

UNIVERSIDAD DE CARABOBO.



**FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL**

**MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE INCÓGNITAS DE
GIRO**

Alirio R. Martínez M.

Bárbula, Mayo 2009

AGRADECIMIENTOS

A Jesús también conocido como Jehová, el Dios Todopoderoso, por haberme ayudado a lograr mis objetivos y darme sabiduría y todo cuanto necesité.

A mis Padres, por preocuparse por mí, para que completara mis estudios, y por estar conmigo siempre en los buenos y malos momentos.

A mi familia, por extenderme la mano siempre.

Al Ing. Julio Pineda, mi Tutor de tesis, por su valiosa colaboración de forma incondicional y sincera, prestada en todos los aspectos para el desarrollo de este trabajo.

A mis amigos y a todas aquellas personas que de una forma u otra colaboraron con el desarrollo de este trabajo de grado.

A la Universidad de Carabobo, y en especial a los profesores que me dieron clases durante el transcurso de la carrera.

Al personal Administrativo y Obrero de la Universidad de Carabobo.

DEDICATORIA

A Dios,
A mis Padres,
A mi Familia,
A mis compañeros y amigos,
A la Universidad de Carabobo y sus profesores,
A todo el que lea esta tesis para aprender.

INDICE

INTRODUCCIÓN	5
CAPITULO I	
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	
1.1 Objetivo General.....	8
1.2 Objetivos Específicos.....	8
1.3 Justificación.....	8
1.4 Limitación y Alcance.....	9
CAPITULO II	
MARCO TEORICO	
3.1 Antecedentes.....	11
3.2 Reseña Histórica.....	11
3.3 Deducción las Fórmulas del Método de las Rotaciones.....	15
CAPITULO III	
MARCO METODOLOGICO	
2.1 Tipo de Investigación.....	36
2.2 Procedimientos de Investigación.....	36
CAPITULO IV	
RESULTADOS DE LA INVESTIGACION	
4.1 Introducción al Método.....	38
4.2 Fundamentos teóricos en que se basa el Método de Eliminación de Incógnitas de Giro.....	40

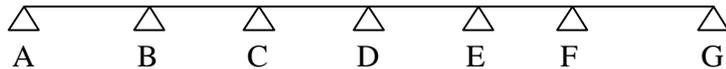
4.3 Deducción de las ecuaciones del Método de Eliminación de Incógnitas de Giro.....	41
4.4 Criterio para considerar un arco con junta articulada a la derecha o a la izquierda de <i>j</i>	50
4.5 Pasos a seguir para aplicar el Método de Eliminación de Incógnitas de Giro.....	52
4.6 Ejemplos de Estructuras sin resolver su análisis.....	53
4.7 Ejemplos Explicativos.....	58
4.8 Ejemplos de Estructuras resolviendo su análisis.....	85
CAPITULO V	
ANALISIS DE RESULTADOS	
5.1 Comparaciones.....	100
5.2 Análisis de Resultados.....	102
CAPITULO VI	
6.1 Conclusiones.....	105
6.2 Recomendaciones.....	106
BIBLIOGRAFIA	107
ANEXOS	108
APENDICE A	113
APENDICE B	122

INTRODUCCIÓN

Para analizar estructuras en 2D, se utilizan diferentes métodos, los cuáles generan a la final un sistema de ecuaciones a resolver. En la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad de Carabobo, se enseñan diferentes métodos de análisis de estructuras en 2d. Entre ellos tenemos: Método de Cross, método de rotaciones, método del portal, método de la viga conjugada, método de las fuerzas, método de doble integración, etc.

Generalmente, al aplicar uno de los métodos de análisis, se forma un sistema de ecuaciones que está determinado por el número de incógnitas.

Por ejemplo, si se tiene la siguiente losa sometida a cargas externas:



Para resolver el análisis de la estructura, por el método de las rotaciones, tendríamos que considerar como incógnitas, los giros de las juntas en B, C, D, E y F, lo cuál generaría un sistema de ecuaciones de 5x5.

El método presentado en este trabajo de grado, surge de la necesidad de reducir el sistema de ecuaciones que se genera al analizar estructuras con otros métodos. Ello se logra, generando a partir de las ecuaciones del método de las rotaciones, otras ecuaciones, referidas a las características de los miembros que concurren en una junta rígida. En ese sentido, las nuevas ecuaciones, quedan en función de las características elásticas de los miembros concurrentes, y de los giros de las juntas diferentes a la junta donde concurren. Es decir, el giro de la junta donde concurren varios miembros, no aparecerá como incógnita en las nuevas ecuaciones. Esta particularidad de las nuevas ecuaciones así encontradas permite, al que analiza una estructura, escoger cuáles giros de juntas serán incógnitas y cuáles no, lo cuál no era posible al aplicar otros métodos. La forma de hacer la escogencia de las incógnitas, será explicada más adelante en el capítulo 4.

El método de eliminación de incógnitas de giro es otra alternativa para analizar estructuras en 2d, y no pretende sustituir los métodos de análisis existentes, ni pretende competir con las herramientas de análisis asistidos por computadoras.

Este trabajo de grado ha sido estructurado en 6 capítulos:

En el primer capítulo se presentan el planteamiento del problema, el objetivo general, los objetivos específicos, la justificación, y la limitación y alcance.

En el siguiente capítulo se trata el marco teórico, se presenta la deducción de las ecuaciones del método de las rotaciones tanto para miembros de directriz recta, como para miembros tipo arco. Esto se hace con la finalidad de comprender el verdadero origen de las ecuaciones del método de eliminación de incógnitas de giro. También se presentan en este capítulo, los antecedentes y la reseña histórica.

El marco metodológico aparece en el tercer capítulo. En ese sentido, se presenta el tipo de investigación y los procedimientos de investigación.

El cuarto capítulo presenta los resultados de la investigación, presentando así, una introducción a este método, luego, los fundamentos teóricos en que se basa el método, la deducción de las ecuaciones del método de eliminación de incógnitas de giro, el criterio para considerar una arco con junta articulada a la derecha o a la izquierda de la junta j , y por último los pasos a seguir para aplicar el método de eliminación de incógnitas de giro. También este capítulo presenta ejemplos de análisis de estructuras. Aquí se presentan ejemplos de estructuras sin resolver su análisis, ejemplos explicativos, y ejemplos de estructuras resolviendo su análisis.

En el quinto capítulo se presentan las comparaciones y los análisis de resultados.

Por último en el sexto capítulo se presentan las conclusiones y las recomendaciones.

CAPÍTULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El problema que se intenta resolver, es el de analizar las estructuras en 2d, de una manera más rápida y sencilla. Una manera de lograrlo es, eliminando algunas de las incógnitas que se generan normalmente con el método de las rotaciones, logrando así, reducir el tamaño del sistema de ecuaciones que se genera al final del análisis.

En el método de las rotaciones, el tamaño del sistema de ecuaciones, está determinado por el número de incógnitas que se generan. De esta manera, si se generan un número “n” de incógnitas en el análisis, el sistema de ecuaciones que se forma de un sistema de nxn, en métodos convencionales.

1.1 Objetivo General

Presentar un método de análisis manual de estructuras en 2d, que pueda aplicarse en la práctica, para apoyar al Ingeniero Civil en ejercicio, en la revisión de los resultados de análisis estructurales asistidos por computadoras, y que pueda ser enseñado en la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad de Carabobo como método alternativo.

1.2 Objetivos específicos

- 1.2.1 Presentar las ecuaciones generales del método de eliminación de incógnitas de de giro.
- 1.2.2 Establecer los pasos a seguir para la aplicación del método de eliminación de incógnitas.
- 1.2.3 Mostrar ejemplos explicativos de análisis estructural, usando los pasos a seguir, para la aplicación del método de eliminación de incógnitas.
- 1.2.4 Exhibir ejemplos de análisis estructural, usando el método de eliminación de incógnitas, y usando el método de las rotaciones, con la finalidad de comparar:
 - Número de incógnitas que se generan en ambos métodos.
 - Tamaño del sistema de ecuaciones que se genera al final del análisis en cada método.
 - Resultados numéricos, usando ambos métodos.

1.3 Justificación

El desarrollo de este trabajo de grado, está basado en que los métodos de análisis manuales de estructuras en 2d, son utilizados por los ingenieros civiles para revisar los análisis de estructuras asistidos por computadoras, ellos buscan los métodos más prácticos y que den resultados rápidos, es decir, que sean lo menos trabajosos

posibles. El método aquí presentado, entra en esa categoría, y por lo tanto resulta factible el desarrollo de este trabajo.

1.4 Limitación y Alcance

El método de análisis estructural presentado en este trabajo de grado, alcanza a resolver el análisis de estructuras en las que se pueden considerar despreciables los efectos producidos por fuerzas de corte y fuerza axial. Por lo tanto, está limitado a resolver estructuras donde se considera que el área de la sección transversal de los miembros estructurales tiende a infinito ($A \rightarrow \infty$), es decir, este método no es aplicable a estructuras que deben considerarse totalmente deformables. Además se limita a analizar estructuras en 2d.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes

El método de eliminación de incógnitas, tiene sus antecedentes en la deducción de las ecuaciones del método de las rotaciones, para miembros empotrados-articulados. Así, pues, debido a que la deducción estas ecuaciones se logra a través un despeje de el giro de la junta que está articulada, y luego se sustituye en la expresión de momento de la junta empotrada, hacia la articulada, y que luego ésta queda en función de el giro de la junta empotrada solamente, surge la idea de seguir el mismo procedimiento, en el caso de miembros que concurren en una misma junta, en donde se hace sumatoria de momentos alrededor de la junta en donde concurren todos los miembros, e igualando al momento externo aplicado en esa junta, luego, se despeja el giro de la junta donde concurren todos los miembros, y se sustituye en las expresiones de empujes y momentos de los miembros, que quedarán en función de las juntas pertenecientes a todos los miembros, exceptuando el giro de la junta donde concurren todos.

2.2 Reseña histórica

El análisis estructural, tal como lo conocemos hoy en día, evolucionó durante varios miles de años. Durante ese tiempo, muchos tipos de estructuras, como son vigas, arcos, armaduras y marcos, se usaron en la construcción a los largo de cientos o miles de años antes de que se desarrollaran para ellas métodos satisfactorios de análisis.

Si bien los antiguos ingenieros manifestaron tener cierto entendimiento del comportamiento estructural (como lo prueban sus exitosas construcciones de grandes puentes, catedrales, barcos de vela, etc.), un progreso real en la teoría de análisis estructural ocurrió sólo en los últimos 160 años.

Los egipcios y otros antiguos constructores contaban seguramente con algunas reglas empíricas obtenidas de la experiencia para determinar los tamaños de los miembros estructurales. Sin embargo, no contamos con pruebas de que hayan desarrollado alguna teoría de análisis estructural. El egipcio Imhotep, quien construyó la pirámide escalonada de Sokkara alrededor del año 3000 a.C., es considerado a veces como el primer ingeniero estructural del mundo.

Aunque los griegos construyeron algunas magníficas estructuras, sus contribuciones a la teoría estructural fueron muy escasas. Pitágoras (582-500 a.C.), de quien se dice que creó la palabra *matemáticas*, es famoso por el teorema geométrico que lleva su nombre. (Este teorema en realidad ya era conocido por los sumerios hacia 2000 a.C.) Arquímedes (287-212 a.C.) desarrolló algunos principios fundamentales de la estática e introdujo el término *centro de gravedad*.

Los romanos fueron constructores extraordinarios y muy competentes en el uso de ciertas formas estructurales, como son los arcos semicirculares de mampostería. Al igual que los griegos, ellos también tenían muy pocos conocimientos de análisis estructural e hicieron aún menos progresos científicos en la teoría estructural. Probablemente, ellos diseñaron la mayoría de sus hermosos edificios desde el punto de vista más bien artístico. Tal vez sus grandes puentes y acueductos fueron dimensionados con reglas empíricas; sin embargo, si esos métodos de diseño condujeron a dimensiones insuficientes, las estructuras deben haber fallado sin que haya quedado un registro histórico de ellas. Sólo sabemos de ellas que fueron diseñadas con éxito.

Una de las más grandes contribuciones al análisis estructural, así como a todos los otros campos científicos, fue el desarrollo del sistema de numeración hindú-arábigo. Matemáticos hindúes desconocidos crearon en los siglos II y III a.C. un sistema de numeración del uno al nueve. Alrededor del año 600 d.C., los hindúes inventaron el símbolo *sunya* (que significa *vacío*), que ahora llamamos *cero*. (Al parecer, los mayas ya habían desarrollado el concepto de cero 300 años antes.)

En el siglo VIII d.C., los árabes tomaron este sistema de numeración de los escritos científicos de los hindúes. En el siguiente siglo, un matemático persa escribió un libro que incluyó el sistema. Su libro fue traducido al latín algunos años después y llevado a Europa. Alrededor del año 1000 d.C., el papa Silvestre II decretó que los números hindú-arábigos deberían ser usados por los cristianos.

Antes de que pudieran hacerse avances reales en el análisis estructural fue necesario desarrollar la ciencia de la mecánica de los materiales. Hacia mediados del siglo XIX se habían hecho grandes progresos en esta ciencia. Un físico francés, Charles Augustin de Coulomb (1785-1836), con base en el trabajo de numerosos investigadores realizado a lo largo de cientos de años, sentaron las bases de la mecánica de materiales. Especial importancia tuvo un libro de texto publicado por Navier en 1826, en el que analizó las resistencias y deflexiones de vigas, columnas, arcos, puentes colgantes y otras estructuras.

Se cree que fue Andrea Palladio (1518-1580), un arquitecto italiano, quien usó por primera vez las armaduras modernas. Él revivió algunos tipos de estructuras romanas antiguas, así como las reglas empíricas para dimensionarlas. Sin embargo, fue hasta 1847 que Squire Whipple (1804-1888) introdujo el primer método racional para el análisis de armaduras. Ésta fue la primera gran contribución de Estados Unidos a la teoría de las estructuras. Se dice con frecuencia que el análisis de armaduras de Whipple señaló el principio del análisis estructural moderno. Desde entonces ha habido una serie continua de importantes desarrollos en esta ciencia.

Varios métodos excelentes para calcular deflexiones fueron publicados entre 1860 y 1880, y estos aceleraron el desarrollo del análisis estructural. Entre los más importantes investigadores y sus logros se cuentan: James Clerk Maxwell (1831-1879), de Escocia, y su teorema de las deflexiones recíprocas, publicado en 1864; Otto Mohr (1835-1918), de Alemania, y su método de los pesos elásticos, presentado en 1870; Alberto Castigliano (1847-1884), de Italia, y su teorema sobre el trabajo mínimo, y Charles E. Greene (1842-1903), Estados Unidos, y sus teoremas de área-momento, publicados en 1873.

El advenimiento de los ferrocarriles dio un impulso al desarrollo del análisis estructural. De pronto fue necesario construir puentes de grandes claros capaces de soportar cargas móviles muy pesadas. En consecuencia, el cálculo de esfuerzos y deformaciones adquirió gran importancia. Los esfuerzos por fatiga e impacto se volvieron temas muy importantes. Hasta entonces no se tuvo necesidad imperiosa de analizar estructuras estáticamente indeterminadas; sin embargo, los puentes de claros continuos para ferrocarriles crearon esta necesidad.

Un método para analizar vigas continuas estáticamente indeterminadas (el teorema de los tres momentos) fue dado a conocer en 1857 por el francés B.P.E Clapeyron (1799-1864) y se usó para el análisis de muchos puentes de ferrocarril. En las décadas que siguieron se hicieron muchos otros avances en el análisis de estructuras indeterminadas basados en los recientes métodos desarrollados sobre el cálculo de deflexiones.

Otto Mohr, quien trabajó con ferrocarriles, reformuló en forma práctica muchos de los desarrollos teóricos antes obtenidos. Al respecto, es notable su publicación en 1874 del método de deformaciones consistentes para el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas.

En Estados Unidos, dos grandes desarrollos en el análisis de estructuras estáticamente indeterminadas fueron hechos por G.A Maney (1888-1947) y Hardy Cross (1885-1959). En 1915 Maney presentó el método pendiente-deflexión, mientras que Cross introdujo la distribución de momentos en 1924.

En la primera mitad del siglo XX, muchos problemas estructurales complejos fueron expresados en forma matemática, pero no se disponía entonces de computadoras para resolver prácticamente las ecuaciones resultantes. Esta situación continuó en los años 40 cuando gran parte del trabajo para analizar estructuras de aviones se realizó con matrices. Por fortuna, el desarrollo de las computadoras hizo práctico el uso de ecuaciones para esa y otros tipos de estructuras, incluidos los edificios de gran altura.

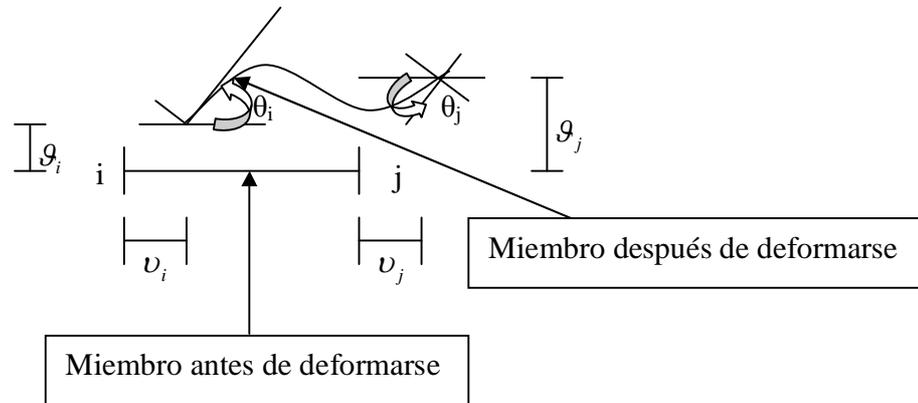
Parece irónico que los estudiantes actuales puedan aprender en unos pocos meses las teorías y los principios del análisis estructural que a la humanidad le tomó miles de años desarrollar.

2.3 Deducción de fórmulas del método de las rotaciones

A continuación, se presenta la deducción de las fórmulas del método de las rotaciones, para arcos y miembros de sección variable de directriz recta. Estas fórmulas son necesarias para la deducción de las fórmulas del método aquí presentado, y además se utilizan en complementación del mismo.

Comencemos con los miembros de sección variable de directriz recta:

Sea el miembro de sección variable, empotrado, en sus juntas extremas j e i, las cuáles tienen movimientos $\theta_i, \theta_j, v_i, v_j, u_i, u_j$. La resolución del problema se encuentra aplicando el método de las fuerzas, obteniéndose así los coeficientes elásticos.



Donde $\varphi_{ij} = \frac{g_j - g_i}{L}$, y $\Delta_L = v_j - v_i$. Siendo φ_{ij} el giro del miembro y Δ_L el alargamiento o acortamiento del mismo.

Ahora debemos hallar las redundantes que se muestran en la siguiente figura, para resolver el problema por el método de las fuerzas.



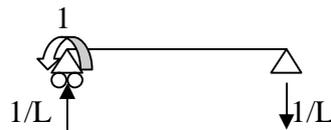
Ahora tenemos los siguientes sistemas:

Sistema (0):



$$M(x)=0$$

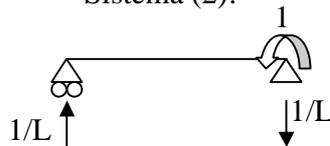
Sistema (1):



$$M_1(x) = \frac{X}{L} - 1 = \varepsilon - 1$$

$$\text{Donde } \varepsilon = \frac{X}{L}$$

Sistema (2):



$$M_2(x) = \frac{X}{L} = \varepsilon$$

$$\text{Donde } \varepsilon = \frac{X}{L}$$

$$\partial_{ij} = \int \frac{M_i M_j}{EI} dx + Cq \int \frac{V_i V_j}{AG} dx + \int \frac{N_i N_j}{AE} dx = L \left[\int \frac{M_i M_j}{EI} d\varepsilon + Cq \int \frac{V_i V_j}{AG} d\varepsilon + \int \frac{N_i N_j}{AE} d\varepsilon \right]$$

Donde Cq es un coeficiente de corte que depende del material.

