Teorema de muestreo y reconstrucción de la señal

Comparación de los espectros de las señales muestreada y discretizada

Filtrado antisolapamiento

Conversor A/D

Muestreo y Retención

Cuantificador

Codificador

Conversor D/A

Procesamiento Digital de Señales

Apuntes de clase de muestreo y reconstrucción

A. Osman

Universidad de Carabobo

9 de diciembre de 2018

Contenido

Teorema de muestreo y reconstrucción de la señal

Comparación de los espectros de las señales muestreada y discretizada

Filtrado antisolapamiento

Conversor A/D

Muestreo y Retención

Cuantificador

Codificador

Conversor D/A

1. Teorema de muestreo y reconstrucción de la señal
2. Comparación de los espectros de las señales muestreada y discretizada
3. Filtrado antisolapamiento
4. Conversor A/D
   - Muestreo y Retención
   - Cuantificador
   - Codificador
5. Conversor D/A
6. Tratamiento multitasa
   - Diezmado
   - Interpolación
   - Factor no entero.
7. Zonas de Nyquist
8. Referencias

Teorema de Muestreo

Sea $x(t)$ una señal de banda banda limitada con $X(j\Omega) = 0$ para $|\Omega| > \Omega_m$, entonces $x(t)$ se determina univocamente mediante sus muestras $x(nT)$, con n entero, si:

$$\omega_s > 2\omega_m \tag{1}$$

donde Ω_s se denomina frecuencia de muestreo.
Reconstrucción: Dadas estas muestras, se puede reconstruir $x(t)$ generando un tren de impulsos periódico, en el cual, los impulsos sucesivos tengan amplitudes que correspondan a los valores de las muestras sucesivas. Este tren de impulsos es entonces procesado a través de un filtro pasa bajas ideal con ganancia T cuya frecuencia de corte sea mayor que Ω_m y menor que $\Omega_s - \Omega_m$. la señal de salida resultante será exactamente igual a $x(t)$.[1][2]

Muestreo con tren de impulsos en el dominio del tiempo

Sea $x_s(t)$ una señal que resulta de multiplicar una señal $x(t)$ con un tren de impulsos $p(t)$:

$$x_s(t) = x(t)p(t)$$

Sabiendo que:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

Entonces:

$$x_s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT)$$

Luego:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

Muestreo con tren de impulsos en el dominio de la frecuencia

Calculando la transformada de fourier de $x_s(t)$ se obtiene:

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X(j\omega) * P(j\Omega)$$

Sabiendo que:

$$P(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s)$$

Entonces:

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\Omega - k\Omega_s)]$$

Luego:

$$X_p(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\Omega - k\Omega_s)]$$

donde: $\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$

De la implementación real

En la vida real, los impulsos resultan casi imposibles de generar. Es por eso que para muestrear una señal se aplican diferentes métodos y aproximaciones, basadas en el teorema de muestreo, para recuperar la señal original de la mejor manera posible.[1][2]

Métodos de Reconstrucción de la señal

Retenedor de orden cero

El retenerdor de orden cero es un proceso mediante el cual $x_s(t)$ pasa a través de un sistema cuya respuesta al impulso es

$$h_o(t) = \mu(t) - \mu(t - T)$$

Por ende, el retenedor de orden cero viene siendo un muestreo por pulsos rectangulares.

$$H_o(j\Omega) = \frac{2sen(\frac{\Omega T}{2})}{\Omega} e^{-j\Omega\frac{T}{2}}$$

Métodos de Reconstrucción de la señal
Otros retenedores

- Retenedor de primer orden: $x_s(t)$ pasa a través de un sistema con respuesta impulsiva triangular, convirtiendose en un muestreo por pulsos triangulares.
- Retenedor de orden superior: $x_s(t)$ pasa a través de un sistema con respuesta impulsiva polinómica, convirtiendose en un muestreo por pulsos curvos.

Métodos de Reconstrucción de la señal
Reconstrucción ideal

Teóricamente, para recuperar una señal muestreada por un tren de impulsos se requiere implementar un filtro pasabajos ideal. Lo anterior, equivale a realizar la siguiente aproximación en el tiempo:

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) \frac{\Omega_c T sen[\Omega_c(t-nT)]}{\pi\Omega_c(t-nT)} \qquad (2)$$

A la ecuación 2 se le llama interpolación ideal.

