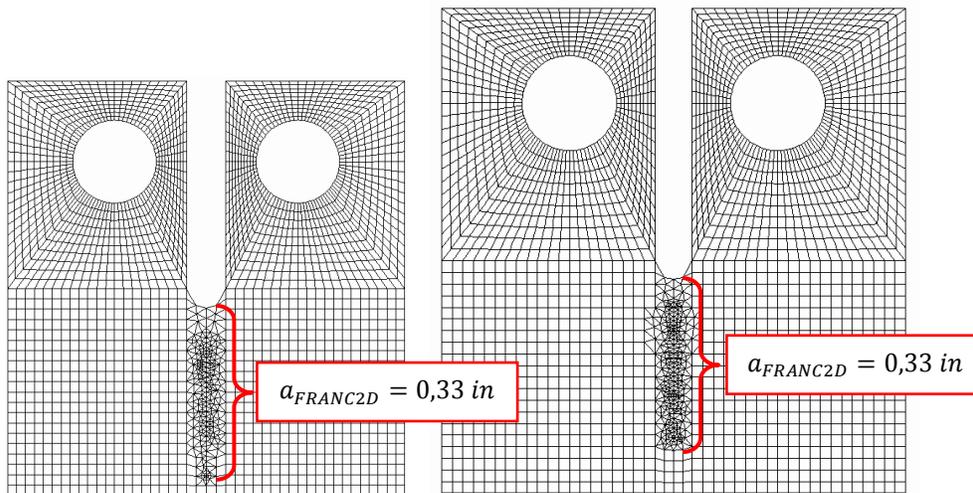
Figura 6.12. Factor de Intensidad de Esfuerzos (Grieta propagada). [FRANC2D]

En la siguiente tabla se aprecia los resultados para las demás probetas.

Tabla 6.6. Factor de intensidad de esfuerzos luego de propagada la grieta.

Probeta N°	1	2	3	4	5	6
Factor de Intensidad de Esfuerzos K_I (Psi \sqrt{in})	132200	167300	107700	74700	38930	33820

En este caso particular, nótese que los valores más bajos corresponden a las probetas de mayor dimensión (4, 5 y 6) debido a que en esta propagación automática, presentan (con respecto al tamaño de los especímenes) una longitud de grieta menor en comparación con las primeras 3 probetas (1, 2 y 3), aunque en esta primera simulación las probetas en la mayoría presentan una longitud de grieta de 0,33 pulgadas aproximadamente (véase figura 6.13).

**Figura 6.13.** Grieta propagada probeta N° 1 y 5 respectivamente. [FRANC2D]

Se puede decir que entre más larga sea la grieta en el espécimen, el factor de intensidad de esfuerzos aumentará de tal forma, como se muestra en la siguiente figura 6.14 y 6.15.

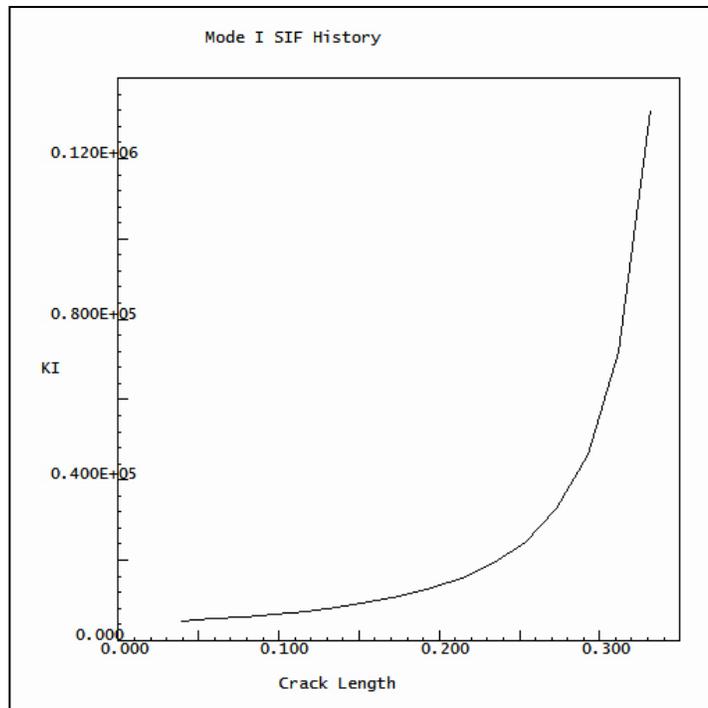


Figura 6.14. Comportamiento del factor de intensidad de esfuerzos vs grieta propagada probeta N° 1. [FRANC2D]

