

**XXXI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS  
EMALCA-VENEZUELA 2018**

---

# **INTRODUCCIÓN A LA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES NO LINEALES**

**Carlos E. Cadenas R.**

**MÉRIDA, VENEZUELA, 2 al 7 de septiembre de 2018**

## XXXI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS

La Escuela Venezolana de Matemáticas es una actividad de los postgrados en matemáticas de: Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas, Universidad Central de Venezuela, Universidad de Los Andes, Universidad Simón Bolívar, Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Universidad de Carabobo, Universidad de Oriente y Universidad del Zulia; cuenta con el auspicio de la Asociación Matemática Venezolana (AMV) y la Unión Matemática de América Latina y el Caribe (UMALCA). La XXXI Escuela Venezolana de Matemáticas es también Escuela de Matemática de América Latina y el Caribe (EMALCA - Venezuela 2018); ha recibido financiamiento de: Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (Centro de Estudios Avanzados, Departamento de Matemáticas y Ediciones IVIC), Universidad de los Andes (CEP, CDCHT, Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Decanato de Ciencias y Vicerrectorado Administrativo), Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA) y Commission for Developing Countries - International Mathematical Union (CDC-IMU).

2010 Mathematics Subject Classification: 65L80, 65P40.

©Ediciones IVIC

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas

Rif: G-20004206-0

### **Introducción a la solución numérica de ecuaciones no lineales.**

Carlos E. Cadenas R.

Diseño y edición: Escuela Venezolana de Matemáticas

Depósito legal: DC2018001562

ISBN: 978-980-261-192-8

Caracas, Venezuela

2018

XXXI ESCUELA VENEZOLANA DE MATEMÁTICAS  
EMALCA - VENEZUELA 2018

---

INTRODUCCIÓN A LA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE  
ECUACIONES NO LINEALES.

Carlos E. Cadenas R.

Departamento de Matemáticas.  
Facultad de Ciencias y Tecnología.  
Universidad de Carabobo, Venezuela.

ccadenas@uc.edu.ve  
ccadenas45@gmail.com

---

MÉRIDA, 2 al 7 DE SEPTIEMBRE DE 2018



Dedicado a mis padres María Luisa y Carlos,  
a mis hermanas Luisa, Xiomara, Mervis, Zaramí y Yelitza,  
a Livia y a Noelia.



# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Objetivos Específicos . . . . .	1
1.2. Requisitos . . . . .	3
1.3. Recursos audiovisuales o computacionales para dictar el curso. . . . .	3
1.4. Limitaciones . . . . .	3
1.5. Evaluación . . . . .	3
<b>2. Introducción.</b>	<b>5</b>
2.1. Fundamentos teóricos . . . . .	5
2.1.1. Clasificación de los métodos iterativos . . . . .	5
2.1.2. Conceptos relacionados con la convergencia . . . . .	6
<b>3. Métodos y familias de un punto sin memoria y su cons- trucción geométrica</b>	<b>9</b>
3.1. Métodos clásicos . . . . .	9
3.1.1. Método de Newton . . . . .	9
3.1.2. Métodos de tercer orden . . . . .	10
3.2. Familias de métodos . . . . .	11
3.2.1. Teorema de Gander Extendido . . . . .	12
3.3. Construcción geométrica de la Clase de Gander . . . . .	13
3.4. Ejemplos de familias y métodos obtenidos a partir de la clase de Gander . . . . .	13
3.4.1. Familia de Hansen-Patrick [47] . . . . .	14
3.4.2. Familia del tipo Chebyshev-Halley [42] . . . . .	14

3.4.3.	Familia $\theta - C$ [4] . . . . .	15
3.4.4.	Una combinación de los métodos de Halley y Chebyshev . . . . .	16
3.4.5.	Una familia pentaparamétrica . . . . .	17
<b>4.</b>	<b>Métodos y familias de un punto para raíces múltiples y su construcción geométrica.</b>	<b>19</b>
4.1.	Métodos tipo Newton . . . . .	19
4.2.	Construcción geométrica del método de Newton modificado . . . . .	20
4.2.1.	Primera construcción geométrica . . . . .	20
4.2.2.	Segunda construcción geométrica . . . . .	21
4.3.	Construcciones geométricas del método de Newton para raíces múltiples . . . . .	21
4.3.1.	Primera construcción geométrica . . . . .	22
4.3.2.	Segunda construcción geométrica . . . . .	22
4.4.	Métodos de un punto para raíces múltiples con tercer orden de convergencia . . . . .	23
4.5.	Construcción geométrica de métodos de tercer orden para raíces múltiples . . . . .	24
4.6.	Ejemplos de familias y métodos obtenidos a partir de la clase de Traub-Gander . . . . .	25
4.6.1.	Familia de tipo Hansen-Patrick para raíces múltiples [47] . . . . .	25
4.6.2.	Familia tipo Chebyshev-Halley para raíces múltiples . . . . .	26
4.6.3.	Familia tipo $\theta$ -C para raíces múltiples . . . . .	27
4.6.4.	Una combinación convexa de los métodos de Halley y Chebyshev para raíces múltiples . . . . .	29
4.6.5.	Combinación convexa del método de Newton con un método del tipo Newton-Halley . . . . .	30
<b>5.</b>	<b>Métodos y familias de dos puntos sin memoria y su construcción geométrica.</b>	<b>33</b>
5.1.	Formas equivalentes a la clase de Chun . . . . .	33

5.2.	Ejemplos de familias y métodos de orden tres obtenidos a partir de las formas equivalentes a la clase de Chun . . .	35
5.2.1.	Método de Potra y Pták [71] . . . . .	36
5.2.2.	Método de Newton-Secante [67] . . . . .	36
5.2.3.	Familia tipo Chebyshev-Halley [19] . . . . .	36
5.2.4.	Método tipo Ostrowski [19] . . . . .	36
5.2.5.	Familia tipo Hansen-Patrick [19] . . . . .	36
5.2.6.	Familia tipo $\theta - C$ [19] . . . . .	37
5.2.7.	Familia tipo combinación convexa de los métodos de Halley y Chebyshev [19] . . . . .	37
5.3.	Ejemplos de familias y métodos de orden cuatro obtenidos a partir de las formas equivalentes a la clase de Chun . . .	37
5.3.1.	Método de Ostrowski [65] . . . . .	38
5.3.2.	Familia de King [55] . . . . .	38
5.3.3.	Familia tipo $\theta$ [19] . . . . .	38
5.3.4.	Otros métodos de dos punto y orden cuatro con $K(\alpha) = -A_3A_2$ . . . . .	39
5.4.	Construcciones geométricas de la clase de Chun . . . . .	39
5.5.	Una clase de dos puntos del tipo Jarratt-Gander con cuarto orden de convergencia . . . . .	40
5.6.	Ejemplos de familias y métodos de dos puntos con cuarto orden . . . . .	42
5.6.1.	Familia de Jarratt . . . . .	42
5.6.2.	Cuarto método de Jarratt (JM4): . . . . .	43
5.6.3.	Método de dos puntos de tipo Euler-Jarratt [20] . . . . .	43
5.6.4.	Familia tipo King-Jarratt [20] . . . . .	43
5.6.5.	Familia tipo Behl-Kanwar [20] . . . . .	44
5.7.	Construcciones Geométricas de la clase de tipo Jarratt-Gander . . . . .	44
<b>6.</b>	<b>Métodos optimales de dos puntos para raíces múltiples</b>	<b>47</b>
6.1.	Método de de Li . . . . .	47
6.2.	Método modificado de Jarrat . . . . .	48
6.3.	Método de Li, Cheng y Neta . . . . .	48

6.4.	Método de Liu y Zhou . . . . .	49
6.5.	Clase de Singh y Jaiswal . . . . .	49
6.6.	Otras clases de dos puntos con cuarto orden de convergencia	51
<b>7.</b>	<b>Métodos optimales de tres puntos.</b>	<b>53</b>
7.1.	Un método de Kung y Traub . . . . .	53
7.2.	Una familia triparamétrica . . . . .	54
7.3.	Clase de Chun y Lee de orden ocho . . . . .	54
7.4.	Clase de Thukral y Petković . . . . .	55
7.5.	Otros métodos muy utilizados . . . . .	55
7.6.	Una clase de tres puntos de Tipo Gander Optimal . . . . .	57
7.6.1.	Primer Caso . . . . .	58
7.6.2.	Segundo Caso . . . . .	58
7.7.	Dos ejemplos pertenecientes a esta clase . . . . .	61
<b>8.</b>	<b>Métodos de tres puntos para raíces múltiples</b>	<b>65</b>
8.1.	Clase de Thukral . . . . .	65
8.2.	Clase de Behl, Alshomrani and Motsa . . . . .	66
<b>9.</b>	<b>Dinámica de métodos iterativos para raíces simples</b>	<b>67</b>
9.1.	Generalidades y conceptos básicos de dinámica compleja .	68
9.2.	Cuencas de atracción . . . . .	69
9.2.1.	Familia Newton-Chebyshev . . . . .	70
9.2.2.	Familia Newton - Halley . . . . .	71
9.3.	Dinámica compleja de métodos iterativos para la clase de polinomios de grado dos . . . . .	72
9.3.1.	Dinámica del método de Newton . . . . .	73
9.3.2.	Dinámica del método de Halley . . . . .	73
9.3.3.	Dinámica del método de Super Halley . . . . .	73
9.3.4.	Dinámica de la familia de tipo Newton-Chebyshev	73
9.3.5.	Dinámica de la familia de tipo Newton-Halley . .	75
<b>10.</b>	<b>Dinámica de métodos iterativos para raíces múltiples</b>	<b>77</b>
10.1.	Cuencas de atracción para el Método de Newton Modificado	77

10.2. Dinámica compleja del Método de Newton Modificado para la clase de polinomios con dos raíces múltiples . . . . .	79
--	----



# Capítulo 1

## Preliminares

Muchas de las ecuaciones que surgen al ser aplicadas las leyes físicas o de la utilización de métodos de discretización a modelos matemáticos son no lineales; en general para este tipo de ecuaciones no se puede encontrar una expresión explícita para su solución. Por ello es necesario cierto conocimiento de las herramientas básicas para su resolución aproximada, las cuales no son más que algoritmos numéricos convergentes, estables y precisos de un punto y multipuntos, con y sin memoria. En este curso se presentará la teoría y desarrollos recientes en el área, incluyendo la construcción e interpretación geométrica de los métodos, familias y clases de métodos de uno y varios puntos. El participante aplicará las técnicas de creación de algoritmos para resolver ecuaciones no lineales, desarrollando la teoría relacionada con la convergencia y dinámica de los métodos presentados a problemas matemáticos específicos.

### 1.1. Objetivos Específicos

Al finalizar este breve curso el participante debe:

- Conocer los conceptos básicos relacionados con la solución numérica de ecuaciones no lineales.
- Conocer los conceptos básicos relacionados con la dinámica compleja de métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales.

- Identificar los métodos iterativos básicos y su orden de convergencia.
- Calcular el orden de convergencia de un método iterativo para resolver ecuaciones no lineales.
- Conocer y aplicar estrategias para adaptar métodos para raíces simples a raíces múltiples.
- Identificar los diversos criterios de parada en la resolución de ecuaciones no lineales.
- Resolver problemas aplicados que utilicen algoritmos de resolución de ecuaciones no lineales.
- Identificar la cuenca de atracción como un elemento de comparación entre métodos iterativos.
- Identificar las familias de métodos básicos de tercer orden, estableciendo sus propiedades fundamentales.
- Construir diversas familias de métodos de un punto de tercer orden para la resolución de ecuaciones no lineales.
- Diferenciar entre métodos optimales y no optimales, de dos puntos y de tres puntos.
- Construir diversas familias de métodos optimales y no optimales.
- Conocer el estado del arte en la resolución de ecuaciones no lineales con raíces múltiples.
- Construir diversas familias de métodos optimales para raíces múltiples.
- Describir diversas construcciones geométricas para métodos de un punto y dos puntos, tanto para raíces simples como múltiples.
- Identificar los métodos multipuntos básicos con memoria.

- Construir métodos multipuntos con memoria.
- Adaptar los métodos de resolver ecuaciones no lineales a sistemas de ecuaciones no lineales.

## 1.2. Requisitos

Es recomendable un curso básico de análisis o métodos numéricos. De todas maneras en virtud de la características de los participantes se intentará que sea autocontenido.

## 1.3. Recursos audiovisuales o computacionales para dictar el curso.

Video Beam y una computadora personal. Se necesita de una Sala de Computación, donde los equipos deben tener instalado los programas Maple y/o MatLab (esto puede ser modificado).

## 1.4. Limitaciones

En las tardes se realizarán prácticas en el laboratorio (Sala de Computación). Como máximo dos estudiante por computadora personal. Por ello, en principio, la cantidad de estudiantes depende de estos recursos. Esta condición puede ser suavizada de acuerdo a la disponibilidad de recursos.

## 1.5. Evaluación

La evaluación estará dividida en dos partes: 1.- Presencial: evaluación continua tomando en cuenta las actividades realizadas en las prácticas de laboratorio (al menos tres evaluaciones). 2.- Asignaciones de ejercicios y/o problemas para entregar el día viernes en la mañana. La ponderación será de 60 % la primera parte y 40 % la segunda.



# Capítulo 2

## Introducción.

Este capítulo presenta una clasificación de métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales y algunos conceptos relacionados con la convergencia.

### 2.1. Fundamentos teóricos

El fundamento teórico que se presenta en esta sección se basa en los libros de Traub [79] y Petković et al [67] así como en la tesis doctoral de Artidiello [6] y diversos artículos los cuales se irán citando donde corresponda.

#### 2.1.1. Clasificación de los métodos iterativos

A continuación se presenta una clasificación de diferentes métodos iterativos utilizados para resolver ecuaciones no lineales basándose en la cantidad de puntos a utilizar en cada iteración. Dicha clasificación se basa en el libro de Traub [79] y en el libro de Petković et al [67].

Sea  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ; donde  $x_k$  es una aproximación a un cero simple  $\alpha$  de  $f$ ,  $x_{k+1}$  es la siguiente aproximación y  $\Phi$  es una función suficientemente continua. Esta ecuación de iteración define los métodos iterativos más sencillos con sólo una aproximación previa  $x_k$  requerida en la siguiente iteración. Tal esquema iterativo es llamado **Método**

### Iterativo de Un Punto sin Memoria.

Sean los números reales  $x_{k-n}, \dots, x_{k-1}, x_k$  aproximaciones de  $\alpha$ , se define la ecuación de iteración  $x_{k+1} = \Phi(x_k; x_{k-1}, \dots, x_{k-n})$ , donde  $\Phi$  es llamada Función de Iteración de un Punto con Memoria, donde la aproximación  $x_{k+1}$  es determinada por  $\Phi$  sobre la base de las  $n + 1$  aproximaciones previas. Se destaca el hecho de que sólo  $x_k$  es una nueva información, mientras  $x_{k-n}, \dots, x_{k-1}$  es información reutilizada, lo cual es indicado por el punto y coma. Tal esquema iterativo es llamado **Método Iterativo de un Punto con Memoria**.

$\Phi$  definida como  $x_{k+1} = \Phi(x_k, w_1(x_k), \dots, w_n(x_k))$  es llamada la función de iteración de los **Método Multipunto sin Memoria**, donde  $x_k$  es el argumento común y la nueva aproximación es obtenida por el uso de la aproximación previa  $x_k$ , pero a través de  $n$  expresiones  $w_i$ .

En el caso de los **Métodos Multipunto con Memoria** la ecuación de iteración se puede representar de la forma general

$$x_{k+1} = \Phi(z_k; z_{k-1}, \dots, z_{k-n}),$$

donde los argumentos  $z_j, j = k - n, \dots, k$  representados por  $n + 1$  cantidades  $x_j, w_1(x_j), \dots, w_n(x_j); j = k - n, \dots, k$  y  $n \geq 1$ . En este caso  $\Phi$  es llamada Función de Iteración Multipunto con Memoria. Se puede observar que en cada iteración se debe preservar la información de las últimas  $n$  aproximaciones  $x_j, j = k - n, \dots, k - 1$ , y para cada aproximación se debe calcular  $n$  expresiones  $w_1(x_j), \dots, w_n(x_j)$ , para  $j = k - n, \dots, k - 1$ .

### 2.1.2. Conceptos relacionados con la convergencia

A continuación se señalan los conceptos de orden de convergencia, la constante asintótica del error, el índice de eficiencia, eficiencia informacional y la conjetura de Kung-Traub.

Sea  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de iteración dada por los procesos iterativos presentados con anterioridad. Si existe un número real  $r$  y una constante mayor que cero  $K$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\Phi_n - \alpha|}{|x_n - \alpha|^r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^r} = K \quad (2.1)$$

donde  $r$  es llamado el orden de convergencia y  $K$  es la constante asintótica del error. No es necesario que  $r$  exista, y cuando sucede, no necesariamente es un entero.

En 1960 Ostrowski [65] introdujo la definición de Índice de Eficiencia y en 1964 Traub [79] presenta el concepto de Eficiencia Informacional, las cuales se dan a continuación:

Sea  $r$  el orden de convergencia y  $d$  el número de evaluaciones funcionales que requiere un método por iteración se define el **Índice de Eficiencia** como

$$E = r^{1/d}$$

y la **Eficiencia Informacional** al cociente

$$EI = \frac{r}{d}.$$

La **conjetura de Kung-Traub** [58] establece que los métodos iterativos multipuntos sin memoria que utilizan  $n + 1$  evaluaciones funcionales por iteración, tienen a lo sumo orden de convergencia  $2^n$ .



## Capítulo 3

# Métodos y familias de un punto sin memoria y su construcción geométrica

En este capítulo se presentan los métodos clásicos de Newton, Chebyshev, Halley y Super-Halley, entre otros. Luego se presentan algunas familias de métodos las cuales pueden ser obtenidas junto con el término de error desde el teorema de Gander extendido. Después de esto, se da la construcción geométrica para dicha clase de métodos, así como algunos ejemplos.

### 3.1. Métodos clásicos

#### 3.1.1. Método de Newton

El método de Newton o de Newton-Raphson [73], que se utiliza en la actualidad es el resultado de la investigación de muchos años y de varios matemáticos como Joseph-Louis Lagrange, Jean Baptiste Joseph Fourier, Augustin Louis Cauchy, E. Schröder, A. Cayley, además de los que se le atribuye su nombre, entre otros. Éste es un método de segundo orden óptimal (según la Conjetura de Kung-Traub), su índice de eficiencia es de  $\sqrt{2} = 1,414 \dots$  y su eficiencia informacional es de uno.