Comparación de los espectros de las señales muestreada y discretizada

Partiendo de:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

y calculando su transformada de fourier por otro método se obtiene:

$$X_p(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega(nT_s)}$$

$$X_p(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn(\Omega T_s)}$$

Recordando que :

$$X(e^{-j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Comparación de los espectros de las señales muestreada y discretizada

Finalmente tenemos:

$$X_s(j\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T_s}$$

$$X(e^{j\omega}) = X_s(j\Omega)|_{\Omega=\frac{\omega}{T_s}}$$

Factor de escalamiento en los espectros:

$$\omega = \Omega T_s \tag{3}$$

Filtro antisolapamiento

Muchas señales, por naturaleza, son de banda ilimitada y esto representa un problema a la hora de realizar el tratamiento de las mismas, por ello en todo proceso de muestreo real se incluye un filtro analógico $H_{aa}(j\Omega)$. Este filtro tiene como propósitos asegurar que la señal que se va a muestrear esté en el rango de frecuencias deseado y limitar el espectro del ruido aditivo. La ecuación 2 representa la respuesta en frecuencia del filtro antisolapamiento .[2][1]

$$H_{aa}\left(j\Omega\right) = \begin{cases} 1, & |\Omega| < |\Omega_c| \leq \pi/T \\ 0, & |\Omega| \geq |\Omega_c| \end{cases} \tag{4}$$

Conversor A/D
Introducción

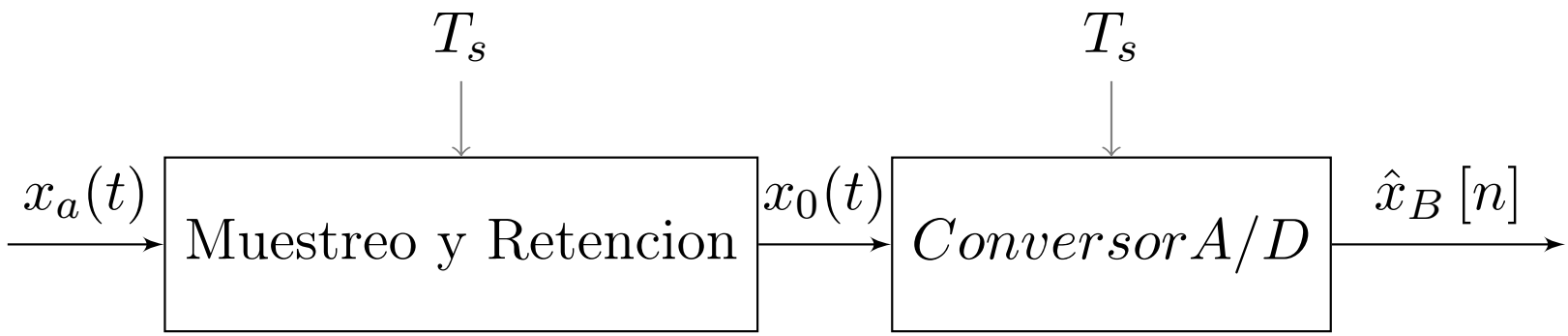
El conversor **A/D** convierte la amplitud de la señal en un código binario que representa la amplitud cuantificada más cercana a la amplitud de la entrada. La conversión **A/D** se puede interpretar a través del modelo del conversor **C/D**.

Conversor A/D
Estructura real

Conversor C/D

- Convierte una señal en tiempo continuo a una de tiempo discreto.
- Se supone que cada muestra se conoce con precisión infinita.