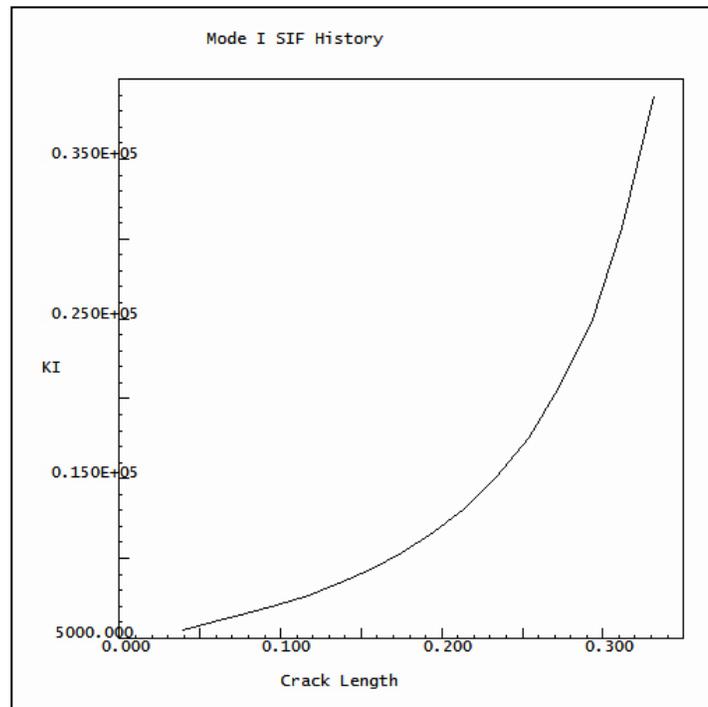


Figura 6.15. Comportamiento del factor de intensidad de esfuerzos vs grieta propagada probeta N° 5. [FRANC2D]

Como se menciona antes, se hizo una primera propagación automática, pero esta misma se puede realizar en el FRANC2D hasta casi la total separación del material (véase **Figura 6.16**), evidenciándose un aumento del factor de intensidad de esfuerzos de manera asintótica hacia la longitud de grieta de rotura total según las gráficas de las **imágenes 6.17** y **6.18**.

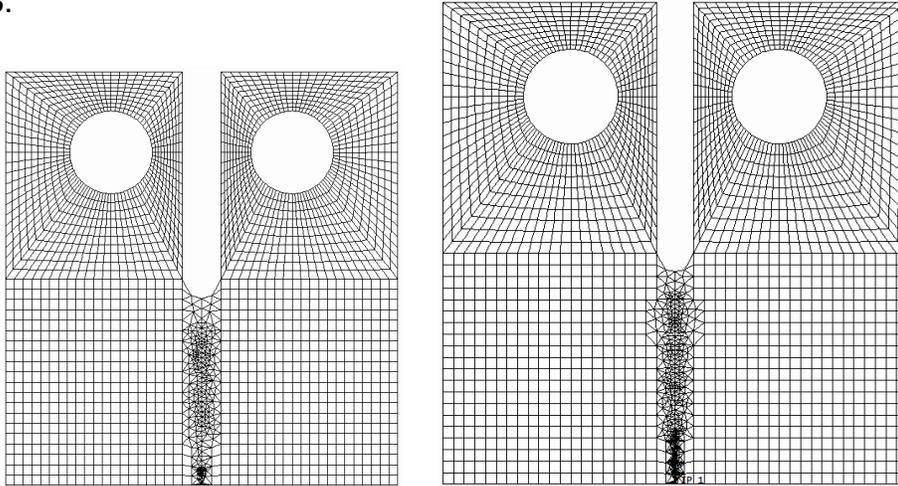


Figura 6.16. Grieta propagada probeta N° 1 y 5 respectivamente hasta casi su separación. [FRANC2D]

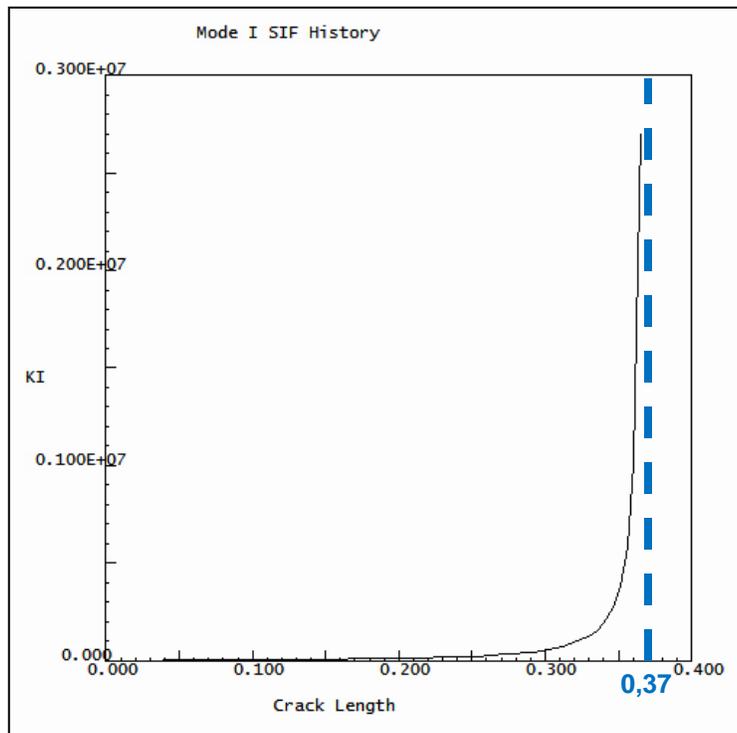


Figura 6.17. Comportamiento asintótico del Factor de Intensidad de Esfuerzos Vs Grieta Propagada probeta N° 1. [FRANC2D]