Haciendo $I = \alpha(\varepsilon)I_o$, $A = \beta(\varepsilon)A_o$, Donde I_o = Inercia mas pequeña del miembro, y A_o = Área mas pequeña del miembro.

μ es el módulo de Poisson del material, y $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$; $r_o^2 = \frac{I_o}{A_o}$, y $K_o = \frac{I_o}{L}$,

entonces, despreciando el efecto de las fuerzas de corte y axial:

$$\partial_{ij} = \frac{1}{EK_o} \int_0^1 \frac{M_i M_j}{\alpha(\varepsilon)} d\varepsilon$$

Por lo tanto nos queda:

$$\partial_{11} = \frac{1}{EK_o} \int_0^1 \frac{(\varepsilon-1)^2}{\alpha(\varepsilon)} d\varepsilon$$

$$\partial_{22} = \frac{1}{EK_o} \int_0^1 \frac{\varepsilon^2}{\alpha(\varepsilon)} d\varepsilon \quad \partial_{12} = \partial_{21} = \frac{1}{EK_o} \int_0^1 \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{\alpha(\varepsilon)} d\varepsilon$$

Ahora si hacemos:

$$\phi_i = \int_0^1 \frac{(\varepsilon-1)^2}{\alpha(\varepsilon)} d\varepsilon$$

$$\phi_j = \int_0^1 \frac{\varepsilon^2}{\alpha(\varepsilon)} d\varepsilon$$

$$\phi = \int_0^1 \frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{\alpha(\varepsilon)} d\varepsilon$$

$$\partial_{11} = \frac{1}{EK_o} \phi_i$$

$$\partial_{22} = \frac{1}{EK_o} \phi_j$$

$$\partial_{12} = \partial_{21} = \frac{1}{EK_o} \phi$$

Ahora aplicando el método de las fuerzas tenemos:

$$D_1 = D_{10} + \partial_{11} X_1 + \partial_{12} X_2$$

$$D_2 = D_{20} + \partial_{21} X_1 + \partial_{22} X_2$$

Siendo, $D_1 = \theta_i - \varphi_{ij}$ $D_2 = \theta_j - \varphi_{ij}$ $D_{10} = D_{20} = 0$ entonces nos queda:

$$\theta_i - \varphi_{ij} = \frac{1}{EK_o} \phi_i X_1 + \frac{1}{EK_o} \phi X_2$$

$$\theta_j - \varphi_{ij} = \frac{1}{EK_o} \phi X_1 + \frac{1}{EK_o} \phi_j X_2$$

Resolviendo el sistema tenemos:

$$X_1 = \frac{(\theta_i - \varphi_{ij})\phi_j - (\theta_j - \varphi_{ij})\phi}{\phi_i\phi_j - \varphi^2} EK_o = \frac{\phi_j\theta_i - \phi\theta_j - (\phi_j - \phi)\varphi_{ij}}{\phi_i\phi_j - \varphi^2} EK_o$$

$$X_2 = \frac{(\theta_j - \varphi_{ij})\phi_i - (\theta_i - \varphi_{ij})\phi}{\phi_i\phi_j - \varphi^2} EK_o = \frac{\phi_i\theta_j - \phi\theta_i - (\phi_i - \phi)\varphi_{ij}}{\phi_i\phi_j - \varphi^2} EK_o$$

Ahora haciendo:

$$C_i = \frac{\phi_j}{\phi_i\phi_j - \varphi^2}; C_j = \frac{\phi_i}{\phi_i\phi_j - \varphi^2}; C = \frac{-\phi}{\phi_i\phi_j - \varphi^2}, \text{ nos queda:}$$

$$X_1 = M_{ij}^c = [C_i\theta_i + C\theta_j - (C_i + C)\varphi_{ij}]EK_o$$

$$X_2 = M_{ji}^c = [C\theta_i + C_j\theta_j - (C_j + C)\varphi_{ij}]EK_o$$

Donde M_{ij}^c , M_{ji}^c , son solicitaciones debidas a los movimientos de apoyo solamente, y los coeficientes elásticos de un miembro de sección variable de directriz recta son C_i , C_j , y C .

Ahora, sea el mismo miembro empotrado-empotrado, con cargas externas aplicadas, que generen la función $M_o(\varepsilon)$ =función momento en el sistema (0), y sean las juntas j e i, juntas sin desplazamientos, podemos obtener las fuerzas de empotramiento del miembro debido a cargas externas.

Ahora $D_1 = D_2 = 0$, y el sistema de ecuaciones, nos queda:

$$0 = D_{10} + \frac{1}{EK_o} \phi_i X_1 + \frac{1}{EK_o} \phi X_2$$

$$0 = D_{20} + \frac{1}{EK_o} \phi X_1 + \frac{1}{EK_o} \phi_j X_2$$

Resolviendo el sistema nos queda:

$$X_1 = M_{ij}^E = \frac{-D_{10}\phi_j + D_{20}\phi}{\phi_i\phi_j - \varphi^2} EK_o = -[C_i D_{10} + C D_{20}]EK_o$$

$$X_2 = M_{ji}^E = \frac{-D_{20}\phi_i + D_{10}\phi}{\phi_i\phi_j - \varphi^2} EK_o = -[C_j D_{20} + C D_{10}]EK_o$$

Donde:

$$D_{10} = \frac{1}{EK_o} \int_0^1 \frac{M_o(\varepsilon)}{\alpha(\varepsilon)} (\varepsilon - 1) d\varepsilon$$

$$D_{20} = \frac{1}{EK_o} \int_0^1 \frac{M_o(\varepsilon)}{\alpha(\varepsilon)} \varepsilon d\varepsilon$$

Las solicitaciones finales entonces son:

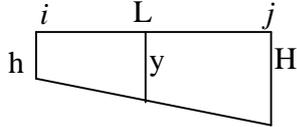
$$X_1 = M_{ij} = M_{ij}^E + M_{ij}^C$$

$$X_2 = M_{ji} = M_{ji}^E + M_{ji}^C$$

Las expresiones anteriores son para cualquier miembro de sección variable de directriz recta (expresiones generales).

Ahora para casos particulares de variaciones de altura de sección a lo largo del miembro, podemos aplicar procedimientos directos ó numéricos de área (Regla de Simpson o Trapecios), para hallar las diferentes integrales.

Para el caso de variación recta, aplicando procedimientos directos:



$$y = \frac{H-h}{L} x + h = h[(\gamma - 1)\varepsilon + 1]; \text{ siendo } \gamma = \frac{H}{h} \text{ y } \varepsilon = \frac{x}{L}.$$

$$I = \frac{by^3}{12} = \frac{bh^3}{12} [(\gamma - 1)\varepsilon + 1]^3; \alpha(\varepsilon) = [(\gamma - 1)\varepsilon + 1]^3$$

$$A = by = bh[(\gamma - 1)\varepsilon + 1]; \beta(\varepsilon) = (\gamma - 1)\varepsilon + 1$$

$$\phi_i = \int_0^1 \frac{(\varepsilon - 1)^2}{[(\gamma - 1)\varepsilon + 1]^3} d\varepsilon$$

$$\phi_j = \int_0^1 \frac{\varepsilon^2}{[(\gamma - 1)\varepsilon + 1]^3} d\varepsilon$$

$$\phi = \int_0^1 \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)}{[(\gamma - 1)\varepsilon + 1]^3} d\varepsilon$$

Resolviendo las integrales nos queda:

$$\phi_i = \frac{1}{(\gamma - 1)^2} \left[\frac{Ln\gamma}{\gamma - 1} + \frac{\gamma - 3}{2} \right]$$

$$\phi_j = \frac{1}{(\gamma - 1)^2} \left[\frac{Ln\gamma}{\gamma - 1} + \frac{1 - 3\gamma}{2\gamma^2} \right]$$

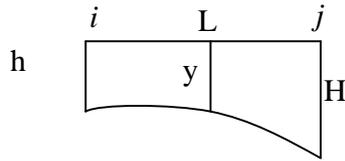
$$\phi = \frac{1}{(\gamma - 1)^2} \left[\frac{Ln\gamma}{\gamma - 1} + \frac{1 - 3\gamma}{2\gamma^2} \right] - \frac{1}{2\gamma^2}$$

Ahora para el caso de variación parabólica, y para el caso particular en que la altura “y” varia de la forma $y = ax^2 + c$, aplicando procedimientos directos, tenemos:

Para $x = 0$, $y = h$, entonces $y = ax^2 + h$

Y para $x = L$, $y = H$, entonces $H = aL^2 + h$, y $a = \frac{H - h}{L^2}$, por lo que resulta:

$$y = (H - h) \left(\frac{x}{L} \right)^2 + h = h [(\gamma - 1)\varepsilon^2 + 1]$$



$$I = \frac{by^3}{12} = \frac{bh^3}{12} [(\gamma - 1)\varepsilon^2 + 1]^3; \alpha(\varepsilon) = [(\gamma - 1)\varepsilon^2 + 1]^3$$

$$A = by = bh[(\gamma - 1)\varepsilon^2 + 1]; \beta(\varepsilon) = (\gamma - 1)\varepsilon^2 + 1$$

$$\phi_i = \int_0^1 \frac{(\varepsilon - 1)^2}{[(\gamma - 1)\varepsilon^2 + 1]^3} d\varepsilon$$

$$\phi_j = \int_0^1 \frac{\varepsilon^2}{[(\gamma - 1)\varepsilon^2 + 1]^3} d\varepsilon$$

$$\phi = \int_0^1 \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)}{[(\gamma - 1)\varepsilon^2 + 1]^3} d\varepsilon$$

Resolviendo las integrales nos queda:

$$\phi_i = \frac{1}{8(\gamma-1)\sqrt{\gamma-1}} \left[(3\gamma-2)\text{arctg}(\sqrt{\gamma-1}) - \frac{(2-\gamma)\sqrt{\gamma-1}}{\gamma^2} \right] - \frac{(\gamma+2)}{8\gamma^2}$$

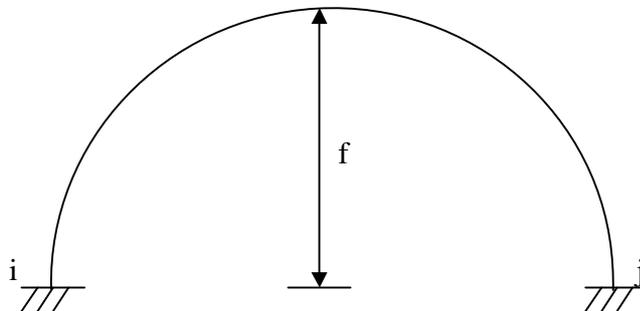
$$\phi_j = \frac{1}{8(\gamma-1)\sqrt{\gamma-1}} \left[\text{arctg}(\sqrt{\gamma-1}) - \frac{(2-\gamma)\sqrt{\gamma-1}}{\gamma^2} \right]$$

$$\phi = \frac{1}{8(\gamma-1)\sqrt{\gamma-1}} \left[\text{arctg}(\sqrt{\gamma-1}) - \frac{(2-\gamma)\sqrt{\gamma-1}}{\gamma^2} \right] - \frac{(\gamma+1)}{4\gamma^2}$$

De la misma manera, se pueden aplicar procedimientos directos ó numéricos de área (Simpson o trapecios), para hallar las fuerzas de empotramiento, para diferentes casos de carga.

A continuación, se presenta la deducción de las fórmulas del método de las rotaciones para arcos.

Sea el arco empotrado, en sus juntas extremas, j e i.



Para hallar los coeficientes elásticos de los arcos, utilizaremos el método del centro elástico, ya que a través de este método, se simplifican los cálculos. Este método se utiliza cuando la estructura cumple con la ley de Hooke, es continua, y tiene 3 grados de hiperestaticidad. El método consiste, en considerar una estructura igual a la real y de ancho igual a $\frac{1}{EI}$. Al hallar el centro de gravedad de dicha área, estaremos hallando el centro elástico.

Ahora las coordenadas del centro elástico, vienen dadas por las siguientes fórmulas:

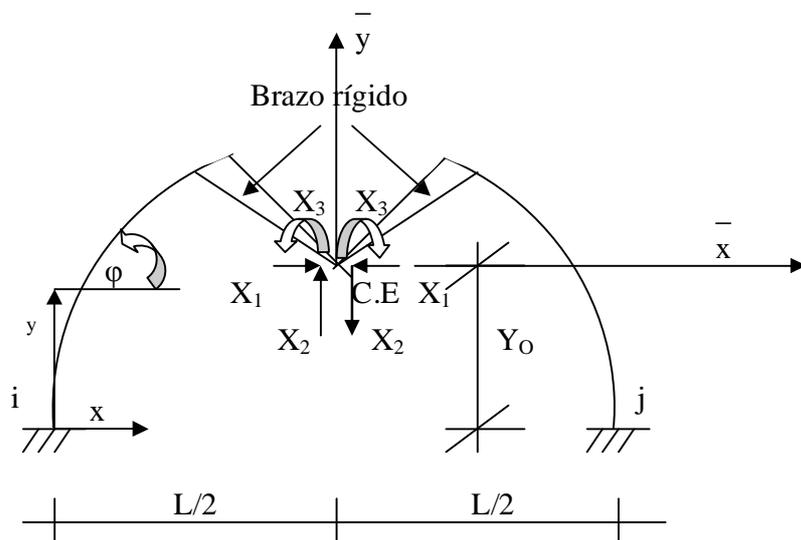
$$\bar{x} = \frac{\int \frac{x ds}{EI}}{\int \frac{ds}{EI}}, \quad \bar{y} = \frac{\int \frac{y ds}{EI}}{\int \frac{ds}{EI}}.$$

Estas coordenadas están referidas al sistema de coordenadas que hayamos escogido.

Estudiaremos en particular los arcos simétricos, en donde se cumple que la ubicación del centro elástico coincide con uno de los ejes de simetría.

Continuando con la explicación del método del centro elástico, una vez hallado éste, cortamos la estructura y unimos los extremos cortados de la estructura con el centro elástico a través de un brazo rígido, y en el centro elástico colocamos las redundantes a calcular. La influencia del brazo rígido en los desplazamientos del sistema, es nula, ya que por su misma rigidez infinita, el cociente $\frac{1}{EI}$ es cero.

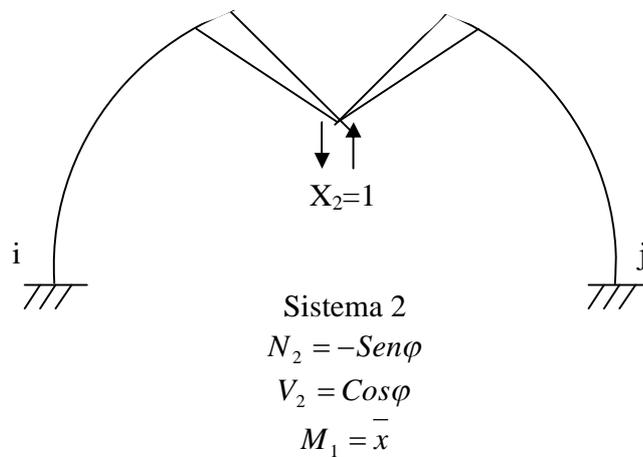
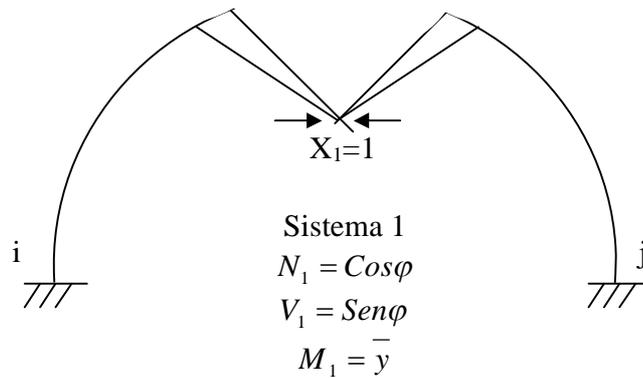
En un arco simétrico, es conveniente cortar la estructura en el centro de la misma.

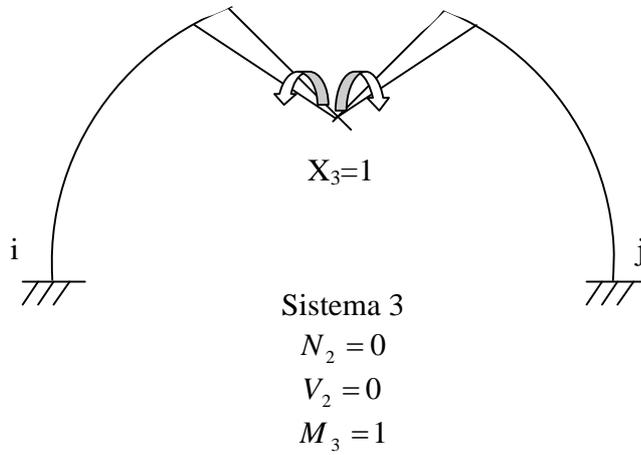


El traslado del origen de coordenadas al centro elástico, se rige por las siguientes relaciones:

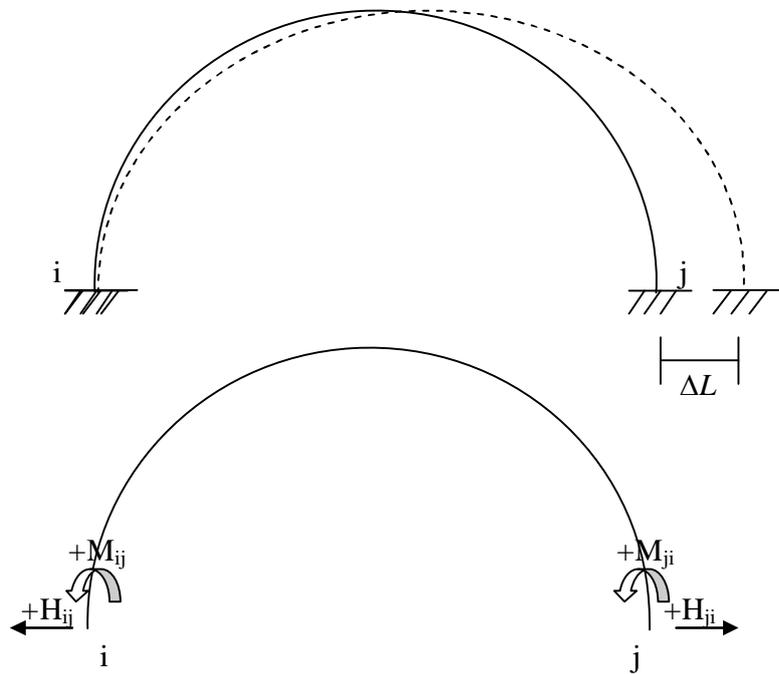
$$\bar{y} = y - Y_0, \quad \bar{x} = x - \frac{L}{2}, \quad \text{además } Y_0 = \frac{\int y \frac{ds}{\alpha}}{\int \frac{ds}{\alpha}} = \frac{\int y \frac{dx}{\alpha \cos \varphi}}{\int \frac{dx}{\alpha \cos \varphi}}, \quad \text{Donde } \alpha = \frac{I}{I_o}, \text{ siendo}$$

I_o , la inercia de la sección, en el centro del arco.





Los movimientos de apoyo son: $D_1 = \theta_i - \varphi_{ij}$ $D_2 = \theta_j - \varphi_{ij}$ $D_3 = \Delta L$ siendo ΔL el alargamiento o acortamiento del arco, ΔL es positivo si se alarga el arco, y negativo si se acorta, y los giros de las juntas y del arco, son positivos si van en sentido antihorario.