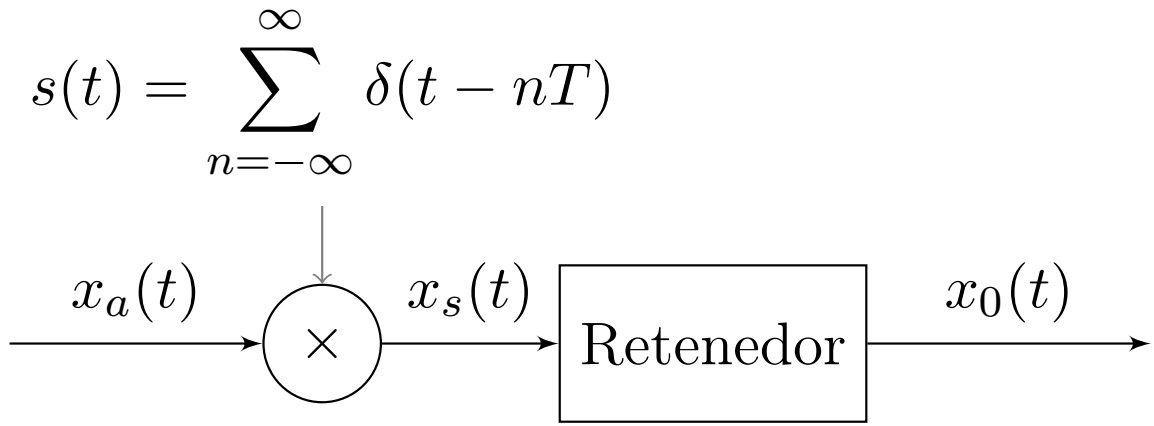
Una aproximación a esto es el siguiente diagrama



Conversor C/D

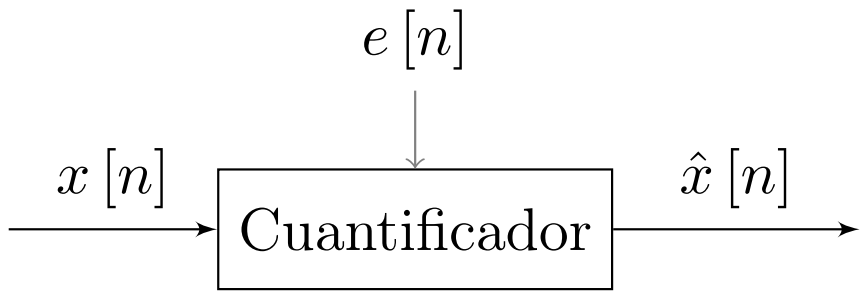
El bloque de muestreo y retención

La conversión A/D no es instantánea,por este motivo los sistemas de altas prestaciones incluyen generalmente un sistema de muestreo y retención.



Cuantificador
Estructura

El cuantificador es un sistema no lineal cuyo modelo se puede aproximar a:



Este modelo es valido si la señal es lo suficientemente compleja y los pasos de cuantificación suficientemente pequeño.

Errores de Cuantificación

En este proceso se mide el nivel de voltaje de cada una de las muestras, La muestra cuantificada $\hat{x}[n]$ será en general diferente del verdadero valor de la muestra $x[n]$. La diferencia entre ambas es el error de cuantificacion y viene dado por:

$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n]$$

Incluso en su caso ideal añade una señal de ruido a la señal de entrada.En general un cuantificador de $(b+1)$ bits con Δ dado el error de cuantificacion satisface la siguiente ecuacion

$$(-X_m - \Delta/2) < x[n] \leq (X_m - \Delta/2)$$

Errores de Cuantificación

$$\Delta = \frac{2X_m}{2^{B+1}} = \frac{X_m}{2^B}$$

Donde:

- Δ es el nivel de cuantificación más pequeño o pasos de cuantificación.
- X_m es el rango dinámico del cuantificador ($1v$,$5v$,$10v$)
- 2^{B+1} es el número de niveles que se pueden cuantificar usando $B+1$ bits

Ejemplo: Para un cuantificador de 8 niveles en complemento a dos para un rango dinámico desde $-1v$ hasta $1v$, $X_m = 1$ y