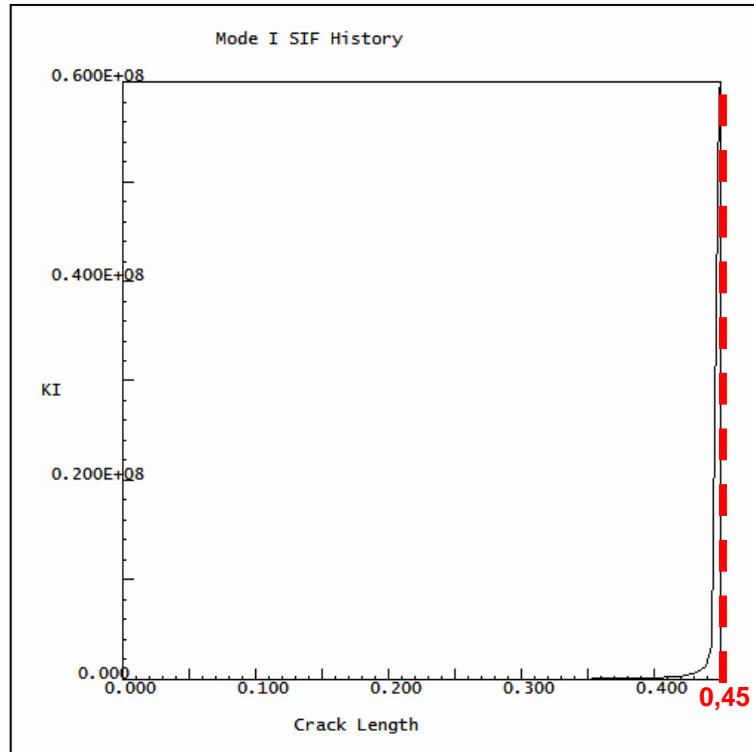


Figura 6.18. Comportamiento asintótico del Factor de Intensidad de Esfuerzos Vs Grieta Propagada probeta N° 5. [FRANC2D]

Para esta situación presentamos en la siguiente tabla los factores de intensidad de esfuerzos,

Tabla 6.7. Factor de intensidad de esfuerzos luego de propagada la grieta hasta casi su rotura final.

Probeta N°	1	2	3	4	5	6
Factor de Intensidad de Esfuerzos Ki (Psi√in)	2703000	3421000	2202000	71420000	59620000	5312000

Nótese que para este caso, las probetas 4, 5 y 6 presentan un mayor factor de intensidad de esfuerzos, esto se debe a que presentan dimensiones y cargas mayores que las probetas 1, 2 y 3, ya que el factor de intensidad es proporcional a estos datos presentados. En cuanto al comportamiento asintótico del factor de intensidad con respecto a la grieta, cabe destacar que las mismas dimensiones de las probetas delimitan una

longitud crítica de falla (casi de rotura total) donde es todavía posible calcular (en FRANC2D) el factor de intensidad de esfuerzos, y como material frágil (Gómez et al, 2008) es imposible experimentalmente determinarse en condición de casi total separación del espécimen. Se puede plantear el comportamiento asintótico mediante la siguiente expresión matemática,

$$\lim_{a_P \rightarrow a_R^+} K_I = \infty$$

Donde:

a_P : longitud grieta propagada.

a_R : longitud de rotura total, siendo $a_R = (W - a)$

Es decir, que mientras más se acerca a la longitud de grieta de rotura final por la derecha (que para el caso mostrado de la probeta N° 1 y N° 5 las longitudes de rotura son 0,37 y 0,45 pulgadas respectivamente) el valor del factor de intensidad de esfuerzos va aumentar significativamente, tendiendo a infinito.

6.5 COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES Y NUMÉRICOS

En este apartado se muestra la aproximación que tiene el método de los elementos finitos con respecto al ensayo experimental, es decir si la tendencia de propagación de la falla además de los factores de intensidad de esfuerzos corresponde con el método experimental.

6.5.1 Factor de intensidad de esfuerzos

6.5.1.1 Condición inicial

Como se explica en el capítulo anterior, el factor de intensidad de esfuerzos en modo I para el espécimen C(T), se calcula por medio de las ecuaciones 5.1 y 5.2 (capítulo anterior)

En la siguiente **Tabla 6.8** veremos las dimensiones del espécimen N°1 C(T) del método experimental, se determina el factor de intensidad según las ecuaciones 6.2 y 6.3.

Tabla 6.8. Factor de intensidad (experimental) probeta N° 1.

P_Q (N)	B (mm)	a (mm)	W (mm)	a/W (adim)	f(a/W) (adim)	K _Q (Mpa√mm)	K _Q (Psi√in)
299,000	4,200	8,480	16,800	0,505	9,802	170,255	4899,628

Comparando este resultado experimental con el método numérico (y para las demás probetas) se obtiene lo siguiente (véase la **Tabla 6.9**).

Tabla 6.9. Error porcentual entre los ensayos experimentales y los resultados numéricos en la condición inicial.