Convención de signos de las solicitaciones a buscar

$$\partial_{12} = \partial_{13} = \partial_{21} = \partial_{23} = \partial_{31} = \partial_{32} = 0,$$

Si se desprecian los efectos de fuerza axial y cortante, entonces tenemos:

$$\partial_{11} = \frac{1}{EI_0} \int \frac{y^2}{\alpha \cos \varphi} dx$$

$$\partial_{22} = \frac{1}{EI_0} \int \frac{x^2}{\alpha \cos \varphi} dx$$

$$\partial_{33} = \frac{1}{EI_0} \int \frac{1}{\alpha \cos \varphi} dx$$

Y para hallar los coeficientes elásticos, debemos partir de la ecuación general de trabajos virtuales:

$$\Delta_i + T_{R(X_i=1)} = \Delta_{i0} + \Delta_{iT} + \partial_{ii} X_i$$

Para hallar los coeficientes elásticos, consideramos que no hay cargas externas. Entonces:

$$\Delta_{i0} = \Delta_{iT} = 0$$

Entonces los trabajos realizados por las reacciones en los distintos casos, serán los siguientes:

$$T_{R(X_1=1)} = Y_0 \theta_i - Y_0 \theta_j + \Delta L$$

$$T_{R(X_2=1)} = \frac{L}{2} \theta_i + \frac{L}{2} \theta_j - L \varphi_{ij}$$

$$T_{R(X_3=1)} = \theta_j - \theta_i$$

Con lo cual:

$$X_1 = \frac{Y_0(\theta_i - \theta_j) + \Delta L}{\partial_{11}}$$

$$X_2 = \frac{\frac{L}{2}(\theta_i + \theta_j) - L\varphi_{ij}}{\partial_{22}}$$

$$X_3 = \frac{\theta_j - \theta_i}{\partial_{33}}$$

$$M_{ij} = -\frac{\theta_j - \theta_i}{\partial_{33}} + Y_0 \frac{Y_0(\theta_i - \theta_j) + \Delta L}{\partial_{11}} + \frac{L}{2} \frac{\frac{L}{2}(\theta_i + \theta_j) - L\varphi_{ij}}{\partial_{22}}$$

$$M_{ji} = \frac{\theta_j - \theta_i}{\partial_{33}} - Y_0 \frac{Y_0(\theta_i - \theta_j) + \Delta L}{\partial_{11}} + \frac{L}{2} \frac{\frac{L}{2}(\theta_i + \theta_j) - L\varphi_{ij}}{\partial_{22}}$$

$$H_{ij} = H_{ji} = \frac{Y_0(\theta_i - \theta_j) + \Delta L}{\partial_{11}}$$

$$M_{ij} = \left[\frac{1}{\partial_{33}} + \frac{Y_0^2}{\partial_{11}} + \frac{L^2}{4\partial_{33}} \right] \theta_i + \left[-\frac{1}{\partial_{33}} - \frac{Y_0^2}{\partial_{11}} + \frac{L^2}{4\partial_{33}} \right] \theta_j - \frac{L^2}{2\partial_{33}} \varphi_{ij} + \frac{Y_0}{\partial_{11}} \Delta L$$

$$M_{ji} = \left[-\frac{1}{\partial_{33}} - \frac{Y_0^2}{\partial_{11}} + \frac{L^2}{4\partial_{33}} \right] \theta_i + \left[\frac{1}{\partial_{33}} + \frac{Y_0^2}{\partial_{11}} + \frac{L^2}{4\partial_{33}} \right] \theta_j - \frac{L^2}{2\partial_{33}} \varphi_{ij} - \frac{Y_0}{\partial_{11}} \Delta L$$

$$M_{ij} = \left[\left[\frac{L}{\int \frac{ds}{\alpha}} + \frac{Y_0^2 L}{\int \frac{y}{\alpha} ds} + \frac{L^3}{4 \int \frac{x}{\alpha}} \right] \theta_i + \left[-\frac{L}{\int \frac{ds}{\alpha}} - \frac{Y_0^2 L}{\int \frac{y}{\alpha} ds} + \frac{L^3}{4 \int \frac{x}{\alpha}} \right] \theta_j - \frac{L^3}{2 \int \frac{x}{\alpha}} \varphi_{ij} + \frac{fLY_0}{\int \frac{y}{\alpha} ds} \frac{\Delta L}{f} \right] \frac{EI_0}{L}$$

$$M_{ji} = \left[\left[-\frac{L}{\int \frac{ds}{\alpha}} - \frac{Y_0^2 L}{\int \frac{y}{\alpha} ds} + \frac{L^3}{4 \int \frac{x}{\alpha}} \right] \theta_i + \left[\frac{L}{\int \frac{ds}{\alpha}} + \frac{Y_0^2 L}{\int \frac{y}{\alpha} ds} + \frac{L^3}{4 \int \frac{x}{\alpha}} \right] \theta_j - \frac{L^3}{2 \int \frac{x}{\alpha}} \phi_{ij} - \frac{fLY_0}{\int \frac{y}{\alpha} ds} \frac{\Delta L}{f} \right] \frac{EI_0}{L}$$

$$H_{ji} = H_{ij} = \left[\theta_i - \theta_j + \frac{\Delta L}{Y_0} \right] \frac{fLY_0}{\int \frac{y}{\alpha} ds} \frac{1}{f} \frac{EI_0}{L}$$

Ahora si hacemos:

$$C_i = C_j = \frac{L}{\int \frac{ds}{\alpha}} + \frac{Y_0^2 L}{\int \frac{y}{\alpha} ds} + \frac{L^3}{4 \int \frac{x}{\alpha}}$$

$$C = -\frac{L}{\int \frac{ds}{\alpha}} - \frac{Y_0^2 L}{\int \frac{y}{\alpha} ds} + \frac{L^3}{4 \int \frac{x}{\alpha}}$$

$$C_H = \frac{fLY_0}{\int \frac{y}{\alpha} ds}$$

$$EK_0 = \frac{EI_0}{L}$$

Si existen cargas externas, debemos hallar las fuerzas de empotramiento, las cuales designaremos como M_{ij}^0 , M_{ji}^0 , H_{ij}^0 y H_{ji}^0

Por lo tanto en forma general, se puede escribir:

$$M_{ij} = M_{ij}^0 + \left[C_i \theta_i + C \theta_j - (C_i + C) \phi_{ij} + C_H \frac{\Delta L}{f} \right] EK_0$$

$$M_{ji} = M_{ji}^0 + \left[C\theta_i + C_j\theta_j - (C_j + C)\phi_{ij} - C_H \frac{\Delta L}{f} \right] EK_0$$

$$H_{ij} = H_{ij}^0 + \left[\theta_i - \theta_j + \frac{\Delta L}{Y_0} \right] \frac{C_H}{f} EK_0$$

$$H_{ji} = H_{ji}^0 + \left[\theta_i - \theta_j + \frac{\Delta L}{Y_0} \right] \frac{C_H}{f} EK_0$$

Ahora hallaremos los coeficientes elásticos para dos tipos de arco en particular.

Estudiamos el caso de un arco parabólico compensado. Para este tipo de arco, se cumple que $\alpha = \frac{1}{\cos\varphi}$, y la ecuación de la parábola es $y = \frac{4f}{L^2}x(L-x)$, así que tenemos lo siguiente:

$$\int \frac{ds}{\alpha} = \int_0^L dx = L$$

$$Y_0 = \frac{\int_0^L y dx}{\int_0^L dx} = \frac{\int_0^L \frac{4f}{L^2} x(L-x) dx}{L} = \frac{2fL - \frac{4}{3}fL}{L} = \frac{2}{3}f$$

$$\int \frac{\bar{y}^2 ds}{\alpha} = \int_0^L \left[\frac{4f}{L^2} x(L-x) - \frac{2}{3}f \right]^2 dx = \int_0^L \left[\frac{16f^2}{L^4} x^2(L^2 - 2Lx + x^2) - \frac{16f^2}{3L^2} x(L-x) + \frac{4}{9}f^2 \right] dx$$

$$\int \frac{\bar{y}^2 ds}{\alpha} = \int_0^L \left[\frac{64f^2}{3L^2} x^2 - \frac{32f^2}{L^3} x^3 + \frac{16f^2}{L^4} x^4 - \frac{16f^2}{3L} x + \frac{4}{9}f^2 \right] dx$$

$$\int \frac{\bar{y}^2 ds}{\alpha} = \frac{64f^2L}{9} - 8f^2L + \frac{16f^2L}{5} - \frac{8f^2L}{3} + \frac{4}{9}f^2L$$

$$\int \frac{\bar{y}^2 ds}{\alpha} = \frac{4}{45}f^2L$$

$$\int \frac{\bar{x}^2 ds}{\alpha} = \int_0^L \left(x - \frac{L}{2} \right)^2 dx = \frac{\left(L - \frac{L}{2} \right)^3 - \left(0 - \frac{L}{2} \right)^3}{3} = \frac{L^3}{12}$$

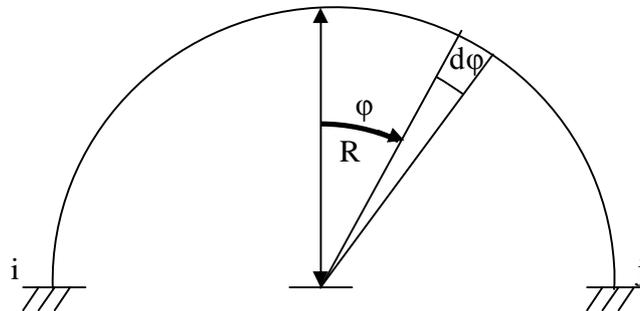
Para el arco parabólico compensado los coeficientes elásticos son:

$$C_i = C_j = \frac{L}{\int \frac{ds}{\alpha}} + \frac{Y_0^2 L}{\int \frac{y}{\alpha} ds} + \frac{L^3}{4 \int \frac{x^2}{\alpha}} = \frac{L}{L} + \frac{\frac{4}{9} f^2 L}{\frac{4}{45} f^2 L} + \frac{L^3}{4 \frac{L^3}{12}} = 1 + 5 + 3 = 9$$

$$C = -\frac{L}{\int \frac{ds}{\alpha}} - \frac{Y_0^2 L}{\int \frac{y}{\alpha} ds} + \frac{L^3}{4 \int \frac{x^2}{\alpha}} = -\frac{L}{L} - \frac{\frac{4}{9} f^2 L}{\frac{4}{45} f^2 L} + \frac{L^3}{4 \frac{L^3}{12}} = -1 - 5 + 3 = -3$$

$$C_H = \frac{fLY_0}{\int \frac{y}{\alpha} ds} = \frac{\frac{2}{3} f^2 L}{\frac{4}{45} f^2 L} = 7,5$$

Ahora estudiemos el caso de un arco semicircular de radio R y con $\alpha = 1$



Aquí conviene usar coordenadas polares:

$$ds = R d\varphi$$

$$y = R \cos \varphi$$

$$x = R \sin \varphi$$

$$Y_0 = \frac{2 \int_0^{\pi/2} y R d\varphi}{2 \int_0^{\pi/2} R d\varphi} = \frac{\int_0^{\pi/2} R^2 \text{Cos} \varphi d\varphi}{\frac{\pi}{2} R} = \frac{R^2}{\frac{\pi}{2} R} = \frac{2R}{\pi}$$

$$\int y^2 \frac{ds}{\alpha} = \int y^2 R d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} R^3 \left(\text{Cos} \varphi - \frac{2}{\pi} \right)^2 d\varphi$$

$$\int y^2 \frac{ds}{\alpha} = 2 \int_0^{\pi/2} R^3 \left(\text{Cos}^2 \varphi - \frac{4}{\pi} \text{Cos} \varphi + \frac{4}{\pi^2} \right) d\varphi$$

$$\int y^2 \frac{ds}{\alpha} = 2 \int_0^{\pi/2} R^3 \left(\frac{1 + \text{Cos}(2\varphi)}{2} - \frac{4}{\pi} \text{Cos} \varphi + \frac{4}{\pi^2} \right) d\varphi$$

$$\int y^2 \frac{ds}{\alpha} = 2R^3 \left(\frac{\varphi + \text{Sen} \varphi \text{Cos} \varphi}{2} - \frac{4}{\pi} \text{Sen} \varphi + \frac{4}{\pi^2} \varphi \right) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$\int y^2 \frac{ds}{\alpha} = 2R^3 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \right) = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi} R^3$$

$$\int x^2 \frac{ds}{\alpha} = 2 \int_0^{\pi/2} R^3 \text{Sen}^2 \varphi d\varphi = R^3 \int_0^{\pi/2} [1 - \text{Cos}(2\varphi)] d\varphi = \frac{\pi R^3}{2}$$

$$\int \frac{ds}{\alpha} = 2 \int_0^{\pi/2} R d\varphi = \pi R$$

Para el arco circular con $\alpha = 1$ los coeficientes elásticos son:

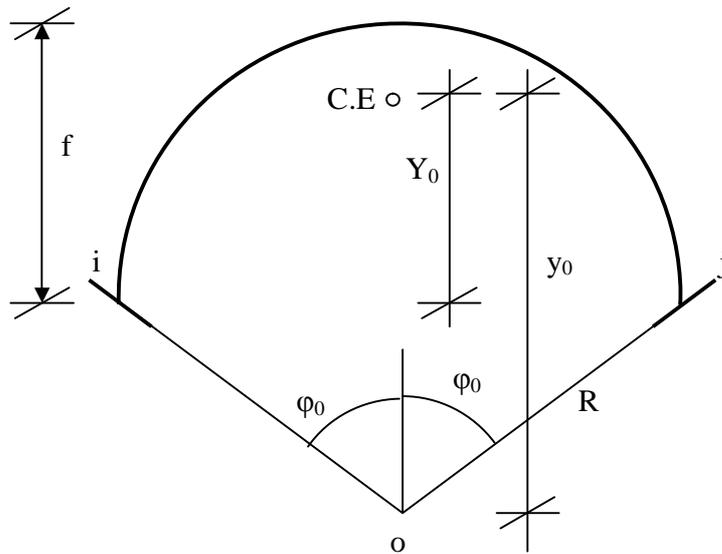
$$C_i = C_j = \frac{L}{\int \frac{ds}{\alpha}} + \frac{Y_0^2 L}{\int \frac{y^2}{\alpha} ds} + \frac{L^3}{4 \int \frac{x^2}{\alpha} ds} = \frac{2R}{\pi R} + \frac{\frac{4R^2}{\pi^2} 2R}{\frac{\pi^2 - 8}{2\pi} R^3} + \frac{8R^3}{4 \frac{\pi R^3}{2}} = \frac{2}{\pi} + \frac{16}{\pi(\pi^2 - 8)} + \frac{4}{\pi} = \frac{6\pi^2 - 32}{\pi(\pi^2 - 8)}$$

$$C_i = C_j = 4,6339$$

$$C = -\frac{L}{\int \frac{ds}{\alpha}} - \frac{Y_0^2 L}{\int \frac{y^2}{\alpha} ds} + \frac{L^3}{4 \int \frac{x^2}{\alpha} ds} = -\frac{2}{\pi} - \frac{16}{\pi(\pi^2 - 8)} + \frac{4}{\pi} = \frac{2\pi^2 - 32}{\pi(\pi^2 - 8)} = -2,0875$$

$$C_H = \frac{fLY_0}{\int \frac{y}{\alpha} ds} = \frac{R \cdot 2R \cdot \frac{2R}{\pi}}{\frac{\pi^2 - 8}{2\pi} R^3} = \frac{8}{\pi^2 - 8} = 4,2790$$

A veces el miembro tiene la forma de un segmento parcial del círculo.



En este caso, tenemos:

$$f = R(1 - \cos \varphi_0) \text{ y } L = 2R \sin \varphi_0$$

$$y = R \cos \varphi$$

$$\bar{x} = R \sin \varphi$$

$$\int \frac{ds}{\alpha} = 2 \int_0^{\varphi_0} R d\varphi = 2\varphi_0 R$$

$$y_0 = \frac{2 \int_0^{\varphi_0} y R d\varphi}{2 \int_0^{\varphi_0} R d\varphi} = \frac{\int_0^{\varphi_0} R^2 \cos \varphi d\varphi}{\varphi_0 R} = \frac{R^2 \sin \varphi_0}{\varphi_0 R} = \frac{R \sin \varphi_0}{\varphi_0}$$

$$Y_0 = y_0 - R \cos \varphi_0 = R \left(\frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0} - \cos \varphi_0 \right)$$

$$\bar{y} = y - y_0 = R \cos \varphi - \frac{R \operatorname{Sen} \varphi_0}{\varphi_0}$$

$$\int \bar{y}^2 \frac{ds}{\alpha} = \int \bar{y}^2 R d\varphi = 2 \int_0^{\varphi_0} R^3 \left(\cos \varphi - \frac{\operatorname{Sen} \varphi_0}{\varphi_0} \right)^2 d\varphi$$

$$\int \bar{y}^2 \frac{ds}{\alpha} = 2 \int_0^{\varphi_0} R^3 \left(\cos^2 \varphi - 2 \frac{\operatorname{Sen} \varphi_0}{\varphi_0} \cos \varphi + \frac{\operatorname{Sen}^2 \varphi_0}{\varphi_0^2} \right) d\varphi$$

$$\int \bar{y}^2 \frac{ds}{\alpha} = 2 \int_0^{\varphi_0} R^3 \left(\frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} - 2 \frac{\operatorname{Sen} \varphi_0}{\varphi_0} \cos \varphi + \frac{\operatorname{Sen}^2 \varphi_0}{\varphi_0^2} \right) d\varphi$$

$$\int \bar{y}^2 \frac{ds}{\alpha} = \left[\varphi_0 + \operatorname{Sen} \varphi_0 \cos \varphi_0 - \frac{2 \operatorname{Sen}^2 \varphi_0}{\varphi_0} \right] R^3$$

$$\int \bar{x}^2 \frac{ds}{\alpha} = 2 \int_0^{\varphi_0} R^3 \operatorname{Sen}^2 \varphi d\varphi = R^3 \int_0^{\varphi_0} [1 - \cos(2\varphi)] d\varphi = [\varphi_0 - \operatorname{Sen} \varphi_0 \cos \varphi_0] R^3$$

Para el arco circular en forma de segmento parcial de círculo, tenemos:

$$C_i = C_j = \frac{2R \operatorname{Sen} \varphi_0}{2R \varphi_0} + \frac{R^2 \left(\frac{\operatorname{Sen} \varphi_0}{\varphi_0} - \cos \varphi_0 \right)^2 2R \operatorname{Sen} \varphi_0}{\left[\varphi_0 + \operatorname{Sen} \varphi_0 \cos \varphi_0 - \frac{2 \operatorname{Sen}^2 \varphi_0}{\varphi_0} \right] R^3} + \frac{8R^3 \operatorname{Sen}^3 \varphi_0}{4[\varphi_0 - \operatorname{Sen} \varphi_0 \cos \varphi_0] R^3}$$

$$C_i = C_j = \frac{\operatorname{Sen} \varphi_0}{\varphi_0} + \frac{\left(\frac{\operatorname{Sen} \varphi_0}{\varphi_0} - \cos \varphi_0 \right)^2 \operatorname{Sen} \varphi_0}{\left[\varphi_0 + \operatorname{Sen} \varphi_0 \cos \varphi_0 - \frac{2 \operatorname{Sen}^2 \varphi_0}{\varphi_0} \right]} + \frac{2 \operatorname{Sen}^3 \varphi_0}{[\varphi_0 - \operatorname{Sen} \varphi_0 \cos \varphi_0]}$$

$$C = -\frac{\operatorname{Sen} \varphi_0}{\varphi_0} - \frac{\left(\frac{\operatorname{Sen} \varphi_0}{\varphi_0} - \cos \varphi_0 \right)^2 \operatorname{Sen} \varphi_0}{\left[\varphi_0 + \operatorname{Sen} \varphi_0 \cos \varphi_0 - \frac{2 \operatorname{Sen}^2 \varphi_0}{\varphi_0} \right]} + \frac{2 \operatorname{Sen}^3 \varphi_0}{[\varphi_0 - \operatorname{Sen} \varphi_0 \cos \varphi_0]}$$

$$C_H = \frac{fLY_0}{\int \bar{y}^2 \frac{ds}{\alpha}} = \frac{R(1 - \cos \varphi_0) 2R \operatorname{Sen} \varphi_0 R \left(\frac{\operatorname{Sen} \varphi_0}{\varphi_0} - \cos \varphi_0 \right)}{\left[\varphi_0 + \operatorname{Sen} \varphi_0 \cos \varphi_0 - \frac{2 \operatorname{Sen}^2 \varphi_0}{\varphi_0} \right] R^3}$$

$$C_H = \frac{2(1 - \cos\varphi_0)\sin\varphi_0 \left(\frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0} - \cos\varphi_0 \right)}{\left[\varphi_0 + \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 - \frac{2\sin^2\varphi_0}{\varphi_0} \right]}$$