$$\Delta = \frac{X_m}{2^B} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

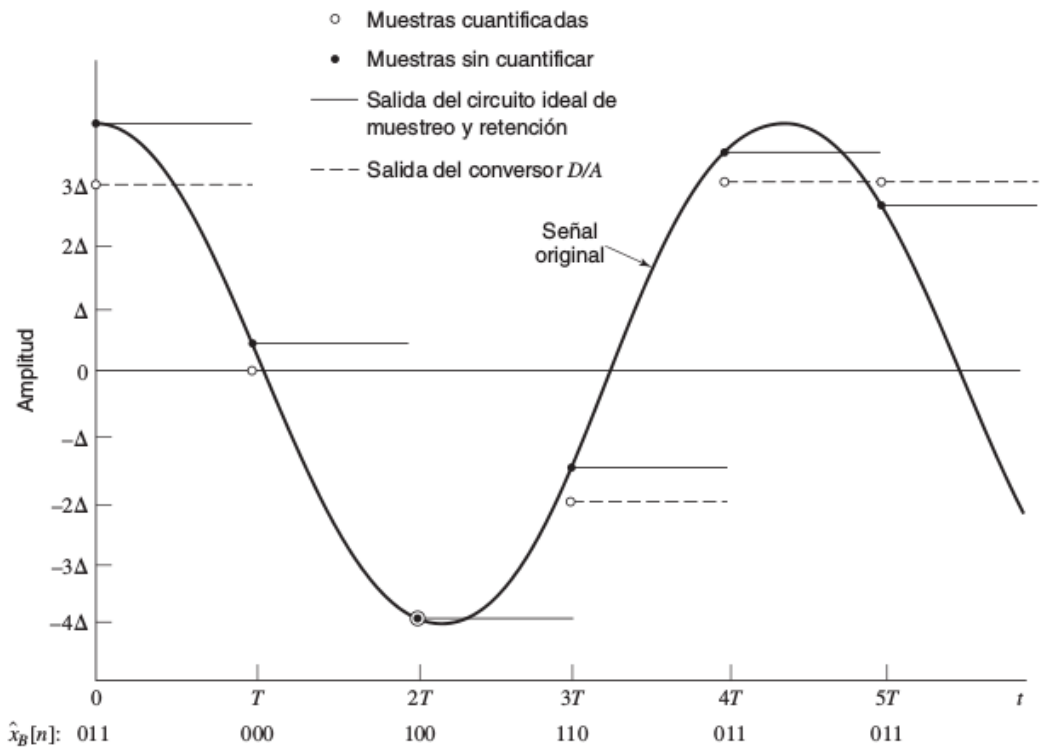
Errores de Cuantificación
Continuación

Los errores de cuantificación se basan en los siguientes supuestos:

- La secuencia de error $e[n]$ es una muestra de un proceso aleatorio estacionario.
- La secuencia de error no está correlacionada con la secuencia $x[n]$.
- Las variables aleatorias del proceso de error no están correlacioadas. Es decir, el error es un proceso de ruido blanco.
- La distribución de probabilidad del proceso de error es uniforme en el intervalo del error de cuantificación.

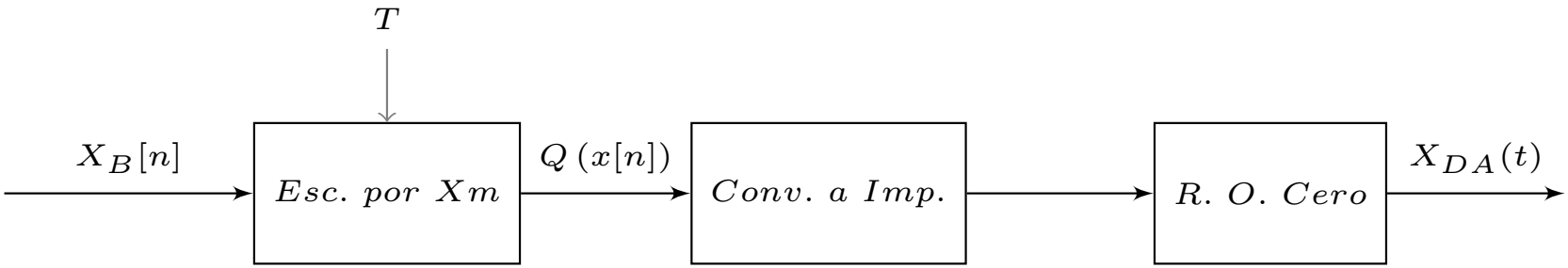
Codificación

Este proceso en convertir a una palabra binaria los niveles de cuantificación. La muestras se pueden etiquetar utilizando un codigo binario. En general, 2^{B+1} niveles se pueden codificar mediante un codigo binario de $(B+1)bits$.



Conversor D/A

Diagrama de Bloques de un Conversor D/A.



