Análisis de Señales y Sistemas Lineales

Apuntes de clase. Tema I. Señales en tiempo Continuo y en tiempo discreto

Ing. Ahmad Osman

Universidad de Carabobo
Facultad de Ingeniería
Escuela de Telecomunicaciones
Departamento de Señales y Sistemas
aosman@uc.edu.ve

29 de noviembre de 2018

Índice

Índice

Índice

Definición y Ejemplos de Señales.

Definición

Las señales son manifestaciones, representadas a través de funciones de variables independientes, portadoras de información.[1]

Clasificación

Las señales se clasifican según su naturaleza, según su forma de representación, según su peridiocidad, según su capacidad de predicción:

- Eléctricas.
- Acústicas.
- Biológicas.

- Continuas.
- Discretas.
- Periódicas.

- Aperiódicas.
- Determinsticas.
- Aleatorias.

[1] Generalmente se trabaja con la variable independiente tiempo(t). De la misma manera, se le asigna a las señales de tiempo continuo el símbolo $x(t)$ y a las señales de tiempo discreto el símbolo $x[n]$.

Secuencias primarias: impulso unitario y escalón unitario

Secuencia impulso unitario :

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Secuencia escalón unitario:

$$\mu[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0, \\ 1 & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

Relación entre las secuencias primarias y la propiedad de muestreo

Relación entre las secuencias primarias:

$$\delta[n] = \mu[n] - \mu[n-1]$$

$$\mu[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

Propiedad de Muestreo:

$$x[n]\delta[n-n_o] = x[n_o]\delta[n-n_o]$$

Funciones primarias: impulso unitario y escalón unitario

Función escalón unitario:

$$\mu(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Función impulso de área unitaria o delta de dirac (Definición):

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_o)dt = x(t_o)$$

$$\delta(t) = \frac{d\mu(t)}{dt}$$

Relación entre las funciones primarias y la propiedad de muestreo

Relación entre las funciones primarias:

$$\mu(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau$$

Propiedad de Muestreo:

$$x(t)\delta(t - t_o) = x(t_o)\delta(t - t_o)$$

Funciones signo, rampa

Función signo:

$$sgn(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ 1 & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Función rampa unitaria :

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ t & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

$$r[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0, \\ n & \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

Seno cardinal.

Función seno cardinal :

$$sinc(t) = \frac{sin(\pi t)}{\pi t}$$

Índice

Definición, tipos y notación.

Es el conjunto de modificaciones que se realizan en el argumento de la señal conservando sus propiedades topológicas temporales [1]. Se realizan en el siguiente orden:

- Corrimiento en el tiempo.
- Escalamiento en el tiempo.
- Inversión en el tiempo.

$$x(\alpha t + \beta)$$

$$x[\rho n + \xi]$$

Observaciones adicionales

- El escalamiento en el tiempo y la inversión en el tiempo solo se realizan afectando a la variable independiente, no al desplazamiento. Cambiar el signo a todo el argumento, es generar una simetria con respecto al eje $t = \frac{\beta}{\alpha}$.
- Para calcular $x(\gamma(\alpha t + \beta))$, debe calcularse primero $x(t)$, luego $x(t + \gamma\beta)$ y luego $x(\gamma\alpha t + \gamma\beta)$.Si se expande y luego se desplaza el resultado es $x((t - \beta)/\alpha)$

Índice

1. Señales en tiempo continuo y en tiempo discreto
   - Introducción.
   - Transformaciones de la variable independiente
   - Peridiocidad
   - Señales exponenciales y senoidales
   - Simetría
   - Señales de Energía y Señales de potencia

Señales periódicas

Definición

Una señal periódica continua $x(t)$ cumple con la existencia de un valor positivo T para el cual $x(t) = x(t + nT)$ para todos los valores de t. Una señal periodica discreta cumple con la existencia de un valor N entero positivo para el cual $x[n] = x[n + kN]$ para todos los valores de n. [2]

- T_o y N_o son los los valores positivos más pequeños que satisfacen las condiciones de peridiocidad y se denominan períodos fundamentales.
- Relación entre la frecuencia fundamental y el período fundamental para las señales periódicas:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\omega_0 = m\frac{2\pi}{N_0}$$

Periodicidad en las señales periódicas compuestas

La suma de dos señales con períodos T_1 y T_2 será periódica si:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$$

donde m y n son números enteros. El período T de la señal suma será el mcm entre T_1 y T_2. Si T_1 y T_2 son racionales fraccionarios entonces:

$$T = \frac{mcm_{num}}{mcd_{den}}$$

De manera análoga se aplica para las señales discretas.