En general, para un arco empotrado-articulado, tenemos:

Arco articulado en la junta “i”:

$$M_{ji} = M_{ji}^o + \frac{C}{C_i} (M_{ij} - M_{ij}^o) + EK_0 [(\theta_j - \varphi_{ij})(C_j - \frac{C^2}{C_i}) - (1 + \frac{C}{C_i})C_H \frac{\Delta L}{f}]$$

$$H_{ij} = H_{ij}^o + EK_0 \frac{C_H}{f} [-(1 + \frac{C}{C_i})(\theta_j - \varphi_{ij}) + (\frac{1}{y_o} - \frac{C_H}{fC_i})\Delta L] + \frac{C_H}{fC_i} (M_{ij} - M_{ij}^o)$$

$$H_{ji} = H_{ji}^o + EK_0 \frac{C_H}{f} [-(1 + \frac{C}{C_i})(\theta_j - \varphi_{ij}) + (\frac{1}{y_o} - \frac{C_H}{fC_i})\Delta L] + \frac{C_H}{fC_i} (M_{ij} - M_{ij}^o)$$

Arco articulado en la junta “j”:

$$M_{ij} = M_{ij}^o + \frac{C}{C_j} (M_{ji} - M_{ji}^o) + EK_0 [(\theta_i - \varphi_{ij})(C_i - \frac{C^2}{C_j}) + (1 + \frac{C}{C_j})C_H \frac{\Delta L}{f}]$$

$$H_{ij} = H_{ij}^o + EK_0 \frac{C_H}{f} [(1 + \frac{C}{C_j})(\theta_i - \varphi_{ij}) + (\frac{1}{y_o} - \frac{C_H}{fC_j})\Delta L] - \frac{C_H}{fC_j} (M_{ji} - M_{ji}^o)$$

$$H_{ji} = H_{ji}^o + EK_0 \frac{C_H}{f} [(1 + \frac{C}{C_j})(\theta_i - \varphi_{ij}) + (\frac{1}{y_o} - \frac{C_H}{fC_j})\Delta L] - \frac{C_H}{fC_j} (M_{ji} - M_{ji}^o)$$

Y en general, para un miembro de sección variable de directriz recta, tenemos:

Miembro articulado en la junta “i”:

$$M_{ji} = M_{ji}^o + \frac{C}{C_i} (M_{ij} - M_{ij}^o) + EK_0 [(\theta_j - \varphi_{ij})(C_j - \frac{C^2}{C_i})]$$

Miembro articulado en la junta “j”:

$$M_{ij} = M_{ij}^o + \frac{C}{C_j} (M_{ji} - M_{ji}^o) + EK_0 [(\theta_i - \varphi_{ij})(C_i - \frac{C^2}{C_j})]$$

Donde, en las ecuaciones anteriores, los coeficientes elásticos son los mismos coeficientes del arco o miembro de sección variable como si estuviese empotrado-empotrado, al igual que las fuerzas de empotramiento, además M_{ij} =Momento

externo aplicado en la junta “i”, para el arco o miembro articulado en la junta “i” y M_{ji} =Momento externo aplicado en la junta “j”, para el arco o miembro articulado en la junta “j”.

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

3.1 Tipo de Investigación

Esta es una investigación descriptiva, ya que consiste en la elaboración de una propuesta para solucionar problemas, e intenta responder preguntas sobre sucesos hipotéticos a partir de datos suministrados.

3.2 Procedimientos de investigación

El procedimiento de investigación, llevado a cabo en este trabajo de grado, consiste en la utilización de ecuaciones ya establecidas (ecuaciones del método de rotaciones), para establecer unas nuevas ecuaciones (ecuaciones del método de eliminación de incógnitas de giro), a través de la hipótesis de que la sumatoria de momentos en una junta rígida es igual al momento externo aplicado en dicha junta. Partiendo de esta hipótesis, después de hacer sumatoria de momentos en una junta en donde concurren varios miembros, se despeja el giro de la junta en donde estos concurren, y se sustituye la expresión del mismo, en las expresiones de momentos y empujes de los miembros concurrentes en la junta en cuestión. Al hacer eso, se obtienen diferentes expresiones, las cuáles tienen cierta analogía, y esta analogía se resume en las denominadas **Ecuaciones Generales del Método de Eliminación de Incógnitas**.

CAPÍTULO VI

RESULTADOS DE LA INVESTIGACION

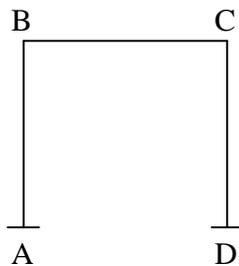
4.1 Introducción al método

Este método tiene como objetivo eliminar incógnitas de giro, para hallar los momentos en los extremos de los miembros, resultando un sistema de ecuaciones con menos incógnitas el que se genera normalmente con el método de las rotaciones y otros métodos, facilitando así, el análisis de estructuras.

La deducción del método nace de las ecuaciones del método de las rotaciones, llegando a la conclusión de que **los momentos en los extremos de los miembros que llegan a una junta, pueden quedar en función de:**

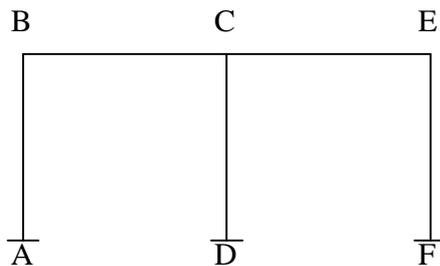
- Los giros de las juntas que conforman los miembros concurrentes, exceptuando el giro de la junta a donde llegan.
- Los giros de los miembros concurrentes.
- Los momentos de empotramiento de los miembros concurrentes.
- Inercias, longitudes y módulos de elasticidad de los materiales de los miembros concurrentes.
- El momento externo aplicado en la junta donde concurren los miembros.
- Los coeficientes elásticos de los miembros concurrentes.

Lo que hace práctico el método, es la escogencia de la(s) junta(s) donde se pretende(n) eliminar la(s) incógnita(s) de giro (junta(s) donde concurren varios miembros. Esta(s) debe(n) escogerse de tal manera que la mayoría de los giros de las demás juntas, que conforman los miembros que concurren en la(s) junta(s) escogida(s), sean conocidos. Además se debe tener presente, que no se puede eliminar otra incógnita de giro, en una junta de un miembro que concurre en aquella junta donde ya fue eliminada una incógnita de giro, debido a que las expresiones de momento de los miembros que concurren en esta otra junta, quedarían en función del giro de la junta que pretendía ser eliminado. Todo lo antedicho, se explicará mejor con algunos ejemplos:



En esta estructura, con el método de eliminación de incógnitas de giro, podemos seguir los lineamientos que hemos visto hasta ahora, y llegaremos a las siguientes conclusiones:

- Si analizamos la junta B, a ella llegan, los miembros AB y BC. Las expresiones de momento en los extremos de esos miembros, quedarán en función de: el giro de la junta A, el giro de la junta C, los giros de los miembros AB y BC, los momentos de empotramiento en esos miembros, los coeficientes elásticos de los miembros AB y BC, las inercias, longitudes y módulos de elasticidad de los miembros AB y BC, y el momento externo aplicado en la junta B.
- El giro en C, no puede ser eliminado, debido a que el miembro BC concurre en la junta B, donde ya se eliminó una incógnita de giro.
- El giro en la junta A es conocido, por lo tanto, para resolver la estructura, con el método de eliminación de incógnitas se generan 2 incógnitas (el giro en B y una desplazabilidad horizontal), mientras que con el método de las rotaciones, se generan 3 (el giro en B, el giro en C, y la desplazabilidad horizontal).



En esta estructura, si eliminamos la incógnita de giro en B, ya no podemos eliminar la incógnita de giro en C, pero podemos eliminar la incógnita de giro en E. Por lo tanto, con el método de eliminación de incógnitas se generan 2 incógnitas (el giro en C y una desplazabilidad horizontal), mientras que con el método de las rotaciones, se generan 4 incógnitas (giros en B, C, E y una desplazabilidad horizontal).

4.2 Fundamentos teóricos en que se basa el Método de Eliminación de Incógnitas de Giro

El Método de eliminación de Incógnitas de Giro, se basa en las mismas suposiciones que el Método de las Rotaciones. Es decir, los elementos se consideran axialmente rígidos ($A \rightarrow \infty$), la elasticidad de los materiales de los mismos es lineal, y las secciones transversales a lo largo de los elementos no se modifican con la deformación.

En el Método de eliminación de Incógnitas de Giro es aplicable, al igual que en el Método de las rotaciones, el principio de superposición de efectos. Este principio consiste en someter la estructura a un efecto a la vez, para luego sumarlos todos, y se utiliza para generar las expresiones que definen los momentos en los extremos de los miembros, y los empujes en los arcos.

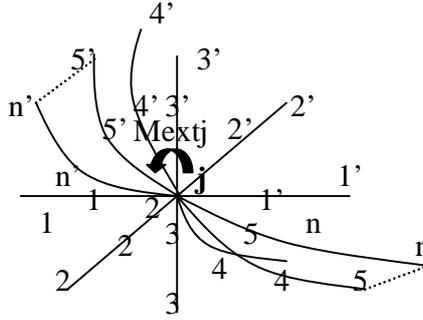
Cuando se analiza la estructura por desplazabilidades, ésta se analiza igual que en el Método de las Rotaciones.

Cuando se dice “se eliminó un giro”, en realidad se quiere decir “se eliminó un giro como incógnita”, ya que el giro sigue existiendo, y se puede determinar usando las ecuaciones del Método de las Rotaciones, una vez que se haya aplicado el Método de Eliminación de Incógnitas de Giro. Esto se explicará mejor en los ejemplos de análisis más adelante.

La Estructura Primaria en el Método de Eliminación de Incógnitas de Giro, será aquella que resulte de considerar restringidos los giros que no fueron eliminados, considerando también restringidas las diferentes desplazabilidades, y considerando las cargas que actúan sobre la estructura.

Cuando se analiza una estructura con el Método de Eliminación de Incógnitas de Giro, será necesario utilizar las ecuaciones del Método de las Rotaciones en aquellos miembros conformados por dos juntas cuyos giros no fueron eliminados como incógnitas (miembro empotrado-empotrado), o conformados por una junta cuyo giro no fue eliminado como incógnita y una articulación (miembro empotrado-articulado).

4.3 Deducción de las ecuaciones del Método de Eliminación de Incógnitas de Giro



Sea la junta **j**, una junta a donde llegan arcos y miembros de directriz recta empotrados-articulados, y empotrados-articulados (en este dibujo se designan con un apóstrofe las juntas articuladas, al igual que los miembros empotrados-articulados).

Al aplicar las ecuaciones del método de las rotaciones, nos queda:

$$\begin{aligned}
 M_{j1} &= M_{j1}^o + [C_{j1}\theta_j + C_1\theta_1 - (C_{j1} + C_1)\varphi_1]E_1K_1 \\
 M_{j2} &= M_{j2}^o + [C_{j2}\theta_j + C_2\theta_2 - (C_{j2} + C_2)\varphi_2]E_2K_2 \\
 M_{j3} &= M_{j3}^o + [C_{j3}\theta_j + C_3\theta_3 - (C_{j3} + C_3)\varphi_3]E_3K_3 \\
 M_{j4} &= M_{j4}^o + [C_{j4}\theta_j + C_4\theta_4 - (C_{j4} + C_4)\varphi_4 + C_{H4}\frac{\Delta L_4}{f_4}]E_4K_4 \\
 M_{j5} &= M_{j5}^o + [C_{j5}\theta_j + C_5\theta_5 - (C_{j5} + C_5)\varphi_5 + C_{H5}\frac{\Delta L_5}{f_5}]E_5K_5 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 M_{jn} &= M_{jn}^o + [C_{jn}\theta_j + C_n\theta_n - (C_{jn} + C_n)\varphi_n + C_{Hn}\frac{\Delta L_n}{f_n}]E_nK_n \\
 M_{j1'} &= M_{j1'}^o + \frac{C_{1'}}{C_{i1'}}(M_{1'j} - M_{1'j}^o) + E_1K_1(\theta_j - \varphi_1)(C_{j1'} - \frac{C_{1'}^2}{C_{i1'}}) \\
 M_{j2'} &= M_{j2'}^o + \frac{C_{2'}}{C_{i2'}}(M_{2'j} - M_{2'j}^o) + E_2K_2(\theta_j - \varphi_2)(C_{j2'} - \frac{C_{2'}^2}{C_{i2'}}) \\
 M_{j3'} &= M_{j3'}^o + \frac{C_{3'}}{C_{i3'}}(M_{3'j} - M_{3'j}^o) + E_3K_3(\theta_j - \varphi_3)(C_{j3'} - \frac{C_{3'}^2}{C_{i3'}})
 \end{aligned}$$

$$M_{j4'} = M_{j4'}^o + \frac{C_{4'}}{C_{i4'}}(M_{4'j} - M_{4'j}^o) + E_{4'}K_{4'}[(\theta_j - \varphi_{4'})\left(C_{j4'} - \frac{C_{4'}^2}{C_{i4'}}\right) + \left(1 + \frac{C_{4'}}{C_{i4'}}\right)C_{H4'} \frac{\Delta L_{4'}}{f_{4'}}]$$

$$M_{j5'} = M_{j5'}^o + \frac{C_{5'}}{C_{i5'}}(M_{5'j} - M_{5'j}^o) + E_{5'}K_{5'}[(\theta_j - \varphi_{5'})\left(C_{j5'} - \frac{C_{5'}^2}{C_{i5'}}\right) + \left(1 + \frac{C_{5'}}{C_{i5'}}\right)C_{H5'} \frac{\Delta L_{5'}}{f_{5'}}]$$

·
·
·

$$M_{jn'} = M_{jn'}^o + \frac{C_{n'}}{C_{in'}}(M_{n'j} - M_{n'j}^o) + E_{n'}K_{n'}[(\theta_j - \varphi_{n'})\left(C_{jn'} - \frac{C_{n'}^2}{C_{in'}}\right) + \left(1 + \frac{C_{n'}}{C_{in'}}\right)C_{Hn'} \frac{\Delta L_{n'}}{f_{n'}}]$$

Luego, haciendo sumatoria de momentos en la junta **j**, e igualando al momento externo aplicado en la junta **j**, tenemos:

$$\begin{aligned} M_{extj} &= \sum_{k=1}^n M_{jk}^o + \sum_{k'=1}^{n'} M_{jk'}^o + \sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}(M_{k'j} - M_{k'j}^o) + \left[\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}\right) \right] \theta_j \\ &+ \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k - \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k - \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} \varphi_{k'} \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}\right) + \sum_{k=1}^n C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \\ &+ \sum_{k'=1}^{n'} \left(1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}\right) E_{k'} K_{k'} C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} \end{aligned}$$

Ahora despejamos θ_j :

$$\begin{aligned} \theta_j &= \frac{1}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}\right)} \left[M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o) \right. \\ &- \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} \varphi_{k'} \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}\right) - \sum_{k=1}^n C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \\ &\left. - \sum_{k'=1}^{n'} \left(1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}\right) E_{k'} K_{k'} C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo en las expresiones de momentos halladas por el método de las rotaciones, se presentan a continuación las **Ecuaciones Generales del Método de Eliminación de Incógnitas:**

Ecuaciones de momento en los extremos de los miembros:

Para miembros empotrados-empotrados:

$$M_{jk} = M_{jk}^o + \frac{C_{jk} E_k K_k}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}})} [M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)]$$

$$- \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \phi_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} \phi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) - \sum_{k=1}^n C_{HK} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k}$$

$$- \sum_{k'=1}^{n'} (1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_{k'} K_{k'} C_{HK} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} + C_k E_k K_k \theta_k - (C_{jk} + C_k) E_k K_k \phi_k + C_{HK} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \quad (1)$$

Si el miembro es
un arco

$$M_{kj} = M_{kj}^o + \frac{C_k E_k K_k}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}})} [M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)]$$

$$- \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \phi_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} \phi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) - \sum_{k=1}^n C_{HK} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k}$$

$$- \sum_{k'=1}^{n'} (1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_{k'} K_{k'} C_{HK} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} + C_{ik} E_k K_k \theta_k - (C_{ik} + C_k) E_k K_k \phi_k - C_{HK} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \quad (2)$$

Si el miembro es
un arco

Para miembros empotrados-articulados:

$$\begin{aligned}
 M_{jk'} = & M_{jk'}^o + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o) + \frac{(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) E_k K_k}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1'}^{n'} E_{k'} K_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}})} [M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1'}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1'}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)] \\
 & - \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1'}^{n'} E_{k'} K_{k'} \varphi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) - \sum_{k=1}^n C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \\
 & - \sum_{k'=1'}^n (1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_{k'} K_{k'} C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} - E_{k'} K_{k'} \varphi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) + (1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_{k'} K_{k'} C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} \quad (3)
 \end{aligned}$$



Si el miembro es
un arco

Nota: Para arcos empotrados-articulados cuya junta articulada se encuentra a la izquierda de la junta j , el término $(1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_{k'} K_{k'} C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}}$, es negativo tanto para los términos que tienen sumatorias como para los que no los tienen. Y el término $C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k}$ es negativo para arcos empotrados-empotrados, cuya otra junta diferente de j , está a la izquierda de ésta, tanto para los términos que tienen sumatorias como para los que no los tienen.