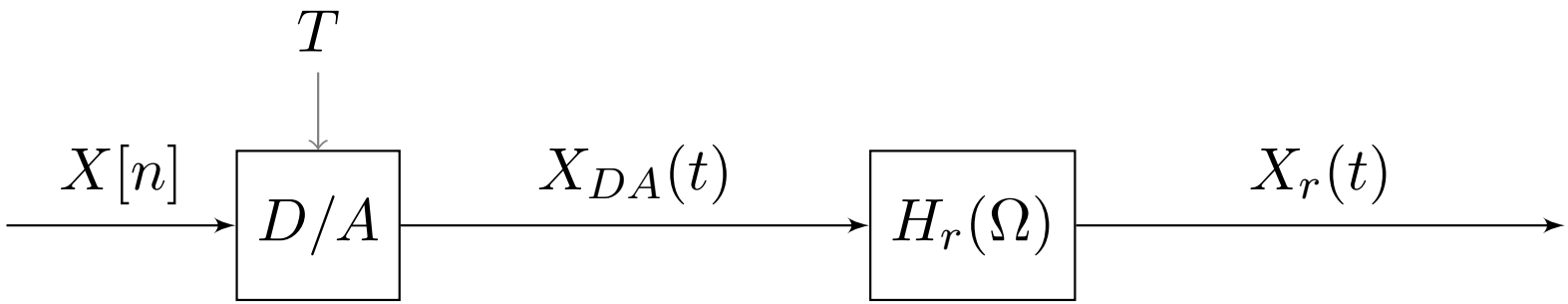
Representación en términos de un filtro de retención de orden Cero.

$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_m X_b[n] h_0(t - nT)$$

$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] h_0(t - nT) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] h_0(t - nT)$$

Conversor D/A

Diagrama de Bloques de la configuración física



$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] \frac{sen[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n] \frac{sen[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

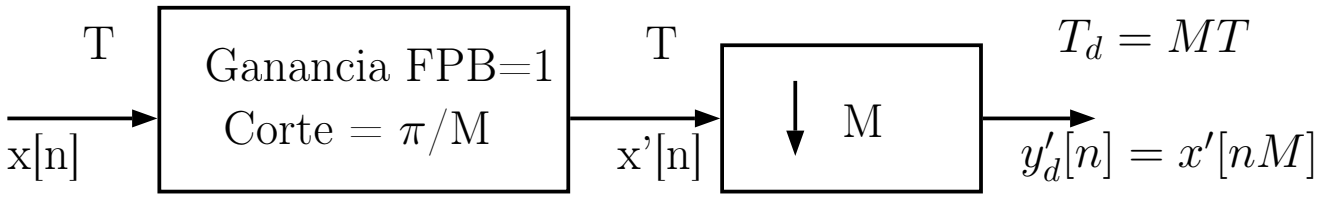
Tratamiento multitasa
Introducción

Muchas veces durante el procesado digital de señales surge la necesidad de transformar una señal muestreada a una frecuencia F_s en una señal equivalente muestreada a otra frecuencia F_s'. Para ello:

- Se discutirá sobre el diezmado o reducción de la frecuencia de muestreo por un factor entero M.
- Se discutirá sobre la interpolación o incremento en la frecuencia de muestreo por un factor entero L.
- Se discutirá sobre el cambio de frecuencia en un factor no entero.
- Se discutirán procesos auxiliares como el submuestreo y sobremuestreo.
- Se analizará lo referente a la zona de nyquist.

Tratamiento multitasa
Diezmado

El diezmado consiste en reducir la frecuencia de muestreo en un factor entero M. En la mayoría de las aplicaciones, un diezmador va precedido de un filtro limitador de banda cuyo objetivo es evitar el solapamiento. [2]



Tratamiento multitasa
Ejemplo del Diezmado

Para explicar los efectos del diezmado se realiza un ejemplo con la siguiente señal:

$$x_c(t) = \frac{sen(\frac{\pi}{2}t)}{\pi t} \tag{5}$$

Primero se muestrea adecuadamente $x_c(t)$ para obtener x[n]:

$$x_c(t) = x[nTs] = \frac{sen(\frac{\pi}{2}nTs)}{\pi nTs} \tag{6}$$

Aplicando teorema de Nyquist:

$$\omega_s > 2\omega_n \rightarrow \omega_s > 2(\frac{\pi}{2}) \rightarrow \omega_s > \pi$$