Peridiocidad de la señal senoidal discreta

Una señal senoidal discreta será periódica si

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

donde m es un número entero y N el período de la señal. Si para el caso anterior la peridiocidad se cumple, entonces la forma de la señal se repetirá exactamente igual en las frecuencias:

$$\omega = \omega_0 + 2\pi$$

Índice

Señal exponencial compleja continua

La Señal exponencial compleja continua, en su forma general, se describe de la siguiente forma:

$$x(t) = Ce^{at}$$

Donde: $C = |C|e^{j\theta}$ y $a = r + j\omega_o$.
Al desarrollar la expresión se obtiene:

$$x(t) = Ce^{at} = |C|e^{rt}cos(\omega_o t + \theta) + j|C|e^{rt}sen(\omega_o t + \theta)$$

El factor $e^{j(\omega_o t)}$ es periódico con $T_o = \frac{2\pi}{|\omega_o|}$ y describe una circunferencia unitaria en el plano complejo en función del eje polar $\omega_o t$.

Señal exponencial compleja discreta

La Señal exponencial compleja discreta, en su forma general, se describe de la siguiente forma:

$$x[n] = C\alpha^n$$

Donde: $C = |C|e^{j\theta}$ y $\alpha = |\alpha|e^{j\omega_o}$.
Al desarrollar la expresión se obtiene:

$$x[n] = C\alpha^n = |C||\alpha|^n cos(\omega_o n + \theta) + j|C||\alpha|^n sen(\omega_o n + \theta)^2$$

[2] De esta expresión se originan distintas clases de secuencias dependiendo del valor de sus parámetros C, α, θ. El factor $e^{j(\omega_o n)}$ es periódico con $N_o = \frac{2m\pi}{\omega_o}$ y describe una constelación discreta unitaria en el plano complejo en función del eje polar $\omega_o n$. Además,las secuencias originadas del factor $e^{j(\omega_o n)}$ poseen la propiedad de repetirse exactamente al aumentar la frecuencia en valores de magnitud 2π; de allí se origina el factor m.

Índice

Simetría

Señales pares e impares

- Una señal *par* satiface $x[n] = x[-n]$.
- Una señal *impar* satiface $x[n] = -x[-n]$.

Cualquier señal se puede separar en la suma de dos señales, una de las cuales es *par* y la otra *impar*.

$$x[n] = \varepsilon_v\{x[n]\} + \vartheta_d\{x[n]\}$$

$$x[n] = \frac{1}{2}[x[n] + x[-n]] + \frac{1}{2}[x[n] - x[-n]$$

Índice

Energía

Energía total de una señal continua:

$$E_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Energía total de una señal discreta:

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

Potencia

Potencia promedio en un intervalo infinito de una señal continua:

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt$$

Potencia promedio en un intervalo infinito de una señal discreta:

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

Otra clasificación de las señales

- Las señales de energía total finita son aquellas en donde $E_\infty < \infty$. Esto implica que su potencia promedio finita vale 0.
- Las señales de potencia promedio finita son aquellas en donde $P_\infty > 0$. Esto implica que, forzozamente, su energía total es infinita de crecimiento moderado.
- Las señales de energía total infinitas y potencia promedio infinita son aquellas en donde la energía total es infinita y de crecimiento acelerado.

Referencias

A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, and S.H. Nawab.
Signals and Systems.
Prentice-Hall signal processing series. Prentice Hall, 1997.

Signals and systems spring 2011 mit opencourseware.
https://ocw.mit.edu.
Accessed: 2018-03-10.