Ecuaciones de empujes en los arcos:

Para arcos empotrados-empotrados:

Arcos cuya otra junta diferente de j está a la derecha de j :

$$\begin{aligned}
 H_{jk} = & H_{jk}^o + E_k K_k \frac{C_{Hk}}{f_k} \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1'}^{n'} E_{k'} K_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}})} [M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1'}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1'}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)] \right. \\
 & - \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1'}^{n'} E_{k'} K_{k'} \varphi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) - \sum_{k=1}^n C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \\
 & \left. - \sum_{k'=1'}^{n'} (1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_{k'} K_{k'} C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} - \theta_k + \frac{\Delta L_k}{y_o} \right] \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{kj} &= H_{kj}^o + E_k K_k \frac{C_{Hk}}{f_k} \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}})} [M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)] \right. \\
&- \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} \varphi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) - \sum_{k=1}^n C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \\
&\left. - \sum_{k'=1}^{n'} (1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_{k'} K_{k'} C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} \right] - \theta_k + \frac{\Delta L_k}{y_o} \quad (5)
\end{aligned}$$

Arcos cuya otra junta diferente de j está a la izquierda de j :

$$\begin{aligned}
H_{jk} &= H_{jk}^o + E_k K_k \frac{C_{Hk}}{f_k} \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}})} [M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)] \right. \\
&- \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} \varphi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) - \sum_{k=1}^n C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \\
&\left. - \sum_{k'=1}^{n'} (1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_{k'} K_{k'} C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} \right] + \theta_k + \frac{\Delta L_k}{y_o} \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{kj} &= H_{kj}^o + E_k K_k \frac{C_{Hk}}{f_k} \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}})} [M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)] \right. \\
&- \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} \varphi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) - \sum_{k=1}^n C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \\
&\left. - \sum_{k'=1}^{n'} (1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_{k'} K_{k'} C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} \right] + \theta_k + \frac{\Delta L_k}{y_o} \quad (7)
\end{aligned}$$

Para arcos empotrados-articulados:

Arcos con junta articulada a la derecha de la junta j:

$$\begin{aligned}
 H_{k'j} &= H_{k'j}^o + E_k K_k \frac{C_{HK}}{f_k} \left[\left(1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} \right) \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1'}^{n'} E_k K_k (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}})} [M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1'}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)] \right. \right. \\
 &- \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1'}^{n'} E_k K_k \varphi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) - \sum_{k=1}^n C_{HK} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \\
 &\left. - \sum_{k'=1}^{n'} \left(1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} \right) E_k K_k C_{HK} \frac{\Delta L_{k'}}{f_k} - \varphi_{k'} \right] + \left(\frac{1}{y_o} - \frac{C_{HK}}{f_k C_{ik'}} \right) \Delta L_{k'} - \frac{C_{HK}}{f_k C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o) \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{jk'} &= H_{jk'}^o + E_k K_k \frac{C_{HK}}{f_k} \left[\left(1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} \right) \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1'}^{n'} E_k K_k (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}})} [M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1'}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)] \right. \right. \\
 &- \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1'}^{n'} E_k K_k \varphi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) - \sum_{k=1}^n C_{HK} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \\
 &\left. - \sum_{k'=1}^{n'} \left(1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} \right) E_k K_k C_{HK} \frac{\Delta L_{k'}}{f_k} - \varphi_{k'} \right] + \left(\frac{1}{y_o} - \frac{C_{HK}}{f_k C_{ik'}} \right) \Delta L_{k'} - \frac{C_{HK}}{f_k C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o) \quad (9)
 \end{aligned}$$

Arcos con junta articulada a la izquierda de la junta j:

$$\begin{aligned}
 H_{k'j} &= H_{k'j}^o + E_k K_k \frac{C_{HK}}{f_k} \left[- \left(1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} \right) \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1'}^{n'} E_k K_k (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}})} [M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1'}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)] \right. \right. \\
 &- \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1'}^{n'} E_k K_k \varphi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) - \sum_{k=1}^n C_{HK} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \\
 &\left. - \sum_{k'=1}^{n'} \left(1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} \right) E_k K_k C_{HK} \frac{\Delta L_{k'}}{f_k} - \varphi_{k'} \right] + \left(\frac{1}{y_o} - \frac{C_{HK}}{f_k C_{ik'}} \right) \Delta L_{k'} + \frac{C_{HK}}{f_k C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o) \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{jk} = & H_{jk}^o + E_k K_k \frac{C_{HK}}{f_k} \left[-\left(1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}\right) \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_k K_k \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}\right)} [M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)] \right. \right. \\
& - \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_k K_k \varphi_{k'} \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}\right) - \sum_{k=1}^n C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \\
& \left. - \sum_{k'=1}^{n'} \left(1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}\right) E_k K_k C_{HK} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} - \varphi_{k'} \right] + \left(\frac{1}{y_o} - \frac{C_{HK}}{f_k C_{ik'}} \right) \Delta L_{k'} \left. \right] + \frac{C_{HK}}{f_k C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o) \quad (11)
\end{aligned}$$

Donde en estas ecuaciones tenemos:

M_{jk} = Momento de j hacia k del miembro empotrado-empotrado.

M_{kj} = Momento de k hacia j del miembro empotrado-empotrado.

$M_{jk'}$ = Momento de j hacia k' del miembro empotrado-articulado.

$M_{k'j}$ = Momento aplicado en la junta k' del miembro empotrado-articulado.

H_{jk} = Empuje de j hacia k del arco empotrado-empotrado.

H_{kj} = Empuje de k hacia j del arco empotrado-empotrado.

$H_{jk'}$ = Empuje de j hacia k' del arco empotrado-articulado.

$H_{k'j}$ = Empuje de k' hacia j del arco empotrado-articulado.

M_{jk}^o = Momento de empotramiento de j hacia k del miembro empotrado-empotrado.

M_{kj}^o = Momento de empotramiento de k hacia j del miembro empotrado-empotrado.

$M_{jk'}^o$ = Momento de empotramiento de j hacia k' del miembro empotrado-articulado, calculado como si fuese empotrado-empotrado.

$M_{k'j}^o$ = Momento de empotramiento de k' hacia j del miembro empotrado-articulado, calculado como si fuese empotrado-empotrado.

H_{jk}^o = Empuje de empotramiento de j hacia k del arco empotrado-empotrado.

H_{kj}^o = Empuje de empotramiento de k hacia j del arco empotrado-empotrado.

$H_{jk'}^o$ = Empuje de empotramiento de j hacia k' del arco empotrado-articulado, calculado como si fuese empotrado-empotrado.

$H_{k'j}^o$ = Empuje de empotramiento de k' hacia j del arco empotrado-articulado, calculado como si fuese empotrado-empotrado.

M_{extj} = Momento aplicado en la junta j .

C_{jk} = Coeficiente C_j del miembro k empotrado-empotrado.

C_{ik} = Coeficiente C_i del miembro k empotrado-empotrado.

C_k = Coeficiente C del miembro k empotrado-empotrado.

$C_{jk'}$ = Coeficiente C_j del miembro k' empotrado-articulado, calculado como si fuese empotrado-empotrado.

$C_{ik'}$ = Coeficiente C_i del miembro k' empotrado-articulado, calculado como si fuese empotrado-empotrado.

$C_{k'}$ = Coeficiente C del miembro k' empotrado-articulado, calculado como si fuese empotrado-empotrado.

$C_{Hk'}$ = Coeficiente C_H del miembro k' empotrado-articulado, calculado como si fuese empotrado-empotrado.

C_{Hk} = Coeficiente C_H del miembro k empotrado- empotrado.

$E_{k'}$ = Módulo de elasticidad del miembro k' empotrado-articulado.

E_k = Módulo de elasticidad del miembro k empotrado- empotrado.

$K_{k'}$ = Relación Inercia/Longitud del miembro k' empotrado-articulado.

K_k = Relación Inercia/Longitud del miembro k empotrado- empotrado.

$f_{k'}$ = Flecha del miembro k' cuando éste es un arco.

f_k = Flecha del miembro k cuando éste es un arco.

ΔL_k = Alargamiento o acortamiento del miembro k , cuando éste es un arco.

$\Delta L_{k'}$ = Alargamiento o acortamiento del miembro k' , cuando éste es un arco.

θ_k = Giro de la junta k .

φ_k = Giro del miembro k .

$\varphi_{k'}$ = Giro del miembro k' .

y_o = Ordenada del centro elástico del miembro.

$$\sum_{k=1}^n M_{jk}^0 = M_{j1}^0 + M_{j2}^0 + M_{j3}^0 + M_{j4}^0 + M_{j5}^0 + \dots + M_{jn}^0$$

$$\sum_{k'=1}^{n'} M_{jk'}^0 = M_{j1'}^0 + M_{j2'}^0 + M_{j3'}^0 + M_{j4'}^0 + M_{j5'}^0 + \dots + M_{jn'}^0. \text{ Estos momentos se calculan}$$

como si los miembros estuviesen empotrados-empotrados.

$$\sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o) = \frac{C_{1'}}{C_{i1'}} (M_{1'j} - M_{1'j}^o) + \frac{C_{2'}}{C_{i2'}} (M_{2'j} - M_{2'j}^o) + \frac{C_{3'}}{C_{i3'}} (M_{3'j} - M_{3'j}^o) \\ + \frac{C_{4'}}{C_{i4'}} (M_{4'j} - M_{4'j}^o) + \frac{C_{5'}}{C_{i5'}} (M_{5'j} - M_{5'j}^o) + \dots + \frac{C_{n'}}{C_{in'}} (M_{n'j} - M_{n'j}^o)$$

Estos momentos se calculan como si los miembros estuviesen empotrados-empotrados.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k &= C_1 E_1 K_1 \theta_1 + C_2 E_2 K_2 \theta_2 + C_3 E_3 K_3 \theta_3 + C_4 E_4 K_4 \theta_4 + C_5 E_5 K_5 \theta_5 + \dots + C_n E_n K_n \theta_n \\
\sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k &= (C_{j1} + C_1) E_1 K_1 \varphi_1 + (C_{j2} + C_2) E_2 K_2 \varphi_2 + (C_{j3} + C_3) E_3 K_3 \varphi_3 \\
&+ (C_{j4} + C_4) E_4 K_4 \varphi_4 + (C_{j5} + C_5) E_5 K_5 \varphi_5 + \dots + (C_{jn} + C_n) E_n K_n \varphi_n \\
\sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} \varphi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) &= E_{1'} K_{1'} \varphi_{1'} (C_{j1'} - \frac{C_{1'}^2}{C_{i1'}}) + E_{2'} K_{2'} \varphi_{2'} (C_{j2'} - \frac{C_{2'}^2}{C_{i2'}}) \\
&+ E_{3'} K_{3'} \varphi_{3'} (C_{j3'} - \frac{C_{3'}^2}{C_{i3'}}) + E_{4'} K_{4'} \varphi_{4'} (C_{j4'} - \frac{C_{4'}^2}{C_{i4'}}) + E_{5'} K_{5'} \varphi_{5'} (C_{j5'} - \frac{C_{5'}^2}{C_{i5'}}) + \dots \\
&+ E_{n'} K_{n'} \varphi_{n'} (C_{jn'} - \frac{C_{n'}^2}{C_{in'}}) \\
\sum_{k=1}^n C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} &= C_{H1} E_1 K_1 \frac{\Delta L_1}{f_1} + C_{H2} E_2 K_2 \frac{\Delta L_2}{f_2} + C_{H3} E_3 K_3 \frac{\Delta L_3}{f_3} + C_{H4} E_4 K_4 \frac{\Delta L_4}{f_4} \\
&+ C_{H5} E_5 K_5 \frac{\Delta L_5}{f_5} + \dots + C_{Hn} E_n K_n \frac{\Delta L_n}{f_n} \\
\sum_{k'=1}^{n'} (1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_{k'} K_{k'} C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} &= (1 + \frac{C_{1'}}{C_{i1'}}) E_{1'} K_{1'} C_{H1'} \frac{\Delta L_{1'}}{f_{1'}} + (1 + \frac{C_{2'}}{C_{i2'}}) E_{2'} K_{2'} C_{H2'} \frac{\Delta L_{2'}}{f_{2'}} \\
&+ (1 + \frac{C_{3'}}{C_{i3'}}) E_{3'} K_{3'} C_{H3'} \frac{\Delta L_{3'}}{f_{3'}} + (1 + \frac{C_{4'}}{C_{i4'}}) E_{4'} K_{4'} C_{H4'} \frac{\Delta L_{4'}}{f_{4'}} + (1 + \frac{C_{5'}}{C_{i5'}}) E_{5'} K_{5'} C_{H5'} \frac{\Delta L_{5'}}{f_{5'}} \\
&+ \dots + (1 + \frac{C_{n'}}{C_{in'}}) E_{n'} K_{n'} C_{Hn'} \frac{\Delta L_{n'}}{f_{n'}} \\
\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k &= C_{j1} E_1 K_1 + C_{j2} E_2 K_2 + C_{j3} E_3 K_3 + C_{j4} E_4 K_4 + C_{j5} E_5 K_5 + \dots + C_{jn} E_n K_n \\
\sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) &= E_{1'} K_{1'} (C_{j1'} - \frac{C_{1'}^2}{C_{i1'}}) + E_{2'} K_{2'} (C_{j2'} - \frac{C_{2'}^2}{C_{i2'}}) + E_{3'} K_{3'} (C_{j3'} - \frac{C_{3'}^2}{C_{i3'}}) \\
&+ E_{4'} K_{4'} (C_{j4'} - \frac{C_{4'}^2}{C_{i4'}}) + E_{5'} K_{5'} (C_{j5'} - \frac{C_{5'}^2}{C_{i5'}}) + \dots + E_{n'} K_{n'} (C_{jn'} - \frac{C_{n'}^2}{C_{in'}})
\end{aligned}$$

4.4 Criterio para considerar un arco con junta articulada a la derecha o a la izquierda de j

Para que un arco se considere con junta articulada a la izquierda de j , debe adoptar una posición similar a la de las figuras:

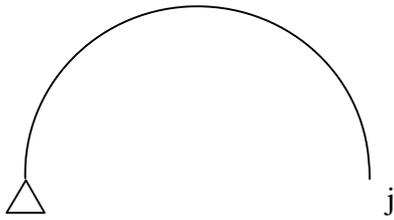


Figura 4.4.1

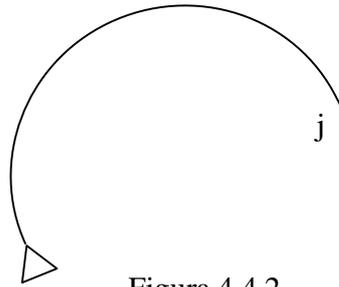


Figura 4.4.2

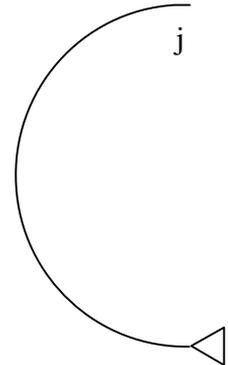


Figura 4.4.3

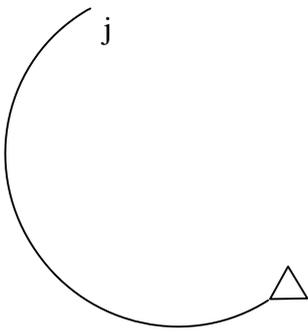


Figura 4.4.4

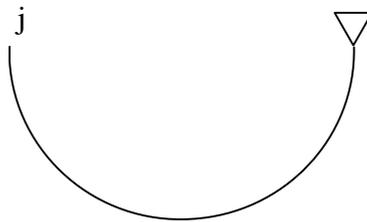


Figura 4.4.5

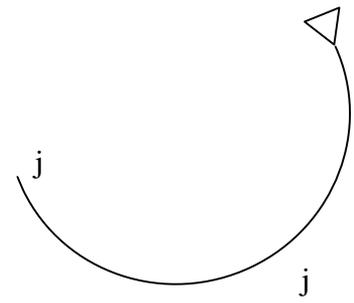


Figura 4.5.6

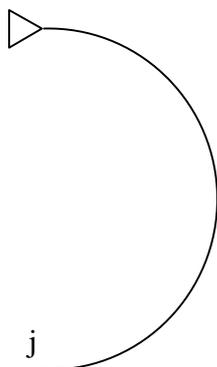


Figura 4.4.7

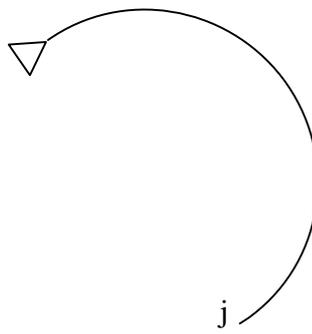


Figura 4.4.8

Para que un arco se considere con junta articulada a la derecha de j , debe adoptar una posición similar a la de las figuras:

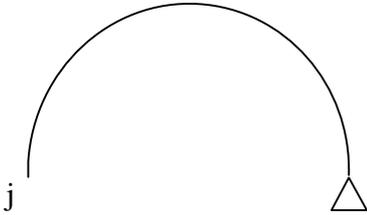


Figura 4.4.9

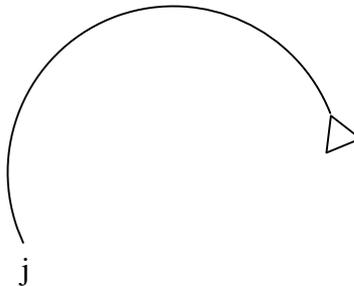


Figura 4.4.10

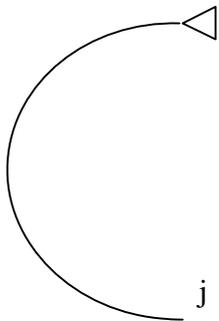


Figura 4.4.11

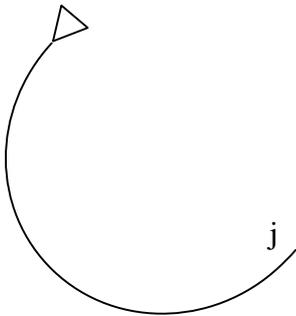


Figura 4.4.12

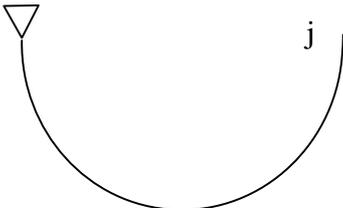


Figura 4.4.13

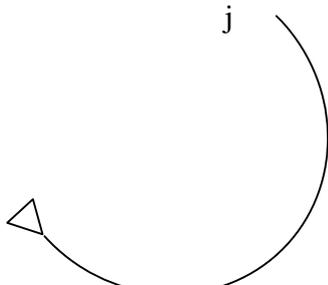


Figura 4.4.14

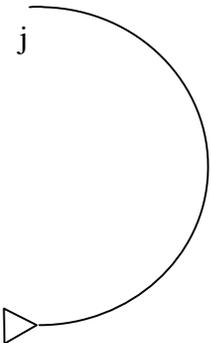


Figura 4.4.15

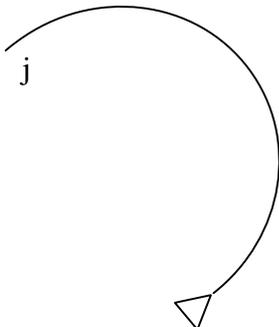


Figura 4.4.16

4.5 Pasos a seguir para aplicar el Método de Eliminación de Incógnitas de Giro:

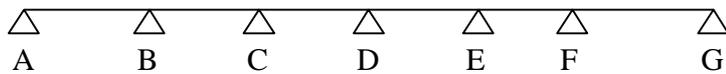
- 1) Escoger un giro a eliminar como incógnita en una junta.
- 2) Una vez eliminada la incógnita de giro en ésta, no pueden eliminarse como incógnitas los giros de las otras juntas de los miembros que concurren en ella.
- 3) Escoger otro giro a eliminar como incógnita en otra junta, respetando el paso 2), es decir, que se puede escoger otra junta que no sea perteneciente a ningún miembro concurrente en una junta cuyo giro ya fue eliminado como incógnita.
- 4) Aplicar las Ecuaciones Generales del Método de Eliminación de Incógnitas de Giro en aquellos miembros (ecuaciones (1) a la (11)) concurrentes en las juntas cuyos giros fueron eliminados como incógnitas.
- 5) Aplicar las Ecuaciones del Método de las Rotaciones en aquellos miembros conformados por dos juntas cuyos giros no fueron eliminados como incógnitas (miembro empotrado-empotrado), o conformados por una junta cuyo giro no fue eliminado como incógnita y una articulación (miembro empotrado-articulado).
- 6) Para eliminar el mayor número de incógnitas, habrá que analizar las diferentes alternativas. Con la práctica se llegará a la mejor alternativa sin hacer muchos análisis.
- 7) Plantear las ecuaciones que resuelven el análisis de la estructura (sumatoria de momentos en las juntas cuyos giros no fueron eliminados y aplicación del principio de los trabajos virtuales para las diferentes desplazabilidades).
- 8) Resolver el sistema formado por las ecuaciones generadas en el paso anterior.
- 9) Sustituir los valores de las incógnitas encontradas en el paso anterior, en las expresiones de momento en los extremos de los miembros para hallar sus valores, así como también en las expresiones de empuje de los arcos si los hay.

4.6 Ejemplos de Estructuras sin resolver su análisis

A continuación, se presentan varios ejemplos de estructuras, en los que se analiza la cantidad de incógnitas que se generan, usando el método de eliminación de incógnitas de giro, y el método de rotaciones.

Ejemplo 4.6.1: Estructura lineal continua.

Si se tiene la siguiente losa sometida a cargas externas:



Para resolver el análisis de la estructura, por el método de las rotaciones, tendríamos que considerar como incógnitas, los giros de las juntas en B, C, D, E y F, lo cuál generaría un sistema de ecuaciones de 5×5 .

Si se analiza la misma estructura, por el método de eliminación de incógnitas de giro, tenemos que, si se elimina como incógnita el giro en B, ya no se podrá eliminar como incógnita el giro en C, pero sí el giro en D, y al eliminar el giro en D, ya no se puede eliminar el giro en E, pero sí el giro en F. De esta manera, quedan como incógnitas, el giro en C y el giro en E, lo cuál generaría un sistema de ecuaciones de 2×2 .