Tratamiento multitasa
Ejemplo del Diezmado

Se selecciona el valor de $\omega_s = 20\pi rad/s$ y siendo $\omega_s = 2\pi f_s$ con $f_s = \frac{1}{T_s}$ entonces $T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$, por lo tanto,

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega s} = \frac{2\pi}{20\pi} = \frac{1}{10}$$

Luego resulta la representación en tiempo discreto de la señal de entrada:

$$x[n] = \frac{sen(\frac{\pi}{20}n)}{\frac{\pi}{10}n} \tag{7}$$

Finalmente se muestra el resultado de realizar el proceso de diezmado de x[n] con un factor de M = 3.

$$x_d[n] = \frac{sen(\frac{3\pi}{20}n)}{\frac{3\pi}{10}n} \tag{8}$$

Tratamiento multitasa

Espectro del ejemplo de Diezmado

El espectro de una señal diezmada está representado mediante la ecuación 9

$$X_d\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X\left(e^{j(\frac{\omega}{M}-\frac{2\pi i}{M})}\right) \tag{9}$$

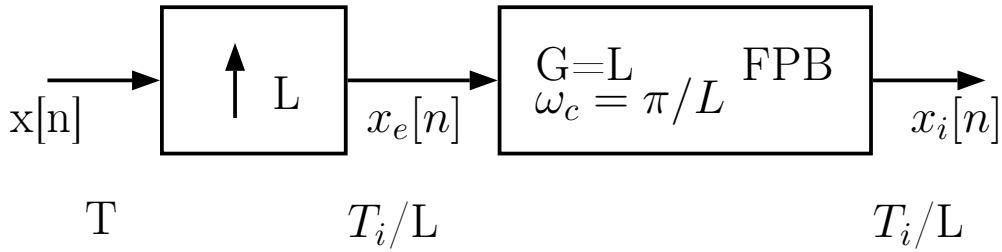
Entonces, el espectro de la ecuación 8 viene dado por la expresión:

$$X_d\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2} X\left(e^{j(\frac{\omega}{3}-\frac{2\pi i}{3})}\right) \tag{10}$$

La ecuación 10 significa una expansión y acercamiento entre sí de las réplicas en el espectro discreto.

Tratamiento multitasa
Interpolación

La interpolación ocurre cuando se aumenta la frecuencia de muestreo en un factor entero L. Con el filtro conectado en cascada, se modifica el factor de escala de la amplitud y se eliminan todas las réplicas escaladas en frecuencia que no estén situadas en múltiplos enteros de 2π. [2]



Tratamiento multitasa
Ejemplo de Interpolación

Para explicar los efectos de la interpolación se realiza un ejemplo con la siguiente señal:

$$x_c(t) = \frac{sen(\frac{\pi}{2}t)}{\pi t} \tag{11}$$

Primero se muestrea adecuadamente $x_c(t)$ para obtener x[n]:

$$x_c(t) = x[nTs] = \frac{sen(\frac{\pi}{2}nTs)}{\pi nTs} \tag{12}$$

Aplicando teorema de Nyquist:

$$\omega_s > 2\omega_n \rightarrow \omega_s > 2(\frac{\pi}{2}) \rightarrow \omega_s > \pi$$

Tratamiento multitasa
Ejemplo de Interpolación

Se selecciona el valor de $\omega_s = 2\pi rad/s$ y siendo $\omega_s = 2\pi f_s$ con $f_s = \frac{1}{T_s}$ entonces $T_s = \frac{2\pi}{\omega_s}$, por lo tanto,

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega s} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Luego resulta la representación en tiempo discreto de la señal de entrada:

$$x[n] = \frac{sen(\frac{\pi}{2}n)}{\pi n} \tag{13}$$

Finalmente se muestra el resultado de realizar el proceso de diezmado de x[n] con un factor de L = 3.

$$x[n] = \frac{sen(\frac{\pi}{6}n)}{\frac{\pi}{3}n} \tag{14}$$

Tratamiento multitasa

Ejemplo del espectro de Interpolación

El espectro de una señal interpolada está representado mediante la ecuación 9

$$X_e\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega L}\right) \tag{15}$$

Entonces, el espectro de la ecuación 14 viene dado por la expresión:

$$X_e\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega 3}\right) \tag{16}$$

La ecuación 15 significa una compresión en incorporación de nuevas réplicas en el período en el espectro discreto.