Probeta N°	Experimental K _Q (Psi√in)	FRANC2D K _I (Psi√in)	% Error
1	4899,628	4857	0,878
2	6599,341	6055	8,99
3	4321,554	3896	10,923
4	5837,149	5659	3,148
5	5512,429	5533	0,372
6	5855,027	5817	0,654

Nótese que el error más bajo lo presenta la probeta N° 5, y el más alto es para la probeta N° 3. Estableciendo comparación entre ambos valores de toda la muestra (es decir, de todas las probetas) del factor de

intensidad de esfuerzos, resulta un error promedio de 4,16%, el cual se encuentra dentro de los valores aceptables para admitir la utilización de un código bajo una técnica numérica de aproximación [Gámez, 2008]. Se puede decir también que las ecuaciones planteadas por la norma ASTM E399-90 y los algoritmos de cálculo manejados por el FRANC2D, son bastante similares y dan resultados cercanos a la realidad, a pesar de que la norma ASTM es para materiales metálicos. Pero se sabe que según la ley de Paris se describe mediante tres zonas, El umbral (región I), La zona estable (región II) y fractura inminente (región III), por lo visto (al menos hasta ahora) experimentalmente no hubo una propagación de grieta estable, sino más bien una fractura inminente. Para entender esto el FRANC2D simula el ciclo de vida del material, que más adelante se presenta con más detalle.

6.5.1.2. Propagación de la falla

6.5.1.2.1 Propagación de falla intermedia

Realizando la comparación de la tendencia de propagación de la grieta entre el método experimental y el método numérico (FRANC2D), se puede notar claramente que el FRANC2D predice de manera precisa la tendencia de los ensayos experimentales, pero con la excepción que en el FRANC2D la grieta crece hasta determinada longitud y no rasgando por completo como sucedió realmente en todas las probetas (**Figura 6.19**). Sin embargo, utilizando la variación de grieta simulada por el programa, e introduciéndola en la ecuación 6.2 y 6.3, nos arroja los siguientes valores (ver **Tabla 6.10**).

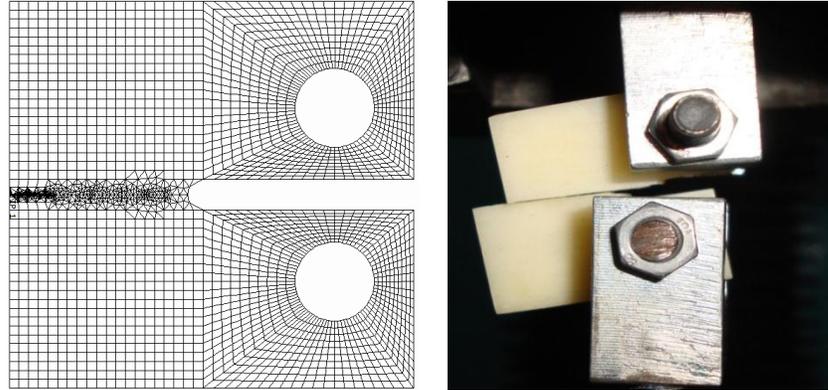


Figura 6.19. Grieta propagada simulación (a la izquierda) y experimentalmente (a la derecha) probeta N° 5. [FRANC2D, ensayo experimental]

Para la primera simulación automática, la longitud que se propaga se puede apreciar en la figura siguiente, y es de aproximadamente $a_{FRANC2D} = 0,33 \text{ in}$, pero hay que tomar en cuenta que ya existe una grieta de $a_{FRANC2D \text{ inicial}} = 0,039 \text{ in}$, por lo tanto lo que se tomara en cuenta es la variación que sería $\Delta a = (0,33 - 0,039) = 0,291 \text{ in}$ (véase **Figura 6.20**).

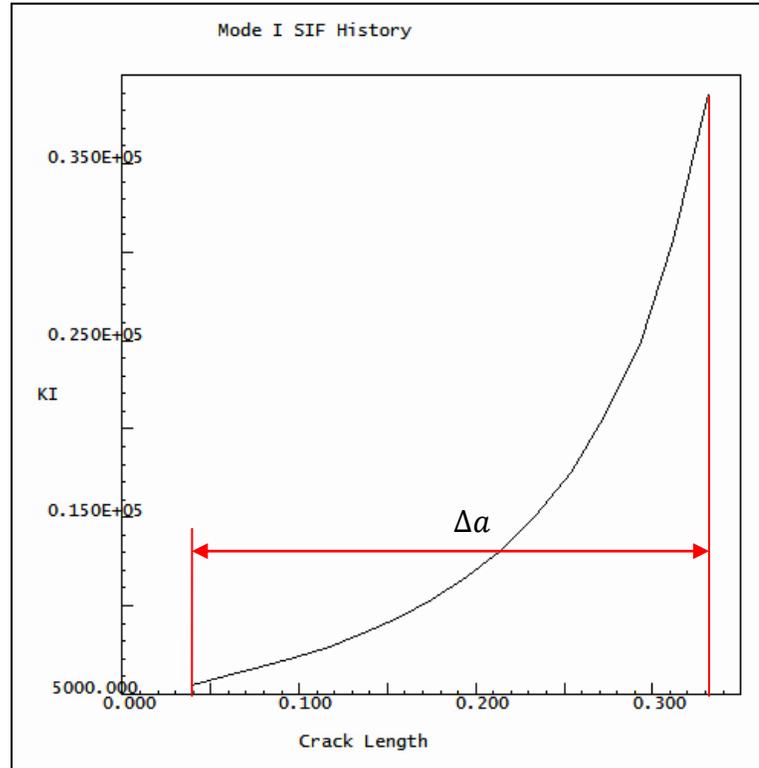


Figura 6.20. Factor de Intensidad Vs Longitud de grieta de probeta N° 5. [FRANC2D]

Tabla 6.10. Error porcentual entre los ensayos experimentales y los resultados numéricos luego de la primera propagación de grieta.