Si  $f$  es continuamente diferenciable en una vecindad de un cero  $\alpha$ , el método de Newton puede ser obtenido a partir de la línea recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en un punto  $P(x_n, f(x_n))$  de la misma. Así, si se reemplaza en la ecuación

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) \quad (3.1)$$

$x$  por  $x_{n+1}$  y  $y$  por 0 la ecuación de iteración del método de Newton es obtenida:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad \text{dado } x_0 \quad (3.2)$$

Esta ecuación de iteración también puede ser obtenida a partir del uso de la expansión de Taylor.

### 3.1.2. Métodos de tercer orden

García [40] hace una revisión de las fuentes históricas donde aparece el método de Chebyshev por primera vez y además Gutiérrez [44] hace un estudio de dicho método para el cálculo de las raíces de ecuaciones no lineales; el método de Chebyshev está dado por la siguiente ecuación de iteración:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 + \frac{1}{2} L_f(x_n) \right); \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad \text{dado } x_0 \quad (3.3)$$

donde  $L_f(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$  es denominada la función de convexidad logarítmica, vea [48].

La ecuación de iteración del método propuesto por Halley [46] viene dada por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{1}{1 - \frac{1}{2} L_f(x_n)}; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad \text{dado } x_0 \quad (3.4)$$

Para el método de Super Halley [48] se tiene

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{2 - L_f(x_n)}{2(1 - L_f(x_n))}; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad \text{dado } x_0 \quad (3.5)$$

y para el método de Ostrowski [65]

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{1}{\sqrt{1 - L_f(x_n)}}; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad \text{dado } x_0 \quad (3.6)$$

### 3.2. Familias de métodos

Cadenas [13] presenta una familia uniparamétrica tipo Newton-Chebyshev para hallar raíces simples de la ecuación  $f(x) = 0$ , así como el estudio de su dinámica para polinomios de grado dos. Dicha familia está dada por la función de iteración:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} (1 + AL_f(x_n)); \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad \text{dado } x_0 \quad (3.7)$$

Esta familia es de orden dos excepto para el caso  $A = \frac{1}{2}$ , obteniéndose así el método de Chebyshev, que es de orden tres.

Cadenas [14] también presenta una familia uniparamétrica tipo Newton-Halley para hallar raíces simples de la ecuación  $f(x) = 0$ , así como el estudio de su dinámica para polinomios de grado dos. Dicha familia está dada por la función de iteración:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{1}{1 - AL_f(x_n)}; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad \text{dado } x_0 \quad (3.8)$$

esta familia es de orden dos excepto para el caso  $A = \frac{1}{2}$ , obteniéndose así el método de Halley, que es de orden tres.

Cordero, Torregrosa y Vindel [35] presentan la dinámica de la familia Chebyshev-Halley para polinomios cuadráticos. La ecuación de iteración de esta familia está dada por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 + \frac{L_f(x_n)}{2(1 - AL_f(x_n))} \right); \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

dado  $x_0$ .

Hansen y Patrick [47] presentan una familia uniparamétrica de funciones de iteración para encontrar raíces de ecuaciones no lineales. Su ecuación de iteración viene dada por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( \frac{1+a}{a + \sqrt{1 - (1+a)L_f(x_n)}} \right)$$

Amat, et al [2] presentan la familia  $(\alpha, c)$  y Campos, et al [27] hacen el estudio inicial de la dinámica el cual es continuado por Campos, et al [28]. Dicha familia está dada por la ecuación de iteración:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 + \frac{L_f(x_n)}{2(1 - \alpha L_f(x_n))} + C (L_f(x_n))^2 \right)$$

si  $C = 0$  y  $\alpha = 1$ , se obtiene el método de Super-Halley.

### 3.2.1. Teorema de Gander Extendido

En 1985 W. Gander [39] presenta un teorema que permite generar métodos de un punto sin memoria para resolver ecuaciones no lineales con raíces simples basado en una función de peso  $H$ , dando las condiciones sobre ella para que la clase de métodos sea de tercer orden. Luego A. Cordero, C. Jordan, J. R. Torregrosa [36] así como C. Cadenas [12] de manera independiente dan una expresión explícita para la constante asintótica del error, pudiendo ser escrito dicho teorema en forma extendida de la siguiente manera:

**Teorema 3.2.1.** *Sea  $\alpha$  una raíz simple de  $f$  y  $H$  cualquier función con  $H(0) = 1$ ,  $\dot{H}(0) = \frac{1}{2}$  y  $|\ddot{H}(0)| < \infty$ . La iteración dada por*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} H(L_f(x_n)) \tag{3.10}$$

donde  $L_f(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$ , es de orden tres y el error viene dado por

$$e_{n+1} = \left( \frac{(1 - \ddot{H}(0))}{2} \left( \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right)^2 - \frac{1}{6} \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right) e_n^3 + O(e_n^4)$$

### 3.3. Construcción geométrica de la Clase de Gander

La construcción geométrica de algunos métodos o familias de métodos de tercer orden pueden ser encontradas en [53], [63] y [78].

Usando las ideas de Amat, Busquier y Gutiérrez [1], Cadenas en [12] reemplazó  $f(x_n)$  por  $f(x_n) - y$  en la ecuación de iteración  $x_{n+1} = G(x_n)$  para obtener el siguiente resultado:

**Teorema 3.3.1.** *Sea  $\alpha$  un cero simple de  $f$  y  $H$  cualquier función con  $H(0) = 1$ ,  $\dot{H}(0) = \frac{1}{2}$  y  $|\ddot{H}(0)| < \infty$ . La iteración dada por  $x_{n+1} = G(x_n)$ , con  $G(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}H(L_f(x))$  donde  $L_f(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$ , puede ser construida desde la curva que tiene por ecuación*

$$x = x_n + \frac{y - f(x_n)}{f'(x_n)} H \left( \frac{(f(x_n) - y) f''(x_n)}{(f'(x_n))^2} \right) \quad (3.11)$$

la cual cumple con las siguientes tres condiciones de tangencia

1.  $y(x_n) = f(x_n)$
2.  $y'(x_n) = f'(x_n)$
3.  $y''(x_n) = f''(x_n)$

*Demostración.* Vea [12] □

### 3.4. Ejemplos de familias y métodos obtenidos a partir de la clase de Gander

En esta sección se presentan sólo algunas de las funciones de peso  $H$  que satisfacen las condiciones del teorema de Gander, lo cual permite obtener las curvas dadas por la estructura (4.11) desde las cuales se pueden obtener las iteraciones de los métodos de tercer orden mencionados.

### 3.4.1. Familia de Hansen-Patrick [47]

Al utilizar el teorema de Gander con la función de peso  $H$  dada por

$$H(t) = \frac{a+1}{a + \sqrt{1 - (a+1)t}} \quad (a \neq -1)$$

se obtiene la ecuación de iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{(a+1)}{(a + \sqrt{1 - (a+1)L_f(x_n)})} \quad (3.12)$$

la cual puede ser construida desde la curva

$$x = x_n + \frac{y - f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{(a+1)}{\left(a + \sqrt{1 - (a+1)\frac{(f(x_n)-y)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2}}\right)}$$

que cumple las condiciones de tangencia dadas en el **teorema 3.3.1**. Utilizando el teorema de Gander extendido se puede obtener la constante asintótica del error.

$$K(\alpha) = \frac{(1-a)}{8} \left[ \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right]^2 - \frac{1}{6} \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Esta familia de métodos iterativos de tercer orden incluye, como casos particulares, los siguientes métodos

- Cuando  $a = 0$ , se obtiene el método de Ostrowski [65].
- Si se utiliza  $a = 1$ , se obtiene el método de Euler [79].
- En el caso de que  $a \rightarrow \pm\infty$ , se puede obtener el método de Newton (3.2).

### 3.4.2. Familia del tipo Chebyshev-Halley [42]

La ecuación de iteración de la familia Chebyshev-Halley

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 + \frac{L_f(x_n)}{2(1 - \alpha L_f(x_n))} \right) \quad (3.13)$$

puede ser obtenida por medio de la función de peso  $H$  dada por

$$H(t) = 1 + \frac{t}{2(1 - \alpha t)}$$

y puede ser construida a partir de la curva

$$x = x_n + \frac{y - f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 + \frac{\frac{(f(x_n) - y)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2}}{2 \left( 1 - \alpha \frac{(f(x_n) - y)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2} \right)} \right)$$

que cumple las condiciones de tangencia dadas en el **teorema 3.3.1**. Para esta familia la constante asintótica del error viene dada por

$$K(\alpha) = \frac{(1 - \alpha)}{2} \left[ \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right]^2 - \frac{1}{6} \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

La familia Chebyshev-Halley incluye, como casos particulares, los siguientes métodos

- Cuando  $\alpha = 0$ , se obtiene el método de Chebyshev dado por la ecuación (3.3).
- El método de Halley (3.4) es obtenido si  $\alpha = \frac{1}{2}$  [46].
- Cuando se utiliza  $\alpha = 1$  se obtiene el método de Super-Halley (3.5), vea [48].
- Si  $\alpha \rightarrow \pm\infty$  se obtiene el método de Newton (3.2).

### 3.4.3. Familia $\theta - C$ [4]

Sea la función de peso dada por  $H(t) = 1 + \frac{t}{2(1 - \theta t)} + Ct^2$ . Si se considera la curva

$$x = x_n + \frac{y - f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 + \frac{\frac{(f(x_n) - y)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2}}{2 \left( 1 - \theta \frac{(f(x_n) - y)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2} \right)} + C \left( \frac{(f(x_n) - y)f''(x_n)}{(f'(x_n))^2} \right)^2 \right),$$

entonces por el **teorema 3.3.1** las condiciones de tangencia se satisfacen. Así la ecuación de iteración de la familia  $\theta - C$  viene dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{L_f(x_n)}{(1 - \theta L_f(x_n))} + CL_f(x_n)^2 \right) \quad (3.14)$$

y

$$K(\alpha) = \frac{(1 - \theta - 2C)}{2} \left[ \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right]^2 - \frac{1}{6} \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

Esta familia de métodos de tercer orden incluye a las siguientes familias

- Cuando  $(\theta = 0)$ , se obtiene la familia  $C$  [38] que tiene por ecuación de iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 + \frac{1}{2} L_f(x_n) + CL_f(x_n)^2 \right) \quad (3.15)$$

- Cuando  $(C = 0)$  se obtiene la familia Chebyshev-Halley (4.16).
- Cuando  $C = \frac{1-\theta}{2}$  la siguiente familia es obtenida

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{L_f(x_n)}{(1 - \theta L_f(x_n))} + \frac{(1 - \theta)}{2} L_f(x_n)^2 \right)$$

### 3.4.4. Una combinación de los métodos de Halley y Chebyshev

Usando una combinación convexa de las funciones de peso que permiten obtener los métodos (3.3) y (3.4) se obtiene la siguiente función de peso

$$H(t) = \frac{A}{(1 - \frac{1}{2}t)} + (1 - A) \left( 1 + \frac{1}{2}t \right)$$

Ahora, si se considera dicha función de peso para obtener la curva

$$x = x_n + \frac{y - f(x_n)}{f'(x_n)} \left( \frac{A}{\left( 1 - \frac{1}{2} \frac{(f(x_n) - y) f''(x_n)}{(f'(x_n))^2} \right)} + (1 - A) \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{(f(x_n) - y) f''(x_n)}{(f'(x_n))^2} \right) \right),$$

entonces por el **teorema 3.3.1** se satisfacen las condiciones de tangencia. Así, la ecuación de iteración es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( \frac{A}{\left(1 - \frac{1}{2}L_f(x_n)\right)} + (1 - A) \left(1 + \frac{1}{2}L_f(x_n)\right) \right) \quad (3.16)$$

$$\text{y} \quad K(\alpha) = \frac{(2 - A)}{4} \left[ \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right]^2 - \frac{1}{6} \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

Si  $A = 0$ , se obtiene el método de Chebyshev (3.3). Si  $A = 1$ , se obtiene el método de Halley (3.4). Cuando  $A = 2$  en (3.16) se tiene el siguiente método

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( \frac{2}{1 - \frac{1}{2}L_f(x_n)} - 1 - \frac{1}{2}L_f(x_n) \right) \quad (3.17)$$

con

$$K(\alpha) = -\frac{1}{6} \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)} \quad (3.18)$$

### 3.4.5. Una familia pentaparamétrica

Sea  $H$  la función de peso que depende de cinco parámetros

$$H(t) = \frac{4 + 2(A + 1)t + Dt^2 + Et^3}{4 + 2At + Bt^2 + Ct^3} \Rightarrow \ddot{H}(0) = \frac{D - A - B}{2}.$$

Si consideramos la curva que tiene por ecuación

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{4 + 2(A + 1)r + Dr^2 + Er^3}{4 + 2Ar + Br^2 + Cr^3}$$

donde

$$r = \frac{(f(x_n) - y) f''(x_n)}{(f'(x_n))^2},$$

entonces por el **teorema 3.3.1** se satisfacen las condiciones de tangencia. Así, la ecuación de iteración es

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= \\
 x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{4 + 2(A+1)L_f(x_n) + DL_f(x_n)^2 + EL_f(x_n)^3}{4 + 2AL_f(x_n) + BL_f(x_n)^2 + CL_f(x_n)^3} & \quad (3.19) \\
 \text{y} \quad K(\alpha) &= \frac{2 + A + B - D}{4} \left[ \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right]^2 - \frac{1}{6} \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Si se utiliza  $D = 2 + A + B$ , entonces  $\ddot{H}(0) = 1$  y así se obtiene la siguiente familia de métodos

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= \\
 x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{4 + 2(A+1)L_f(x_n) + (2 + A + B)L_f(x_n)^2 + EL_f(x_n)^3}{4 + 2AL_f(x_n) + BL_f(x_n)^2 + CL_f(x_n)^3} & \\
 \text{con} \quad K(\alpha) &= -\frac{1}{6} \frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)}.
 \end{aligned}$$

Con la excepción de la familia Hansen-Patrick's (3.12) las otras familias y/o métodos presentados en esta sección pueden ser obtenidos desde (3.19).

## Capítulo 4

# Métodos y familias de un punto para raíces múltiples y su construcción geométrica.

### 4.1. Métodos tipo Newton

Es bien sabido que al utilizar el método de Newton para calcular raíces múltiples de ecuaciones no lineales, el orden de convergencia se degrada de cuadrático a lineal. Para evitar ese problema Schröder genera dos métodos a los cuales se les denomina método de Newton modificado y método de Newton para raíces múltiples. En esta sección se presentan los fundamentos básicos de las ideas utilizadas por él para obtener dichos métodos, no sin antes dar una de las definiciones de raíz múltiple de una ecuación no lineal que se utiliza con mucha frecuencia.

Un valor  $\alpha$  es una **raíz de  $f$  con multiplicidad  $m > 0$**  si

$$f(x) = (x - \alpha)^m g(x), \text{ donde } \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) \neq 0.$$

Si  $m = 1$ , se dice que  $\alpha$  es una raíz simple de  $f$ .

Schröder en [75] utiliza las siguientes funciones  $F_1(x) = \sqrt[m]{f(x)}$  y  $F_2(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$  para generar dos métodos tipo Newton. Se puede observar fácilmente que si  $\alpha$  es una raíz de  $f$  con multiplicidad  $m$ , entonces  $\alpha$  es una raíz simple tanto de  $F_1(x)$  como de  $F_2(x)$ .

Cuando se aplica el método de Newton a la función  $F_1$ , se obtiene el siguiente método

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \text{ con } x_0 \text{ dado}, \quad (4.1)$$

el cual es denominado método de Newton modificado. Obsérvese que este método depende de la multiplicidad de la raíz. Por ello para poder aplicarlo esta debe ser conocida o estimada a priori.

De manera similar si se aplica el método de Newton a la función  $F_2$ , se obtiene el método de Newton para raíces múltiples, el cual viene dado por la ecuación de iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{1}{(1 - L_f(x_n))}; \text{ con } x_0 \text{ dado}, \quad (4.2)$$

donde  $L_f(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$ , la cual ya se ha mencionado varias veces con anterioridad. En ambos métodos se recupera el segundo orden de convergencia que se había perdido en el método de Newton cuando se utiliza para aproximar raíces con multiplicidad mayor que uno.

## 4.2. Construcción geométrica del método de Newton modificado

En esta sección se presentan las dos construcciones geométricas del método de Newton modificado dadas por Cadenas en [16].

### 4.2.1. Primera construcción geométrica

Se puede observar que al sustituir  $x$  por  $x_{n+1}$  y  $y$  por 0 en la ecuación de la recta

$$y - f(x_n) = \frac{f'(x_n)}{m}(x - x_n), \quad (4.3)$$

se obtiene la ecuación de iteración del método de Newton modificado. Por ello se puede presentar el siguiente resultado:

**Teorema 4.2.1.** *Sea  $f : \mathfrak{D} \subset \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{D}$  suficientemente diferenciable en el intervalo abierto  $\mathfrak{D}$  y  $\alpha$  una raíz múltiple de  $f$  con multiplicidad  $m$ . Entonces la iteración (4.1) puede ser construida desde la recta definida por la ecuación (4.3) la cual cumple las siguientes condiciones:  $y(x_n) = f(x_n)$  y  $y'(x_n) = \frac{f'(x_n)}{m}$ .*

*Demostración.* Véase [16]. □

De esta manera la línea recta (4.3) es secante a la curva  $y = f(x)$  y su pendiente es la  $m$ -ésima parte de la pendiente de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $P(x_n, f(x_n))$ .

#### 4.2.2. Segunda construcción geométrica

La segunda construcción geométrica que presentamos para el método de Newton modificado es dada por el siguiente resultado del autor en [16].

**Teorema 4.2.2.** *Sea  $\alpha$  una raíz múltiple de  $f$  con multiplicidad  $m$ . Entonces la iteración (4.1) puede ser obtenida desde la curva*

$$y = f(x_n) \left( 1 + \frac{f'(x_n)(x - x_n)}{mf(x_n)} \right)^m \quad (4.4)$$

*que cumple con las condiciones de tangencia*

$$y(x_n) = f(x_n) \text{ y } y'(x_n) = f'(x_n).$$

Se destaca el hecho de que si  $m \in \mathbb{N}$  entonces (5.17) representa la ecuación de un polinomio de grado  $m$  tangente a la curva en el punto  $P(x_n, f(x_n))$ .

### 4.3. Construcciones geométricas del método de Newton para raíces múltiples

En esta sección se presentan las dos construcciones geométricas del método de Newton para raíces múltiples (4.2), dadas por Cadenas en [16].

