

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

Procesamiento Digital de Señales

Apuntes de clase sobre la Transformada Rápida de Fourier FFT

A. Osman

Universidad de Carabobo

9 de diciembre de 2018

Contenido

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT
Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

1. Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT
2. Algoritmos FFT
3. Aplicaciones de la FFT

PDS

A. Osman

Génesis. La
transforma-
da Discreta
de Fourier
DFT

Algoritmos
de cálculo
de la DFT

Código de la
DFT

Relación
entre la
DFT, la
SFT y la
DTFT

Zero-
Padding

Propiedades

Carga
computacio-
nal del
cómputo
directo de la
DFT

Algoritmos
FFT

Aplicaciones
de la FFT

Génesis. La transformada Discreta de Fourier

Definición

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

Sea $x[n]$ una secuencia causal de N muestras. La **Transformada Discreta de Fourier (DFT)** se define como:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad (1)$$

Sea $X[k]$ la DFT de N muestras de una secuencia $x[n]$ causal. Se define la **Transformada Discreta de Fourier Inversa IDFT** de $X(k)$:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn} \quad (2)$$

Donde $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

Enfoque Matricial de la DFT

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

La DFT se puede plantear de manera matricial de la siguiente manera:

$$X[k] = Wx[n] \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_N^{00} & W_N^{01} & W_N^{02} \dots & W_N^{0(N-1)} \\ W_N^{10} & W_N^{11} & W_N^{12} \dots & W_N^{1(N-1)} \\ W_N^{20} & W_N^{21} & W_N^{22} \dots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_N^{(N-1)0} & W_N^{(N-1)1} & W_N^{(N-1)2} \dots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

De la misma manera, la IDFT se puede plantear como:

$$x[n] = \frac{1}{N} W^* X[k] \quad (4)$$

Periodicidad de los factores de entorche

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

Las entradas de la matriz W se repiten de la siguiente manera:

$$W_N^r = W_N^{N+S} = W_N^N W_N^S = W_N^S \quad (5)$$

Es por ello que solo habrán N entradas distintas dentro de la matriz W . Por ejemplo, si $N = 6$, entonces, $W_6^{10} = W_6^4$.

Algoritmo de solución

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier
DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

Determine la DFT de la señal $x[n] = [2, 1, -1, 0, 1, -1]$

- Definir la secuencia en el dominio n o K .
- Definir el tamaño y elementos de la matriz W .
- Calcular los factores de entorche. (N factores distintos)
- Efectuar el producto matricial.
- Calcular el número de operaciones suma y producto.
(opcional)
- Dibujar los factores de entorche.(opcional)

Implementación de la DFT

Código Python

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

```
import numpy as np
import math
import cmath
def dft(sig):
    N=len(sig)
    y=np.matrix([sig]).T #define y traspone la matriz xn
    # n: base de tiempo discreto
    # k: base de frecuencia discreta
    n = np.matrix([list(range(N))]).T # define y traspone la matriz n
    k = np.matrix([list(range(N))]) # define la matriz k
    WN=cmath.exp(-1j*(2*math.pi/N)) # calcula el factor de entorche
    v=n*k # calcula la matriz despliegue
    p=np.array([v]) #convierte a v en eun arreglo para que luego pueda ser exponente
    r=WN**(p) # calcula la matriz w elevada a la potencia matricial.
    W= np.asmatrix(r) # convierte el arreglo en matriz.
    xk=W*y # calcula los coeficientes espectrales
    xk = np.array(xk)
    xk = xk.reshape(N)
    #s= np.array([xk])
    #numpy.set_printoptions(precision=5) cantidad de decimales
    np.set_printoptions(suppress=True) #suprime notacion cientifica
    return xk
```

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT
Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

1) La DFT se puede obtener a partir de la serie discreta de fourier considerando lo siguiente:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & ; 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & ; \text{resto} \end{cases} \quad (6)$$

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k] & ; 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & ; \text{resto} \end{cases} \quad (7)$$

donde $\tilde{x}[n]$ es la señal periódica en el tiempo y $\tilde{X}[k]$ son los coeficientes de fourier de la serie discreta.