Tratamiento multitasa

Multiplicación por factor no entero.

Cuando el cociente entre la frecuencia de muestreo deseada y la original no es un número entero, se puede cambiar la frecuencia de muestreo conectando en cascada las etapas de diezmado e interpolación.[1]

---

[1] En los estudios de grabación se producen cintas digitales (formato DAT) que se muestrean a 48KHz, pero en radiodifusión (formato DAB) se usa una tasa de muestreo de 32KHz. £ Cómo adaptar el formato DAT al DAB? Conectando os sistemas en cascada, de tal manera que el cociente entre las frecuencias será igual a: $\frac{48KHz}{32KHz} = \frac{3}{2}$, se obtiene un factor de interpolación L = 2 y un factor de diezmado de M = 3. El filtro tendrá una frecuencia de corte igual al mínimo entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{3}$

Tratamiento multitasa
Sobremuestreo

También se le llama *oversampling* y es una técnica que consiste en usar frecuencias de muestreo es lo suficientemente altas, generalmente múltiplos de la frecuencia de nyquist. Generalmente el *oversampling*[2], es usado en casos puntuales en los cuales se requiere un beneficio adicional de la alta resolución, sin embargo, esto ocasiona un incremento en carga computacional, es por ello que probablemente se regrese el audio a la frecuencia de muestreo normal.

[2]En ocasiones, esta técnica es implementada en etapas posteriores al conversor A/D a través de filtros de interpolación.

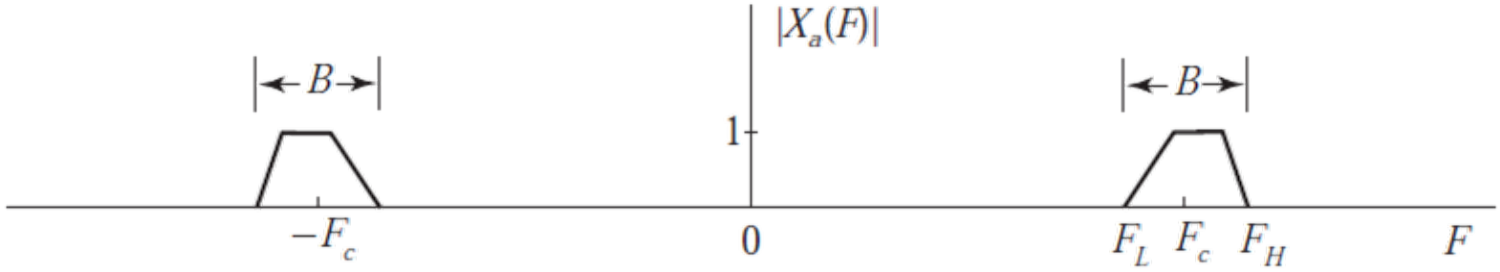
Tratamiento multitasa
Submuestreo

También llamado *undersampling* ocurre cuando se utiliza una frecuencia de muestreo inferior a dos veces la componente de máxima frecuencia en la señal.

- Con el submuestreador se puede generar pérdida de información.
- El submuestreo requiere menos memoria, por lo que puede ser útil en ciertas aplicaciones como por ejemplo: reducir la dimensión (espacial) de una imagen y, por tanto, el número de píxeles que deben ser codificados o muestrear voz para la trnamisión en comunicaciones móviles.

Zona de Nyquist
Concepto

Son aquellas zonas en las que es posible muestrear una señal sin presencia del aliasing. Aplica a señales cuyo espectro está representado de la siguiente forma:



Zona de Nyquist
Expresión matemática

Partiendo de la siguiente ecuación se puede fijar un rango de frecuencias en el cual ésto es posible

$$\frac{2F_H}{K} \leq F_S \leq \frac{2F_L}{K-1}$$

teniendo en cuenta que Para k=1, tenemos $2F_H \leq F_S \leq \infty$, que es el teorema de muestreo de Nyquist-Shannon. El máximo valor de k dependerá de la siguiente relación:

$$K_{max} = \frac{F_H}{B}$$

Zona de Nyquist
Ejemplo

Ejemplo: Si $F_H = 510\text{KHz}$ y $B = 20KHz$ se obtiene que el máximo valor posible de k será igual a 25, puesto que k sólo admite valores enteros y deben redondearse por debajo del valor obtenido.