### 4.3.1. Primera construcción geométrica

La ecuación de iteración (4.2) puede ser obtenida desde la línea recta dada por la ecuación

$$y = f(x_n) + f'(x_n)[1 - L_f(x_n)](x - x_n) \quad (4.5)$$

La pendiente de esta línea es  $1 - L_f(x_n)$  veces la pendiente de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto cuya abscisa es  $x_n$ . De esta forma se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 4.3.1.** *Sea  $f : \mathfrak{D} \subset \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{D}$  suficientemente diferenciable en un intervalo abierto  $\mathfrak{D}$  y  $\alpha$  una raíz múltiple de  $f$  con multiplicidad  $m$ . Entonces la iteración (4.2) puede ser obtenida desde la curva que tiene por ecuación (4.5) y cumple con las siguientes dos condiciones:  $y(x_n) = f(x_n)$  y  $y'(x_n) = f'(x_n)[1 - L_f(x_n)]$ .*

*Demostración.* Véase [16]. □

### 4.3.2. Segunda construcción geométrica

La segunda construcción geométrica que presentamos para el método de Newton para raíces múltiples es dada por el siguiente resultado del autor en [16].

**Teorema 4.3.2.** *Sea  $f : \mathfrak{D} \subset \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{D}$  suficientemente diferenciable en un intervalo abierto  $\mathfrak{D}$  y  $\alpha$  una raíz múltiple de  $f$  con multiplicidad  $m$ . Entonces la ecuación de iteración (4.2) puede ser obtenida desde la curva definida por la ecuación*

$$y = f(x_n) + \frac{[f'(x_n)]^2(x - x_n)}{f'(x_n) - f''(x_n)(x - x_n)} \quad (4.6)$$

*la cual satisface las siguientes condiciones*

$$y(x_n) = f(x_n), y'(x_n) = f'(x_n) \text{ y } y''(x_n) = 2f''(x_n).$$

#### 4.4. Métodos de un punto para raíces múltiples con tercer orden de convergencia

En esta sección se presentan dos clases de métodos de un punto para resolver ecuaciones no lineales con raíces múltiples cuando la multiplicidad es conocida y que tienen tercer orden de convergencia. La primera desarrollada en 2014 por Rjni Sharma y Ashu Bahl en [74] y la segunda desarrollada en 2017 por Petković and Herceg en [68].

De la construcción de la primera clase los autores mencionados presentan el siguiente resultado

**Teorema 4.4.1.** *Sea  $\alpha \in I$  una raíz con multiplicidad  $m$  para  $f : I \rightarrow \mathbf{R}$  suficientemente diferenciable sobre un intervalo abierto  $I$ . Si  $x_0$  está suficientemente cercano a  $\alpha$ , entonces el método iterativo definido por*

$$x_{k+1} = x_k - H \left( \frac{f(x_k)f''(x_k)}{[f'(x_k)]^2} \right) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (4.7)$$

tiene orden de convergencia tres, donde  $H \in C^2(\mathbf{R})$ , con

$$H(u) = m, H'(u) = \frac{m^2}{2}, |H''(u)| < \infty, u = \frac{m-1}{m} \quad y$$

$$e_{k+1} = \left[ \frac{m^4 + 3m^3 - 4H''(u)}{2m^5} A_1^2 - \frac{A_2}{m} \right] e_k^3 + O(e_k^4), \quad (4.8)$$

donde  $e_k = x_k - \alpha$  y  $A_i = \frac{m!f^{(m+i)}(\alpha)}{(m+i)f^{(m)}(\alpha)}$  para  $i \in \mathbf{N}$ .

A la segunda clase que presentamos los autores la denominan clase de Traub-Gander. Esta clase se basa en funciones de peso que satisfacen las condiciones del teorema de Gander (para raíces simples). El resultado de convergencia para la clase de Traub-Gander se puede resumir en el siguiente resultado.

**Teorema 4.4.2.** *Si  $H(0) = 1$ ,  $\dot{H}(0) = \frac{1}{2}$  y  $|\ddot{H}(0)| < \infty$ , entonces*

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} H(1 - m + mL_f(x_n)), \quad (4.9)$$

con  $L_f(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$ , es de tercer orden y el error viene dado por

$$e_{n+1} = K(\alpha)e_n^3 + O(e_n^4),$$

donde la constante asintótica del error  $K(\alpha)$  es dada por

$$K(\alpha) = \frac{1}{2m^2} \left[ (m+3 - 4\ddot{H}(0)) A_1^2 - 2mA_2 \right], \quad (4.10)$$

$$A_k = \frac{m!}{(m+k)!} \frac{f^{(m+k)}(\alpha)}{f^{(m)}(\alpha)}, k = 1, 2 \text{ y } \alpha \text{ es raíz de } f \text{ con multiplicidad } m.$$

## 4.5. Construcción geométrica de métodos de tercer orden para raíces múltiples

En esta sección se presenta una construcción geométrica de métodos de tercer orden para resolver ecuaciones no lineales con raíces múltiples cuando la multiplicidad es conocida y que están basados en la clase de Traub-Gander. Esta construcción geométrica es dada por Cadenas en [17] y se resume en el siguiente resultado:

**Teorema 4.5.1.** *Sea  $\alpha$  una raíz múltiple de  $f$  con multiplicidad  $m$  y  $H$  cualquier función que satisface las condiciones  $H(0) = 1$ ,  $\dot{H}(0) = \frac{1}{2}$  y  $|\ddot{H}(0)| < \infty$ . La iteración dada por  $x_{n+1} = G(x_n)$ , con*

$$G(x) = x - m \frac{f(x)}{f'(x)} H(1 - m + mL_f(x))$$

donde  $L_f(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$ , puede ser obtenida desde la curva que tiene por ecuación

$$x = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 - \sqrt[m]{\frac{y(x)}{f(x_n)}} \right) \times \\ H \left( (1 - m + mL_f(x_n)) \left( 1 - \sqrt[m]{\frac{y(x)}{f(x_n)}} \right) \right) \quad (4.11)$$

y que cumple las condiciones de osculancia

1.  $y(x_n) = f(x_n)$
2.  $y'(x_n) = f'(x_n)$
3.  $y''(x_n) = f''(x_n)$

*Demostración.* Véase [17]. □

Si  $m = 1$ , el caso de raíces simples, basado en el teorema de Gander, coincide con el dado en [12].

## 4.6. Ejemplos de familias y métodos obtenidos a partir de la clase de Traub-Gander

En [17], Cadenas presenta algunas familias y/o métodos que pertenecen a la clase de Traub-Gander. Algunos de ellos se presentan en esta sección.

### 4.6.1. Familia de tipo Hansen-Patrick para raíces múltiples [47]

Sea la función de peso  $H$  dada por

$$H(t) = \frac{a + 1}{a + \sqrt{1 - (a + 1)t}} \quad (a \neq -1) \text{ donde } \ddot{H}(0) = \frac{a + 3}{4}.$$

Así la ecuación de iteración es

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{(a + 1)}{(a + \sqrt{1 - (a + 1)(1 - m + mL_f(x_n))})}$$

con  $K(\alpha) = \frac{1}{2m^2} ((m - a)A_1^2 - 2mA_2)$ , la cual puede ser obtenida desde la curva

$$x = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 - \sqrt[m]{\frac{y}{f(x_n)}} \right) \times \frac{a + 1}{a + \sqrt{1 - (a + 1)(1 - m + mL_f(x_n))} \left( 1 - \sqrt[m]{\frac{y}{f(x_n)}} \right)} \quad (4.12)$$

Algunos casos particulares de esta familia pueden ser mencionados

- Cuando  $a = 0$ , un método tipo Ostrowski para raíces múltiples

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{1}{\sqrt{m(1 - L_f(x_n))}} \quad (4.13)$$

$$\text{con } K(\alpha) = \frac{1}{2m} (A_1^2 - 2A_2).$$

- Cuando  $a = 1$ , obtenemos un método tipo Euler para raíces múltiples

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{2}{(1 + \sqrt{2m(1 - L_f(x_n)) - 1})} \quad (4.14)$$

$$\text{con } K(\alpha) = \frac{1}{2m^2} ((m-1)A_1^2 - 2mA_2).$$

- Cuando  $a = m$ , obtenemos

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{m+1}{m + \sqrt{m^2 - m(m+1)L_f(x_n)}} \quad (4.15)$$

$$\text{con } K(\alpha) = -\frac{A_2}{m}.$$

#### 4.6.2. Familia tipo Chebyshev-Halley para raíces múltiples

Utilizando la función  $H$  dada por

$$H(t) = 1 + \frac{t}{2(1 - At)} \Rightarrow \ddot{H}(0) = A,$$

se obtiene la familia tipo Chebyshev-Halley para raíces múltiples

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 + \frac{1 - m + mL_f(x_n)}{2(1 - A(1 - m + mL_f(x_n)))} \right) \quad (4.16)$$

con  $K(\alpha) = \frac{1}{2m^2} ((m+3 - 4\alpha)A_1^2 - 2mA_2)$ , la cual puede ser construida desde la curva

$$x = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 - \sqrt[m]{\frac{y}{f(x_n)}} \right) \times \left( 1 + \frac{(1 - m + mL_f(x_n)) \left( 1 - \sqrt[m]{\frac{y}{f(x_n)}} \right)}{2 \left( 1 - A(1 - m + mL_f(x_n)) \left( 1 - \sqrt[m]{\frac{y}{f(x_n)}} \right) \right)} \right)$$

Se pueden mencionar los siguientes casos particulares

- Cuando  $A = 0$ , obtenemos un método tipo Chebyshev para raíces múltiples

$$x_{n+1} = x_n - \frac{m}{2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} (3 - m + mL_f(x_n)) \quad (4.17)$$

$$\text{con } K(\alpha) = \frac{1}{2m^2} [(m+3)A_1^2 - 2mA_2].$$

- Cuando  $A = \frac{1}{2}$ , obtenemos un método tipo Halley para raíces múltiples

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{2m}{1 + m - mL_f(x_n)} \quad (4.18)$$

$$\text{con } K(\alpha) = \frac{1}{2m^2} [(m+1)A_1^2 - 2mA_2].$$

- $A = 1$ , obtenemos un método tipo Super-Halley para raíces múltiples

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{1 + m - mL_f(x_n)}{2(1 - L_f(x_n))} \quad (4.19)$$

$$\text{con } K(\alpha) = \frac{1}{2m^2} [(m-1)A_1^2 - 2mA_2].$$

- Si  $A = \frac{m+3}{4}$ , obtenemos el método

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{m^2 + 2m + 9 + m(m+5)L_f(x_n)}{m^2 + 4m + 7 - m(m+3)L_f(x_n)} \quad (4.20)$$

$$\text{con } K(\alpha) = -\frac{A_2}{m}.$$

### 4.6.3. Familia tipo $\theta$ -C para raíces múltiples

Utilizando la función  $H$

$$H(t) = 1 + \frac{1}{2} \frac{t}{(1-\theta t)} + Ct^2 \Rightarrow \ddot{H}(0) = \theta + 2C$$

se obtiene

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \times \left( 1 + \frac{1 - m + mL_f(x_n)}{2(1 - \theta(1 - m + mL_f(x_n)))} + C(1 - m + mL_f(x_n))^2 \right)$$

con  $K(\alpha) = \frac{1}{2m^2} [(m+3-4(\theta+2C))A_1^2 - 2mA_2]$  la cual puede ser obtenida desde la curva

$$x = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 - \sqrt[m]{\frac{y}{f(x_n)}} \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{(1-m+mL_f(x_n))(1-\sqrt[m]{\frac{y}{f(x_n)}})}{1-\theta(1-m+mL_f(x_n))(1-\sqrt[m]{\frac{y}{f(x_n)}})} \right. \\ \left. + C(1-m+mL_f(x_n))^2 \left( 1 - \sqrt[m]{\frac{y}{f(x_n)}} \right)^2 \right).$$

Entre los casos particulares vale la pena destacar los siguientes

- $\theta = 0$ , familia tipo  $C$  para raíces múltiples

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \times \\ \left( \frac{3-m+mL_f(x_n)}{2} + C(1-m+mL_f(x_n))^2 \right) \quad (4.21)$$

con  $K(\alpha) = \frac{1}{2m^2} [(m+3-8C)A_1^2 - 2mA_2]$

- $\theta = 0$  y  $C = \frac{m+3}{8}$

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \times \\ \left( \frac{3-m+mL_f(x_n)}{2} + \frac{m+3}{8} (1-m+mL_f(x_n))^2 \right) \quad (4.22)$$

con  $K(\alpha) = -\frac{A_2}{m}$

- $C = 0$ , se obtiene la familia del tipo Chebyshev-Halley, (4.16).
- Con  $C = \frac{m+3-4\theta}{8}$  se obtiene la siguiente familia

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 + \frac{1-m+mL_f(x_n)}{2(1-\theta(1-m+mL_f(x_n)))} + \right. \\ \left. \frac{m+3-4\theta}{8} (1-m+mL_f(x_n))^2 \right)$$

con  $K(\alpha) = -\frac{A_2}{m}$

#### 4.6.4. Una combinación convexa de los métodos de Halley y Chebyshev para raíces múltiples

Sea la función de peso

$$H(t) = \frac{A}{(1 - \frac{1}{2}t)} + (1 - A) \left(1 + \frac{1}{2}t\right) \Rightarrow \ddot{H}(0) = \frac{A}{2},$$

entonces

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \times \left( \frac{2A}{1 + m - mL_f(x_n)} + \frac{(1 - A)}{2} (3 - m + mL_f(x_n)) \right)$$

con  $K(\alpha) = \frac{1}{2m^2} [(m + 3 - 2A) A_1^2 - 2mA_2]$ .

Esta ecuación de iteración puede construirse desde la curva

$$x = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 - \sqrt[m]{\frac{y}{f(x_n)}} \right) \left( \frac{A}{1 - \frac{1}{2} (1 - m + mL_f(x_n)) \left( 1 - \sqrt[m]{\frac{y}{f(x_n)}} \right)} + (1 - A) \left( 1 + \frac{1}{2} (1 - m + mL_f(x_n)) \left( 1 - \sqrt[m]{\frac{y}{f(x_n)}} \right) \right) \right)$$

Entre los casos particulares de esta familia podemos mencionar los siguientes

- Cuando  $A = 0$  se obtiene el método de tipo Chebyshev para raíces múltiples (4.17).
- Cuando  $A = 1$  se obtiene el método de tipo Halley para raíces múltiples (4.18).
- Cuando  $A = 2$  se obtiene el siguiente método para raíces múltiples

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \times \left( \frac{4}{1 + m - mL_f(x_n)} + -\frac{1}{2} (3 - m + mL_f(x_n)) \right) \quad (4.23)$$

con  $K(\alpha) = \frac{1}{2m^2} [(m-1)A_1^2 - 2mA_2]$ .

- Cuando  $A = \frac{m+3}{2}$  se obtiene el siguiente método para raíces múltiples

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \times \left( \frac{m+3}{1+m-mL_f(x_n)} - \frac{(m+1)}{4} (3-m+mL_f(x_n)) \right) \quad (4.24)$$

con  $K(\alpha) = -\frac{A_2}{m}$ .

#### 4.6.5. Combinación convexa del método de Newton con un método del tipo Newton-Halley

Dada la función de peso

$$H(t) = A + \frac{2(A-1)^2}{2(1-A)-t} \Rightarrow \ddot{H}(0) = \frac{1}{2(1-A)} \quad (A \neq 1),$$

entonces

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( A + \frac{2(A-1)^2}{2(1-A) - (1-m+mL_f(x_n))} \right),$$

con  $K(\alpha) = \frac{1}{2m^2} \left[ \left( \frac{(m+3)(1-A)-2}{1-A} \right) A_1^2 - 2mA_2 \right]$ . La cual puede ser generada desde la curva

$$x = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 - \sqrt[m]{\frac{y}{f(x_n)}} \right) \times \left( A + \frac{2(A-1)^2}{2(1-A) - (1-m+mL_f(x_n)) \left( 1 - \sqrt[m]{\frac{y}{f(x_n)}} \right)} \right)$$

Entre los casos particulares se pueden mencionar

- $A = 0$  : método del tipo Halley para raíces múltiples (4.18).
- $A = \frac{1}{2}$  : método del tipo Super-Halley para raíces múltiples (4.19).

- Para  $A = \frac{m+5}{m+3}$  se tiene

$$x_{n+1} = x_n - \frac{m}{(m+3)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \times \left( m + 5 - \frac{4}{4 + (m+3)(1 - m + mL_f(x_n))} \right) \quad (4.25)$$

con  $K(\alpha) = -\frac{A_2}{m}$ .



## Capítulo 5

# Métodos y familias de dos puntos sin memoria y su construcción geométrica.

Una gran cantidad de familias y/o métodos de orden tres con dos puntos han sido presentados en diversos trabajos, entre los que se pueden mencionar los métodos de Traub y de Potra-Pták ([79], [71]). Por otro lado, es bien sabido que el primer método de dos puntos con cuarto orden de convergencia es debido a Ostrowski [65]. Entre las primeras familia de dos puntos con cuarto orden de convergencia se pueden mencionar la de Jarrat [50] y la de King [55]. Muchos métodos de dos puntos pueden ser vistos en [67] y las referencia que se encuentran en el. En [29] y [30] se presentaron otros métodos de dos puntos con cuarto orden de convergencia basados en unas clases de métodos. En [67] se da una interpretación geométrica del método de Ostrowski. En estos y otros trabajos es que se centra éste capítulo, haciendo énfasis en la construcción geométrica.

### 5.1. Formas equivalentes a la clase de Chun

En 2008 Changbum Chun [29] presenta la siguiente clase de métodos iterativos de dos puntos para resolver ecuaciones no lineales con raíces

simples con cuarto orden de convergencia

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)h(t_n)} \end{aligned}$$

donde  $t_n = \frac{f(y_n)}{f(x_n)}$ ,  $h(0) = 1$ ,  $\dot{h}(0) = -2$  y  $|\ddot{h}(0)| < \infty$ .

En [7] dicha clase es presentada en otra forma. Sin embargo a efectos de seleccionar funciones de peso que satisfagan las hipótesis del teorema de Gander (métodos de un punto para ecuaciones no lineales con raíces simples) se utilizará la clase de Chun en las siguientes formas equivalentes.