2) Si se conoce $X(e^{j\omega})$, $X[k]$ se puede determinar muestreando a $X(e^{j\omega})$ en un periodo de 2π con muestras equiespaciadas a $\frac{2k\pi}{N}$; esto es :

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2k\pi}{N}} \quad (8)$$

Zero-Padding

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

Suponga que desea calcular la DFT de:

$$x[n] = [x[0], x[1], x[2], \dots, x[N-1]]$$

El zero-padding consiste en rellenar con ceros de la siguiente forma:

$$x_{zp}[n] = [x[0], x[1], x[2], \dots, x[N-1], 0, 0, 0, \dots, 0]$$

Observaciones:

- La longitud de $x_{zp}[n]$ es $L = N + S$.
- El equiespaciado original en la frecuencia es de $\frac{2k\pi}{N}$.
- El nuevo equiespaciado en la frecuencia será $\frac{2k\pi}{L}$.
- la relación $\frac{2k\pi}{N+S} < \frac{2k\pi}{N}$ implica una interpolación.
- Aumenta la densidad espectral de $X[k]$.
- No altera la realidad de $x[n]$.

Linealidad

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT
Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

$$DFT\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} = \alpha DFT\{x_1[n]\} + \beta DFT\{x_2[n]\} \quad (9)$$

Si $N_1 \neq N_2$ se toma $N = \max\{N_1, N_2\}$ y se calcula la *DFT* con N muestras, completando con ceros si es necesario.

Rotación circular

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

Implica los procesos de envolver y desenvolver circularmente una secuencia. La *DFT* de una secuencia rotada circularmente se obtiene rotando circularmente la *DFT* de la secuencia sin rotar.

Rotación circular

Enrosque

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier
DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

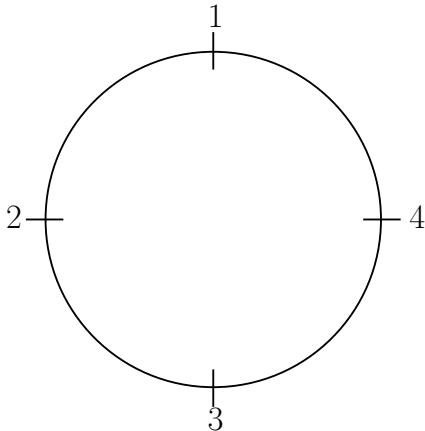
Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

Sea $x[n] = [1 \ 2 \ 3 \ 4]$



Rotación circular

Desenrosque

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

Sea $x[n] = [1 \ 4 \ 3 \ 2]$

$$x'[n] = x((-n))_N = \begin{cases} x(0) & ; \quad n = 0 \\ x(N - n) & ; \quad 1 \leq n \leq N - 1 \end{cases}$$

en Matlab: $x = x(\text{mod}(-n, N) + 1)$

Desplazamiento circular

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

En el dominio transformado implica

$$DFT\{x((n - m))_N\} = W_N^{km} X[k]$$

Ejemplo: sea $x[n] = [6 \ 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1]$ y $m = -2$, m es un adelanto de la señal. Pasos:

- Rotación circular y desplazamiento.
- Desenrosque en sentido antihorario.

Desplzamiento circular

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

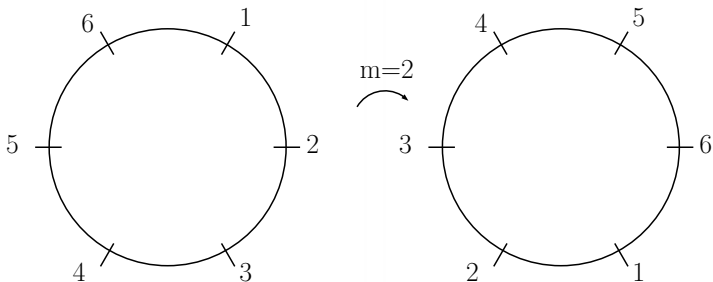
Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT



$$y[n] = [4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 6 \ 5]$$

Desplazamiento circular

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

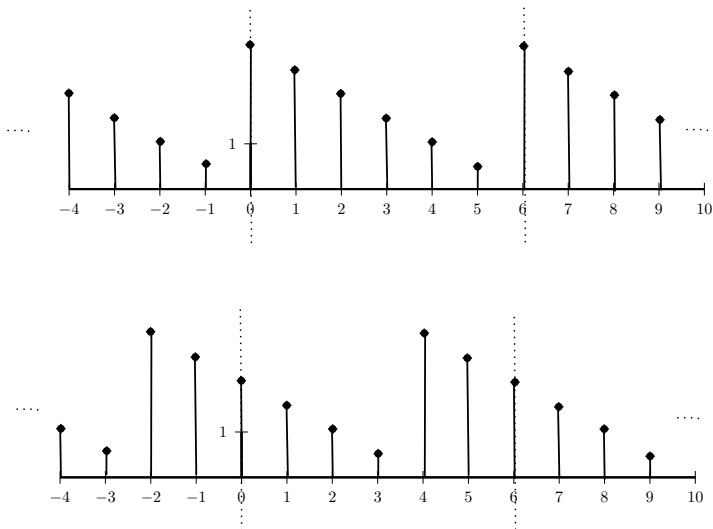
Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT



Modulación

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier
DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

$$x[n]W_N^{mn} \xrightarrow{\text{DFT}} X[((k-m))_N] ; \quad 0 \leq k \leq N-1$$

Simetría

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier
DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

$$x^*[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X^*[((-k))_N] ; \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$x^*[((-n))_N] \xrightarrow{\text{DFT}} X^*[k] ; \quad 0 \leq k \leq N-1$$

Carga computacional

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

Recordemos que La **Transformada Discreta de Fourier** (DFT) se define como:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn} \quad (10)$$

- Si $x[n] = a + jb$ y $W_N^{kn} = c + jd$ entonces para un valor de n y k el producto $(a + jb)(c + jd)$ genera 4 multiplicaciones reales y 2 sumas reales.
- Para un valor de k , la ecuación (1), genera $4N$ multiplicaciones reales y $4N - 2$ sumas reales.
- El cálculo de la ecuación (1) genera $4N^2$ multiplicaciones reales y $N(4N - 2)$ sumas reales.

Consideraciones para el cómputo eficiente

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

La mayor parte de los procedimientos para mejorar la eficiencia de cómputo de la DFT explotan las propiedades de periodicidad y simetría de W_N^{kn} . Concretamente,

$$W_N^{k(N-n)} = W_N^{-kn} = (W_N^{kn})^* \quad (11)$$

$$W_N^{kN} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n} \quad (12)$$

PDS

A. Osman

Génesis. La
transforma-
da Discreta
de Fourier
DFT

Algoritmos
de cálculo
de la DFT

Código de la
DFT

Relación
entre la
DFT, la
SFT y la
DTFT

Zero-
Padding

Propiedades

Carga
computacio-
nal del
cómputo
directo de la
DFT

**Algoritmos
FFT**

Aplicaciones
de la FFT

Algoritmos FFT

Algoritmos FFT

Algoritmo de diezmado en el tiempo

PDS

A. Osman

El algoritmo de diezmado en el tiempo se genera a partir de la ecuación (4).

$$X[k] = G[k] + W_N^k H[k] \quad (13)$$

Donde $G[k]$ y $H[k]$ son las DFT de $\frac{N}{2}$ de los puntos pares e impares respectivamente de la secuencia $x[n]$. Además $G[k]$ y $H[k]$ son secuencias periódicas cada $\frac{N}{2}$. Por ejemplo, si $N = 8$ $G[0] = G[4]$, $H[2] = H[6]$ etc.

Sea $x[n] = \{x[0], x[1]\}$, la FFT de dos puntos de $x[n]$ se calcula mediante el grafo de flujo de mariposa. Este último genera las ecuaciones (5) y (6):

$$X[0] = x[0] + x[1] \quad (14)$$

$$X[1] = x[0] - x[1] \quad (15)$$

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT
Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding
Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

Algoritmos FFT

Flujogramas-FFT de 2 y 4 puntos-Diezmando en el tiempo

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT
Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