$$K_{max} = \frac{510KHz}{20KHz} = 25,5 = 25$$

Entonces, para k=25 se obtiene

$$\frac{2\,(510KHz)}{25} \leq F_S \leq \frac{2\,(490KHz)}{24}$$

$$40,8KHz \leq F_S \leq 40,83KHz$$

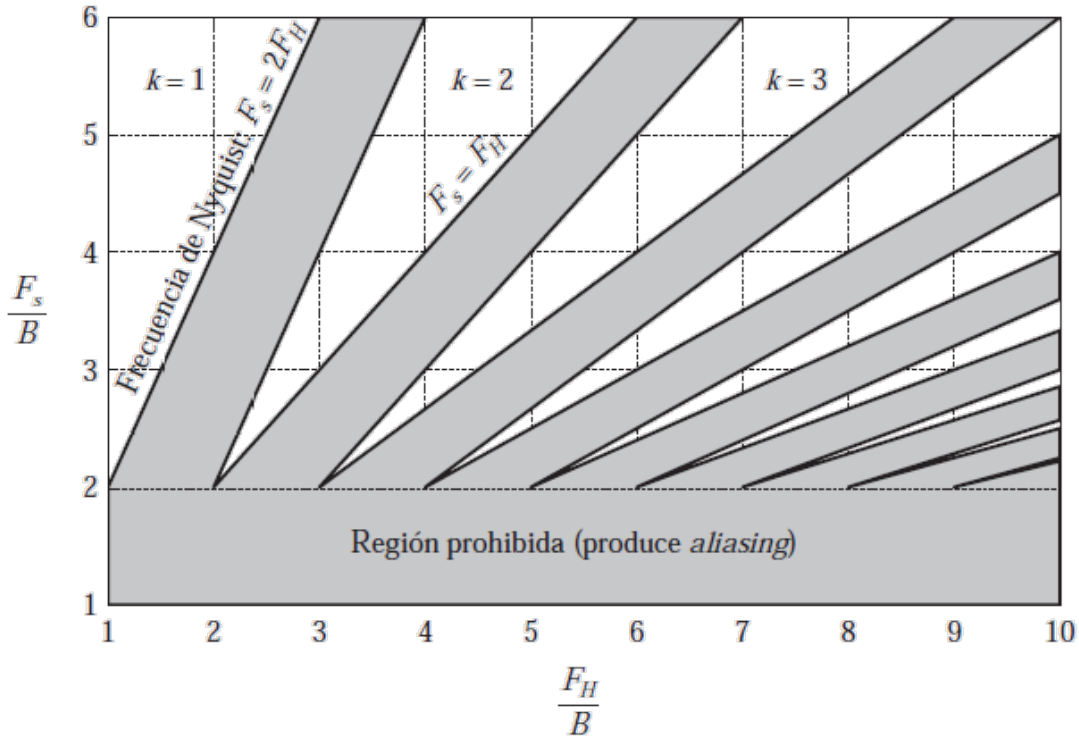
Zona de Nyquist
Ejemplo

El rango descrito anteriormente es muy estrecho y difícil de implementar. Si se selecciona un valor de k menor, dicho rango de frecuencias aumentará el sistema se vuelve realizable.

$$\frac{2\,(510KHz)}{10} \leq F_S \leq \frac{2\,(490KHz)}{9}$$

$$102KHz \leq F_S \leq 98KHz$$

Zonas de nyquist
Representación Gráfica



Las áreas sombreadas representan frecuencias de muestreo que son resultado del aliasing. El rango permitido de frecuencias de muestreo es el definido por las cuñas blancas.

Referencias

Dimitris G. Proakis, John G.; Manolakis.
Tratamiento Digital de Señales.
Prentice Hall. Madrid. ES. 4a ed. 1048 p., Reading, MA, 2007.

Ronald W. Oppenheim, Alan V.; Schafer.
Tratamiento de Señales en tiempo discreto.
Prentice Hall. Madrid. ES. 2a ed. 873 p., Reading, MA, 2000.