

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE STOKES EN 2D.

Orozco T. José A.

Cadenas R. Carlos E.

manshes_88@hotmail.com

ccadenas@uc.edu.ve

Departamento de Matemática, FACYT. Universidad de Carabobo - Venezuela.

Resumen. *En el siguiente trabajo se utilizan los métodos de Elementos Finitos Galerkin Continuo (GC) de Alto Orden y Diferencias Finitas Escalonadas, para resolver las ecuaciones de Stokes en 2D. Se desarrollaron los algoritmos necesarios para los métodos mencionados y luego se realizó una comparación entre ellos. Para el método de Elementos Finitos se realizó una forma híbrida (simbólico-numérico) para obtener la discretización de las matrices de rigidez y convección. Se utilizaron problemas clásicos a fines de realizar estudios de convergencia para dichos métodos.*

Palabras Claves: Stokes, Elementos Finitos, Diferencias Finitas.

1. INTRODUCCIÓN

En esta sección se presenta la formulación formal del problema y se proporciona una breve reseña histórica de las ecuaciones de Stokes.

1.1. Planteamiento del Problema

El sistema de ecuaciones de Stokes

$$-\nu \nabla^2 \vec{u} + \nabla p = \vec{f} \quad \text{en } \Omega \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2)$$

es un sistema de segundo orden, donde las incógnitas son la velocidad \vec{u} y la presión p , las cuales son muy utilizadas para modelar el flujo de fluidos. La ecuación (1) representa la conservación de momento, y la ecuación (2), la conservación de la masa, la cual es llamada restricción de incompresibilidad.

1.2. Antecedentes

En 1978, V. Girault [1], planteó una formulación equivalente de las ecuaciones de Stokes que se deriva de utilizar métodos de Elementos Finitos Mixtos de orden arbitrario. En 1984, John C. Strikwerda [2], presentó un esquema en diferencias finitas tanto para las ecuaciones de Stokes como para las de Navier-Stokes incompresibles, con un número de Reynolds bajo. En 1997, M.A. Olshanskii [3], garantizó en espacios bi y tridimensionales, para el problema de Stokes con condiciones de contorno en el campo de velocidades, que el complemento de Schur correspondiente es el operador identidad. En 1997, Wen Bai [4], propuso dos métodos por Elementos Finitos Mixtos para las ecuaciones de Stokes en 2D. En 2009, C. Pozrikidis [5], recomienda el uso de diferencias finitas escalonadas para la resolución de las ecuaciones de Stokes.

1.3. Objetivo General

Desarrollar herramientas computacionales que permitan resolver las ecuaciones de Stokes en 2D por medio del Método Elementos Finitos Rectangulares, utilizando una forma híbrida (Simbólico-Numérico) y compararlo con el Método de Diferencias Finitas Escalonadas.

2. MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS ESCALONADAS

2.1. Mallado Escalonado

El mallado escalonado se compone de dos mallas superpuestas. Las líneas de la cuadrícula en la malla principal están representadas por las líneas continuas, y las líneas de la cuadrícula en la malla secundaria están representadas por las líneas discontinuas. La malla principal se ajusta a la frontera física del flujo (Figura: 1).

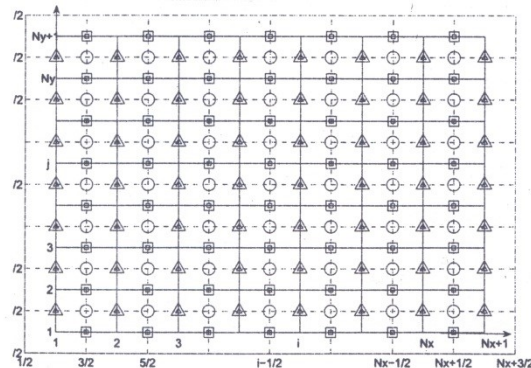


Figura 1: Mallado Escalonado, \triangle componente x de la velocidad, \square componente y de la velocidad, \circ presión