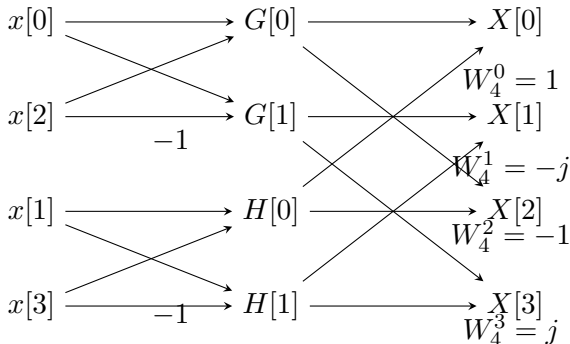
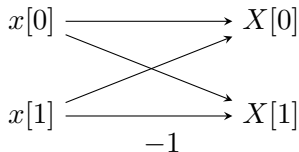
Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT



Algoritmos FFT

Código Fortran

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

El algoritmo de Diezmado en el tiempo o DIT de Raíz dos, fue originalmente desarrollado por S. Burrus en la Rice University en Setiembre de 1985. El código se muestra a continuación, en el cual

- X: Parte real de la entrada/salida.
- Y: Parte imaginaria de la entrada/salida.
- N: Número de muestras de la entrada.
- M: Logaritmo base 2 de N.

Algoritmos FFT

Código Fortran

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT
Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

```
SUBROUTINE FFT (X,Y,N,M)
REAL X(N), Y(N)
INTEGER N,M
!f2py intent(in) X,Y,N,M
!f2py intent(out) X,Y
!f2py depend(X) N
!f2py depend(M) N
!-----ORDEN DE INVERSION DE BITS-----
!
      J = 1
      N1 = N - 1
      DO 104 I=1, N1
        IF (I.GE.J) GOTO 101
          XT = X(J)
          X(J) = X(I)
          X(I) = XT
          XT = Y(J)
          Y(J) = Y(I)
          Y(I) = XT
101      K = N/2
102      IF (K.GE.J) GOTO 103
        J = J - K
        K = K/2
        GOTO 102
103      J = J + K
104      CONTINUE
```

Algoritmos FFT

Código Fortran

PDS

A. Osman

Génesis. La
transforma-
da Discreta
de Fourier
DFT

Algoritmos
de cálculo
de la DFT
Código de la
DFT

Relación
entre la
DFT, la
SFT y la
DTFT

Zero-
Padding

Propiedades

Carga
computacio-
nal del
cómputo
directo de la
DFT

Algoritmos
FFT

Aplicaciones
de la FFT

```
!-----FFT-----  
!  
      N2 = 1  
      DO 10 K = 1, M  
        E = 6.283185307179586/(2*N2)  
        A = 0  
        DO 20 J = 1, N2  
          C = COS (A)  
          S = SIN (A)  
          A = J*E  
          DO 30 I = J, N, 2*N2  
            L = I + N2  
            XT = C*X(L) + S*Y(L)  
            YT = C*Y(L) - S*X(L)  
            X(L) = X(I) - XT  
            X(I) = X(I) + XT  
            Y(L) = Y(I) - YT  
            Y(I) = Y(I) + YT  
          30      CONTINUE  
        20      CONTINUE  
        N2 = N2+N2  
      10      CONTINUE  
      !  
      RETURN  
      END
```

Algoritmos FFT

Asignación

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

Asignación: Determine la FFT de 8 puntos de su cédula de identidad. Realice el despliegue de las ecuaciones y luego construya el grafo de flujo correspondiente tomando en cuenta la periodicidad.

PDS

A. Osman

Génesis. La
transforma-
da Discreta
de Fourier
DFT

Algoritmos
de cálculo
de la DFT

Código de la
DFT

Relación
entre la
DFT, la
SFT y la
DTFT

Zero-
Padding

Propiedades

Carga
computacio-
nal del
cómputo
directo de la
DFT

Algoritmos
FFT

Aplicaciones
de la FFT

Aplicaciones de FFT

Convolución circular

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

$$x[n] \circledast h[n]$$

Pasos:

- ① $x((-n))_N$; solo el enrosque.
- ② $h((n))_N$; solo el enrosque.
- ③ Rotar $h((n))_N$ en sentido levógiro.