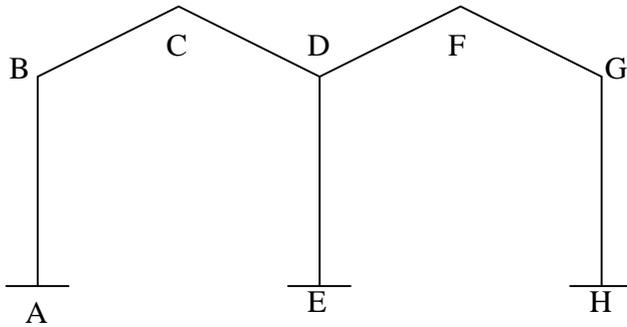
También existe la posibilidad, con el método de eliminación de incógnitas, de eliminar como incógnitas, el giro en C, y el giro en E, sin poder eliminar los demás giros, quedando un sistema de ecuaciones de 3×3 , así que la alternativa más factible es eliminar los giros en B, D y E, para generar un sistema de ecuaciones de 2×2 .

Resumen para este ejemplo:

Método	Número de Incógnitas	Tamaño del sistema de ecuaciones
Rotaciones	$5 (\theta_B, \theta_C, \theta_D, \theta_E \text{ y } \theta_F)$	5×5
Eliminación de Incógnitas	$2 (\theta_C \text{ y } \theta_E)$	2×2

Ejemplo 4.6.2: Estructura aporticada simétrica.

Veamos otro ejemplo: Sea la siguiente estructura sometida a cargas externas:



Para resolver el análisis de esta estructura, por el método de rotaciones, tendríamos que considerar como incógnitas, los giros $\theta_B, \theta_C, \theta_D, \theta_F$ y θ_G , y tres desplazabilidades.

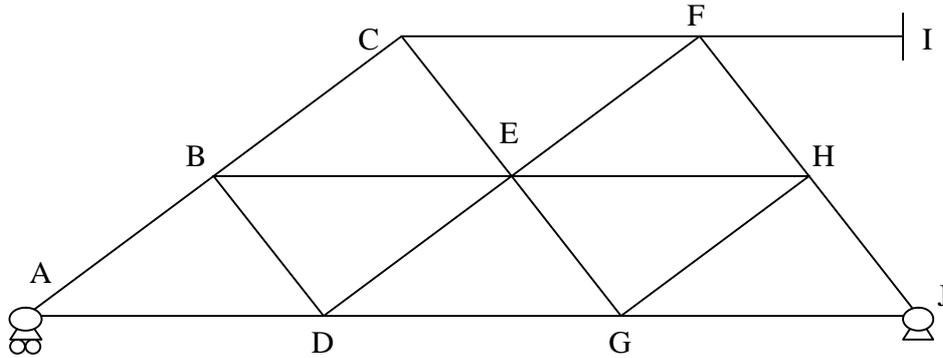
Para resolver por el método de eliminación de incógnitas, podemos considerar como únicas incógnitas, los giros θ_C y θ_F , y las desplazabilidades.

Resumen para este ejemplo:

Método	Número de Incógnitas	Tamaño del sistema de ecuaciones
Rotaciones	8	8x8
Eliminación de Incógnitas	5	5x5

Ejemplo 4.6.3: Estructura tipo celosía.

Ahora presentamos otro ejemplo: Sea la siguiente estructura sometida a cargas externas:



Al analizar esta estructura, por el método de rotaciones, se deben considerar 7 incógnitas de giro ($\theta_B, \theta_C, \theta_D, \theta_E, \theta_F, \theta_G$ y θ_H).

Al analizar esta estructura, por el método de eliminación de incógnitas de giro, es interesante notar, que si se elimina θ_E , ya no se podrá eliminar ninguno de los otros giros, y entonces tendríamos que considerar 6 incógnitas ($\theta_B, \theta_C, \theta_D, \theta_F, \theta_G$ y θ_H). En cambio, si se elimina θ_C , ya no se podrán eliminar ni θ_B , ni θ_F , ni θ_E pero si θ_H , y al eliminar θ_H , ya no se puede eliminar ni θ_F , ni θ_G , pero si θ_D . De esta manera podemos eliminar θ_C, θ_D y θ_H , y tendríamos que considerar 4 incógnitas ($\theta_B, \theta_E, \theta_F, \theta_G$).

Un análisis similar, y que produce 4 incógnitas, resulta si se elimina θ_B, θ_F , y θ_G , por lo que las incógnitas serían ($\theta_C, \theta_D, \theta_E$ y θ_H). Y por último, también se pudieran considerar 5 incógnitas si se eliminan θ_C y θ_G , por lo que las incógnitas serían $\theta_B, \theta_D, \theta_E, \theta_F$ y θ_H . Lo mismo sucede si se elimina θ_D y θ_F , ó θ_B y θ_H .

Podemos concluir entonces, que el máximo número de incógnitas, que podemos eliminar es 3, para considerar 4 incógnitas con el método de eliminación de incógnitas.

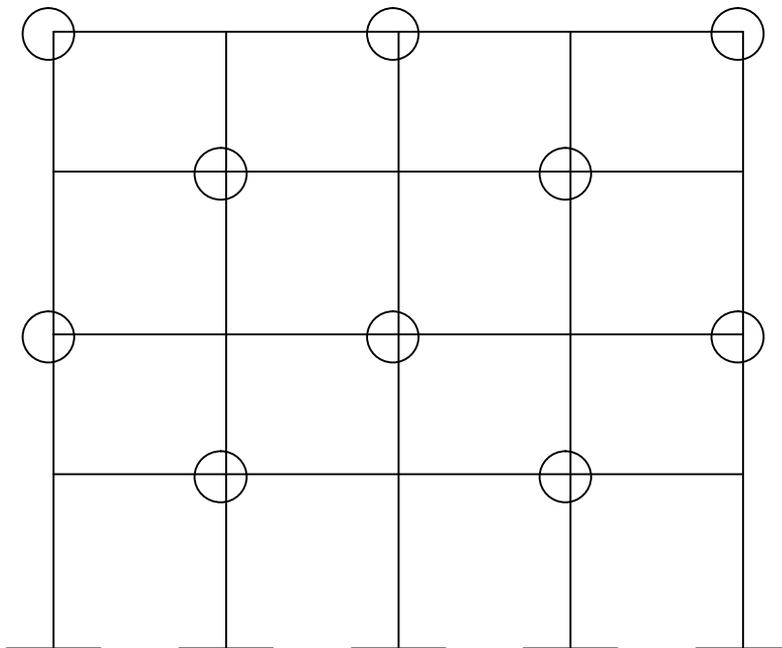
Resumen para este ejemplo:

Método	Número de Incógnitas	Tamaño del sistema de ecuaciones
Rotaciones	7	7x7
Eliminación de Incógnitas	4	4x4

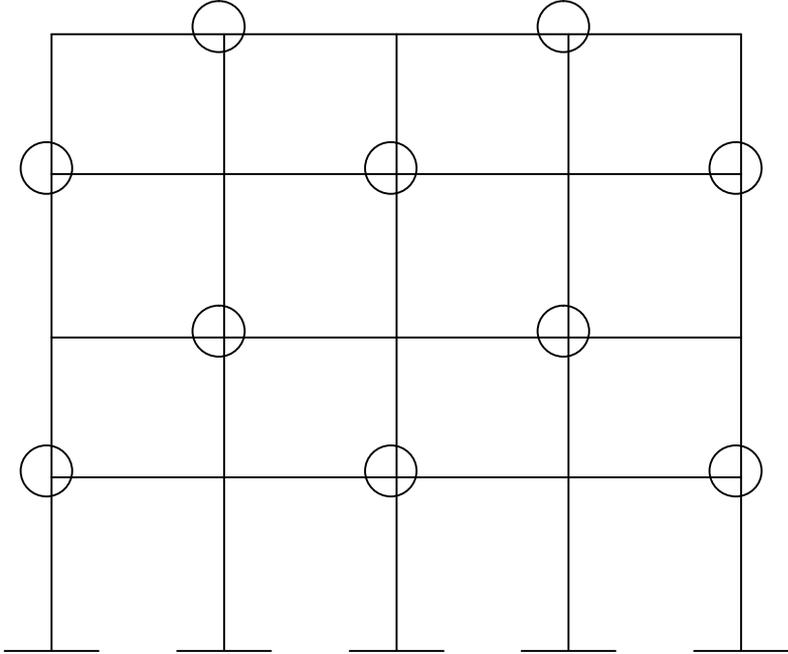
Ejemplo 4.6.4: Estructura aporricada de varios niveles.

En el caso de pórticos consecutivos, unos encima de otros, los giros que se pueden eliminar, usando el método de eliminación de incógnitas de giro, siguen una tendencia como la que se muestra a continuación:

Los giros que se eliminan están marcados con un círculo:



También la eliminación puede ser de la siguiente forma:



En este tipo de estructuras, se eliminan la mitad de los giros.

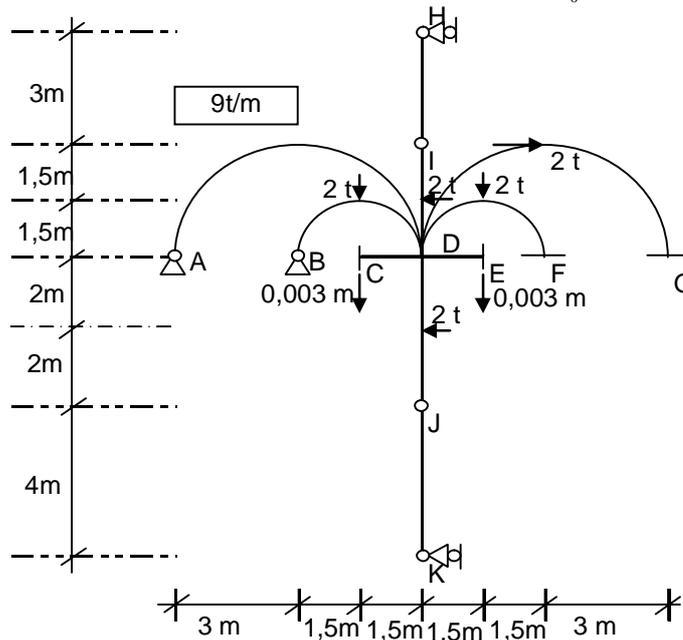
4.7 Ejemplos Explicativos

A continuación, se presentan ejemplos explicativos, con la finalidad de entender como se debe aplicar el método de eliminación de incógnitas.

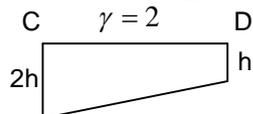
Ejemplo 4.7.1:

Sea la siguiente estructura:

Todos los miembros tienen el mismo valor de I_0 y $EI_0 = 10^3 t.m^2$

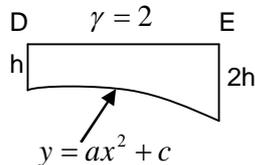


Miembro CD



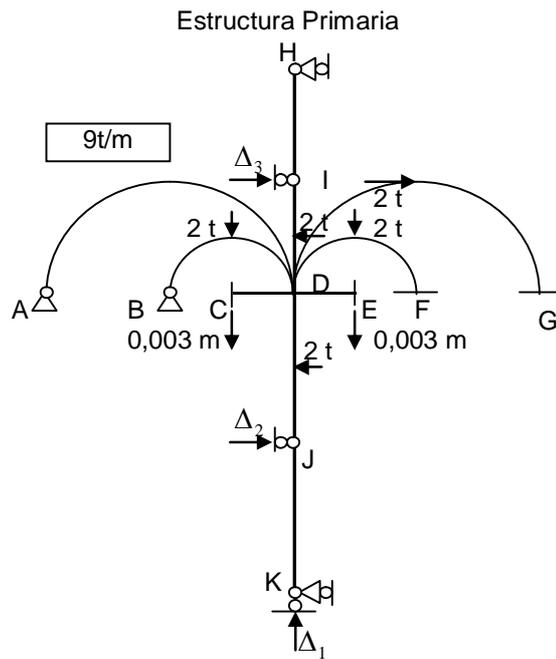
Los miembros AD y DG son arcos parabólicos compensados

Miembro DE



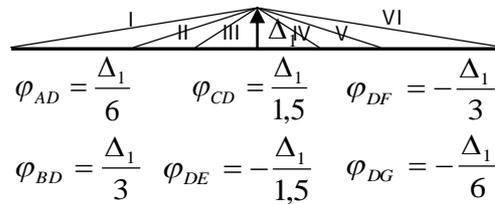
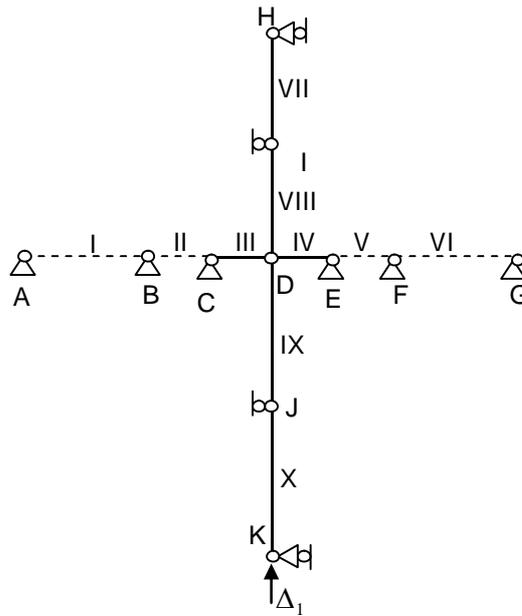
Los miembros BD y DF son arcos circulares de sección constante

Los miembros HI, ID, DJ y JK son miembros de directriz recta de sección constante.



Se eliminó el giro en D como incógnita, por lo tanto como no hay más incógnitas de giro, no hay que hacer sumatoria de momentos en ninguna junta, ya que según los lineamientos del método, se debe hacer sumatoria de momentos en aquellas juntas donde no se eliminó el giro como incógnita. Así, quedará un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas, que se obtienen al aplicar el principio de trabajos virtuales para las 3 desplazabilidades.

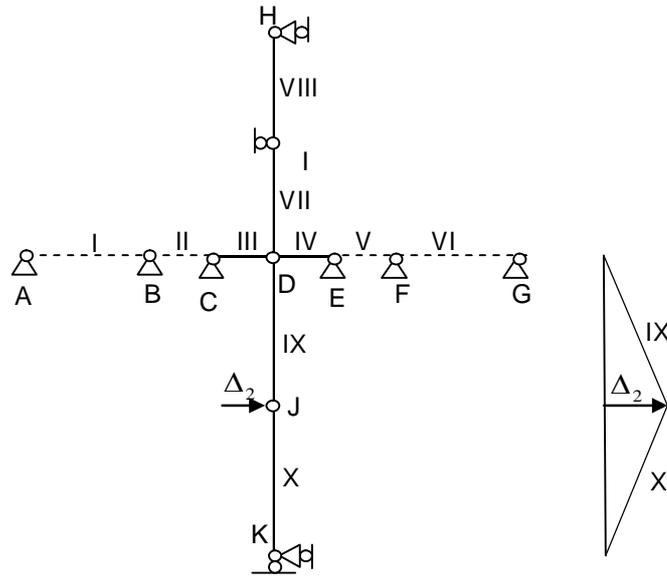
Análisis de movimiento para la desplazabilidad Δ_1
 Los arcos se representan en la imagen cinemática con líneas segmentadas, como estructuras totalmente deformables.



$$\varphi_{AD} = \frac{\Delta_1}{6} \quad \varphi_{CD} = \frac{\Delta_1}{1,5} \quad \varphi_{DF} = -\frac{\Delta_1}{3}$$

$$\varphi_{BD} = \frac{\Delta_1}{3} \quad \varphi_{DE} = -\frac{\Delta_1}{1,5} \quad \varphi_{DG} = -\frac{\Delta_1}{6}$$

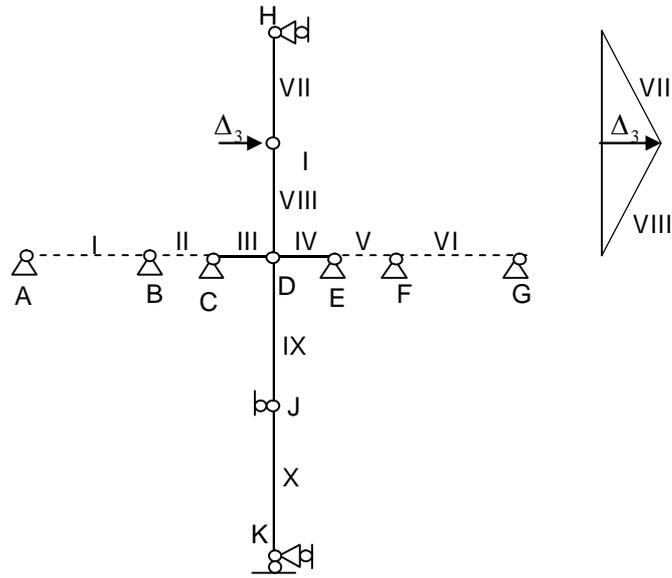
Análisis de movimiento para la desplazabilidad Δ_2



$$\varphi_{DJ} = \frac{\Delta_2}{4}$$

$$\varphi_{JK} = -\frac{\Delta_2}{4}$$

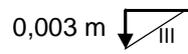
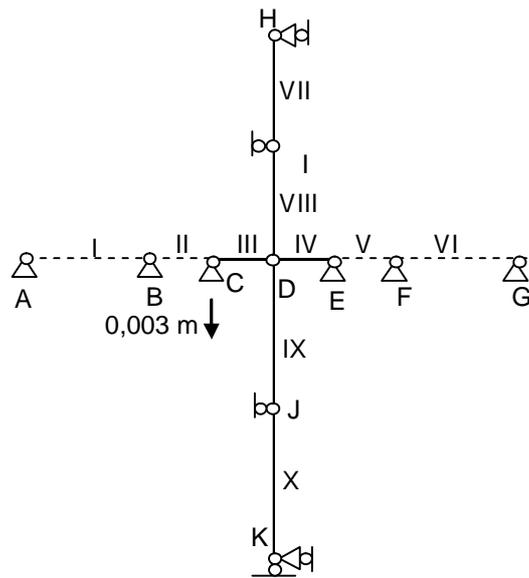
Análisis de movimiento para la desplazabilidad Δ_3



$$\varphi_{HI} = \frac{\Delta_3}{3}$$

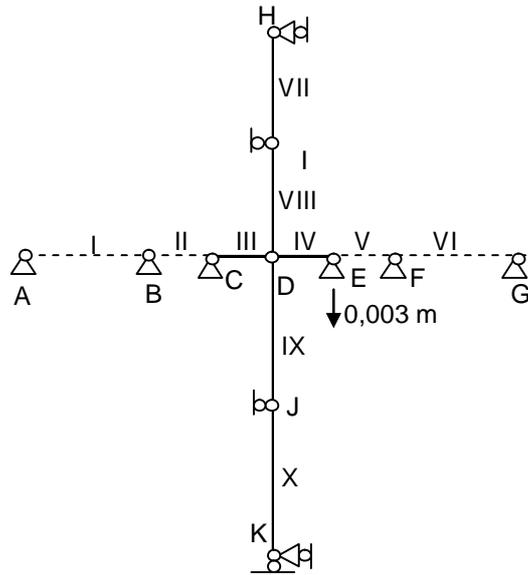
$$\varphi_{ID} = -\frac{\Delta_3}{3}$$

Análisis de movimiento para el asentamiento en C



$$\varphi_{CD} = \frac{0,003}{1,5} = 0,002$$

Análisis de movimiento para el asentamiento en E



$$\varphi_{DE} = \frac{-0,003}{1,5} = -0,002$$

Para hallar las incógnitas, debemos hallar las fuerzas de empotramiento de los miembros.

$$M_{AD}^0 = \frac{9 \circ 6^2}{64} = 5,0625t \circ m, M_{DA}^0 = \frac{9 \circ 6^2}{64} = 5,0625t \circ m, H_{AD}^0 = -\frac{9 \circ 6^2}{16 \circ 3} = -6,75t,$$

$$H_{DA}^0 = -\frac{9 \circ 6^2}{16 \circ 3} = -6,75t, M_{DG}^0 = \frac{2 \circ 3}{8} = 0,75t \circ m, M_{GD}^0 = \frac{2 \circ 3}{8} = 0,75t \circ m,$$

$$H_{GD}^0 = -\frac{2}{2} = -1t, H_{DG}^0 = \frac{2}{2} = 1t, M_{BD}^0 = -0,1105 \circ 2 \circ 1,5 = -0,3315t \circ m,$$

$$M_{DB}^0 = 0,1105 \circ 2 \circ 1,5 = 0,3315t \circ m, H_{BD}^0 = -0,459 \circ 2 = -0,918t,$$

$$H_{DB}^0 = -0,459 \circ 2 = -0,918t, M_{DF}^0 = -0,1105 \circ 2 \circ 1,5 = -0,3315t \circ m,$$

$$M_{FD}^0 = 0,1105 \circ 2 \circ 1,5 = 0,3315t \circ m, H_{DF}^0 = -0,459 \circ 2 = -0,918t,$$

$$H_{FD}^0 = -0,459 \circ 2 = -0,918t, M_{ID}^0 = \frac{2 \circ 3}{8} = 0,75t \circ m, M_{DI}^0 = -\frac{2 \circ 3}{8} = -0,75t \circ m,$$

$$M_{DJ}^0 = \frac{2 \circ 4}{8} = 1t \circ m, M_{JD}^0 = -\frac{2 \circ 4}{8} = -1t \circ m$$

Antes de hallar las fuerzas de empotramiento de los miembros CD Y DE, debemos hallar los coeficientes elásticos de los mismos.