2.1.1. Ecuaciones y Discretización

Sean u y v las componentes de la velocidad y p la presión. Al discretizar las ecuaciones, se obtiene:

$$f_{i,j-\frac{1}{2}}^1 = -\nu \left(\frac{u_{i+1,j-\frac{1}{2}} - 2u_{i,j-\frac{1}{2}} + u_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j-\frac{1}{2}} + u_{i,j-\frac{3}{2}}}{(\Delta y)^2} \right) + \frac{p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \quad (3)$$

$$f_{i-\frac{1}{2}}^2 = -\nu \left(\frac{v_{i+\frac{1}{2},j} - 2v_{i-\frac{1}{2},j} + v_{i-\frac{3}{2},j}}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i-\frac{1}{2}} - 2v_{i-\frac{1}{2}} + v_{i-\frac{1}{2},j-1}}{(\Delta y)^2} \right) + \frac{p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta y} \quad (4)$$

$$0 = \frac{u_{i,j-\frac{1}{2}} - u_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + \frac{v_{i-\frac{1}{2},j} - v_{i-\frac{1}{2},j-1}}{\Delta y} \quad (5)$$

Para imponer las condiciones de frontera, se utiliza el procedimiento dado en Pozrikidis [5], donde se usa un método de extrapolación

3. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS GC

En esta sección se presenta el método de Elementos Finitos Galerkin Continuo presentado por Elman[6], usando una forma híbrida (Simbólico-Número) para obtener las matrices de rigidez y convección asociadas a las ecuaciones de Stokes. Sean los espacios de Sobolev,

$$\mathbf{H}_E^1 = \{ \vec{u} \in \mathcal{H}^1(\Omega)^d \mid \vec{u} = \vec{w} \text{ en } \partial\Omega_D \}, \quad (6)$$

$$\mathbf{H}_{E_0}^1 = \{ \vec{v} \in \mathcal{H}^1(\Omega)^d \mid \vec{v} = \vec{0} \text{ en } \partial\Omega_D \}, \quad (7)$$

El problema se reduce a: Encontrar $\vec{u} \in \mathbf{H}_E^1$ y $p \in L_2(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla \vec{u} : \nabla \vec{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \vec{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} \vec{s} \cdot \vec{v} \, d\partial\Omega \quad \forall \vec{v} \in \mathbf{H}_{E_0}^1, \quad (8)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \vec{u} \, d\Omega = 0 \quad \forall q \in L_2(\Omega). \quad (9)$$

3.1. Aproximación por Elementos Finitos

Partiendo de la formulación débil descrita anteriormente y definida mediante espacios de dimensión finita $\mathbf{X}_0^h \subset \mathbf{H}_{E_0}^1$ y $M^h \subset L_2(\Omega)$. La aproximación por Elementos Finitos $\vec{u}_h \in \mathbf{X}_E^h$ esta asociada únicamente con el vector $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n_u})^T$ de coeficientes reales en la expansión,

$$\vec{u}_h = \sum_{j=1}^{n_u} \mathbf{u}_j \vec{\phi}_j + \sum_{j=n_u+1}^{n_u+n_\theta} \mathbf{u}_j \vec{\phi}_j, \quad (10)$$

con $\sum_{j=1}^{n_u} \mathbf{u}_j \vec{\phi}_j \in \mathbf{X}_0^h$ y donde $(\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \dots, \vec{\phi}_{n_u})$ es una base de este espacio y n_u su dimensión. Una vez discretizadas dichas ecuaciones se pueden expresar como un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C}^T \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (11)$$

donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez, \mathbf{C} la matriz de convección, \mathbf{u} y \mathbf{p} las incógnitas, y \mathbf{f} y \mathbf{g} el lado derecho del sistema de ecuaciones.

3.1.1. Construcción de la Matriz de Rigidez (K)

Tomando en consideración la forma bilineal: $\mathbf{K} = [k_{rm}]$, $k_{rm} = \int_{\Omega} \nabla \vec{\phi}_r : \nabla \vec{\phi}_m$, $K_{r,m} = \int_{\Omega_e} (\nabla \phi_r(x, y))^T \nabla \phi_m(x, y) dx dy$, donde r y m son naturales. Se aplican las transformaciones

$$\nabla \phi_r(x, y) = (J^{-1} \cdot \nabla \phi_r(\xi, \eta)) \quad y \quad \nabla \phi_m(x, y) = (J^{-1} \cdot \nabla \phi_m(\xi, \eta)), \quad (12)$$

siendo $dx dy = |J| d\xi d\eta$

$$K_{r,m} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (J^{-1} \cdot \nabla \phi_r(\xi, \eta))^T \cdot J^{-1} \cdot \nabla \phi_m(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta \quad (13)$$