**Teorema 5.1.1.** *Sea  $\alpha$  una raíz simple de  $f$  y  $H$  cualquier función que satisfaga  $H(0) = 1$ ,  $\dot{H}(0) = \frac{1}{2}$  y  $\ddot{H}(0) < \infty$ . La ecuación de iteración dada por*

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} H \left( \frac{2f(y_n)}{f(x_n)} \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

es de tercer orden y el error es dado por

$$e_{n+1} = 2(1 - \ddot{H}(0))A_2^2e_n^3 + O(e_n^4); \quad (5.2)$$

y si además  $\ddot{H}(0) = 1$  y  $|\ddot{\ddot{H}}(0)| < \infty$ , entonces es de cuarto orden y

$$e_{n+1} = \left( \left( 5 - \frac{4}{3}\ddot{\ddot{H}}(0) \right) A_2^2 - A_3 \right) A_2e_n^4 + O(e_n^5). \quad (5.3)$$

En caso que  $\ddot{\ddot{H}}(0) = \frac{15}{4}$  y  $|H^{iv}(0)| < \infty$ , entonces

$$e_{n+1} = -A_2A_3e_n^4 + O(e_n^5).$$

*Demostración.* Esta prueba es similar a la presentada en [29] y por lo tanto omitida.  $\square$

**Teorema 5.1.2.** *Sea  $\alpha$  una raíz simple de  $f$  y  $H$  cualquier función con  $H(0) = 1$ , y  $\dot{H}(0) < \infty$ . La iteración*

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} H\left(\frac{2f(y_n)}{f(x_n)}\right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

es de tercer orden y el error es dado por

$$e_{n+1} = 2(1 - \dot{H}(0))A_2^2 e_n^3 + O(e_n^4)$$

y si además  $\dot{H}(0) = 1$  y  $|\ddot{H}(0)| < \infty$  entonces es de cuarto orden y

$$e_{n+1} = \left( (5 - 2\ddot{H}(0)) A_2^2 - A_3 \right) A_2 e_n^4 + O(e_n^5).$$

En el caso que  $\ddot{H}(0) = \frac{5}{2}$  y  $|\ddot{H}(0)| < \infty$ , entonces

$$e_{n+1} = -A_2 A_3 e_n^4 + O(e_n^5).$$

*Demostración.* Esta prueba es similar a la presentada en [29] y por lo tanto omitida.  $\square$

**Comentario.** La utilización de  $\frac{2f(y_n)}{f(x_n)}$  como un argumento de la función de peso  $H$  es debido al hecho de que

$$L_f(x_n) \approx \frac{2f(y_n)}{f(x_n)}$$

véase [67] y [84]. Es por ello que si en la clase de Gander  $L_f(x_n)$  es reemplazada por la aproximación mencionada recientemente, entonces las dos clases de métodos dadas por (5.1) y (5.4) son obtenidas.

## 5.2. Ejemplos de familias y métodos de orden tres obtenidos a partir de las formas equivalentes a la clase de Chun

En esta sección se presenta un grupo de familias y métodos de dos puntos y orden de convergencia tres basados en algunas funciones de pesos clásicas, con su respectiva constante asintótica del error  $K(\alpha)$  las cuales son obtenidas utilizando (5.1) y (5.2). En todos los casos  $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ .

### 5.2.1. Método de Potra y Pták [71]

El método de Potra y Pták puede ser obtenido utilizando la misma función de peso utilizada para obtener el método de Chebyshev. Su ecuación de iteración viene dada por  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)+f(y_n)}{f'(x_n)}$  y constante asintótica del error  $K(\alpha) = 2A_2^2$ .

### 5.2.2. Método de Newton-Secante [67]

El método de Newton-Secante puede ser obtenido utilizando la misma función de peso utilizada para obtener el método de Halley. Su ecuación de iteración viene dada por  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n)}{(f(x_n)-f(y_n))}$  y constante asintótica del error  $K(\alpha) = A_2^2$ .

### 5.2.3. Familia tipo Chebyshev-Halley [19]

Como su nombre lo indica la familia de dos puntos tipo Chebyshev-Halley puede ser obtenida utilizando la misma función de peso utilizada para obtener la familia de Chebyshev-Halley . Su ecuación de iteración viene dada por  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( \frac{f(x_n)+(1-2A)f(y_n)}{f(x_n)-2Af(y_n)} \right)$  y constante asintótica del error  $K(\alpha) = 2(1-A)A_2^2$ .

### 5.2.4. Método tipo Ostrowski [19]

Este método de dos puntos puede ser obtenido utilizando la misma función de peso utilizada para obtener el método de Ostrowski. Su ecuación de iteración viene dada por  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \sqrt{\frac{f(x_n)}{f(x_n)-2f(y_n)}}$  y constante asintótica del error  $K(\alpha) = \frac{1}{2}A_2^2$ .

### 5.2.5. Familia tipo Hansen-Patrick [19]

Como su nombre lo indica la familia de dos puntos tipo Hansen-Patrick puede ser obtenida utilizando la misma función de peso utilizada para obtener la familia de Hansen-Patrick. Su ecuación de iteración viene

dada por  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{(a+1)}{\left(a + \sqrt{1 - 2(a+1)\frac{f(y_n)}{f(x_n)}}\right)}$  y constante asintótica del error  $K(\alpha) = \frac{(1-a)}{2} A_2^2$ .

### 5.2.6. Familia tipo $\theta - C$ [19]

La familia de dos puntos tipo  $\theta - C$  puede ser obtenida utilizando la misma función de peso utilizada para obtener la familia  $\theta - C$ . Su ecuación de iteración viene dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n) - 2\theta f(y_n)} + 4C \left( \frac{f(y_n)}{f(x_n)} \right)^2 \right)$$

y constante asintótica del error  $K(\alpha) = 2(1 - \theta - 2C)A_2^2$ .

### 5.2.7. Familia tipo combinación convexa de los métodos de Halley y Chebyshev [19]

Esta familia de dos puntos puede ser obtenida utilizando la misma función de peso utilizada para obtener la familia combinación convexa de los métodos de Halley y Chebyshev. Su ecuación de iteración viene dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( \frac{Af(x_n)}{f(x_n) - f(y_n)} + (1 - A) \frac{(f(x_n) + f(y_n))}{f(x_n)} \right)$$

y constante asintótica del error  $K(\alpha) = (2 - A)A_2^2$ .

## 5.3. Ejemplos de familias y métodos de orden cuatro obtenidos a partir de las formas equivalentes a la clase de Chun

En esta sección se presenta un grupo de familias y métodos de dos puntos y orden de convergencia cuatro basados en algunas funciones de pesos clásicas, con su respectiva constante asintótica del error  $K(\alpha)$  las cuales son obtenidas utilizando (5.1) y (5.3). En todos los casos  $y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ .

### 5.3.1. Método de Ostrowski [65]

El método de Ostrowski puede ser obtenido utilizando la misma función de peso utilizada para obtener el método de Super-Halley. Su ecuación de iteración viene dada por  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n) - f(y_n)}{(f(x_n) - 2f(y_n))}$  y constante asintótica del error  $K(\alpha) = (A_2^2 - A_3)A_2$ .

### 5.3.2. Familia de King [55]

La familia de King puede ser obtenida utilizando la función de peso  $H(t) = \frac{4+2(\beta-1)t+\beta t^2}{2(2+(\beta-2)t)}$ . Su ecuación de iteración viene dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^2(x_n) + (\beta - 1)f(x_n)f(y_n) + \beta f^2(y_n)}{(f(x_n) + (\beta - 2)f(y_n))f'(x_n)}$$

y constante asintótica del error  $K(\alpha) = ((2\beta + 1)A_2^2 - A_3)A_2$ .

### 5.3.3. Familia tipo $\theta$ [19]

Esta familia de dos puntos puede ser obtenida utilizando la misma función de peso utilizada para obtener la familia  $\theta$ . Su ecuación de iteración viene dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 + \frac{f(x_n)}{(f(x_n) - 2\theta f(y_n))} + \frac{1 - \theta}{2} \left( \frac{f(y_n)}{f(x_n)} \right)^2 \right)$$

y constante asintótica del error  $K(\alpha) = ((5 - 4\theta^2)A_2^2 - A_3)A_2$ .

Si  $\theta = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$  se obtienen dos métodos de dos punto de orden cuatro con constante asintótica dada por  $K(\alpha) = -A_3A_2$ , cuyas ecuaciones de iteración son:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 + \frac{f(x_n)}{(f(x_n) - \sqrt{5}f(y_n))} + \frac{2 - \sqrt{5}}{4} \left( \frac{f(y_n)}{f(x_n)} \right)^2 \right)$$

y

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 + \frac{f(x_n)}{(f(x_n) + \sqrt{5}f(y_n))} + \frac{2 + \sqrt{5}}{4} \left( \frac{f(y_n)}{f(x_n)} \right)^2 \right)$$

### 5.3.4. Otros métodos de dos punto y orden cuatro con

$$K(\alpha) = -A_3A_2$$

En esta subsección se mencionan algunos métodos de dos puntos con cuarto orden de convergencia cuya constante asintótica del error es  $K(a) = -A_2A_3$ , debido a que la función de peso utilizada satisface la condición  $\ddot{H}(0) = \frac{15}{4}$ .

Familia de Zhao-Wang-Guo [85]. En este caso la función de peso es

$$H(t) = \frac{8 + 4t + 2(b-3)t^2 + bt^3}{2(4 + (b-5)t^2)}.$$

y la ecuación de iteración viene dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f^3(x_n) + f^2(x_n)f(y_n) + (b-3)f(x_n)f^2(y_n) + bf^3(y_n)}{(f^2(x_n) + (b-5)f^2(y_n))f'(x_n)}$$

Uno de los métodos obtenidos desde la familia de King, vea la sección 5.3.2, con  $\beta = -\frac{1}{2}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f^2(x_n) - 3f(x_n)f(y_n) - f^2(y_n)}{(2f(x_n) - 5f(y_n))f'(x_n)}$$

## 5.4. Construcciones geométricas de la clase de Chun

Ahora presentamos dos resultados dados en [19] que permiten obtener algunas curvas para las cuales pueden deducirse las ecuaciones de iteración de las familias y/o métodos obtenidos a partir de la clase de Chun. El primer resultado es:

**Teorema 5.4.1.** *Sea  $\alpha$  una raíz simple de  $f$  y  $H$  cualquier función invertible con  $H(0) = 1$ ,  $\dot{H}(0) = \frac{1}{2}$ ,  $\ddot{H}(0) = 1$  y  $|\ddot{H}(0)| < \infty$ . La iteración  $x_{n+1} = G(x_n, y_n)$ , con  $z = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  y  $G(x, z) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}H\left(\frac{2f(z)}{f(x)}\right)$ , puede ser obtenida desde la curva que tiene por ecuación*

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}H\left(\frac{2(f(y_n) - y(x))}{f(x_n)}\right) \quad (5.5)$$

la cual satisface las siguientes condiciones de tangencia

1.  $y(y_n) = f(y_n)$
2.  $y'(y_n) = f'(x_n)$
3.  $y''(y_n) = \frac{4(f'(x_n))^2}{f(x_n)}$

*Demostración.* Véase [19]. □

El segundo resultado es

**Teorema 5.4.2.** *Sea  $\alpha$  una raíz simple de  $f$  y  $H$  cualquier función invertible con  $H(0) = 1$ ,  $\dot{H}(0) = \frac{1}{2}$ ,  $\ddot{H}(0) = 1$  y  $|\ddot{H}(0)| < \infty$ . La iteración  $x_{n+1} = G(x_n, y_n)$ , con  $z = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  y  $G(x, z) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} H\left(\frac{2f(z)}{f(x)}\right)$ , puede ser obtenida desde la curva que tiene por ecuación*

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} H\left(\frac{2(f(y_n) - y(x))}{f(x_n) - y(x)}\right) \quad (5.6)$$

la cual satisface las siguientes condiciones de tangencia

1.  $y(x_n) = f(y_n)$
2.  $y'(y_n) = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$
3.  $y''(y_n) = 6 \frac{f(y_n) - f(x_n)}{(y_n - x_n)^2}$

*Demostración.* Véase [19]. □

**Comentario.** Las curvas dadas por (5.5) y (5.6) también pueden ser usadas para deducir métodos iterativos de dos puntos con tercer orden de convergencia cuando ( $\ddot{H}(0) \neq 1$ ). Sin embargo, estas curvas no satisfacen la tercera condición de estos teoremas.

## 5.5. Una clase de dos puntos del tipo Jarratt-Gander con cuarto orden de convergencia

En [49] y [57] usando la iteración de Newton modificado en la forma

$$y_n = x_n - \theta \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

obtienen una aproximación de la segunda derivada, la cual es dada por

$$f''(x_n) \approx \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$$

de esta forma, al sustituirla en la definición de  $L_f$  se puede obtener que

$$L_f(x_n) \approx \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{\theta f'(x_n)} = \widehat{L}_f(x_n). \quad (5.7)$$

Utilizando (5.7) en la clase de Gander dada en el teorema 3.2.1, [31] y [33] obtuvieron unas clases de dos puntos con cuarto orden de convergencia. En lo que sigue usamos una de estas clases (a la que se denomina en [20] clase de tipo Jarratt-Gander) como sigue.

**Teorema 5.5.1.** *Sea  $\alpha$  una raíz simple de  $f$ ,  $H$  cualquier función con  $H(0) = 1$ ,  $\dot{H}(0) = \frac{1}{2}$ ,  $\ddot{H}(0) < \infty$ ,  $\theta \neq 0$  y  $A_k = \frac{1}{k!} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$ ,  $k = 2, 3, \dots$ . La iteración*

$$y_n = x_n - \theta \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (5.8)$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} H \left( \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{\theta f'(x_n)} \right) \quad (5.9)$$

es de tercer orden y el error es dado por

$$e_{n+1} = \left[ 2 \left( 1 - \ddot{H}(0) \right) A_2^2 + \left( \frac{3}{2} \theta - 1 \right) A_3 \right] e_n^3 + O(e_n^4) \quad (5.10)$$

y si además se cumple que  $\theta = \frac{2}{3}$ ,  $\ddot{H}(0) = 1$  y  $|\ddot{H}(0)| < \infty$  entonces la misma es de cuarto orden con

$$e_{n+1} = \left[ \left( 5 - \frac{4}{3} \ddot{H}(0) \right) A_2^3 - A_2 A_3 + \frac{1}{9} A_4 \right] e_n^4 + O(e_n^5). \quad (5.11)$$

En el caso de que  $\ddot{H}(0) = \frac{15}{4}$  y  $|H^{iv}(0)| < \infty$ , entonces

$$e_{n+1} = \left( \frac{1}{9} A_4 - A_2 A_3 \right) e_n^4 + O(e_n^5).$$

*Demostración.* Véase [20]. □

## 5.6. Ejemplos de familias y métodos de dos puntos con cuarto orden

A continuación se presentan diversos ejemplos de familias y/o métodos de dos puntos con cuarto orden de convergencia obtenidos a partir de la clase de tipo Jarratt-Gander. Algunos de los métodos y/o familias que se presentan en esta sección están expresadas en función de  $\widehat{L}_f$  la cual está dada en la ecuación (5.7). Para el cálculo del error se utiliza la ecuación (5.11) debido a que en todos los casos se utiliza  $\theta = \frac{2}{3}$ .

### 5.6.1. Familia de Jarratt

En [50] Jarratt presenta una familia de métodos de dos puntos sin segunda derivada. Los tres métodos que menciona de esta familia son los siguientes:

**Primer método de Jarratt (JM1):**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - 3f'(y_n)}, \quad (5.12)$$

este puede obtenerse desde (5.8) y (5.9) usando  $H(t) = \frac{2-t}{2(1-t)}$ .

**Segundo método de Jarratt (JM2):**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{3}{2} \frac{f(x_n)}{f'(y_n)} + \frac{3f(x_n)}{f'(x_n) + f'(y_n)}, \quad (5.13)$$

este puede obtenerse desde (5.8) y (5.9) usando  $H(t) = \frac{4t^2-9t+18}{2(t-3)(2t-3)}$ .

**Tercer método de Jarratt (JM3):**

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \times \left( \frac{11}{28} + \frac{27}{52} \frac{f'(x_n)}{f'(y_n)} + \frac{64f'(x_n)}{1911f'(y_n) - 1183f'(x_n)} \right), \quad (5.14)$$

este puede obtenerse desde (5.8) y (5.9) usando  $H(t) = \frac{11t^2-46t+24}{2(2t-3)(7t-4)}$ .

### 5.6.2. Cuarto método de Jarratt (JM4):

En [51], Jarratt presenta otro método dado por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - 3f'(y_n)} \quad (5.15)$$

este puede obtenerse desde (5.8) y (5.9) usando  $H(t) = \frac{2-t}{2(1-t)}$  y  $\theta = \frac{2}{3}$ . Es de destacar que esta función de peso es la misma que la usada en la clase de Gander para obtener el método de Super Halley.

### 5.6.3. Método de dos puntos de tipo Euler-Jarratt [20]

Este método puede ser obtenido desde la clase de Jarrat-Gander al utilizar la función de peso del método de Euler,  $H(t) = \frac{2}{1+\sqrt{1-2t}}$ . De esta manera se obtiene la ecuación de iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{2}{\left(1 + \sqrt{1 - 2\widehat{L}_f(x_n)}\right)}$$

con constante asintótica del error

$$K(\alpha) = -A_2A_3 + \frac{1}{9}A_4$$

### 5.6.4. Familia tipo King-Jarratt [20]

Esta familia puede ser obtenida desde la clase de Jarrat-Gander al utilizar la función de peso de la familia de King [55] la cual viene dada por  $H(t) = \frac{4+2(\beta-1)t+\beta t^2}{2(2+(\beta-2)t)}$ . Así la ecuación de iteración es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( \frac{4 + 2(\beta - 1)\widehat{L}_f(x_n) + \beta\widehat{L}_f^2(x_n)}{2(2 + (\beta - 2)\widehat{L}_f(x_n))} \right)$$

con

$$K(\alpha) = (2\beta + 1)A_2^3 - A_2A_3 + \frac{1}{9}A_4$$

### 5.6.5. Familia tipo Behl-Kanwar [20]

La familia tipo Behl-Kanwar es obtenida en [20] utilizando la  $H$  necesaria para la familia dada en [10]. Dicha función  $H$  viene dada por

$$H(t) = 1 + \frac{t}{2(1 - \frac{1}{2}t)^2}$$

La ecuación de iteración para esta familia es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( 1 + \frac{\widehat{L}_f(x_n)}{2(1 - \frac{1}{2}\widehat{L}_f(x_n))^2} \right)$$

Así la constante asintótica del error es

$$K(\alpha) = 2A_2^3 - A_2A_3 + \frac{1}{9}A_4$$

## 5.7. Construcciones Geométricas de la clase de tipo Jarratt-Gander

La construcción geométrica de los métodos obtenidos a partir de la clase de tipo Jarratt-Gander se debe hacer en dos partes. La primera consiste en la relacionada con la ecuación de iteración (5.8), la cual es basada en el método de Newton modificado (véase [17]) y la segunda de acuerdo a lo presentado por el autor en [20].

Así, utilizando la recta

$$y = f(x_n) + \frac{f'(x_n)}{\theta}(x - x_n) \quad (5.16)$$

que depende del parámetro  $\theta$  en vez de  $m$ , podemos obtener (5.8) utilizando  $x = y_n$  y  $y = 0$ . Luego, la pendiente de dicha recta es la  $\theta$ -ésima parte de  $f'(x_n)$ . De manera similar (5.8) puede ser obtenido desde la curva

$$y = f(x_n) \left( 1 + \frac{f'(x_n)(x - x_n)}{\theta f(x_n)} \right)^\theta \quad (5.17)$$

la cual cumple las condiciones de tangencia  $y(x_n) = f(x_n)$  y  $y'(x_n) = f'(x_n)$ .