Convolución circular

Ejemplo

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

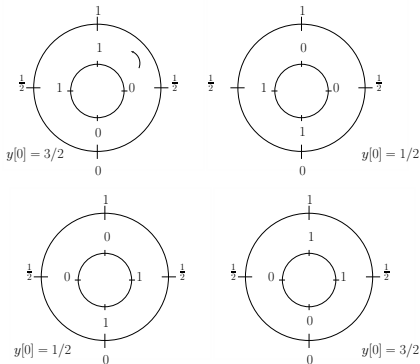
Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

$$x[n] = \{1, 1/2, 0, 1/2\} ; h[n] = \delta[n] - \delta[n - 3]$$



Convolución circular

Ejemplo

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier
DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT
Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

Propuesto:

$$x[n] = \{1, 2, 3, 1, 2\}$$

$$h[n] = \{2, 0, 1, 2, 1\}$$

$$\text{R: } y[n] = \{11, 12, 8, 12\}$$

Convolución circular

Propiedad

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \iff X_1[k]X_2[k]$$

Convolución lineal mediante la DFT circular

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

- Calcular la *DFT* de N puntos $X_1[k]$ y $X_2[k]$ de $x_1[n]$ y $x_2[n]$.
- Calcular el producto $X_3[k] = X_1[k]X_2[k]$ $0 \leq k \leq N$.
- Calcular la IDFT de $X_3[k]$.
- Luego, $x_3[n] = x_1[n] \otimes x_2[n] = IDFT \{X_3[k]\}$.
- Nota:** $N \geq L + P - 1$, donde L y P son las longitudes de $x_1[n]$ y $x_2[n]$ respectivamente.

Realización de un sistema LTI mediante la DFT

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier
DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

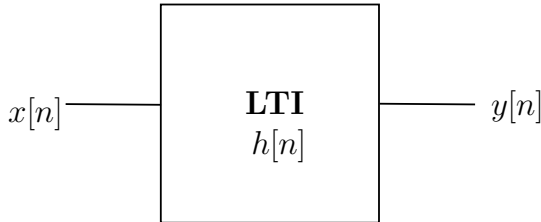
Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT



La convolución lineal es idéntica a la convolución circular si $N \geq L + P$.

Realización de un sistema LTI mediante la DFT

Ejemplo

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT
Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding
Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

$$x[n] = \{1, 2, 3, 1, 2\} \quad h[n] = \{1, 2, 1, 0, 2\}$$

$$y[n] = \{2, 4, 7, 6, 12, 9, 7, 5, 2\} = x[n] * h[n]$$

$$x[n] \circledast h[n] = \{11, 11, 12, 8, 12\}$$

las primeras tres muestras $\rightarrow$ muestras modificadas.

$$N \geq L + P - 1, \quad N \geq 5 + 5 - 1 = 9$$

Para realizar $x[n] * h[n]$ mediante la convolución circular entonces:

$$x[n] = \{1, 2, 3, 1, 2, 0, 0, 0, 0\} \text{ y } h[n] = \{1, 2, 1, 0, 2, 0, 0, 0, 0\}.$$

Convolución por bloques

Solapamiento-suma

PDS

A. Osman

Génesis. La transformación Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

En este método se usa la convolución circular para calcular la convolución lineal, esto con el fin de aprovechar la velocidad de cómputo de la *FFT*.

- $N \geq L + P - 1$
- Rellenar con ceros las secuencias $x[n]$ y $h[n]$ de tal manera que tengan la misma longitud N .
- Se debe almacenar las últimas $P - 1$ muestras y sumarlas con las primeras $P - 1$ muestras del siguiente bloque.

Convolución por bloques

Ejemplo de Solapamiento-suma

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier
DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

$x[n] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$ $h[n] = \{1, 2, 3\}$. Determine la salida del sistema si la entrada se procesa en bloques de longitud 5 muestras

$$L + P - 1 = 5 + 3 - 1 = 7$$

$$\text{Bloque 1 : } \begin{cases} x_1[n] = \{1, 2, 3, 4, 5, 0, 0\} \\ h_1[n] = \{1, 2, 3, 0, 0, 0, 0\} \end{cases}$$

$$\text{Salida : } y_1[n] = \{1, 4, 10, 16, 22, 2, 15\}$$

$$\text{Bloque 2 : } \begin{cases} x_2[n] = \{6, 7, 8, 9, 10, 0, 0\} \\ h_1[n] = \{1, 2, 3, 0, 0, 0, 0\} \end{cases}$$

$$\text{Salida : } y_2[n] = \{6, 19, 40, 46, 52, 47, 30\}$$

Convolución por bloques

Ejemplo de Solapamiento-suma

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

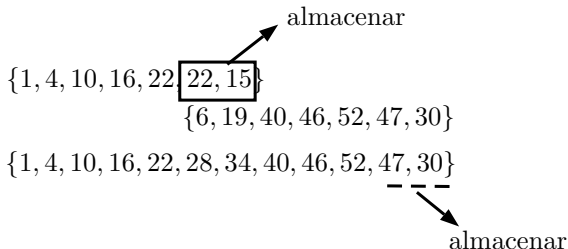
Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