Miembro CD:

$$\phi_i = \frac{1}{(\gamma - 1)^2} \left[\frac{Ln\gamma}{\gamma - 1} + \frac{\gamma - 3}{2} \right] = 0,1931$$

$$\phi_j = \frac{1}{(\gamma - 1)^2} \left[\frac{Ln\gamma}{\gamma - 1} + \frac{1 - 3\gamma}{2\gamma^2} \right] = 0,0681$$

$$\phi = \frac{1}{(\gamma - 1)^2} \left[\frac{Ln\gamma}{\gamma - 1} + \frac{1 - 3\gamma}{2\gamma^2} \right] - \frac{1}{2\gamma^2} = -0,0569$$

Los coeficientes elásticos del miembro CD son:

$$C_D = \frac{\phi_j}{\phi_i \phi_j - \phi^2} = 6,8701; C_C = \frac{\phi_i}{\phi_i \phi_j - \phi^2} = 19,4805; C = \frac{-\phi}{\phi_i \phi_j - \phi^2} = 5,7402$$

Miembro DE:

$$\phi_i = \frac{1}{8(\gamma-1)\sqrt{\gamma-1}} \left[(3\gamma-2)\text{arctg}(\sqrt{\gamma-1}) - \frac{(2-\gamma)\sqrt{\gamma-1}}{\gamma^2} \right] - \frac{(\gamma+2)}{8\gamma^2} = 0,3527$$

$$\phi_j = \frac{1}{8(\gamma-1)\sqrt{\gamma-1}} \left[\text{arctg}(\sqrt{\gamma-1}) - \frac{(2-\gamma)\sqrt{\gamma-1}}{\gamma^2} \right] = 0,1194$$

$$\phi = \frac{1}{8(\gamma-1)\sqrt{\gamma-1}} \left[\text{arctg}(\sqrt{\gamma-1}) - \frac{(2-\gamma)\sqrt{\gamma-1}}{\gamma^2} \right] - \frac{(\gamma+1)}{4\gamma^2} = -0,0681$$

Los coeficientes elásticos del miembro DE son:

$$C_D = \frac{\phi_j}{\phi_i\phi_j - \phi^2} = 3,1861; C_E = \frac{\phi_i}{\phi_i\phi_j - \phi^2} = 9,4167; C = \frac{-\phi}{\phi_i\phi_j - \phi^2} = 1,8172$$

Ahora se obtienen las fuerzas de empotramiento por asentamientos de las juntas C y E, de los miembros CD y DE:

Por asentamiento de la junta C:

$$\varphi_{CD} = 0,002$$

$$M_{CD}^0 = -(C_C + C) \frac{EI_0}{L} \varphi_{CD} = -(19,4805 + 5,7402) \times \frac{10^3}{1,5} \times 0,002 = -33,6276t \cdot m$$

$$M_{DC}^0 = -(C_D + C) \frac{EI_0}{L} \varphi_{CD} = -(6,8701 + 5,7402) \times \frac{10^3}{1,5} \times 0,002 = -16,8137t \cdot m$$

Por asentamiento de la junta E:

$$\varphi_{DE} = -0,002$$

$$M_{DE}^0 = -(C_D + C) \frac{EI_0}{L} \varphi_{DE} = -(3,1861 + 1,8172) \times \frac{10^3}{1,5} \times (-0,002) = 6,6711t \cdot m$$

$$M_{ED}^0 = -(C_E + C) \frac{EI_0}{L} \varphi_{DE} = -(9,4167 + 1,8172) \times \frac{10^3}{1,5} \times (-0,002) = 14,9785t \cdot m$$

Ahora planteamos las expresiones de momento en los extremos de los miembros, y las expresiones de empuje de los arcos.

A continuación se presentan de forma explicativa, la expresión de momento M_{DA} , utilizando las ecuaciones del Método de eliminación de incógnitas de giro.

Para escribir la expresión de momento M_{DA} , utilizamos la expresión general:

$$M_{jk'} = M_{jk'}^o + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}(M_{k'j} - M_{k'j}^o) + \frac{(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}})E_k K_{k'}}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_k K_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}})} [M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)]$$

$$- \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_k K_{k'} \varphi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) - \sum_{k=1}^n C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k}$$

$$- \sum_{k'=1}^{n'} (1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_k K_{k'} C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} - E_k K_{k'} \varphi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) + (1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_k K_{k'} C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} \quad (3)$$


 Si el miembro es
 un arco

Donde “j” es la junta donde se eliminó el giro, en este caso se sustituye en la expresión (3) a “j” por “D”. Para los coeficientes elásticos, tenemos que el subíndice k se refiere a los coeficientes de miembros empotrados-empotrados, y el subíndice k' se refiere a los coeficientes de miembros empotrados-articulados. Para los términos que no están encerrados en los signos de sumatoria (\sum_k ó $\sum_{k'}$), los coeficientes elásticos, el módulo de elasticidad $E_{k'}$, la relación inercia-longitud $K_{k'}$, y los momentos $M_{k'j}$ y $M_{k'j}^o$ se refieren al miembro que se estudia. En este caso, tenemos que $C_{k'} =$ Coeficiente C del miembro empotrado-articulado que se estudia.

$C_{ik'}$ = Coeficiente C_i del miembro empotrado-articulado que se estudia, donde el subíndice i se refiere a la junta del miembro que se estudia, distinta a la junta donde se eliminó el giro, en este caso, es la junta A, es decir que para este miembro $C_{ik'} = C_A$.

$C_{jk'}$ = Coeficiente C_j del miembro empotrado-articulado que se estudia, donde el subíndice j se refiere a la junta donde se eliminó el giro, en este caso, es la junta D, es decir que para este miembro $C_{jk'} = C_D$.

$C_{Hk'}$ = Coeficiente C_H del miembro empotrado-articulado que se estudia.

En resumen, tenemos:

$$C_{k'} = C = -3$$

$$C_{ik'} = C_A = 9$$

$$C_{jk'} = C_D = 9$$

$$C_{Hk'} = C_H = 7,5$$

$$E_{k'} = E$$

$$K_{k'} = \frac{I_0}{L}$$

Como $EI_0 = 10^3 t \circ m$

$$E_{k'} K_{k'} = \frac{10^3 t \circ m}{6m}$$

$M_{k'j}$ = Momento aplicado en la junta articulada del miembro empotrado-articulado, del miembro que se estudia. En este caso:

$$M_{k'j} = M_{AD} = 0$$

$M_{k'j}^0$ = Momento de empotramiento de la junta articulada hacia la junta empotrada, como si fuese empotrado-empotrado. En este caso:

$$M_{k'j}^0 = M_{AD}^0 = 5,0625 t \circ m$$

$M_{jk'}^0$ = Momento de empotramiento de la junta empotrada hacia la junta articulada, como si fuese empotrado-empotrado. En este caso:

$$M_{jk'}^0 = M_{DA}^0 = 5,0625 t \circ m$$

Ahora definamos los términos que están encerrados en los signos de sumatoria

$$\left(\sum_k^n \text{ ó } \sum_{k'}^{n'} \right).$$

$\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k$ = En esta suma, el producto $C_{jk} E_k K_k$, se aplica a cada miembro empotrado-empotrado que llega a la junta donde se eliminó la incógnita. En este caso, los miembros empotrados-empotrados que llegan a la junta D son los miembros DE, DF, DG y CD. En el producto $C_{jk} E_k K_k$, para cada miembro empotrado-empotrado, C_{jk} = Coeficiente C_j del miembro empotrado-empotrado, en este caso será el coeficiente C_D de los diferentes miembros empotrados-empotrados que llegan a la junta D. Estos coeficientes van multiplicados por el correspondiente valor de módulo de elasticidad de cada miembro, y su correspondiente valor de relación inercia longitud.

En este caso, aplicando el producto $C_{jk} E_k K_k$ para cada miembro empotrado-empotrado que llega a la junta D, tenemos:

Para el miembro DE:

$$C_{jk} E_k K_k = C_D \frac{EI_0}{L_{DE}} = 3,1861 \frac{EI_0}{1,5} = 2,1241EI_0$$

Para el miembro DF:

$$C_{jk} E_k K_k = C_D \frac{EI_0}{L_{DF}} = 4,6339 \frac{EI_0}{3} = 1,5446EI_0$$

Para el miembro DG:

$$C_{jk} E_k K_k = C_D \frac{EI_0}{L_{DG}} = 9 \frac{EI_0}{6} = 1,5EI_0$$

Para el miembro CD:

$$C_{jk} E_k K_k = C_D \frac{EI_0}{L_{CD}} = 6,8701 \frac{EI_0}{1,5} = 4,5801EI_0$$

Una vez aplicado el producto $C_{jk} E_k K_k$ para cada miembro empotrado-empotrado que llega a la junta D, ya podemos hallar $\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k$.

$$\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k = 2,1241EI_0 + 1,5446EI_0 + 1,5EI_0 + 4,5801EI_0 = 9,7488EI_0$$

La suma $\sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}})$, se halla del mismo modo que la anterior, y se aplica a los miembros empotrados-articulados que llegan a la junta donde se eliminó la incógnita. En este caso, los miembros articulados que llegan a junta D son AD, BD, ID y DJ. Para cada uno de estos miembros, tenemos:

Para el miembro AD:

$$E_{k'} K_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) = (9 - \frac{(-3)^2}{9}) \frac{EI_0}{6} = 1,3333EI_0$$

Para el miembro BD:

$$E_{k'} K_{k'} \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}} \right) = \left(4,6339 - \frac{(-2,0875)^2}{4,6339} \right) \frac{EI_0}{3} = 1,2312EI_0$$

Para el miembro ID:

$$E_{k'} K_{k'} \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}} \right) = \left(4 - \frac{2^2}{4} \right) \frac{EI_0}{3} = EI_0$$

Para el miembro DJ:

$$E_{k'} K_{k'} \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}} \right) = \left(4 - \frac{2^2}{4} \right) \frac{EI_0}{4} = 0,75EI_0$$

Una vez aplicado el producto $E_{k'} K_{k'} \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}} \right)$ para cada miembro empotrado-

articulado que llega a la junta D, ya podemos hallar $\sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}} \right)$.

$$\sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}} \right) = 1,3333EI_0 + 1,2312EI_0 + EI_0 + 0,75EI_0 = 4,3145EI_0$$

Definamos ahora M_{extj} . M_{extj} = Momento externo aplicado en la junta donde se eliminó la incógnita. En este caso $M_{extj} = M_{extD} = 0$.

Las demás sumatorias se hallan de la misma manera que las anteriores:

$$\sum_{k=1}^n M_{jk}^o = M_{DC}^0 + M_{DE}^0 + M_{DF}^0 + M_{DG}^0 = -16,8137 + 6,6711 - 0,3315 + 0,75 = -9,7241t \circ m$$

$$\sum_{k'=1}^{n'} M_{jk'}^o = M_{DA}^0 + M_{DB}^0 + M_{DI}^0 + M_{DJ}^0 = 5,0625 + 0,3315 - 0,75 + 1 = 5,644t \circ m$$

$$\sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o) = -\frac{3}{9} (0 - 5,0625) - \frac{2,0875}{4,6339} (0 - (-0,3315)) + \frac{2}{4} (0 - 0,75) + \frac{2}{4} (0 - (-1))$$

$$\sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o) = 1,6632t \circ m$$

$\sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k = 0$, ya que $\theta_k = 0$ en todos los miembros empotrados-empotrados que llegan a la junta D. Siendo θ_k , el giro de la junta del miembro distinta a la junta donde se eliminó la incógnita.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k &= (6,8701 + 5,7402) \frac{EI_0}{1,5} \frac{\Delta_1}{1,5} + (3,1861 + 1,8172) \frac{EI_0}{1,5} \left(-\frac{\Delta_1}{1,5} \right) \\ &+ (4,6339 - 2,0875) \frac{EI_0}{3} \left(-\frac{\Delta_1}{3} \right) + (9 - 3) \frac{EI_0}{6} \left(-\frac{\Delta_1}{6} \right) = 2,9313 EI_0 \Delta_1 \\ \sum_{k=1}^{n'} E_k K_k \varphi_k \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}} \right) &= \left(9 - \frac{(-3)^2}{9} \right) \frac{EI_0}{6} \frac{\Delta_1}{6} + \left(4,6339 - \frac{(-2,0875)^2}{4,6339} \right) \frac{EI_0}{3} \frac{\Delta_1}{3} \\ &+ \left(4 - \frac{2^2}{4} \right) \frac{EI_0}{3} \left(-\frac{\Delta_3}{3} \right) + \left(4 - \frac{2^2}{4} \right) \frac{EI_0}{4} \frac{\Delta_2}{4} = 0,6326 EI_0 \Delta_1 + 0,1875 EI_0 \Delta_2 - 0,3333 EI_0 \Delta_3 \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^n C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} = 0$, ya que $\Delta L_k = 0$ en todos los miembros empotrados-empotrados que llegan a la junta D. Siendo ΔL_k el alargamiento o acortamiento del miembro empotrado-empotrado.

$\sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} \right) E_k K_k C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} = 0$, ya que $\Delta L_{k'} = 0$ en todos los miembros empotrados-articulados que llegan a la junta D. Siendo $\Delta L_{k'}$ el alargamiento o acortamiento del miembro empotrado-articulado.

Ya definidos todos los términos que componen la expresión de momento M_{DA} , planteamos ésta:

$$\begin{aligned} M_{DA} &= 5,0625 - \frac{3}{9} (0 - 5,0625) + \frac{\left(9 - \frac{(-3)^2}{9} \right) \frac{EI_0}{6}}{9,7488 EI_0 + 4,3145 EI_0} [0 - (-9,724) - 5,644 - 1,9618 + 0,6326 EI_0 \Delta_1 + 0,1875 EI_0 \Delta_2 \\ &- 0,3333 EI_0 \Delta_3 + 2,9313 \Delta_1] - \left(9 - \frac{(-3)^2}{9} \right) \frac{EI_0}{6} \frac{\Delta_1}{6} \\ M_{DA} &= 6,9791 + 0,1157 EI_0 \Delta_1 + 0,0178 EI_0 \Delta_2 - 0,0316 EI_0 \Delta_3 \end{aligned}$$

Ahora planteamos las demás expresiones que nos interesan:

Miembro AD:

Hallamos las expresiones de empuje de este arco según las ecuaciones (10) y (11) del método de eliminación de incógnitas de giro, ya que la articulación de este arco, está a la izquierda de la junta D (junta donde se eliminó la incógnita de giro):

$$H_{AD} = -6,75 + \frac{EI_0}{6} \frac{7,5}{3} \left[-\left(1 - \frac{3}{9}\right) \left[\frac{1}{14,0633EI_0} [2,4169 + 3,5639EI_0\Delta_1 + 0,1875EI_0\Delta_2 - 0,3333EI_0\Delta_3] - \frac{\Delta_1}{6} \right] \right. \\ \left. + \frac{7,5}{9 \times 3} (0 - 5,0625) \right] = -8,204 - 0,024EI_0\Delta_1 - 0,0037EI_0\Delta_2 + 0,0066EI_0\Delta_3$$

$$H_{DA} = -6,75 + \frac{EI_0}{6} \frac{7,5}{3} \left[-\left(1 - \frac{3}{9}\right) \left[\frac{1}{14,0633EI_0} [2,4169 + 3,5639EI_0\Delta_1 + 0,1875EI_0\Delta_2 - 0,3333EI_0\Delta_3] - \frac{\Delta_1}{6} \right] \right. \\ \left. + \frac{7,5}{9 \times 3} (0 - 5,0625) \right] = -8,204 - 0,024EI_0\Delta_1 - 0,0037EI_0\Delta_2 + 0,0066EI_0\Delta_3$$

Miembro BD:

$$M_{DB} = 0,3315 - \frac{2,0875}{4,6339} (0 - (-0,3315)) + \frac{(4,6339 - \frac{(-2,0875)^2}{4,6339}) \frac{EI_0}{3}}{14,0633EI_0} [2,4169 + 3,5639EI_0\Delta_1 + 0,1875EI_0\Delta_2 \\ - 0,3333EI_0\Delta_3] - (4,6339 - \frac{(-2,0875)^2}{4,6339}) \frac{EI_0}{3} \frac{\Delta_1}{3} \\ M_{DB} = 0,3938 - 0,0984EI_0\Delta_1 + 0,0164EI_0\Delta_2 - 0,0292EI_0\Delta_3$$

Hallamos las expresiones de empuje de este arco según las ecuaciones (10) y (11) del método de eliminación de incógnitas de giro, ya que la articulación de este arco, está a la izquierda de la junta D (junta donde se eliminó la incógnita de giro):

$$H_{DB} = -0,918 + \frac{EI_0}{3} \frac{4,279}{1,5} \left[-\left(1 - \frac{2,0875}{4,6339}\right) \left[\frac{1}{14,0633EI_0} [2,4169 + 3,5639EI_0\Delta_1 + 0,1875EI_0\Delta_2 - 0,3333EI_0\Delta_3] \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\Delta_1}{3} \right] \right] + \frac{4,279}{1,5 \times 4,6339} (0 - (-0,3315)) = -1,9768 + 0,0418EI_0\Delta_1 - 0,007EI_0\Delta_2 + 0,0124EI_0\Delta_3$$

$$H_{BD} = -0,918 + \frac{EI_0}{3} \frac{4,279}{1,5} \left[-\left(1 - \frac{2,0875}{4,6339}\right) \left[\frac{1}{14,0633EI_0} [2,4169 + 3,5639EI_0\Delta_1 + 0,1875EI_0\Delta_2 - 0,3333EI_0\Delta_3] - \frac{\Delta_1}{3} \right] \right] + \frac{4,279}{1,5 \times 4,6339} (0 - (-0,3315)) = -1,9768 - 0,0418EI_0\Delta_1 - 0,007EI_0\Delta_2 + 0,0124EI_0\Delta_3$$

Miembro DG:

$$M_{DG} = 0,75 + \frac{9EI_0}{14,0633EI_0} [2,4169 + 3,5639EI_0\Delta_1 + 0,1875EI_0\Delta_2 - 0,3333EI_0\Delta_3] - (9-3) \frac{EI_0}{6} \left(-\frac{\Delta_1}{6} \right) = 1,0078 + 0,5468EI_0\Delta_1 + 0,02EI_0\Delta_2 - 0,0355EI_0\Delta_3$$

$$M_{GD} = 0,75 + \frac{-3EI_0}{14,0633EI_0} [2,4169 + 3,5639EI_0\Delta_1 + 0,1875EI_0\Delta_2 - 0,3333EI_0\Delta_3] - (9-3) \frac{EI_0}{6} \left(-\frac{\Delta_1}{6} \right) = 0,6641 + 0,04EI_0\Delta_1 - 0,0067EI_0\Delta_2 + 0,0118EI_0\Delta_3$$