La segunda parte se puede basar en un caso particular del resultado dado en [20], el cual se enuncia a continuación:

**Teorema 5.7.1.** *Sea  $\alpha$  una raíz simple de  $f$ ,  $H$  cualquier función con  $H(0) = 1$ ,  $\dot{H}(0) = \frac{1}{2}$ ,  $\ddot{H}(0) < \infty$  y  $\theta \neq 0$ .*

*La iteración dada por  $x_{n+1} = G(x_n, y_n)$ , con  $z = x - \theta \frac{f(x)}{f'(x)}$  y*

$$G(x, z) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} H \left( \frac{2f'(x) - f'(z)}{\theta f(x)} \right),$$

*puede ser obtenida desde la curva que tiene por ecuación*

$$f'(x_n)(x_n - x) = [f(x_n) - y(x)]H(g(y(x))) \quad (5.18)$$

*donde*

$$g(y(x)) = \frac{2f'(x_n) - f'(y_n)}{\theta f(x_n)} \left( 1 - \frac{y(x)}{f(x_n)} \right)^2 \left( 1 - \frac{y(x)}{y(y_n)} \right)^2 \quad (5.19)$$

*y si  $y(y_n) = (1 - \theta)f(x_n)$  entonces dicha curva satisface las siguientes condiciones*

1.  $y(x_n) = f(x_n)$ .
2.  $y'(x_n) = f'(x_n)$ .
3.  $y'(y_n) = f'(x_n)$
4.  $y''(x_n) = 0$ .
5.  $y''(y_n) = 0$ .

*Demostración.* Véase [20]. □



# Capítulo 6

## Métodos optimales de dos puntos para raíces múltiples

En este capítulo se han seleccionado diferentes métodos de cuarto orden de convergencia, algunos de ellos son elementos de algunas familias o de algunas clases de métodos iterativos para encontrar raíces múltiples con multiplicidad conocida. También se presentan algunos resultados dados en [37] y [21].

### 6.1. Método de de Li

El método de cuarto orden desarrollado por Shengguo Li, Liao Xiangke, y Cheng Lizhi (ver, [59]) viene dado por el esquema iterativo de dos puntos:

$$\begin{cases} y_n &= x_n - \frac{2m}{m+2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{\frac{1}{2}m(m-2)\left(\frac{m}{m+2}\right)^{-m} f'(y_n) - \frac{m^2}{2} f'(x_n)}{f'(x_n) - \left(\frac{m}{m+2}\right)^{-m} f'(y_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

## 6.2. Método modificado de Jarrat

El método modificado de Jarrat publicado por Janak R. Sharma y Rayni Sharma (ver, [76]) tiene por ecuación de iteración:

$$\begin{cases} y_n &= x_n + \beta W_1(x_n) \\ x_{n+1} &= x_n - a_1 W_1(x_n) - a_2 W_2(x_n) - a_3 \left( \frac{W_2^2(x_n)}{W_1(x_n)} \right) \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} W_1(x_n) &= \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, W_2(x_n) = \frac{f(x_n)}{f'(y_n)}, \\ \beta &= -\frac{2m}{m+2}, a_1 = \frac{1}{8}m(m^3 - 4m + 8), \\ a_2 &= -\frac{m(m-1)(m+2)^2}{4} \left( \frac{m}{m+2} \right)^m \text{ y } a_3 = \frac{m(m+2)^3}{8} \left( \frac{m}{m+2} \right)^{2m}. \end{aligned}$$

## 6.3. Método de Li, Cheng y Neta

En el 2010, S. G. Li, L. Z. Cheng y B. Neta [60] presentan un método de cuarto orden de convergencia para resolver ecuaciones no lineales cuya multiplicidad  $m$  es conocida. este viene dado por la ecuación de iteración

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{2m}{m+2} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= x_n - \left( m - \frac{m^2}{2} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{mf(x_n)}{-f'(x_n) + \left( \frac{m}{m+2} \right)^{-m} f'(y_n)} \end{aligned}$$

donde la ecuación del error es

$$e_{n+1} = K_4 e_n^4 + o(e_n^5)$$

con

$$\begin{aligned} K_4 &= \frac{1}{3} \frac{m^3 + 2m^2 + 2m - 2}{m^4(m+1)^3} A_1^3 \\ &\quad - \frac{A_1 A_2}{m(m+2)(m+1)^2} + \frac{m}{(m+1)(m+2)^3(m+3)} A_3 \end{aligned}$$

y

$$A_j = \frac{f^{(m+j)}(\alpha)}{f^m(\alpha)}, j = 1, 2, \dots$$

siendo  $\alpha$  una raíz de  $f$  de multiplicidad  $m$ .

## 6.4. Método de Liu y Zhou

En el 2013, Baoqing Liu y Xiaojian Zhou [61] presentan la siguiente clase de métodos de dos puntos con tres evaluaciones funcionales cuya primera ecuación de iteración corresponde a la del método de Newton modificado para raíces múltiples, tal como es mostrado en el siguiente teorema.

**Teorema 6.4.1.** *Sea  $x \in R$  una raíz de multiplicidad  $m$  conocida y  $f$  una función suficientemente diferenciable  $f : I \rightarrow R$  en un intervalo  $I$ . Si el punto inicial  $x_0$  esta suficientemente cercano a  $x$  y  $G(0) = 0, G'(0) = 1, G''(0) = \frac{4m}{m-1} y |G''(0)| < \infty$ , entonces la clase dada por*

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= x_n - mG \left( m^{-1} \sqrt{\frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{aligned} \quad (6.1)$$

es de cuarto orden

## 6.5. Clase de Singh y Jaiswal

Basado en una extensión del trabajo de Chun y otros (ver, [31]), Singh y Jaiswal (ver, [77]) obtienen la siguiente clase

$$\begin{cases} y_n = x_n - a \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} F(P) \end{cases}$$

donde  $F(P)$  es una función de peso y  $P = \frac{f'(x_n) - f'(y_n)}{af'(x_n)}$ . Si el iterado inicial es suficientemente cerrado a la raíz entonces se garantiza cuarto orden de convergencia siempre que,

$$a = \frac{2m}{m+2}, F(u) = m, F'(u) = \frac{1}{2}m^{4-m}(m+2)^{m-1}$$

y

$$F''(u) = m^{6-2m}(m+2)^{2m-2},$$

$$\text{donde } u = \frac{m(m+2) - m^m(m+2)^{2-m}}{2m^2}.$$

Un caso particular cuando  $F(u) = \frac{A}{u} + \frac{1}{B+Cu}$  con  $A$ ,  $B$  y  $C$  constantes, y considerando las condiciones anteriores, viene dado por

$$\begin{cases} y_n &= x_n - \mathbf{P} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ x_{n+1} &= x_n - \left[ \frac{k_1}{\mathbf{P}} + \frac{1}{k_2+k_3 \cdot \mathbf{P}} \right] \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{(4-m^2)(2m^m + m^{1+m} - m(2+m)^m)^3}{T_1} \\ k_2 &= \frac{-(-2m^{3+m}(2+m)^m + m^3(2+m)^{2m} + m^{2m}(8-4m+m^3))^2}{m^{1+m}(-m^2(2+m)^m + m^m(m(2+m)-4))^3} \\ k_3 &= \frac{T_2}{(-m^2(2+m)^m + m^m(m(2+m)-4))^3} \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} T_1 &= -32m^{2m}(2+m)^m + 16m^{1+2m}(2+m)^m - 4m^{3+2m}(2+m)^m \\ &\quad + 8m^{3+m}(2+m)^{2m} - 4m^3(2+m)^{3m} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T_2 &= -2m^{3-m}(2+m)^{-1+m}(m^m - (2+m)^m) \times \\ &\quad (-2m^{3+m}(2+m)^m + m^3(2+m)^{2m} + m^{2m}(8-4m+m^3)). \end{aligned}$$

## 6.6. Otras clases de dos puntos con cuarto orden de convergencia

En esta sección se presentan algunas clases de métodos dadas en [21], las cuales vienen dadas por medio de los siguientes resultados:

**Teorema 6.6.1.** *Sea  $\alpha$  una raíz múltiple de  $f$  con multiplicidad  $m$  y  $H$  cualquier función con  $H(0) \neq 0$ ,  $\dot{H}(0) \neq 0$ ,  $\ddot{H}(0) = \frac{2(m+2)\dot{H}^2(0)}{H(0)}$  y  $|\ddot{H}(0)| < +\infty$ . Entonces la clase de métodos dada por*

$$\begin{cases} y_n &= x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ z_n &= x_n - \frac{m}{H(0)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} H \left( \frac{H(0)}{H(0)} \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} \right) \end{cases}$$

es de cuarto orden y el error viene dado por

$$e_{n+1} = \frac{[6(2m^2+5m+4)(\dot{H}(0))^3 - \ddot{H}(0)(H(0))^2]C_1^2 - 6m^2(\dot{H}(0))^2C_2}{6m^3(\dot{H}(0))^3} C_1 e_n^4 + O(e_n^5)$$

Sin pérdida de generalidad se puede seleccionar  $H(0) = 1$ , obteniéndose:

**Teorema 6.6.2.** *Sea  $\alpha$  una raíz múltiple de  $f$  con multiplicidad  $m$  y  $H$  cualquier función con  $H(0) = 1$ ,  $\dot{H}(0) \neq 0$ ,  $\ddot{H}(0) = 2(m+2)\dot{H}^2(0)$  y  $|\ddot{H}(0)| < +\infty$ . Entonces la clase de métodos dada por*

$$\begin{cases} y_n &= x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ z_n &= x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} H \left( \frac{1}{H(0)} \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} \right) \end{cases}$$

es de cuarto orden y el error viene dado por

$$e_{n+1} = \frac{[6(2m^2+5m+4)(\dot{H}(0))^3 - \ddot{H}(0)]C_1^2 - 6m^2(\dot{H}(0))^2C_2}{6m^3(\dot{H}(0))^3} e_n^4 + O(e_n^5)$$

Por otro lado si se desea utilizar una función de peso  $H$  de tipo Gander, se debe agregar la condición  $\dot{H}(0) = \frac{1}{2}$ . Así

**Teorema 6.6.3.** *Sea  $\alpha$  una raíz múltiple de  $f$  con multiplicidad  $m$  y  $H$  cualquier función con  $H(0) = 1$ ,  $\dot{H}(0) = \frac{1}{2}$ ,  $\ddot{H}(0) = \frac{m+2}{2}$  y  $|\ddot{H}(0)| <$*

$+\infty$ . Entonces la clase de métodos dada por

$$\begin{cases} y_n = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ z_n = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} H \left( 2 \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)} \right) \end{cases}$$

es de cuarto orden y el error viene dado por

$$e_{n+1} = \frac{[3(2m^2+5m+4)-4\ddot{H}(0)]C_1^2-3m^2C_2}{3m^3} C_1 e_n^4 + O(e_n^5)$$

Las demostraciones de estos resultados pueden verse en [21].

# Capítulo 7

## Métodos optimales de tres puntos.

### 7.1. Un método de Kung y Traub

Kung y Traub [58] presentan dos familias de iteraciones multipuntos basadas en  $n$  evaluaciones funcionales. Para el caso  $n = 4$ , una de las ecuaciones de iteración que allí aparece puede ser escrita como sigue:

$$\begin{aligned}y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\z_n &= y_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{f(x_n)f(y_n)}{[f(x_n) - f(y_n)]^2} \\x_{n+1} &= z_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\&\quad \times \frac{f(x_n)f(y_n)f(z_n)\{[f(x_n)]^2 + f(y_n)[f(y_n) - f(z_n)]\}}{[f(x_n) - f(y_n)]^2[f(x_n) - f(z_n)]^2[f(y_n) - f(z_n) - f(z_n)]}\end{aligned}$$

la cual es de orden ocho y por tanto optimal según la conjetura de Kung-Traub.

## 7.2. Una familia triparamétrica

Cordero, Torregrosa y Vassileva [34] presentan una familia triparamétrica de métodos dada por la siguiente ecuación de iteración:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \frac{1}{1-2t_n}, \\ x_{n+1} &= w_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \frac{3(\beta_2 + \beta_3)(w_n - z_n)}{f'(x_n)\beta_1(w_n - z_n) + \beta_2(y_n - x_n) + \beta_3(z_n - x_n)}, \end{aligned}$$

donde

$$w_n = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \left( \frac{1-t_n}{1-2t_n} + \frac{1}{2} \frac{u_n}{1-2u_n} \right)^2$$

siendo  $t_n = \frac{f(y_n)}{f(x_n)}$  y  $u_n = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \left( \frac{f(x_n)-f(y_n)}{f(x_n)-2f(y_n)} + \frac{1}{2} \frac{f(z_n)}{f(y_n)-2f(z_n)} \right)^2$  y  $\beta_2 + \beta_3 \neq 0$

## 7.3. Clase de Chun y Lee de orden ocho

Chun y Lee [32] presentan una clase de métodos dada por la siguiente ecuación de iteración:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - u_n, \\ z_n &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \frac{1}{(1-t_n)^2}, \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \frac{1}{(1-H(t_n) - J(s_n) - P(u_n))^2} \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} H(0) &= 0, H'(0) = 1, H''(0) = 1, H'''(0) = -3, \\ J(0) &= 0, J'(0) = \frac{1}{2}, P(0) = 0, P'(0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

y

$$t_n = \frac{f(y_n)}{f(x_n)}, s_n = \frac{f(z_n)}{f(x_n)}, u_n = \frac{f(z_n)}{f(y_n)}.$$

## 7.4. Clase de Thukral y Petković

Thukral y Petković [80] presentan una familia biparamétrica de métodos de orden ocho, cuya ecuación de iteración es la siguiente:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - u_n, \\ z_n &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \frac{1 + \beta t_n}{1 + (\beta - 2)t_n}, \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \left( H(t_n) + \frac{u_n}{1 - \alpha u_n} + 4s_n \right), \end{aligned}$$

con  $H(0) = 1$ ,  $H'(0) = 2$ ,  $H''(0) = 10 - 4\beta$ ,  $H'''(0) = 12\beta^2 - 72\beta + 72$ .

## 7.5. Otros métodos muy utilizados

Wang, Shi y Shi [84] presentan un método optimal de orden ocho, que requiere tres evaluaciones por iteración de la función y una para la primera derivada. La ecuación de iteración es:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= x_n - \left( 1 + \frac{f(y_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)} \right) \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n) + \frac{2f(y_n)f'(x_n)}{f^2(x_n)}(z_n - x_n)}. \end{aligned}$$

Babajee, et al [8] hacen una mejora de un método de sexto orden generando una clase de métodos de iteración de tres puntos optimal. Los autores desarrollan el estudio de convergencia, presentando diversos ejemplos que soportan los resultados obtenidos. También se muestran las cuencas de atracción para varios ejemplos y diversos elementos de dicha

clase.

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} A(\delta), \\ z_n &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n)} \left(1 - \frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right)^{-2}, \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} \left(1 - \frac{f(y_n)}{f(x_n)} - \frac{f(z_n)}{f(x_n)}\right)^{-2} \{G(t) + H(\mu)\} \end{aligned}$$

donde  $\delta = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ,  $t = \frac{f(y_n)}{f(x_n)}$  y  $\mu = \frac{f(z_n)}{f(y_n)}$ . Además  $A(\delta)$ ,  $G(t)$  y  $H(\mu)$  deben cumplir ciertas condiciones.

Young I. Kim, Ramandeep Behl y Sandile S. Motsa [54] recientemente presentaron una clase de métodos iterativos de orden ocho optimal según la conjetura de Kung-Traub, que viene dada por la siguiente ecuación de iteración:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= \phi_4(x_n, y_n), \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{a_2 f^2(x_n) - a_3 f(x_n) + f'(x_n)} \end{aligned}$$

donde  $a_2$  y  $a_3$  están definidas como

$$a_2 = \frac{A_n}{B_n} \text{ y } a_3 = \frac{-a_2(f(y_n) - f(x_n))^2 - f'(x_n) + f[x_n, y_n]}{f(y_n) - f(x_n)},$$

siendo que

$$A_n = (f'(x_n)(f(z_n) - f(y_n)) + f[x_n, z_n](f(y_n) - f(x_n)) + f[x_n, y_n])(f(x_n) - f(z_n)),$$

$$B_n = (f(y_n) - f(x_n))(f(y_n) - f(z_n))(f(x_n) - f(z_n)),$$

$f[x, y] = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$  es la diferencia dividida de orden uno y  $\phi_4(x_n, y_n)$  es un esquema optimal de orden cuatro.

Estas son sólo algunas de las ecuaciones de iteración más citadas en los últimos cinco años.