Probeta N°	Experimental K _Q (PsiVin)	FRANC2D K _Q (PsiVin)	% Error
1	133127,458	132200,000	0,702
2	152748,000	167300,000	8,698
3	100026,468	107700,000	7,125
4	75664,054	74700,000	1,291
5	39066,570	38930,000	0,351
6	33199,577	33820,000	1,834

El error más bajo se vuelve a presentar para la probeta N° 5, coincidiendo con la condición inicial, pero esta vez el error más alto fue de la probeta N° 2. Estableciendo comparación entre ambos valores de toda la muestra (es decir, de todas las probetas) del factor de intensidad de esfuerzos, resulta un error promedio de 3.33%, el cual se encuentra dentro de los valores aceptables para admitir la utilización de un código bajo una técnica numérica de aproximación [Gámez, 2008].

6.5.1.2.2 Propagación de falla final

Al igual que el apartado anterior, se realiza el mismo procedimiento, es decir tomando en cuenta la variación de la grieta hasta casi su rotura, dándonos los siguientes resultados,

Tabla 6.11. Error porcentual entre los ensayos experimentales y los resultados numéricos propagación de falla final.

Probeta N°	Experimental K _Q (PsiVin)	FRANC2D K _Q (PsiVin)	% Error
1	2693647,79	2703000	0,346
2	3621924,52	3421000	5,873
3	2371804	2202000	7,711
4	64771323	71420000	9,309
5	59555734,6	59620000	0,108
6	5392592,36	5312000	1,517

Se demuestra una vez más que para esta condición de falla final, (casi de rotura total), a pesar de que es tan difícil verificar el factor de intensidad de esfuerzos, el FRANC2D y las ecuaciones planteadas por la norma ASTM E399-90, predicen perfectamente dicho valor. Para esta condición final el error promedio es de 4,14 %. En vista de esto el FRANC2D nos brinda una herramienta muy útil, ya que al fin y al cabo, la intención del factor de intensidad de esfuerzos es predecir el tiempo de vida de los materiales sometidos a condiciones de cargas específicas, normalmente a situaciones de fatiga.

6.5.1.3 Vida útil

Para determinar la vida útil del material óseo de las presentes probetas, se tomará en cuenta los coeficientes de la ley de Paris $C = 6,5 \times 10^{-8}$ y $m = 6$ [Nalla *et al*, 2005_b]

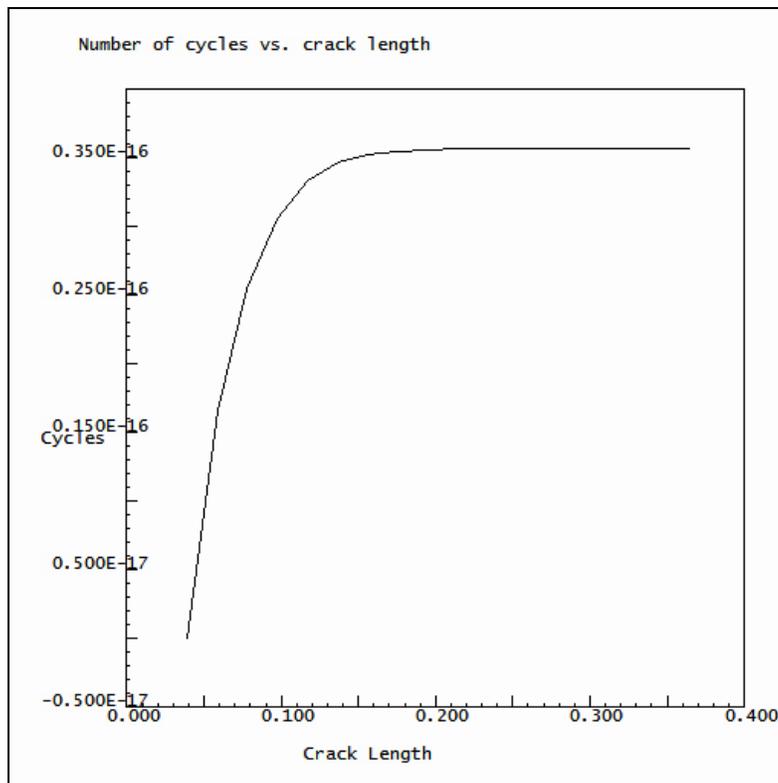


Figura 6.21. Número de ciclos Vs Longitud de grieta de probeta N° 1. [FRANC2D]

Se puede ver claramente que para la carga de 299 N administrada a la probeta N° 1, tiene un número de ciclos de $0,35 \times 10^{-16}$, la misma no soportará un ciclo completo de fatiga, y se evidencia la de propagación de falla de manera inestable tal cual como se evidenció en los ensayos experimentales. A continuación se presenta para las demás probetas sus respectivos ciclos de vida (**tabla 6.12**)

Tabla 6.1. Vida útil de las probetas. [FRANC2D]

Probeta N°	Vida útil (ciclos)
1	3,50E-17
2	9,20E-18
3	1,32E-16
4	1,52E-17
5	2,00E-17
6	1,56E-17

CAPÍTULO 7

Conclusiones y Recomendaciones

A continuación se presentan las conclusiones más resaltantes del estudio realizado así como las recomendaciones para futuras investigaciones que pretendan avanzar en el diseño de placas internas para la fijación de fracturas.