Salida considerando los bloques 1 y 2:



Nota: Se acumulan las muestras en el siguiente bloque porque la convolución quedó incompleta.

Convolución por bloques

Solapamiento y almacenamiento

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier
DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT
Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades
Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

En este método también se usa la convolución circular para aprovechar la eficiencia de la *FFT*.

- Solo se rellena $h[n]$ hasta llegar a la longitud de L muestras de los bloques de $x[n]$.
- Una vez obtenido el bloque de salida de L muestras, deben descartarse las primeras $P - 1$ muestras incorrectas y luego se une cada bloque de manera consecutiva.
- Se debe almacenar las últimas $P-1$ muestras del bloque anterior de la entrada para usarlos en el bloque posterior de entrada.

Convolución por bloques

Ejemplo de Solapamiento y almacenamiento

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier
DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

$$\text{Bloque 1 : } \begin{cases} x_1[n] = \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ h_1[n] = \{1, 2, 3, 0, 0\} \end{cases}$$

$$\text{Salida : } y_1[n] = \{23, 19, 10, 16, 22\}$$

Se descartan las primeras dos: 23, 19

$$\text{Bloque 2 : } \begin{cases} x_2[n] = \{6, 7, 8, 9, 10\} \\ h_1[n] = \{1, 2, 3, 0, 0\} \end{cases}$$

$$\text{Salida : } y_2[n] = \{41, 37, 28, 34, 40\}$$

Salida considerando los bloques:

$$\{10, 16, 22, 28, 34, 40, \dots\}$$

Diseño de filtros

Ecuación y estructura de un filtro FIR

PDS

A. Osman

Génesis. La
transforma-
da Discreta
de Fourier
DFT

Algoritmos
de cálculo
de la DFT

Código de la
DFT

Relación
entre la
DFT, la
SFT y la
DTFT

Zero-
Padding

Propiedades

Carga
computacio-
nal del
cómputo
directo de la
DFT

Algoritmos
FFT

Aplicaciones
de la FFT

$$y[n] = \sum_{n=0}^M b_k x[n - k] \quad (16)$$

Diseño de filtros

Enventanado

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

- Se define una respuesta en frecuencia deseada $H_d(e^{j\omega})$.
- Obtener la respuesta al impulso $h_d[n]$ del filtro mediante $IDFT\{H_d(e^{j\omega})\}$.
- Seleccionar el orden del filtro (M).
- Enventanar $h_d[n]$ para extraer la respuesta al impulso $h[n]$ de longitud $M + 1$. Esto es:

$$h[n] = h_d[n]W[n] \quad (17)$$

donde $W[n]$ es una ventana.

Diseño de filtros

Algunas ventanas

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

a) **Rectangular:**

$$W[n] = \begin{cases} 1; & 0 \leq n \leq M \\ 0; & \text{en el resto} \end{cases} \quad (18)$$

b) **Hamming:**

$$W[n] = \begin{cases} 0,5 - 0,5 \cos(2\pi n/M); & 0 \leq n \leq M \\ 0; & \text{en el resto} \end{cases} \quad (19)$$

Diseño de filtros

Muestreo en frecuencia

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT
Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

- a) Definir una respuesta en frecuencia deseada.
- b) Seleccionar la longitud del filtro (M).
- c) Tomar M muestras equiespaciadas de $H_d(e^{j\omega})$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, tal que:

$$H[k] = H_d(e^{j\omega}) = H_d\left(e^{j\frac{2\pi}{M}k}\right) \quad (20)$$

- d) Calcular la respuesta al impulso del filtro, esto es, $h[n] = IFFT\{H[k]\}$.