## 7.6. Una clase de tres puntos de Tipo Gander Optimal

Actualmente en [22] se están preparando unas notas para generar una clase de métodos de tres puntos optimal en donde se utilicen como base las funciones de peso que se usan en el teorema de Gander. Entre los resultados mas resaltantes están los siguientes:

**Teorema 7.6.1.** Si  $H(0) = 1$ ,  $\dot{H}(0) = \frac{1}{2}$ ,  $\ddot{H}(0) = 1$ ,  $|H'''(0)| < \infty$ ,  $|H^{iv}(0)| < \infty$ ,  $G(0,0) = 1$ ,  $G_t(0,0) = 1$ ,  $G_u(0,0) = \frac{1}{2}$ ,  $G_{tt}(0,0) = \frac{3+4H'''(0)}{6}$ ,  $G_{tu}(0,0) = 1$  y  $G_{ttt}(0,0) = \frac{4H'''(0)-6+H^{iv}(0)}{2}$ , entonces el método

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ z_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} H \left( 2 \frac{f(y_n)}{f(x_n)} \right) \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} G \left( 2 \frac{f(y_n)}{f(x_n)}, 2 \frac{f(z_n)}{f(y_n)} \right) \end{aligned} \quad (7.1)$$

es de orden ocho (optimal) y el error viene dado por

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= \frac{1}{135} (3A_3 + (4H'''(0) - 15)A_2^2) \times \\ &\quad (K_1 A_2^4 + K_2 A_2^2 A_3 + K_3 A_3^2 - 45A_2 A_4) A_2 e_n^8 + O(e_n^9), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} K_1 &= H'''(0) (G_{uu}(0,0)[160H'''(0) - 1200] - 240G_{ttu}(0,0) + 540) \\ &\quad - 60H^{iv}(0) - 12H^v(0) + 2250G_{uu}(0,0) + 900G_{ttu}(0,0) \\ &\quad + 30G_{tttt}(0,0) - 2025, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= 240H'''(0)G_{22}(0,0) - 60H'''(0) - 900G_{22}(0,0) \\ &\quad - 180G_{112}(0,0) + 850 \quad y \end{aligned}$$

$$K_3 = 90G_{22}(0,0) - 45.$$

### 7.6.1. Primer Caso

En el caso de que se considere  $G_{uu}(0,0) = \frac{1}{2}$ ,  $G_{ttu}(0,0) = \frac{4H'''(0)+27}{12}$  y

$$G_{tttt}(0,0) = \frac{100H'''(0) + 20H^{iv}(0) + 12H^v(0) - 375}{10},$$

entonces el error viene dado por

$$e_{n+1} = -\frac{1}{3}(3A_3 + (4H'''(0) - 15)A_2^2)A_2^2A_4e_n^8 + O(e_n^9)$$

Y si además  $H'''(0) = \frac{15}{4}$ , entonces  $e_{n+1} = -A_2^2A_3A_4e_n^8 + O(e_n^9)$ . En este caso se puede concluir que:

**Teorema 7.6.2.** Si  $H(0) = 1$ ,  $\dot{H}(0) = \frac{1}{2}$ ,  $\ddot{H}(0) = 1$ ,  $H'''(0) = \frac{15}{4}$ ,  $|H^{iv}(0)| < \infty$ ,  $|H^v(0)| < \infty$ ,  $G(0,0) = 1$ ,  $G_t(0,0) = 1$ ,  $G_u(0,0) = \frac{1}{2}$ ,  $G_{tt}(0,0) = 3$ ,  $G_{tu}(0,0) = 1$ ,  $G_{uu}(0,0) = \frac{1}{2}$ ,  $G_{ttt}(0,0) = \frac{9+H^{iv}(0)}{2}$ ,  $G_{ttu}(0,0) = \frac{7}{2}$  y  $G_{tttt}(0,0) = 2H^{iv}(0) + \frac{2}{5}H^v(0)$ , entonces el método dado por

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ z_{n+1} &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} H\left(2\frac{f(y_n)}{f(x_n)}\right) \\ x_{n+1} &= z_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} G\left(2\frac{f(y_n)}{f(x_n)}, 2\frac{f(z_n)}{f(y_n)}\right) \end{aligned} \quad (7.2)$$

es de orden ocho (optimal) y el error viene dado por

$$e_{n+1} = -A_2^2A_3A_4e_n^8 + O(e_n^9).$$

### 7.6.2. Segundo Caso

Considérese  $G(t,u) = R(t,u)g(t)$ , entonces  $G(0,0) = R(0,0)g(0) = 1$ , por lo que se puede seleccionar sin pérdida de generalidad que  $R(0,0) = g(0) = 1$ .

Luego

$$G_t(t,u) = R_t(t,u)g(t) + R(t,u)g'(t)$$

Como  $G_t(0, 0) = 1$ , entonces  $R_t(0, 0) = 1 - g'(0)$ . De ahora en adelante se utilizará  $g'(0)$  como un parámetro al que se le denominará  $A$ , o sea  $g'(0) = A$ . De esta manera  $R_t(0, 0) = 1 - A$ .

Por otro lado

$$G_u(t, u) = R_u(t, u)g(t)$$

y como  $G_u(0, 0) = \frac{1}{2}$  se tiene que  $R_u(0, 0) = \frac{1}{2}$ .

Además

$$G_{tu}(t, u) = R_{tu}(t, u)g(t) + R_u(t, u)g'(t).$$

Sustituyendo  $G_{tu}(0, 0) = 1$ , entonces  $R_{tu}(0, 0) = 1 - \frac{A}{2}$ . También

$$G_{tt}(t, u) = R_{tt}(t, u)g(t) + 2R_t(t, u)g'(t) + R(t, u)g''(t)$$

y al sustituir  $G_{tt}(0, 0) = \frac{3+4H'''(0)}{6}$  se obtiene

$$g''(0) = \frac{(2A-1)^2}{2} + \frac{2}{3}H'''(0) - R_{tt}(0, 0).$$

Derivando nuevamente respecto a  $t$

$$G_{ttt}(t, u) = R_{ttt}(t, u)g(t) + 3R_{tt}(t, u)g'(t) + 3R_t(t, u)g''(t) + R(t, u)g'''(t)$$

utilizando  $G_{ttt}(0, 0) = \frac{4H'''(0) - 6 + H^{iv}(0)}{2}$  se obtiene que

$$g'''(0) = \frac{3(2A-3)(2A^2-A+1)}{2} + 2AH'''(0) + \frac{1}{2}H^{iv}(0) - 3(2A-1)R_{tt}(0, 0) - R_{ttt}(0, 0).$$

## 1. Primera selección de $R$

Considérese la siguiente función racional

$$R(t, u) = \frac{1 + at + bu + ctu}{1 + dt + eu + ktu}$$

Es claro que  $R(0, 0) = 1$  y como  $R_t(0, 0) = a - d = 1 - A$ , luego  $a = d + 1 - A$ .

De igual forma  $R_u(0, 0) = b - e = \frac{1}{2}$ , luego  $b = e + \frac{1}{2}$ . Por otro lado  $R_{tu} = c - k - \frac{1}{2}d - (1 - A)e = 1 - \frac{A}{2}$ , así

$$c = 1 + k - \frac{A}{2} + \frac{d}{2} + (1 - A)e.$$

También como  $R_{tt}(0, 0) = 2(d - a)d$ . Al simplificar

$$R_{tt}(0, 0) = 2(A - 1)d.$$

Por último  $R_{ttt}(0, 0) = 6(a - d)d^2$ . Al simplificar

$$R_{ttt}(0, 0) = 6(1 - A)d^2.$$

Al hacer las sustituciones respectivas se tiene la función  $G(t, u)$  la cual se deja para que el lector la obtenga.

## 2. Segunda selección de $R$

Considérese la siguiente función

$$R(t, u) = 1 + at + bu + ctu.$$

Es claro que  $R(0, 0) = 1$  y como:

- $R_t(0, 0) = 1 - A$ , entonces  $a = 1 - A$
- $R_u(0, 0) = \frac{1}{2}$ , entonces  $b = \frac{1}{2}$
- $R_{tu}(0, 0) = 1 - \frac{A}{2}$ , entonces  $c = 1 - \frac{A}{2}$

Al hacer las sustituciones respectivas se tiene

$$G(t, u) = \left(1 + (1 - A)t + \frac{1}{2}u + \left(1 - \frac{A}{2}\right)tu\right)g(t)$$

donde  $g(t)$  debe satisfacer que  $g(0) = 1$ ,  $g'(0) = A$ ,

$$g''(0) = 2\left(A - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2}{3}H'''(0)$$

y

$$g'''(0) = 2AH'''(0) + \frac{1}{2}H^{iv} + 3\left(A - \frac{3}{2}\right)(2A^2 - A + 1).$$

**Si se utiliza  $g(t) = H_2(t)$  (función de Gander)**

En este caso  $g(0) = 1$ ,  $g'(0) = \frac{1}{2}$  entonces  $a = b = \frac{1}{2}$  y  $c = \frac{3}{4}$ , con ello

$$G(t, u) = \left( 1 + \frac{1}{2}(t + u) + \frac{3}{4}tu \right) H_2(t)$$

y además se debe cumplir que  $g''(0) = H_2''(0) = \frac{2}{3}H'''(0)$  y

$$g'''(0) = H_2'''(0) = H'''(0) + \frac{1}{2}H^{iv}(0) - 3.$$

Si además se utiliza  $g''(0) = H_2''(0) = 1$  (optimal para la clase de dos puntos) se debe cumplir que  $H'''(0) = \frac{3}{2}$  y  $g'''(0) = \frac{H^{iv}(0)-3}{2}$ .

Si por último  $g(t) = H_2(t) = H(t)$ , entonces también se debe cumplir que  $g^{iv}(0) = H_2^{iv}(0) = H^{iv}(0) = 6$ .

## 7.7. Dos ejemplos pertenecientes a esta clase

En esta sección se enuncian dos familias de métodos que pertenecen a la clase mostrada en la sección anterior y dadas en [22], que han sido estudiadas en [72].

Si la función de peso seleccionada viene dada por:  $H(t) = \frac{2-t}{2(1-t)}$  (tipo Super-Halley), entonces

$$H(0) = 1, \dot{H}(0) = \frac{1}{2}, \ddot{H}(0) = 1, \dddot{H}(0) = 3, H^{iv}(0) = 12.$$

Si se desea obtener una función de peso  $G$  que satisfaga las condiciones mencionadas, entonces al haber seleccionado la función  $H$ , la misma debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$G(0, 0) = 1, G_t(0, 0) = 1, G_u(0, 0) = \frac{1}{2}, G_{tt}(0, 0) = \frac{3 + 4\ddot{H}(0)}{6},$$

entonces

$$G_{tt}(0, 0) = \frac{5}{2}, G_{tu}(0, 0) = 1, G_{ttt}(0, 0) = \frac{4\ddot{H}(0) - 6 + H^{iv}(0)}{2} = 9.$$

De esta forma, se pueden obtener dos funciones bivariadas, una tipo polinomial y la otra racional, las cuales vienen dadas por

$$G(t, u) = 1 + t + \frac{1}{2}u + \frac{5}{4}t^2 + tu + \frac{3}{2}t^3 + Au^2$$

y

$$G(t, u) = \frac{4(1 + Atu)}{4 - 4t - 2u + 4tuA - t^2}$$

las cuales cumplen todas las condiciones.

Con esto se tienen las siguientes familias de orden ocho optimal

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( \frac{f(x_n) - f(y_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)} \right), \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} P(x_n, y_n, z_n) \end{aligned}$$

donde

$$P(x, y, z) = \left\{ 1 + 2\frac{f(y)}{f(x)} + \frac{f(z)}{f(y)} + 5\left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)^2 + 4\frac{f(z)}{f(x)} + 12\left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)^3 + 4A\left(\frac{f(z)}{f(y)}\right)^2 \right\}$$

con error dado por la ecuación

$$e_{n+1} = A_2(A_3 - A_2^2)((4A - 41)A_2^4 + (15 - 8A)A_3A_2^2 + (4A - 41)A_3^2 - A_2A_4)e_n^8 + O(e_n^9),$$

donde  $A_j = \frac{f^{j'}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$ ,  $j = 2, 3, 4$ , que para la clase de polinomios de segundo grado cuando  $A = \frac{41}{4}$  se tiene que el error para el método obtenido es

$$e_{n+1} = -166e_n^9 + O(e_n^{10})$$

y

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left( \frac{f(x_n) - f(y_n)}{f(x_n) - 2f(y_n)} \right), \\ x_{n+1} &= x_n - \frac{f(z_n)}{f'(x_n)} Q(x_n, y_n, z_n) \end{aligned} \quad (7.3)$$

donde

$$Q(x, y, z) = \frac{f(y)[f(x)]^2 - 4Af(x)f(y)f(z)}{f(y)[f(x)]^2 - 2f(x)[f(y)]^2 - f(z)[f(x)]^2 + 4Af(x)f(y)f(z) - [f(y)]^3}$$

con error dado por la ecuación

$$e_{n+1} = A_2^2(A_2^2 - A_3)((8A - 3)A_2^3 + (1 - 8A)A_2A_3 + A_4)e_n^8 + O(e_n^9),$$

donde  $A_j = \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!f'(\alpha)}$ ;  $j = 2, 3, 4$ , que para la clase de polinomios de segundo grado cuando  $A = \frac{3}{8}$  se tiene que el error para el método obtenido es

$$e_{n+1} = 5e_n^9 - 53e_n^{10} + O(e_n^{11}).$$



# Capítulo 8

## Métodos de tres puntos para raíces múltiples

La construcción de este tipo de métodos han aparecido durante la última década. En este capítulo se presentan dos clases de métodos recientes.

### 8.1. Clase de Thukral

En 2014 R. Thukral (ver [81]) presenta la siguiente clase de métodos de orden ocho:

$$\begin{aligned}y_n &= x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\z_n &= y_n - mt_1 \left( \frac{1 + bt_1}{1 + (b-2)t_1} \right) \left( \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) \\x_{n+1} &= z_n - mt_3 \left( u(t_1) + \frac{t_2}{1 - at_2} + 4t_3 \right) \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}\end{aligned}$$

donde  $a \in R, b \in R^+, t_1 = \frac{f(y_n)}{f(x_n)}, t_2 = \frac{f(z_n)}{f(y_n)}, t_3 = \frac{f(z_n)}{f(x_n)}$  y la función  $u$  debe seleccionarse de forma que satisfaga las siguientes condiciones:

$$u(0) = 1, u'(0) = 2, u''(0) = 10 - 4b; u'''(0) = 72 - 72b + 12b^2$$

Algunas funciones que satisfacen estas condiciones son

$$u_1(t) = 1 + 2t + (5 - 2b)t^2 + (12 - 12b + 2b^2)t^3$$

$$u_2(t) = \frac{5 - 2b - (2 - 8b + 2b^2)t + (1 + 4b)t^2}{5 - 2b - (12 - 12b + 12b^2)t}.$$

## 8.2. Clase de Behl, Alshomrani and Motsa

Recientemente en 2018 Ramandeep Behl, Ali Saleh Alshomrani y S. S. Motsa (ver [11]) presentan la siguiente clase de métodos :

$$y_n = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$z_n = y_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} u_n G_f(u_n)$$

$$x_{n+1} = z_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{w_n u_n}{1 - w_n} (H_f(u_n) + K_f(v_n))$$

donde las funciones  $G_f, H_f, K_f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  son funciones analíticas en un entorno de 0 con

$$u_n = \sqrt[m]{\frac{f(y_n)}{f(x_n)}}, v_n = \sqrt[m]{\frac{f(z_n)}{f(x_n)}}, w_n = \sqrt[m]{\frac{f(z_n)}{f(y_n)}}.$$

la cual es de orden ocho si

$$G(0) = m, G'(0) = 2m, K'(0) = -2m, H(0) = -m - K(0)$$

y

$$H'(0) = -2m, H''(0) = -G''(0) - 2m, H'''(0) = 24m - 6G'''(0) - G'''(0).$$

## Capítulo 9

# Dinámica de métodos iterativos para raíces simples

Usualmente cuando se desea hacer el estudio dinámico de métodos iterativos para aproximar raíces de ecuaciones no lineales se utilizan dos estrategias. La primera que mencionaremos acá es la basada en el estudio del comportamiento de dicho método a medida que se comienzan las iteraciones con un valor inicial complejo, lo cual nos permite hacer una representación gráfica de la cuenca de atracción del método cuando es aplicado a ejemplos particulares. La segunda tiene que ver con el estudio en base a las propiedades del operador resultante de aplicar el método en estudio a clases de funciones, usualmente polinomios de bajo grado. A los fines de este último enfoque es necesario hacer unas definiciones y describir algunas de las propiedades de dicho operador basadas en la propiedades de otro operador topologicamente conjugado al anterior. Un estudio bien organizado al respecto sobre el método de Newton es presentado por Sergio Plaza Salinas y José Manuel Gutiérrez Jiménez en [70].

## 9.1. Generalidades y conceptos básicos de dinámica compleja

En virtud de que en este capítulo se propone estudiar la dinámica de algunos métodos, es necesario presentar algunos conceptos básicos de dinámica compleja empleados en dicha área. Los mismos están dados en la tesis doctoral de Artidiello [6].

Sea  $R : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  una función racional sobre la esfera de Riemann,  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ , entonces  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  con  $P(z)$ ,  $Q(z)$  polinomios complejos sin factores comunes.

El grado de  $R(z)$  es el máximo de los grados de  $P(z)$  y  $Q(z)$ . Asumiremos que todas las aplicaciones a estudiar son de grado mayor o igual a 2.

La dinámica de aplicaciones racionales consiste en estudiar el comportamiento de las sucesiones  $\{z_n\}$  generadas recursivamente a partir de un cierto valor inicial  $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$  donde cada  $z_k = R^k(z_0)$  y donde  $R^k(z_0) = R \circ \dots \circ R$  es la composición de  $R(z)$  consigo misma  $k$  veces.

Dada una función racional  $R : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , donde  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$  es la esfera de Riemann, la órbita de un punto  $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$  está definida como:

$$\{z_0, R(z_0), R^2(z_0), \dots, R^n(z_0), \dots\}.$$

El estudio del comportamiento asintótico de las órbitas depende de la condición inicial  $z_0$ , analizado en el plano dinámico de la función racional  $R$  definida por los diferentes métodos iterativos.

Para obtener los planos dinámicos, se debe clasificar en primer lugar los puntos fijos o periódicos del operador racional  $R$ .

Un punto  $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$  es llamado **Punto Fijo** si satisface a  $R(z_0) = z_0$ . Si el punto fijo no es solución de la ecuación, recibe el nombre de Punto Fijo Extraño.

Un **Punto Periódico**  $z_0$  de período  $p > 1$  es un punto tal que  $R^p(z_0) = z_0$  y  $R^k(z_0) \neq z_0, k < p$ .

La **órbita de un punto periódico**  $z$  de periodo  $n$  está constituida por los  $n$  diferentes puntos, dado por la expresión:

$$O(z) = \{z, R(z), R^2(z), \dots, R^{n-1}(z)\}$$

Un **Punto Pre-periódico** es un punto  $z_0$  que no es periódico pero existe un  $k > 0$  tal que  $R^k(z_0)$  es periódico.

Un **Punto Crítico**  $z_0$  es un punto donde la derivada de la función racional se anula,  $R'(z_0) = 0$ .

Por otro lado, un punto fijo  $z_0$  es llamado **Atractor** si  $0 \neq |R'(z_0)| < 1$ , **Super-Atractor** si  $R'(z_0) = 0$ , **Repulsor** si  $|R'(z_0)| > 1$  y **Parabólico** si  $|R'(z_0)| = 1$ .

La estabilidad de una órbita periódica es definida por la magnitud (menor que uno o no) de  $|R'(z_1) \cdots R'(z_p)|$ , donde  $\{z_1, \dots, z_p\}$  son los puntos de la órbita del período  $p$ .

La cuenca de atracción de un atractor  $\bar{z}$  se define como el conjunto de pre-imágenes de cualquier orden:

$$A(\bar{z}) = \{z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} : R^n(z_0) \rightarrow \bar{z}, n \rightarrow \infty\}.$$

El **Conjunto de Julia** de un mapeo racional  $R(z)$ , denotado por  $\mathfrak{J}(R)$ , es la clausura del conjunto de puntos periódicos repulsores. Su complemento es el **Conjunto de Fatou**  $\mathfrak{F}(R)$ , es decir, el conjunto de Fatou está compuesto por los puntos cuyas órbitas tienen un atractor (punto fijo, órbita periódica o infinito). Su complementario en  $\widehat{\mathbb{C}}$  es el Conjunto de Julia,  $\mathcal{J}(R)$ ; por lo tanto el conjunto de Julia incluye todos los puntos fijos y las órbitas periódicas repulsoras y sus pre-imágenes. Esto significa que la cuenca de atracción de cualquier punto fijo pertenece al conjunto de Fatou. Por el contrario, las fronteras de las cuencas de atracción componen el conjunto de Julia.