7.1 CONCLUSIONES

Se ha realizado el estudio de determinación del factor de intensidad de esfuerzos en modo I en material óseo, específicamente en hueso cortical bovino. Este estudio se basó en la norma ASTM E399-90 para materiales metálicos, sin embargo no hay una norma que especifique la validación de dicho factor de intensidad, por lo tanto esta investigación se basó en estudios anteriores que convocan la norma aplicada en este trabajo, sea de forma experimental o métodos numéricos aproximados.

Para este estudio, se logró obtener el factor de intensidad tanto por el método experimental como la aplicación del método de elementos finitos (método numérico) para las condiciones ya expuestas.

Aunque la norma ASTM E399-90 propone determinar el factor de intensidad crítico, también es válida para determinar en cualquier condición el factor de intensidad de esfuerzos como se demuestra en este estudio y

además el objetivo principal no era determinar la criticidad del factor de intensidad en el material óseo.

Hay que destacar que el programa FRANC2D es una poderosa herramienta ya que se acerca bastante a la realidad siempre y cuando se aplique correctamente las condiciones experimentales a simular.

Con respecto a las propiedades del material óseo, se trabajó como material orto-trópico, confirmando varios estudios acerca del comportamiento del hueso asumido como material orto-trópico.

En cuanto a la tendencia de propagación de la falla, también el FRANC2D fue bastante preciso con la forma de crecimiento, sin embargo difiere en que en el método experimental, todas las probetas cedieron (rasgaron totalmente) bajo la carga administrada, en cambio en el FRANC2D determina cierta variación en el crecimiento de la grieta, mas no una propagación súbita hasta la rotura del material.

La propagación de la grieta está gobernada por dos clases distintas de mecanismos: mecanismo intrínseco, la cual son mecanismos de daños micro-estructurales que operan por delante de la punta de la grieta y los mecanismos extrínsecos, que actúan como escudo de la falla de la fuerza aplicada y operan principalmente lejos de la punta de la grieta tal como se muestra en las **Figuras 7.1** y **7.2** donde las osteonas intervienen ampliamente en el comportamiento de propagación de la grieta ya que la carga es aplicada en el eje longitudinal del hueso (paralela a las osteonas) y entalle perpendicular a la longitud del mismo [Ritchie et al, 2006].

En la **Tabla 6.9** se puede observar la cercanía de los resultados obtenidos tanto de forma experimental como numérica para el factor de intensidad de esfuerzo. Se puede notar que la dispersión más pronunciada respecto a los ensayos experimentales es de 10,923%, valor que aunque es un poco alto, aporta información muy valiosa para entender el

comportamiento del hueso compacto cuando es sometido a carga de tracción. Adicionalmente, se visualiza que el 66,67% de las muestras están por debajo del 4% de desviación (véase **Tabla 6.9**), lo que evidencia que los resultados obtenidos numéricamente se acercan bastante a la realidad.

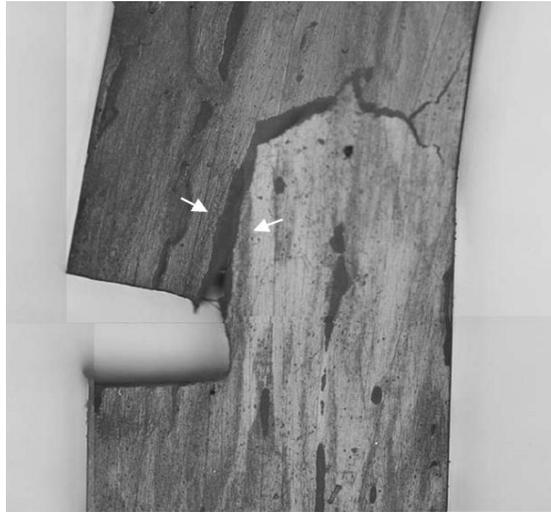


Figura 7.1. Propagación de grieta experimentalmente. [Ritchie et al, 2006]

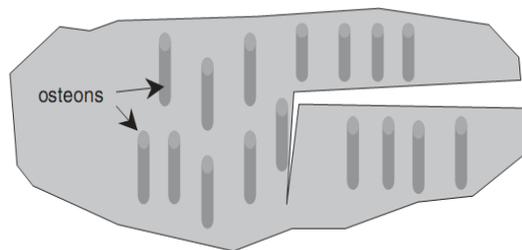


Figura 7.2. Comportamiento de propagación de grieta en el hueso. [Ritchie et al, 2006]

Éste planteamiento se basa en el entalle paralelo al eje longitudinal, y como era de esperarse, la falla se propaga con facilidad paralela a las

osteonas, es decir, la grieta se propaga sin desviarse de la trayectoria prevista.

El comportamiento de las curvas experimentales obtenidas mediante los ensayos a tracción, presentan poca plasticidad, por lo tanto el hueso cortical se comporta como un material frágil (Gómez et al, 2008), y sugiere que la grieta se propagará siempre y cuando el valor del factor de intensidad alcance un valor crítico (Pastor, 1993), sin embargo se demostró que por este método planteado en este trabajo no pudo ser posible la determinación de dicho factor crítico.