Colocando $\phi_r(\xi, \eta) = \psi_{i_1}(\xi) \psi_{j_1}(\eta)$, $\phi_m(\xi, \eta) = \psi_{i_2}(\xi) \psi_{j_2}(\eta)$, donde las ψ son las funciones de interpolación de Lagrange en la dirección dada. Luego de simplificar se obtiene:

$$\begin{aligned} K_{r,m} &= \frac{J_{22}^2}{|J|} \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_{i_1}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_{i_2}(\xi) d\xi \cdot \int_{-1}^1 \psi_{j_1}(\eta) \psi_{j_2}(\eta) d\eta \\ &+ \frac{J_{11}^2}{|J|} \int_{-1}^1 \frac{\partial}{\partial \eta} \psi_{j_1}(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \psi_{j_2}(\eta) d\eta \cdot \int_{-1}^1 \psi_{i_1}(\xi) \psi_{i_2}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (14)$$

donde J_{11}^{-1} y J_{22}^{-1} son los elementos de la diagonal de la matriz inversa de la jacobiana.

3.1.2. Construcción de la Matriz de Convección (C)

$$\mathbf{C} = [c_{rm}], \quad c_{rm} = \int_{\Omega} \psi_r \nabla \cdot \vec{\phi}_m = \int_{\Omega_e} \phi_m(x, y) \nabla \cdot \phi_r(x, y) dx dy \quad (15)$$

Sustituyendo a la divergencia y sabiendo que:

$$\frac{\partial}{\partial k} \phi_r(x, y) = \frac{\partial}{\partial \xi} \phi_r(\xi, \eta) \frac{\partial \xi}{\partial k} + \frac{\partial}{\partial \eta} \phi_r(\xi, \eta) \frac{\partial \eta}{\partial k} = \nabla \phi(\xi, \eta) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial k} \\ \frac{\partial \eta}{\partial k} \end{pmatrix}; \quad k = x, y \quad (16)$$

como $dx dy = |J| d\xi d\eta$. Después de simplificar se obtiene,

$$\begin{aligned} C_{r,m} &= |J|^2 J_{11}^{-1} \int_{-1}^1 \psi_{i_1}(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_{i_2}(\xi) d\xi \cdot \int_{-1}^1 \psi_{j_1}(\eta) \psi_{j_2}(\eta) d\eta \\ &+ |J|^2 J_{22}^{-1} \int_{-1}^1 \psi_{j_1}(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \psi_{j_2}(\eta) d\eta \cdot \int_{-1}^1 \psi_{i_1}(\xi) \psi_{i_2}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (17)$$

las ecuaciones (14) y (17) son calculadas usando la librería simbólica de *MatLab*[®].

4. RESULTADOS

Ejemplo: Resolver las ecuaciones de Stokes (1) y (2) en el dominio $\Omega_{\square} = (0, 1) \times (0, 1)$, con $\nu = 1$ y $\vec{f} = (0, 0)$, considerando $u(x, 1) = 1$, $u(x, 0) = v(1, y) = v(0, y) = 0$. *Solución:* Al utilizar las mallas de tamaño 2×2 , 4×4 , 8×8 , 16×16 , 32×32 y 64×64 se calcula el error mediante la ecuación $E = \max \|u_i - u_i^h\|$, $\forall i \in I$; donde u_i^h es la velocidad calculada, u_i es la velocidad obtenida con la malla más fina (64×64) y el conjunto de índices de los nodos, I . En la figura 2, se presenta la solución para una malla 64×64 la cual se considerará como la solución exacta.