Diseño de filtros

Aproximaciones óptimas

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

Son técnicas que profundizan en el paso *a* de los procedimientos descritos anteriormente y consisten en plantear formas polinómicas de orden superior en la frecuencia con fase lineal, de tal manera de generar rizados deseados. En el caso en que el rizado es constante se denomina **técnica de rizado constante**. Dentro de esta técnica se encuentra la aproximación por mínimos cuadrados.

Diseño de filtros

Ecuación y estructura de un filtro IIR

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (21)$$

$$H(Z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (22)$$

Diseño de filtros

Invarianza al impulso

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

- a) Seleccionar un prototipo de filtro analógico según las especificaciones del cliente. Esto es, seleccionar un $H_c(S)$ de los modelos tabulados, que más se acerque a las condiciones requeridas.
- b) Calcular $\mathcal{L}^{-1}\{H_c(S)\} = h_c(t)$.
- c) Calcular $h[n] = T_s h_c(nT_s)$.

Diseño de filtros

Transformación bilineal

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier
DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

- a) Seleccionar un prototipo de filtro analógico según las especificaciones del cliente. Esto es, seleccionar un $H_c(S)$ de los modelos tabulados, que más se aproxime a las condiciones requeridas.
- b) En $H_c(S)$ sustituir

$$S = \frac{2}{T_s} \left(\frac{Z - 1}{Z + 1} \right)$$

para determinar $H(Z)$.

- c) Calcular $h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(Z)\}$.

Diseño de filtros

Algunas consideraciones en el diseño de los filtros IIR

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier
DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT
Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding
Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

- Tomar en cuenta la relación $\omega = \Omega T_s$ al momento de calcular los valores de frecuencia. Esto depende de las especificaciones del cliente. Se debe realizar la conversión de frecuencia en los casos requeridos.
- El orden aproximado del filtro analógico se puede obtener mediante la expresión

$$N = \frac{\log \left(10^{-\frac{M}{10}} - 1 \right)}{2 \log(\omega_a)} \quad (23)$$

donde $N \rightarrow$ orden del filtro prototipo analógico.

$M \rightarrow$ atenuación en dB a una frecuencia ω_a . M debe ser menor que cero si corresponde a una atenuación

$\omega_a \rightarrow$ frecuencia deseada en el punto de atenuación.

Diseño de filtros

Algunas consideraciones en el diseño de los filtros IIR (continuación)

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT
Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding
Propiedades
Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

- a) En caso de usar tablas de prototipos normalizados, hacer todos los cálculos con las frecuencias normalizadas, esto es, realizar la división $\frac{\omega_i}{\omega_c}$
- b) En caso de usar la *transformación bilineal* realizar todos los cálculos con las frecuencias

$$W_i = 2f_s \tan\left(\frac{\omega_i}{2}\right) \quad (24)$$

Nota. ω_i son todas las frecuencias de corte y atenuación involucradas en el diseño.

- c) Los prototipos más usados son **Butterworth**, **Chebyshev**, **Elíptico**. En el caso de requerir filtros con rizado, usar los prototipos de Chebyshev y Elíptico.

Diseño de filtros

Tipos de filtros: Pasa altas, pasa banda y rechaza banda

PDS

A. Osman

Génesis. La transformada Discreta de Fourier DFT

Algoritmos de cálculo de la DFT

Código de la DFT

Relación entre la DFT, la SFT y la DTFT

Zero-Padding

Propiedades

Carga computacional del cómputo directo de la DFT

Algoritmos FFT

Aplicaciones de la FFT

Sea $h[n]$ un filtro pasabajas,

a) Pasa altas:

$$h_{hp}[n] = \delta[n] - h[n] \iff H_{hp}[k] = 1 - H[k] \quad (25)$$

b) Pasa banda:

$$h_{bp}[n] = h[n] * h_{hp}[n] \iff H_{bp}[k] = H[k]H_{hp}[k] \quad (26)$$

c) Rechaza banda:

c.1)

$$h_{nb}[n] = h[n] + h_{hp}[n] \iff H_{nb}[k] = H[k] + H_{hp}[k] \quad (27)$$

c.2)

$$H_{nb}[k] = 1 - H_{bp}[k] \quad (28)$$