## 9.2. Cuencas de atracción

En 1879 Cayley [26] hace un comentario sobre las cuencas de atracción del método de Newton para la clases de polinomios de grados dos y tres. Para este último plantea la imposibilidad de describirlas de manera sencilla. Mucho trabajo al respecto se ha realizado desde entonces. En el año 2002 Varona [83] desarrolla un estudio de algunos métodos numéricos para resolver ecuaciones no lineales por medio de la comparación de las cuencas de atracción de los mismos. A partir de allí se ha

popularizado dicho estudio tanto para el caso de raíces simples como múltiples.

En esta sección se presentarán las gráficas de las cuencas de atracción de la familia de métodos del tipo Newton-Chebyshev y Newton-Halley para raíces simples. Si se distingue con un color diferente a las regiones o conjunto de puntos que convergen a cada raíz de la función tratada, se puede generar mediante el uso de alguna herramienta computacional imágenes que muestran la complejidad de dichas regiones, lo cual permite observar el comportamiento del método para dichos puntos iniciales y la convergencia de los métodos a las raíces estudiadas e incluso se podría analizar también cuando convergen a puntos fijos extraños.

A efectos de observar la base de atracción de los métodos desarrollados, se considera la siguiente función:

$$h(x) = x^3 + 4x^2 - 10 \quad (9.1)$$

la cual tiene como raíces a  $-2,68261500670705 \pm 0,358259359924043$  y  $1,36523001341410$ .

### 9.2.1. Familia Newton-Chebyshev

C. Cadenas en [13] presenta una familia uniparamétrica tipo Newton-Chebyshev para hallar raíces simples de la ecuación  $f(x) = 0$ . Dicha familia está dada por la función de iteración:

$$G(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \left[ 1 + AL_f(x) \right],$$

donde  $L_f(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$  y el parámetro  $A \in \mathbb{C}$ . Así la ecuación de iteración viene dada por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \left[ 1 + AL_f(x_n) \right] \quad \text{dado } x_0, n = 0, 1, \dots \quad (9.2)$$

En esta función de iteración si el parámetro  $A = 0$  se obtiene el método de Newton y si  $A = \frac{1}{2}$  el método de Chebyshev.

Para la función  $h$ , dada en la ecuación (9.1), se generaron las cuencas de atracción para sus tres raíces, para distintos valores del parámetro  $A$

que permiten generar diversos métodos que pertenecen a la familia de tipo Newton-Chebyshev dado por (9.2), obsérvese la Figura 9.1.

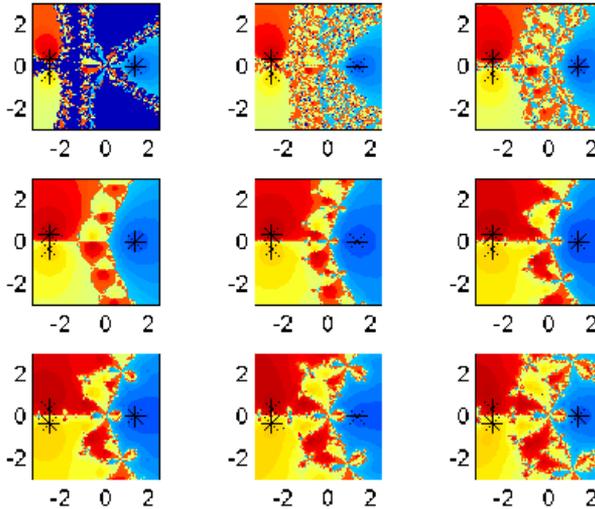


Figura 9.1: Newton-Chebyshev,  $A = \{-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}\}$

### 9.2.2. Familia Newton - Halley

C. Cadenas en [14] presenta una familia uniparamétrica tipo Newton-Halley para hallar raíces simples de la ecuación  $f(x) = 0$ . Dicha familia esta dada por la función de iteración:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \frac{1}{1 - AL_f(x_n)} \quad \text{dado } x_0, n = 0, 1, \dots \quad (9.3)$$

En esta función de iteración si el parámetro  $A = 0$  se obtiene el método de Newton y si  $A = \frac{1}{2}$  el método de Halley.

En la Figura 9.2 se muestran las bases de atracción para distintos valores del parámetro  $A$  de la familia de tipo Newton-Chebyshev dada por (9.2).

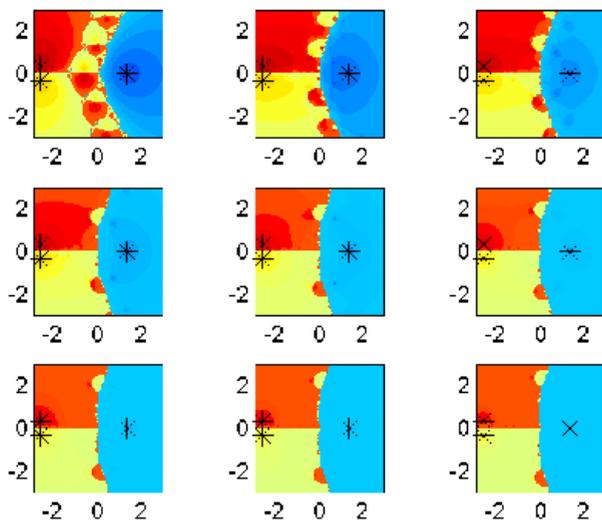


Figura 9.2: Newton-Halley,  $A = \{-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}\}$

### 9.3. Dinámica compleja de métodos iterativos para la clase de polinomios de grado dos

Cuando se desea hacer un estudio de la dinámica sobre la clase de polinomios de grado dos para un método o familia de métodos es necesario establecer la clase conjugada, para así obtener las expresiones analíticas de los puntos fijos, puntos críticos y establecer la naturaleza de los puntos fijos extraños. En esta sección se analizará la dinámica de la clase de polinomios de grado dos dada por  $P(x) = (x - a)(x - b)$ .

Primero se presenta la definición de conjugación topológica.

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones desde la esfera de Riemann en sí misma. Una conjugancia analítica entre  $f$  y  $g$  es un difeomorfismo analítico  $h$  desde la esfera de Riemann en sí misma tal que  $h \circ f = g \circ h$ . Vea [9].

**Teorema 9.3.1.** (Teorema de escalado). Sea  $f(z)$  una función analítica sobre la esfera de Riemann, y sea  $T(z) = \alpha z + \beta$ ,  $\alpha \neq 0$ , una transformación afín. Si  $g(z) = f \circ T(z)$ , entonces  $T \circ R_g \circ T^{-1} = R_f(z)$ . Esto

*significa que  $R_f$  es conjugada analíticamente a  $R_g$  por  $T$ .*

El teorema de escalado indica que el estudio de la dinámica al usar el adecuado cambio de coordenadas, la dinámica de la función de iteración a estudiar para polinomios puede ser reducido al estudio de la dinámica de la misma iteración para polinomios mas simples.

Debido a lo anterior, para estudiar la dinámica de una manera mas sencilla, hay que encontrar un mapeo racional  $S$  que sea conjugado a la función de iteración en estudio via la transformación de Möbius dada por  $M(z) = \frac{z-a}{z-b}$ . Al hacer esto los parametros  $a$  y  $b$  no deben aparecer en la nueva función racional  $S(z)$ , como un efecto del teorema de escalado que debe ser verificado por el método y/o familia en estudio.

### 9.3.1. Dinámica del método de Newton

En el caso del método de Newton aplicado a la clase de polinomios de grado dos mencionado anteriormente se tiene que  $S(z) = z^2$ , cuyos puntos fijos son  $z = 0$ ,  $z = \infty$  y  $z = 1$ . Por otro lado  $S' = 2z$ , que al evaluarlo en el punto fijo extraño se tiene que  $|S'(1)| = 2$ , de lo que se concluye que  $z = 1$  es un punto fijo extraño repulsor.

### 9.3.2. Dinámica del método de Halley

En este caso  $S(z) = z^3$ , que tiene los puntos fijos  $z = 0$ ,  $z = \infty$  y  $z = \pm 1$ . Además,  $S' = 3z^2$  luego  $|S'(\pm 1)| = 3$ , por lo que ambos puntos fijos extraños son repulsores.

### 9.3.3. Dinámica del método de Super Halley

Para el método de Super-Halley  $S(z) = z^4$ , con puntos fijos  $z = 0$ ,  $z = \infty$  y  $z_k = e^{i2k\pi/3}$ ,  $k = 0, 1, 2$ .  $S' = 4z^3$  entonces  $|S'(z_k)| = 4$ ,  $k = 0, 1, 2$ , por lo que los tres puntos fijos extraños son repulsores.

### 9.3.4. Dinámica de la familia de tipo Newton-Chebyshev

En esta sección se presenta un resumen de los resultados presentados en [13] sobre la dinámica de la familia de tipo Newton-Chebyshev dada por

la ecuación de iteración (9.2).

Primero, considérese  $R_f$  proveniente de la familia Newton-Chebyshev (9.2)

$$R_f = z - \frac{f(z)}{f'(z)} (1 + AL_f(z)); \quad \text{donde} \quad L_f(z) = \frac{f(z)f''(z)}{(f'(z))^2} \quad (9.4)$$

aplicada a  $P_2(z) = a_2(z - z_1)(z - z_2)$ .

**Teorema 9.3.2.** *Para la función racional  $R_p(z)$  proveniente de la familia (9.2) aplicada  $p(z) = (z - a)(z - b)$ ,  $a \neq b$ ,  $R_p(z)$  es conjugado via la transformación de Möbius dada por  $M(z) = \frac{z-a}{z-b}$  a*

$$S(z) = \frac{z^2(z^2 + 2z + 1 - 2A)}{(1 - 2A)z^2 + 2z + 1} \quad (9.5)$$

Los puntos fijos de  $S$  definida en (9.5), son  $z = 0$ ,  $z = \infty$  y

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 \\ z_{2,3} &= -(1 + A) \pm \sqrt{A(A + 2)}. \end{aligned}$$

En el siguiente resultado se presenta la estabilidad del punto fijo extraño  $z = 1$ .

**Teorema 9.3.3.** *El punto fijo extraño  $z = 1$  cumple con lo siguiente*

1. Si  $|A - 2| > 4$ , entonces  $z = 1$  es un atractor.
2. Si  $|A - 2| = 4$ , entonces  $z = 1$  es un punto fijo parabólico.
3. Si  $A \neq 2$  y  $|A - 2| < 4$ , entonces  $z = 1$  es un punto fijo repulsor.

En el siguiente resultado se presenta la estabilidad de los puntos fijos  $z = z_{2,3}$ .

**Teorema 9.3.4.** *los puntos fijos extraños  $z = z_{2,3}$  cumplen con lo siguiente*

1. Si  $|A + \frac{4}{3}| < \frac{2}{3}$ , entonces  $z = z_{2,3}$  son atractores y, en particular, estos son superatractores si  $A = -1$ .

2. Si  $|A + \frac{4}{3}| = \frac{2}{3}$ , entonces  $z = z_{2,3}$  son puntos fijos parabólicos.
3. Si  $A \neq 0$  y  $|A + \frac{4}{3}| > \frac{2}{3}$ , entonces  $z = z_{2,3}$  son puntos fijos repulsores.

Los puntos críticos de  $S(z)$  satisfacen  $S'(z) = 0$ , obteniéndose,  $z = 0$ ,  $z = -1$  (con multiplicidad dos),  $z = \infty$  y

$$z_{c1} = \frac{A + 1 + \sqrt{3A(2 - A)}}{2A - 1}, \quad (9.6)$$

$$z_{c2} = \frac{A + 1 - \sqrt{3A(2 - A)}}{2A - 1}. \quad (9.7)$$

Se puede observar que  $z_{c1} = \frac{1}{z_{c2}}$ . También,  $z_{c1} = z_{c2} = 1$  solo cuando  $A = 2$  y  $z_{c1} = z_{c2} = -1$  solo cuando  $A = 0$ .

En [13] se presenta también el estudio del comportamiento de la familia cuando se utilizan los puntos críticos como valores iniciales, basado en el espacio de parámetro, lo que permitió identificar algunos métodos con buen comportamiento y otros con comportamiento irregular.

### 9.3.5. Dinámica de la familia de tipo Newton-Halley

De manera similar a la sección anterior se hace un resumen de los resultados dados en [14] sobre la dinámica de la familia de tipo Newton-Halley dada por la ecuación de iteración (9.3).

En este caso se obtiene que

$$S(z) = \frac{z^2(z + 1 - 2A)}{(1 - 2A)z + 1} \quad (9.8)$$

con puntos fijos  $z = -1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$  y  $z = \infty$ . Obteniéndose los siguientes resultados

**Teorema 9.3.5.** *El punto fijo extraño  $z = -1$  cumple con lo siguiente*

1. Si  $Re\{A\} < -\frac{1}{2}$ , entonces  $z = -1$  es un atractor y es superatractor si  $A = -1$ .
2. Si  $Re\{A\} = -\frac{1}{2}$ , entonces  $z = -1$  es un punto fijo parabólico.

3. Si  $A \neq 0$  y  $Re\{A\} > -\frac{1}{2}$ , entonces  $z = -1$  es un punto fijo repulsor.

**Teorema 9.3.6.** *El punto fijo extraño  $z = 1$  cumple con lo siguiente*

1. Si  $Re\{A\} > \frac{3}{2}$ , entonces  $z = 1$  es un atractor y es superatractor si  $A = 2$ .
2. Si  $Re\{A\} = \frac{3}{2}$ , entonces  $z = 1$  es un punto fijo parabólico.
3. Si  $A \neq 1$  y  $Re\{A\} < \frac{3}{2}$ , entonces  $z = 1$  es un punto fijo repulsor.

En este caso los puntos críticos son  $z = 0$ ,  $z = \infty$  y

$$zc_1 = \frac{A^2 - A + 1 + \sqrt{A^4 - 2A^3 - A^2 + 2A}}{2A - 1} \quad (9.9)$$

y

$$zc_2 = \frac{A^2 - A + 1 - \sqrt{A^4 - 2A^3 - A^2 + 2A}}{2A - 1} \quad (9.10)$$

si  $A \neq 0, \frac{1}{2}, 1$ . Observe que  $zc_2 = \frac{1}{zc_1}$  y  $zc_1 = zc_2 = 1$  solo cuando  $A = 2$ .  $zc_1 = zc_2 = -1$  solo cuando  $A = -1$ . Cuando  $A = 0$  o  $A = 1$  el único punto crítico es  $z = 0$  y si  $A = \frac{1}{2}$ ,  $z = 0$  es un punto crítico con multiplicidad dos.

En [14] se presenta también el estudio del comportamiento de la familia cuando se utilizan los puntos críticos como valores iniciales, basado en el espacio de parámetro, lo que permitió identificar algunos métodos con buen comportamiento y otros con comportamiento irregular.

Para concluir este capítulo se sugiere hacer una revisión exhaustiva de los siguientes artículos: [3], [5], [45], [69], [35], [27], [28] entre otros mas recientes que los citan.

# Capítulo 10

## Dinámica de métodos iterativos para raíces múltiples

Las figuras que aparecen en este capítulo fueron realizadas haciendo adaptaciones al código dado en [15]. Al igual que en el capítulo anterior se mostrarán algunas cuencas de atracción para luego proceder con algunas ideas recientes para estudiar la dinámica compleja en el caso de raíces múltiples.

### 10.1. Cuencas de atracción para el Método de Newton Modificado

Usando  $f(x) = (x - 1)^m(x + 1)^n$ , en la ecuación del método de Newton modificado (4.1) con  $m = Kn$  se obtiene la ecuación de iteración

$$x_{r+1} = x_r - \frac{K(x_r - 1)(x_r + 1)}{(K + 1)x_r + K - 1}, \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (10.1)$$

Para mostrar la base de atracción de los puntos fijos  $x = \pm 1$  de la función de iteración

$$G(x) = x - \frac{K(x - 1)(x + 1)}{(K + 1)x + K - 1} \quad (10.2)$$

asociada a (10.1) se utiliza una malla de  $1000 \times 1000$  puntos, un máximo de 30 iteraciones y una tolerancia de  $10^{-2}$  en las Figuras 10.1 y 10.2. La degradación en los colores está relacionada con la velocidad de convergencia a los puntos fijos.

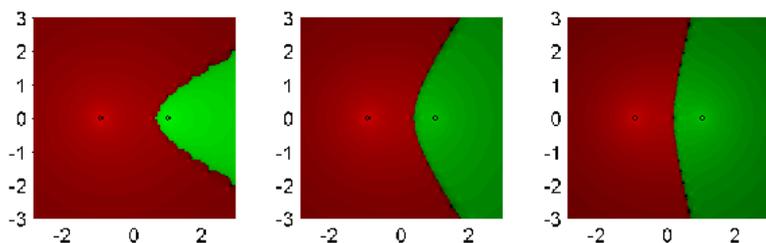


Figura 10.1: Cuencas de Atracción.  $f(x) = (x - 1)^m(x + 1)^n$ ,  $m = Kn$ , izquierda:  $K = 0,25$ , centro:  $K = 0,5$  y derecha:  $K = 0,75$ .

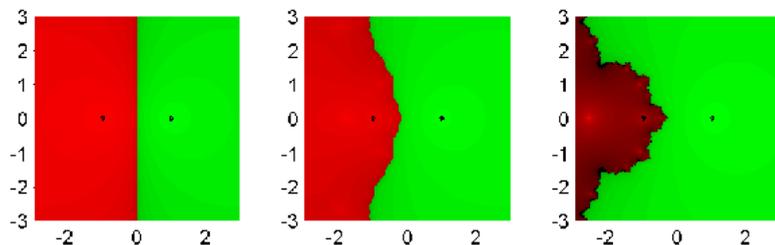


Figura 10.2: Cuencas de Atracción.  $f(x) = (x - 1)^m(x + 1)^n$ ,  $m = Kn$ , izquierda:  $K = 1$ , centro:  $K = 1,4$  y derecha:  $K = 1,8$ .

## 10.2. Dinámica compleja del Método de Newton Modificado para la clase de polinomios con dos raíces múltiples

De manera similar a como se estudia la dinámica para los métodos presentados en el capítulo anterior, se hace el estudio para el caso de raíces múltiples. Sin embargo, a diferencia de los estudios clásicos para el caso de raíces múltiples como por ejemplo [56] y [41] donde se utiliza un polinomio que tiene dos raíces con la misma multiplicidad, acá se establece la dependencia de las multiplicidades de las dos raíces de los polinomios estudiados (por medio del parámetro  $K$ ). Así, el estudio de la dinámica se realiza en función de este parámetro. Éste enfoque es dado en [18] y utilizado también en [23], [24], [25], [64] y [52].