7.2. RECOMENDACIONES

Como ya se expresó anteriormente, nuestro objetivo principal no es de determinar el factor de intensidad de esfuerzos críticos, pero para este caso que no se cumple ninguna de las condiciones que la norma exige para validar dicho factor crítico, la misma ASTM E399-90, (de no encontrarse el factor crítico), sugiere trabajar con especímenes de mayor tamaño, pero la limitante de trabajar con material óseo, son las dimensiones en la cual el mismo está disponible.

Pero dadas las circunstancias y adelantos tecnológicos de nuestra época, existe un material llamado NIOBIO que se asemeja bastante al comportamiento mecánico del hueso, de hecho es un buen sustituto desde el punto de vista biomecánico [Gutiérrez, 2009]. Se recomienda experimentar con dicho material ya que se puede trabajar con dimensiones mayores al del material óseo y quizás conseguir un valor bastante aproximadamente cercano a factores de intensidad de esfuerzos, y porque no, al mismo valor crítico del hueso cortical.

Referencias

- **Aguiar Falconí Roberto, Mroginski Javier, Zambrano Abel, Carrillo Jenniefer, Freire Andrés, Flores Edison, Ortíz Mery, (2010).** *Análisis estático de una columna de suelo confinado con dos modelos de elementos finitos y uso de programa gid.* Revista CIENCIA Vol. 13, 2, 187-212 (2010).
- **ANSYS version 13.0**
- **Ardila E., (1997).** *Epidemiología y patogénesis de la osteoporosis.* Revista de la Asociación Colombiana de Menopausia. Volumen 3.
- **ASTM E399-90 (Reapproved 1997).** *Annual Book of ASTM Standards, Vol. 03.01: metals-mechanical testing; elevated and low-temperature tests; metallography.* West Conshohocken, ASTM, 2002.
- **Beden S. M., Abdullah S., Ariffin A. K., (2009).** *Review of Fatigue Crack Propagation Models for Metallic Components.* European Journal of Scientific Research ISSN 1450-216X Vol.28 No.3, Págs.364-397.
- **Behiri, J. C. and Bonfield, W.,(1989).** *Orientation dependence of the fracture mechanics of cortical bone.* J. Biomech. Págs. 863–872.
- **Bonfield W., Grynepas M. D., Young R. J., (1978).** *Crack velocity and the fracture of bone.* J. Biomech.1978; 11:473-479.

- **Burger E. H. y Klein-Nulend J., (1999).** *Responses of bone cells to biomechanical forces in vitro.* Advances in Dental Research; June 1999, Vol. 13 Issue 1, p93.
- **Claiborne C., (1998).** *Principios generales del tratamiento de las fracturas.* Novena Edición. España. Pp 1994-2005.
- **Comín M., Peris J., Prat J., Dejoz R., Vera P., Hoyos J. (1999).** *Biomecánica de la fractura ósea y técnicas de reparación.* Primera Edición. Publicaciones Instituto de Biomecánica de Valencia. España Ardila, 1997.
- **Cortés E., Bermúdez A., Ortiz S., (2001).** *Diferencias de género en los factores de riesgo para la osteoporosis.* Revista de la Asociación Colombiana de Menopausia. Volumen 7.
- **Cowin S. C., (1989).** *Bone Mechanics.* CRC Press, Inc. Boca Ratón, FL-USA. Pp 102,111.
- **Doblaré M., García J. M., Gómez, M. J., (2004).** *Modelling bone tissue fracture and healing: a review.* Engineering Fracture Mechanics 71: 1809-1840.
- **Franc2D, (1993).** *User's Guide.* Versión 3.1
- **Gámez_a B., Ojeda D., Divo E., Kassab A., Cerrolaza M., (2007).** *Cavity detection and crack analysis in biomechanics using BEM.* Proceeding IX International Conference on Computational Plasticity, COMPLAS IX. Barcelona - España, September 05-07.
- **Gámez_b B., Ojeda D., Divo E., Kassab A., Cerrolaza M., (2007).** *Crack analysis in cortical bone using the Boundary Element Method.* Proceeding III International Congress on Computational Bioengineering. Isla de Margarita - Venezuela, September 17-19.
- **Gartner Leslie P., Hiatt James L., (2008).** *Texto Atlas de Histología.* Edición 2^a. Editorial Mc Graw Hill.
- **Ginebra M., Planell J., Ontañón M., Aparicio C. (2000).** *Structure and mechanical properties of cortical bone.* In: *Structural biological materials.* New York: Pergamon Press; p.p. 33-71.