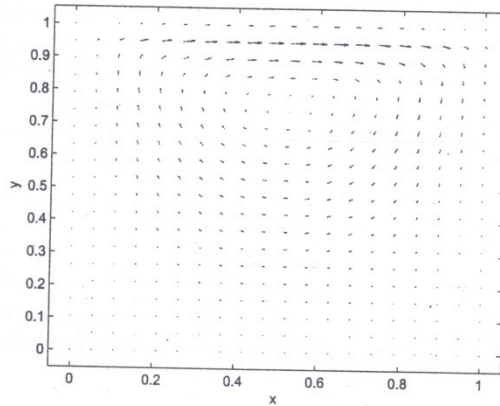


Figura 2: Gráfica de las soluciones exactas del ejemplo

Al aproximar por los métodos Diferencias Finitas Escalonadas y Elementos Finitos Galerkin Continuo se obtuvo los siguientes resultados:

n	$\ E_n(u)\ _{\max}$	Orden(u)	$\ E_n(v)\ _{\max}$	Orden(v)
2	$8,6347 \times 10^{-1}$	-	$3,3758 \times 10^{-2}$	-
4	$6,8699 \times 10^{-1}$	0.32986	$2,0527 \times 10^{-1}$	-1.2932
8	$5,8327 \times 10^{-1}$	0.23613	$2,0530 \times 10^{-1}$	-0.0002183
16	$4,5622 \times 10^{-1}$	0.35443	$1,7562 \times 10^{-1}$	0.22528
32	$2,3766 \times 10^{-1}$	0.94083	$1,0175 \times 10^{-1}$	0.78743

Cuadro 1: Convergencia para u y v , por el Método DF escalonado

5. CONCLUSIÓN

Se implementó el código para grado genérico, tanto para la matriz de rigidez y convección, en forma simbólica, luego se ensambló la matriz global y se procede a resolver las ecuaciones

n	$\ E_n(u)\ _{máx}$	Orden(u)	$\ E_n(v)\ _{máx}$	Orden(v)
2	$2,1548 \times 10^{-1}$	-	$1,2640 \times 10^{-1}$	-
4	$1,7265 \times 10^{-1}$	0.31970	$1,4303 \times 10^{-1}$	-0.71832
8	$1,5150 \times 10^{-1}$	0.18853	$1,2205 \times 10^{-1}$	0.22885
16	$1,0838 \times 10^{-1}$	0.48322	$9,0168 \times 10^{-2}$	0.43678

Cuadro 2: Convergencia para u y v , por el método EF Galerkin Continuo, con $p = 2$

n	$\ E_n(u)\ _{máx}$	Orden(u)	$\ E_n(v)\ _{máx}$	Orden(v)
2	$1,7296 \times 10^{-1}$	-	$1,5838 \times 10^{-1}$	-
4	$1,5528 \times 10^{-1}$	0.15551	$1,5166 \times 10^{-1}$	0.062516
8	$1,3088 \times 10^{-1}$	0.24666	$1,2829 \times 10^{-1}$	0.24145
16	$9,4906 \times 10^{-2}$	0.46367	$8,905 \times 10^{-2}$	0.66513

Cuadro 3: Convergencia para u y v , por el método EF Galerkin Continuo, con $p = 3$

lineales con las herramientas que posee *MatLab*[®]. Se calculan dichas matrices para diferentes grados de los polinomios que interpolan tanto la presión como la velocidad. Por eso en el ejemplo numérico se pueden usar los elementos generalizados del tipo Taylor-Hood $(Q_{p+1}Q_p)$, los cuales proporcionaron en pruebas previamente realizadas una mejor y más confiable aproximación a las soluciones de las Ecuaciones de Stokes que en el caso (Q_pQ_p) . En base a diversas pruebas realizadas este código de Elementos Finitos Simbólico-Numérico, se muestra competitivo con respecto al método de Diferencias Finitas Escalonadas

REFERENCIAS

- [1] V. Girault. *A Mixed Finite Element Method for the Stationary Stokes Equations*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 534–555, 1978.
- [2] John C. Strikwerda. *Finite Difference Methods for the Stokes and Navier Stokes Equations*. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 5(1):56–68, 1984.
- [3] M A Ol'shanskii. *On the Stokes problem with model boundary conditions*. Sbornik: Mathematics, 188(4):603–4620, 1997.
- [4] Wen Bai. *The quadrilateral Mini finite element for the Stokes problem*. Elsevier Science S.A., pages 41–47, 1997.
- [5] C. Pozrikidis. *Fluid Dynamics: Theory, Computation, and Numerical Simulation*, Springer, 2009.
- [6] Howard C. Elman y David J. Silvester y Andrew J. Wathe. *Finite Elements and Fast Iterative Solvers*. Oxford University, 2005.