En [18] se obtiene la función racional  $S$  dada por

$$S(z) = \frac{z^2}{(1-K)z + K} \quad (10.3)$$

cuyos puntos fijos son  $z = 0$ ,  $z = \infty$  y  $z = 1$ . Es obvio que  $z = 0$  y  $z = \infty$  son puntos fijos superatractores. Sin embargo, para el punto fijo extraño  $z = 1$  se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 10.2.1.** *El punto fijo extraño  $z = 1$  satisface:*

1. Si  $|K + 1| < 1$ , entonces  $z = 1$  es un atractor y es un superatractor si  $K = -1$ .
2. Si  $|K + 1| = 1$ , entonces  $z = 1$  es un punto fijo parabólico.
3. Si  $|K + 1| > 1$ , entonces  $z = 1$  es un punto fijo repulsor.

En [18] también aparece el estudio de los puntos críticos y el espacio de parámetro, que permite identificar algunos miembros de la clase de polinomios estudiados para los cuales el método de Newton Modificado tiene buen comportamiento. En las figuras 10.3 y 10.4 se muestran diversos planos dinámicos obtenidos en base a dicho análisis. Aparecen en color rojo los puntos iniciales que convergen a 0, en verde los que convergen a

$\infty$  y en negro los que no convergen a las raíces de la ecuación estudiada. Estas figuras son similares a las presentadas en [43] y [62], sin embargo las conclusiones son más generales en virtud de la dependencia entre las potencias  $m$  y  $n$ .

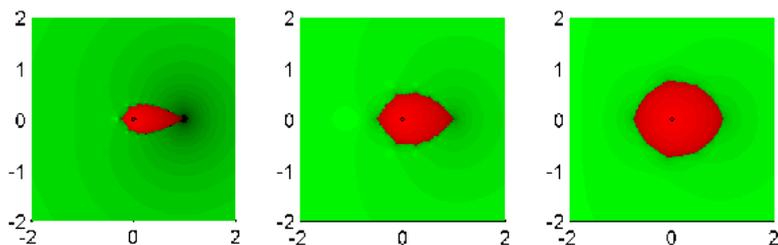


Figura 10.3: Planos dinámicos, izquierda:  $K = 0,25$ , centro:  $K = 0,5$  y derecha:  $K = 0,75$ .

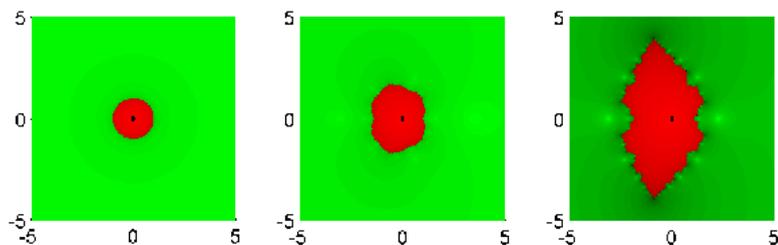


Figura 10.4: Planos dinámicos, izquierda:  $K = 1$ , centro:  $K = 1,4$  y derecha:  $K = 1,8$ .

# Bibliografía

- [1] S. Amat, S. Busquier y J. M. Gutiérrez. Geometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations. *J Comput Appl Math*, 157 (2003) 197-205.
- [2] S. Amat, S. Busquier y S. Plaza. Review of some iterative root-finding methods from a dynamical point of view. *Scientia*. 10 (2004) 3-35.
- [3] S. Amat, S. Busquier y S. Plaza, A construction of attracting periodic orbits for some classical third-order iterative methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 189 (2006) 22-33.
- [4] S. Amat, S. Busquier y S. Plaza, On the dynamics of a family of third-order iterative functions, *ANZIAM J*. 48 (2007) 343-359.
- [5] S. Amat, C. Bermdez, S. Busquier y S. Plaza. On the dynamics of the Euler iterative function. *Applied Mathematics and Computation*. 197 (2008) 725-732.
- [6] S. Artidiello. Implementación y convergencia de métodos iterativos para resolver ecuaciones y sistemas no lineales utilizando funciones peso. *Tesis Doctoral* (2014).
- [7] S. Artidiello, A. Cordero, J. R. Torregrosa y M. P. Vassileva, Optimal high-order methods for solving nonlinear equations, *Journal of Applied Mathematics*, Volume 2014, Article ID 591638, 9 pages.

- [8] D. Babajee, A. Cordero, F. Soleymani y J. R. Torregrosa On improved three-step schemes with high efficiency index and their dynamics, *Numer. Algor.* 65 (2014) 153-169.
- [9] A. F. Beardon. *Iteration of Rational Functions*, Springer-Verlag, New York, 1991
- [10] R. Behl y V. Kanwar. Variants of Chebyshev's methods with optimal order of convergence. *Tamsui Oxford Journal of Information and Mathematical Sciences*, 29, 1 (2013) 39-53.
- [11] R. Behl, A. S. Alshomrani y S. S. Motsa. An optimal scheme for multiple roots of nonlinear equations with eighth-order convergence. *Journal of Mathematical Chemistry*. 56 (7) (2018) 2069-2084.
- [12] C. E. Cadenas. On several Gander's theorem based third order iterative methods for solving nonlinear equations and their geometric constructions. *J. Numer. Math. Stoch*, 9 (1) (2017) 1-18.
- [13] C. E. Cadenas. A family of Newton-Chebyshev type methods to find simple roots of nonlinear equations and their dynamics. *Communications in Numerical Analysis*, 2 (2017) 172-185.
- [14] C. E. Cadenas. A family of Newton-Halley type methods to find simple roots of nonlinear equations and their dynamics. *Communications in Numerical Analysis*, 2 (2017) 157-171.
- [15] C. E. Cadenas. Cuencas de atracción usando MatLab. *Revista de Matemáticas de la Universidad del Atlántico*. 04 (2) (2017), 1-15.
- [16] C. E. Cadenas. Some geometric constructions of two variants of Newton's method to solving nonlinear equations with multiple roots. *Punjab University Journal of Mathematics* 50 (1) (2018) 15-21.
- [17] C. E. Cadenas R. On Geometric Constructions of third order methods for multiple roots of nonlinear equations. *Communications in Numerical Analysis*. 1 (2018) 42-55.

- [18] C. E. Cadenas R. A new approach to study the dynamics of the Modified Newton's method to multiple roots. Submitido.
- [19] C. E. Cadenas R. On Geometric Constructions of two points methods for simple roots of nonlinear equations. Submitido.
- [20] C. E. Cadenas R. On the geometric construction of a class of Jarratt-Gander type methods and its relationship with other classes of methods for polynomials of the second degree. En preparación.
- [21] C. E. Cadenas R, J. A. Orozco y E. Dávila. A New two points methods to find multiple roots of nonlinear equations. En preparación.
- [22] C. E. Cadenas R. A New Class of optimal three-point methods with convergence order eight for solving nonlinear equations. En preparación.
- [23] C. E. Cadenas R. Dinámica del método de Chebyshev Modificado para raíces múltiples. En preparación.
- [24] C. E. Cadenas R. Dinámica del método de Halley Modificado para raíces múltiples. En preparación.
- [25] C. E. Cadenas R. Dinámica del método de Super-Halley Modificado para raíces múltiples. En preparación.
- [26] A. Cayley, The Newton-Fourier imaginary problem, Amer. J. Math. 2 (1879) 97.
- [27] B. Campos, A. Cordero, Á. A. Magreñán, J. R. Torregrosa y P. Vindel. Study of a biparametric family of iterative methods. *Abstract and Applied Analysis*. Hindawi Publishing Corporation. 2014, (2014).
- [28] B. Campos, A. Cordero, J. R. Torregrosa y P. Vindel. Behaviour of fixed and critical points of the  $(\alpha, c)$ -family of iterative method, *J. Math. Chem.* 53, (2015) 807-827.

- [29] C. Chun. Some four-order iterative methods for solving nonlinear equations. *Appl. Math. Comput.* 195 (2008) 454-459.
- [30] C. Chun y Y. Ham. Some four-order modifications of Newton's method. *Appl. Math. Comput.* 197 (2008) 654-658.
- [31] C. Chun, M. Y. Lee, B. Neta y J. Džunić, On optimal fourth-order iterative methods free from second derivative and their dynamics, *Appl. Math. Comput.* 218 (2012) 6427-6438.
- [32] C. Chun y M. Lee. A new optimal eighth-order family of iterative methods for the solution of nonlinear equations, *J. Comput. Appl. Math.* **223** (2013) 506-519.
- [33] C. Chun, B. Neta y S. Kim. On Jarratt's family of optimal fourth-order iterative methods and their dynamics. *Fractals* 22, 1450013 (2014). (16 pages).
- [34] A. Cordero, J. Torregrosa y M. Vassileva. Three-step iterative methods with optimal eighth-order convergence. *J. Comput. Appl. Math.*, **235**(2011). 3189-3194.
- [35] A. Cordero, J. R. Torregrosa y P. Vindel. Dynamics of a family of Chebyshev-Halley type methods. *Appl. Math. Comput.* 219, (2013) 8568-8583.
- [36] A. Cordero, C. Jordan y J. R. Torregrosa, One-point Newton-type iterative methods: A unified point of view, *J. Comput. Appl. Math.* 275, (2015) 366-374.
- [37] E. Dávila. Diseño de una clase de metodos de dos puntos para resolver ecuaciones no lineales con raices multiples. Trabajo de Grade de Maestria. Departamento de Matematica, Universidad de Carabobo, 2018.
- [38] J. A. Ezquerro, J. M. Gutiérrez, M. A. Hernández y M. A. Salanova. Chebyshev-like methods and quadratic equations. *Rev. Anal. Numer. Theor. Approx.* 28 (1999) 23-35.

- [39] W. Gander, On Halley's iteration method, *Am Math Mon.* 92 (1985) 131-134
- [40] M. García-Olivo y J. M. Gutiérrez. Notas históricas sobre el método de Chebyshev para resolver ecuaciones no lineales. (2013) *Misc. Mat*, 57, 63-83.
- [41] Y. H. Geum, Y. I. Kim y Á. Alberto Magreñán. A study of dynamics via Möbius conjugacy map on a family of sixth-order modified Newton-like multiple-zero finders with bivariate polynomial weight functions. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 344 (2018) 608-623.
- [42] J. M. Gutiérrez y M. A. Hernández, A family of Chebyshev-Halley type methods in Banach spaces, *Bull. Austral. Math. Soc.* 55 (1997) 113-130.
- [43] J. M. Gutiérrez, Á. A. Magreñán and N. Romero. Dynamic aspects of damped Newton's method. *Proceedings of the Eighth International Conference on Engineering Computational Technology*, (2012) 16 pages.
- [44] J. Gutiérrez y M. Olivo. El método de Chebyshev para el cálculo de las raíces de ecuaciones no lineales. *Tesis Doctoral*. Universidad de la Rioja. (2013).
- [45] J.M. Gutiérrez, M. A. Hernández y N. Romero. Dynamics of a new family of iterative processes for quadratic polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 233 (2010)2688-2695.
- [46] E. Halley. *Methodus Nova el Facilis Inveniendi Radices A Equationum Quarum cumque Generaliter, Sine Praevia Reductione.* *P. Trans.* 18, (1694) 136-148.
- [47] E. Hansen y M. Patrick. A Family of Root Finding Methods. *Numer. Math.* 27, (1977) 257-269.
- [48] M. A. Hernández. Newton Rapshons method and Convexity. (1992), 159-166.

- [49] M. A. Hernández, Chebyshev's approximation algorithms and applications, *Comput. Math. Appl.* 41 (2001) 433-445.
- [50] P. Jarratt. Some fourth order multipoint iterative methods for solving equations. *Math. Comp.* 20 (95) (1966) 434-437.
- [51] P. Jarratt. Some efficient fourth order multipoint methods for solving equations. *BIT.* 9 (1969) 119-124.
- [52] D. M. Jiménez. Dinámica de una familia uniparamétrica de tercer orden para resolver ecuaciones no lineales con raíces simples y/o múltiples. Trabajo de grado para optar al título de Magister en Matemáticas Aplicadas. Universidad de Carabobo, Venezuela. 2017.
- [53] V. Kanwar, Sukhjit Singh y S. Bakshi, Simple geometric constructions of quadratically and cubically convergent iterative functions to solve nonlinear equations, *Numer Algor* 47 (2008) 95-107.
- [54] Y. I. Kim, R. Behl y S. S. Motsa. An Optimal Family of Eighth-Order Iterative Methods with an Inverse Interpolatory Rational Function Error Corrector for Nonlinear Equations. *Mathematical Modelling and Analysis.* 22:3 (2017) 321-336.
- [55] R. F. King. A family of fourth order methods for nonlinear equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis.* 10 (1973) 876-879.
- [56] Y. I. Kim y Y. H. Geum. Dynamical Analysis via Möbius Conjugacy Map on a Uniparametric Family of Optimal Fourth-Order Multiple-Zero Solvers with Rational Weight Functions. *Discrete Dynamics in Nature and Society.* Volume 2018. Article ID 7486125. 1-19.
- [57] J. S. Kou, Y. T. Li y X. H. Wang, A uniparametric Chebyshev-type method free from second derivatives, *Appl. Math. Comput.* 179 (2006) 296-300.
- [58] H. T. Kung y J. F. Traub. Optimal order of one-point and multipoint iteration, *J. Assoc. Comput. Mach.* 21, (1974) 643-651.

- [59] S. Li, L. Xiangke y C. Lizhi. A new fourth-order iterative method for finding multiple roots of nonlinear equations. *Applied Mathematics and Computation* 215, 3 (2009) 1288-1292.
- [60] S.G. Li, L.Z. Cheng y B. Neta. Some fourth-order nonlinear solvers with closed formulae for multiple roots. *Computers and Mathematics with Applications*. 59 (2010) 126-135.
- [61] B. Liu y X. Zhou. A new family of fourth-order methods for multiple roots of nonlinear equations. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*. 18 (2) (2013) 143-152.
- [62] Á. A. Magreñán, Estudio de la dinámica del metodo de Newton amortiguado (Ph.D. thesis), Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, 2013.
- [63] A. Melman, Geometry and convergence of Euler's and Halley's methods, *SIAM Rev.*39, 4 (1997) 728-735.
- [64] J. A. Orozco. Sobre una familia de metodos para resolver ecuaciones no lineales, basada en el promedio de dos metodos de tipo Newton-Halley. Trabajo de grado para optar al título de Magister en Matemáticas Aplicadas. Universidad de Carabobo, Venezuela. 2017.
- [65] A. M. Ostrowski. *Solution of equations and systems of equations*, Prentice-Hall, Engle-wood Cliffs, NJ, USA, 1964
- [66] A. M. Ostrowski. *Solution of Equations in Euclidean and Banach Space*. Academic Press, New York, 1973.
- [67] M. Petković, B. Neta, L. Petković y J. Džunić. *Multipoint methods for solving nonlinear equations*. Academic press, 2013.
- [68] I. Petković y D. Herceg. Symbolic computation and computer graphics as tools for developing and studying new root-finding methods. *Appl. Math. Comput.* 295 (2017) 95-113.

- [69] S. Plaza y N. Romero. Attracting cycles for the relaxed Newtons method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 235 (2011) 3238-3244.
- [70] S. Plaza y J. M. Gutiérrez. *Dinámica del Método de Newton*. Universidad de la Rioja. 2013.
- [71] F. A. Potra y V. Pták, Nondiscrete introduction and iterative processes, in: *Research Notes in Mathematics*, Vol. 103, Pitman, Boston, 1984.
- [72] L. Quiñonez. *Estudio dinámico de métodos de tres puntos optimales para la resolución de ecuaciones no lineales optimales*. Trabajo de grado para optar al título de Magister en Matemáticas Aplicadas. Universidad de Carabobo, Venezuela. 2017.
- [73] J. Raphson. *Analysis Aequationum Universalis*. Typis TB prostant venales apud A. & I. Churchill (1702).
- [74] R. Sharma y A. Bahl. General Family of Third Order Methods for Multiple Roots of Nonlinear Equations and Basin Attractors for Various Methods. *Advances in Numerical Analysis Volume 2014*, Article ID 963878, 8 pages.
- [75] E. Schröder. Über unendlichviele Algorithm zur Auffosung der Gleichungen. *Math. Ann.*, 2 (1870) 317-365.
- [76] J. R. Sharma y R. Sharma. Modified Jarratt method for computing multiple roots. *Applied Mathematics and Computation* 217, 2 (2010) 878-881.
- [77] Singh, Anuradha y J. P. Jaiswal. An efficient family of optimal fourth-order iterative methods for finding multiple roots of nonlinear equations. *Proc. Natl. Acad. Sci., India, Sect. A Phys. Sci.* (JulySeptember 2015) 85(3) 439-450.
- [78] T. R. Scavo y J. B.Thoo, On the geometry of Halley's method, *Am Math Mon* 102 (1995) 417-426.

- [79] J.F. Traub. Iterative methods for resolution of equations. Prentice Hall, NJ 1964.
- [80] R. Thukral y M. Petković. A family of three-point methods of optimal order for solving nonlinear equations, *J. Comput. Appl. Math.* **223** (2010) 2278-2284.
- [81] R. Thukral. A new family of multi-point iterative methods for finding multiple roots of nonlinear equations. *Journal of Modern Methods in Numerical Mathematics.* 5:2 (2014), 9-17.
- [82] S. Weerakoon y T. G. I. Fernando. A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence, *Appl. Math. Lett.* 13 (8) (2000) 87-93.
- [83] J. L. Varona, Graphic and numerical comparison between iterative methods, *The Mathematical Intelligencer* 24 (1)(2002)3746.
- [84] X. Wang, D. Shi y D. Shi. A Modified Super-Halley's Method Free From Second Derivative, *Advances in Mathematics* vol 44, No. 1. (2015) 151-154.
- [85] L. Zhao, X. Wang y W. Guo. New families of eighth order methods with high efficiency index for solving nonlinear equations. *WSEAS Transactions on Mathematics*, 11 (2012) 283-293.



## Instituciones y organismos patrocinadores



Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas



Universidad Central de Venezuela



Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado



Universidad de Carabobo



Universidad de Los Andes



Universidad de Oriente



Universidad del Zulia



Universidad Simón Bolívar



Fundación Empresas Polar



Asociación Matemática Venezolana



Commission Developing Countries - IMU



Centre International de Mathématiques Pure et Appliquées



Unión Matemática de América Latina y El Caribe

## **Consejo Directivo**

Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC)

### **Director**

Eloy Sira

### **Subdirector**

Alexander Briceño

### **Representante del Ministerio del Poder Popular para Educación Universitaria, Ciencia y Tecnología**

Guillermo Barreto

### **Gerencia General**

Dori Mujica

### **Ediciones IVIC**

#### **Comisión Editorial**

### **Coordinador**

Eloy Sira

Horacio Biord

Jesús Eloy Conde

María Teresa Curcio

Pamela Navarro

Héctor Suárez

Erika Wagner