- **Ginebra M., Planell J., Ontañón M., Aparicio C., (2000).** *Structure and mechanical properties of cortical bone.* In: *Structural biological materials.* New York: Pergamon Press; p.p. 33-71.
- **Gómez Nino J., Müller-Karger Carmen, Casanova Euro, San Antonio Thalía, (2008).** *Estudio del comportamiento mecánico del tejido óseo.* Mecánica Computacional Vol XXVII, págs. 3351-3365.
- **Gutiérrez González Carlos F., (2009).** *Nuevos materiales cerámica-niobio con aplicaciones biomédicas.* Instituto de Ciencias de Materiales de Madrid; Madrid 2009.
- **Khalmanov Kh., Cherepanov G. P., (1973).** *Fatigue crack propagation at low loading levels.* Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. Volumen14, número 3. Págs 431-433.
- **Kruzic J. J., Scott J. A., Nalla R. K., Ritchie R. O., (2006).** *Propagation of surface fatigue cracks in human cortical bone.* Biomaterials 26: 2183–2195.
- **Lee Yung-Li: Pan Jwo, Hathaway Richard, Barkey Mark., (2005).** *Fatigue Testing and Analysis (Theory and Practice).* Copyright 2005, Elsevier .Págs. 241-242.
- **Martin R. B., Burr D. B., Sharkey N. A. (1998).** *Skeletal tissue mechanics.* New York: Springer-Verlag.
- **Najafi A. Raeisi, Arshi A. R., Eslami M. R., Fariborz S., Moeinzadeh M. H., (2007).** *Micromechanics fracture in osteonal cortical bone: A study of the interactions between microcrack propagation, microstructure and the material properties.* Journal of Biomechanics 40 (2007) 2788–2795.
- **Nalla_a R. K., Stölken J. S., Kinney J. H., Ritchie R. O., (2005).** *Fracture in human cortical bone: local fracture criteria and toughening mechanisms.* Journal of Biomechanics 38: 1517–1525. Wang, 1996.
- **Nalla_b R. K., Kruzic J. J., Kinney J. H., Ritchie R. O., (2005).** *Aspects of in vitro fatigue in human cortical bone: time and cycle dependent crack growth.* Biomaterials 26 (2005) 2183–2195.

- **Nather A., (2005).** *Bone Grafts and Bone Substitutes: Basic Science and Clinical Applications.* National University of Singapore, World Scientific. Pp 3 - 11, 31 - 35.
- **Norman T. L., Kruzic J. J., Kinney J. H., Ritchie R. O., (1995).** *Fracture toughness of human bone under tension.* Journal of Biomechanics Vol. 28, Nro. 3: 309–320.
- **Paris P. C. and Erdogan F., (1960).** *A Critical Analysis of Crack Propagation Laws.* Journal of basic Engineering, Vol. 85, pp. 528-534.
- **Pastor Caño Jose Ygnacio, (1993).** *Fractura de materiales cerámicos estructurales avanzados.* Departamento de Ciencia de Materiales. ETSI de Caminos. Universidad Politécnica de Madrid.
- **Pavlushevich A.,(1986).** *Determination of the fatigue crack propagation rate.* Strength of Materials.Volumen 18, número 3. Págs 316-320.
- **Ramtani S., García J. M., Doblaré M., (2004).** *Computer simulation of an adaptive damage-bone remodeling law applied to three unit-bone bars structure.* ELSEVIER; Volume 34, Issue 3, April 2004, Pages 259–273.
- **Ritchie R. O., Kinney J. H., Kruzic J. J., Nalla R. K., (2006).** *Cortical bone fracture.* Wiley Encyclopedia of Biomedical Engineering.
- **SolidWorks, (2011).**
- **Swenson Daniel and Mark James, (1997).** *FRANC2D/L: A Crack Propagation Simulator for Plane Layered Structures.*
- **Taylor D. and Lee T., (2003).** *A crack growth for the simulation of fatigue in bone.* International Journal of Fatigue 25: 387-395.
- **Varvani-Farahani A., Najmi H., (2009).** *A damage assessment model for cadaveric cortical bone subjected to fatigue cycles.* International Journal of Fatigue 32; 420–427.
- **Wang, C.H., (1996).** *Introduction to Fracture Mechanics.* DSTO Aeronautical and Maritime Research Laboratory. No. AR-009-786. Págs. 53-56. Australia 1996.

- **Warwick R. and Williams P. L. (1973).** (eds.). *Gray's anatomy*. London, Longman. p. 213.
- **Wilson J., (2003).** *Is The All Or None Applicable To An Entire Muscle?*Hyperplasia Magazine.
- **Yang Q. D., Cox Brian N., Nalla Ravi K., Ritchie R. O., (2005).** *Fracture length scales in human cortical bone: The necessity of nonlinear fracture models*. *Biomaterials* 27; 2095–2113.
- **Yeni Y. N., Fyhrie D. P., (2002).** *Fatigue Damage-Fracture Mechanics Interaction in Cortical Bone*. Elsevier: 509–514.
- **Zienkiewicz O. C. y Taylor R. L., (1989).** *The Finite Element Method*. volumen 1. McGraw-Hill, 4ta edición.
- **Zimmermann Elizabeth A., Launey Maximilien E., Barth Holly D., Ritchie Robert O., (2009).** *Mixed-mode fracture of human cortical bone*. *Biomaterials* 30 (2009) 5877–5884.
- **Zimmermann Elizabeth A., Launey Maximilien E., Ritchie Robert O., (2010).** *The significance of crack-resistance curves to the mixed-mode fracture toughness of human cortical bone*. *Biomaterials* 31; 5297-5305.
- **Zioupos P., Casinos A., (1998).** *Cumulative damage at the response of human bone in two-step loading fatigue*. *Journal of Biomechanics* 31: 825-833.