Hallamos las expresiones de empuje de este arco según las ecuaciones (4) y (5) del método de eliminación de incógnitas de giro, ya que la otra junta diferente de D, está a la izquierda de D (junta donde se eliminó la incógnita de giro):

$$H_{DG} = 1 + \frac{EI_0}{6} \frac{7,5}{3} \frac{1}{14,0633EI_0} [2,4169 + 3,5639EI_0\Delta_1 + 0,1875EI_0\Delta_2 - 0,3333EI_0\Delta_3] = 1,0716 + 0,1056EI_0\Delta_1 + 0,0056EI_0\Delta_2 - 0,0099EI_0\Delta_3$$

$$H_{GD} = -1 + \frac{EI_0}{6} \frac{7,5}{3} \left[\frac{1}{14,0633EI_0} [2,4169 + 3,5639EI_0\Delta_1 + 0,1875EI_0\Delta_2 - 0,3333EI_0\Delta_3] \right] = -0,9284 + 0,1056EI_0\Delta_1 + 0,0056EI_0\Delta_2 - 0,0099EI_0\Delta_3$$

Miembro DF:

$$M_{DF} = -0,3315 + \frac{4,6339EI_0}{14,0633EI_0} [2,4169 + 3,5639EI_0\Delta_1 + 0,1875EI_0\Delta_2 - 0,3333EI_0\Delta_3] - (4,6339 - 2,0875) \frac{EI_0}{3} \left(-\frac{\Delta_1}{3} \right) = -0,066 + 0,6744EI_0\Delta_1 + 0,0206EI_0\Delta_2 - 0,0366EI_0\Delta_3$$

$$M_{FD} = 0,3315 + \frac{-2,0875 EI_0}{14,0633 EI_0} [2,4169 + 3,5639 EI_0 \Delta_1 + 0,1875 EI_0 \Delta_2 - 0,3333 EI_0 \Delta_3]$$

$$- (4,6339 - 2,0875) \frac{EI_0}{3} \left(-\frac{\Delta_1}{3} \right) = 0,2119 + 0,1066 EI_0 \Delta_1 - 0,0093 EI_0 \Delta_2 + 0,0165 EI_0 \Delta_3$$

Hallamos las expresiones de empuje de este arco según las ecuaciones (4) y (5) del método de eliminación de incógnitas de giro, ya que la otra junta diferente de D, está a la izquierda de D (junta donde se eliminó la incógnita de giro):

$$H_{DF} = -0,918 + \frac{EI_0}{3} \frac{4,279}{3} \left[\frac{1}{14,0633 EI_0} [2,4169 + 3,5639 EI_0 \Delta_1 + 0,1875 EI_0 \Delta_2 - 0,3333 EI_0 \Delta_3] \right] = -1,7543$$

$$+ 0,1205 EI_0 \Delta_1 + 0,0063 EI_0 \Delta_2 - 0,0113 EI_0 \Delta_3$$

$$H_{FD} = -0,918 + \frac{EI_0}{3} \frac{4,279}{3} \left[\frac{1}{14,0633 EI_0} [2,4169 + 3,5639 EI_0 \Delta_1 + 0,1875 EI_0 \Delta_2 - 0,3333 EI_0 \Delta_3] \right] = -1,7543$$

$$+ 0,1205 EI_0 \Delta_1 + 0,0063 EI_0 \Delta_2 - 0,0113 EI_0 \Delta_3$$

Miembro ID:

$$M_{DI} = -0,75 + \frac{2}{4} (0 - 0,75) + \frac{(4 - \frac{2^2}{4}) EI_0}{14,0633 EI_0} [2,4169 + 3,5639 EI_0 \Delta_1 + 0,1875 EI_0 \Delta_2 - 0,3333 EI_0 \Delta_3]$$

$$- (4 - \frac{2^2}{4}) \frac{EI_0}{3} \left(-\frac{\Delta_3}{3} \right)]$$

$$M_{DI} = -0,9531 + 0,2534 EI_0 \Delta_1 + 0,0133 EI_0 \Delta_2 + 0,3096 EI_0 \Delta_3$$

Miembro DJ:

$$M_{DJ} = 1 + \frac{2}{4} (0 - (-1)) + \frac{(4 - \frac{2^2}{4}) EI_0}{14,0633 EI_0} [2,4169 + 3,5639 EI_0 \Delta_1 + 0,1875 EI_0 \Delta_2 - 0,3333 EI_0 \Delta_3]$$

$$- (4 - \frac{2^2}{4}) \frac{EI_0}{4} \left(\frac{\Delta_2}{4} \right)]$$

$$M_{DJ} = 1,6289 + 0,1901 EI_0 \Delta_1 - 0,1775 EI_0 \Delta_2 - 0,0178 EI_0 \Delta_3$$

Miembro CD:

$$M_{CD} = -33,6276 + \frac{5,7402 \frac{EI_0}{1,5}}{14,0633 EI_0} [2,4169 + 3,5639 EI_0 \Delta_1 + 0,1875 EI_0 \Delta_2 - 0,3333 EI_0 \Delta_3]$$

$$-(19,4805 + 5,7402 \frac{EI_0}{1,5} \frac{\Delta_1}{1,5}) = -32,97 - 10,2394 EI_0 \Delta_1 + 0,051 EI_0 \Delta_2 - 0,0864 EI_0 \Delta_3$$

$$M_{DC} = -16,8137 + \frac{6,8701 \frac{EI_0}{1,5}}{14,0633 EI_0} [2,4169 + 3,5639 EI_0 \Delta_1 + 0,1875 EI_0 \Delta_2 - 0,3333 EI_0 \Delta_3]$$

$$-(6,8701 + 5,7402 \frac{EI_0}{1,5} \frac{\Delta_1}{1,5}) = -16,0266 - 4,4439 EI_0 \Delta_1 + 0,0611 EI_0 \Delta_2 - 0,1085 EI_0 \Delta_3$$

Miembro DE:

$$M_{ED} = 14,9785 + \frac{1,8172 \frac{EI_0}{1,5}}{14,0633 EI_0} [2,4169 + 3,5639 EI_0 \Delta_1 + 0,1875 EI_0 \Delta_2 - 0,3333 EI_0 \Delta_3]$$

$$-(9,4167 + 1,8172 \frac{EI_0}{1,5} \left(-\frac{\Delta_1}{1,5} \right)) = 15,1867 + 5,3 EI_0 \Delta_1 + 0,0162 EI_0 \Delta_2 - 0,0287 EI_0 \Delta_3$$

$$M_{DE} = 6,6711 + \frac{3,1861 \frac{EI_0}{1,5}}{14,0633 EI_0} [2,4169 + 3,5639 EI_0 \Delta_1 + 0,1875 EI_0 \Delta_2 - 0,3333 EI_0 \Delta_3]$$

$$-(3,1861 + 1,8172 \frac{EI_0}{1,5} \left(-\frac{\Delta_1}{1,5} \right)) = 7,0361 + 2,762 EI_0 \Delta_1 + 0,0283 EI_0 \Delta_2 - 0,0503 EI_0 \Delta_3$$

Ahora se plantean las ecuaciones que resuelven el problema (aplicación del principio de trabajos virtuales para las 3 desplazabilidades):

Para la desplazabilidad Δ_1 tenemos:

$$M_{DA}\varphi_{AD} + M_{DB}\varphi_{BD} + (M_{CD} + M_{DC})\varphi_{CD} + (M_{DE} + M_{ED})\varphi_{DE} + (M_{DF} + M_{FD})\varphi_{DF} \\ + (M_{DG} + M_{GD})\varphi_{GD} - 9t/m \circ 3 \circ \frac{\Delta_1}{4} - 2t \circ \frac{3\Delta_1}{4} - 2t \circ \frac{3\Delta_1}{4} = 0$$

Por lo que nos queda:

$$(6,9791 + 0,1157EI_0\Delta_1 + 0,0178EI_0\Delta_2 - 0,0316EI_0\Delta_3) \frac{\Delta_1}{6} \\ + (0,3938 - 0,0984EI_0\Delta_1 + 0,0164EI_0\Delta_2 - 0,0292EI_0\Delta_3) \frac{\Delta_1}{3} \\ + (-32,97 - 10,2394EI_0\Delta_1 + 0,051EI_0\Delta_2 - 0,0864EI_0\Delta_3) \frac{\Delta_1}{1,5} \\ + (-16,0266 - 4,4439EI_0\Delta_1 + 0,0611EI_0\Delta_2 - 0,1085EI_0\Delta_3) \frac{\Delta_1}{1,5} \\ + (7,0361 + 2,762EI_0\Delta_1 + 0,0283EI_0\Delta_2 - 0,0503EI_0\Delta_3) \left(-\frac{\Delta_1}{1,5}\right) \\ + (15,1867 + 5,3EI_0\Delta_1 + 0,0162EI_0\Delta_2 - 0,0287EI_0\Delta_3) \left(-\frac{\Delta_1}{1,5}\right) \\ + (-0,066 + 0,6744EI_0\Delta_1 + 0,0206EI_0\Delta_2 - 0,0366EI_0\Delta_3) \left(-\frac{\Delta_1}{3}\right) \\ + (0,2119 + 0,1066EI_0\Delta_1 - 0,0093EI_0\Delta_2 + 0,0165EI_0\Delta_3) \left(-\frac{\Delta_1}{3}\right) \\ + (1,0078 + 0,5468EI_0\Delta_1 + 0,02EI_0\Delta_2 - 0,0355EI_0\Delta_3) \left(-\frac{\Delta_1}{6}\right) \\ + (0,6641 + 0,04EI_0\Delta_1 - 0,0067EI_0\Delta_2 + 0,0118EI_0\Delta_3) \left(-\frac{\Delta_1}{6}\right) \\ - 9t/m \circ 3 \circ \frac{\Delta_1}{4} - 2t \circ \frac{3\Delta_1}{4} - 2t \circ \frac{3\Delta_1}{4} = 0$$

Así obtenemos la ecuación 1:

$$-15,5352EI_0\Delta_1 + 0,0475EI_0\Delta_2 - 0,0816EI_0\Delta_3 = 56,2624$$

Para la desplazabilidad Δ_2 tenemos:

$$M_{DJ}\varphi_{DJ} - 2t \circ \frac{\Delta_2}{2} = 0$$

Por lo que nos queda:

$$(1,6289 + 0,190EI_0\Delta_1 - 0,1775EI_0\Delta_2 - 0,0178EI_0\Delta_3) \frac{\Delta_2}{4} - \Delta_2 = 0$$

Así obtenemos la ecuación 2:

$$0,0475EI_0\Delta_1 - 0,0443EI_0\Delta_2 - 0,0045EI_0\Delta_3 = 0,5927$$

Para la desplazabilidad Δ_3 tenemos:

$$M_{DI}\varphi_{DI} - 2t \circ \frac{\Delta_3}{2} = 0$$

Por lo que nos queda:

$$(-0,9531 + 0,2534EI_0\Delta_1 + 0,0133EI_0\Delta_2 + 0,3096EI_0\Delta_3) \left(-\frac{\Delta_3}{3}\right) - \Delta_3 = 0$$

Así obtenemos la ecuación 3:

$$-0,0845EI_0\Delta_1 - 0,0044EI_0\Delta_2 - 0,1032EI_0\Delta_3 = 0,6823$$

Ahora se resuelve el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$-15,5352EI_0\Delta_1 + 0,0475EI_0\Delta_2 - 0,0816EI_0\Delta_3 = 56,2624$$

$$0,0475EI_0\Delta_1 - 0,0443EI_0\Delta_2 + 0,0045EI_0\Delta_3 = 0,5927$$

$$-0,0845EI_0\Delta_1 - 0,0044EI_0\Delta_2 - 0,1032EI_0\Delta_3 = 0,6823$$

Y se obtienen los siguientes valores:

$$EI_0\Delta_1 = -3,6604$$

$$EI_0\Delta_2 = -17,5949$$

$$EI_0\Delta_3 = -2,8642$$

Luego, estos valores se sustituyen en las expresiones de momento y empuje en los extremos de los miembros, Obteniéndose así, los siguientes valores:

Miembro AD:

$$M_{DA} = 6,3329t - m, H_{AD} = -8,0696t, H_{DA} = -8,0696t$$

Miembro DB:

$$M_{DB} = 0,5491t - m, H_{BD} = -1,7361t, H_{DB} = -1,7361t$$

Miembro DG:

$$M_{DG} = -1,2439t - m, M_{GD} = 0,6018t - m, H_{DG} = 0,6149t, H_{GD} = -1,3851t$$

Miembro DF:

$$M_{DF} = -2,7922t - m, M_{FD} = -0,0619t - m, H_{DF} = -2,2739t, H_{FD} = -2,2739t$$

Miembro DI:

$$M_{DI} = -3,0014t - m$$

Miembro DJ:

$$M_{DJ} = 4,1071t - m$$

Miembro CD:

$$M_{CD} = 3,86t - m, M_{DC} = -0,5246t - m$$

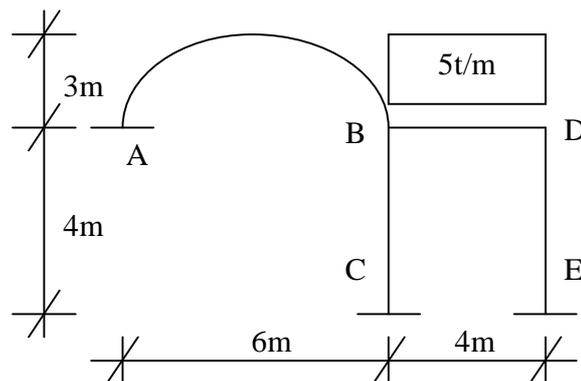
Miembro DE:

$$M_{ED} = -4,4161t - m, M_{DE} = -3,4277t - m$$

Ejemplo 4.7.2:

El siguiente ejemplo explicativo, trata el caso en donde se deben combinar las ecuaciones del método de las rotaciones, y las ecuaciones del método de eliminación de incógnitas de giro.

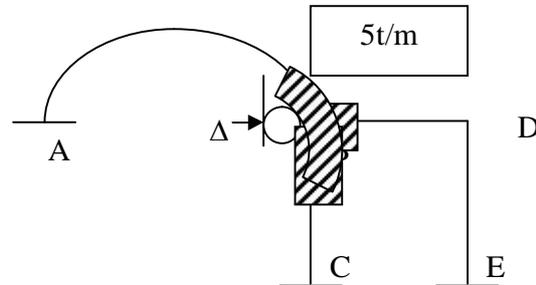
Sea la siguiente estructura:



Todos los miembros tienen el mismo valor de I_0 . El miembro AB, es un arco parábólico compensado, y los demás son miembros de sección constante.

La máxima cantidad de giros que se pueden eliminar, aplicando el método de eliminación de incógnitas, es 1 (el giro en B ó el giro en D), por lo que las únicas incógnitas que quedan son 2 (el giro en B ó en D, y una desplazabilidad horizontal).

Estructura Primaria (Eliminando el giro en D):



$$K_0 = I_{AB} = \frac{I_0}{6}, K_{BC} = K_{BD} = K_{DE} = 1,5K_0$$

Hallamos los momentos de empotramiento.

$$M_{BD}^0 = \frac{5 \cdot 4^2}{12} = \frac{20}{3} t \cdot m, M_{DB}^0 = -\frac{5 \cdot 4^2}{12} = -\frac{20}{3} t \cdot m$$

Debido a que se eliminó el giro en D, se aplicarán las ecuaciones del método de eliminación de incógnitas, en aquellos miembros que concurren en la junta D.

$$\sum_{k=1}^n M_{jk}^0 = -\frac{20}{3}, \sum_{k=1}^n C_k E_K K_k \theta_k = 3EK_0 \theta_B, \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_K K_k \varphi_k = -\frac{9}{4} EK_0 \Delta$$

$$\sum_{k=1}^n C_{jk} E_K K_k = 12EK_0$$

Miembro BD:

Para el miembro BD, tenemos:

$$M_{BD} = \frac{20}{3} + \frac{2 \cdot 1,5EK_0}{12EK_0} \left[\frac{20}{3} - 3EK_0 \theta_B - 2,25EK_0 \Delta \right] + 4E \cdot 1,5K_0 \theta_B = \frac{25}{3} + \frac{21}{4} EK_0 \theta_B$$

$$- \frac{9}{16} EK_0 \Delta$$

$$M_{DB} = -\frac{20}{3} + \frac{4 \cdot 1,5EK_0}{12EK_0} \left[\frac{20}{3} - 3EK_0 \theta_B - 2,25EK_0 \Delta \right] + 2E \cdot 1,5K_0 \theta_B = -\frac{10}{3} + \frac{3}{2} EK_0 \theta_B - \frac{9}{8} EK_0 \Delta$$

Miembro DE:

Para el miembro DE, tenemos:

$$M_{DE} = \frac{4 \times 1,5EK_0}{12EK_0} \left[\frac{20}{3} - 3EK_0\theta_B - 2,25EK_0\Delta \right] - 6 \times 1,5K_0 \left(-\frac{\Delta}{4} \right) = \frac{10}{3} - \frac{3}{2}EK_0\theta_B + \frac{9}{8}EK_0\Delta$$

$$M_{ED} = \frac{2 \times 1,5EK_0}{12EK_0} \left[\frac{20}{3} - 3EK_0\theta_B - 2,25EK_0\Delta \right] - 6 \times 1,5K_0 \left(-\frac{\Delta}{4} \right) = \frac{5}{3} - \frac{3}{4}EK_0\theta_B + \frac{27}{16}EK_0\Delta$$

Ahora para el miembro AB y BC, aplicamos las ecuaciones del método de las rotaciones:

Miembro BC:

$$M_{BC} = Ex1,5K_0 \left[4\theta_B - 6 \left(-\frac{\Delta}{4} \right) \right] = 6EK_0\theta_B + \frac{9}{4}EK_0\Delta$$

$$M_{CB} = Ex1,5K_0 \left[2\theta_B - 6 \left(-\frac{\Delta}{4} \right) \right] = 3EK_0\theta_B + \frac{9}{4}EK_0\Delta$$

Miembro AB:

Para este miembro $\Delta_L = \Delta$

$$M_{AB} = EK_0 \left[-3\theta_B + 7,5 \frac{\Delta}{3} \right] = -3EK_0\theta_B + \frac{5}{2}EK_0\Delta$$

$$M_{BA} = EK_0 \left[9\theta_B - 7,5 \frac{\Delta}{3} \right] = 9EK_0\theta_B - \frac{5}{2}EK_0\Delta$$

$$H_{BA} = \frac{7,5}{3}EK_0 \left[-\theta_B + \frac{\Delta}{\frac{2}{3} \times 3} \right] = -\frac{5}{2}EK_0\theta_B + \frac{5}{4}EK_0\Delta$$

$$H_{AB} = \frac{7,5}{3}EK_0 \left[-\theta_B + \frac{\Delta}{\frac{2}{3} \times 3} \right] = -\frac{5}{2}EK_0\theta_B + \frac{5}{4}EK_0\Delta$$

Ahora, planteamos las ecuaciones que resuelven el problema (sumatoria de momentos en la junta B y aplicación del principio de trabajos virtuales para la desplazabilidad Δ):

Haciendo sumatoria de momentos en la junta B, tenemos:

$$M_{BA} + M_{BD} + M_{BC} = 0$$

$$\left(9EK_0\theta_B - \frac{5}{4}EK_0\Delta \right) + \left(\frac{25}{3} + \frac{21}{4}EK_0\theta_B - \frac{9}{16}EK_0\Delta \right) + \left(6EK_0\theta_B + \frac{9}{4}EK_0\Delta \right) = 0$$

Así nos queda la primera ecuación:

$$\frac{81}{4}EK_0\theta_B - \frac{13}{16}EK_0\Delta = -\frac{25}{3}$$

Aplicando el principio de trabajos virtuales para la desplazabilidad Δ , tenemos:

$$\begin{aligned} & (M_{ED} + M_{DE})\varphi_{DE} + (M_{BC} + M_{CB})\varphi_{CB} + H_{BA}\Delta = 0 \\ & \left(\left(\frac{10}{3} - \frac{3}{2}EK_0\theta_B + \frac{9}{8}EK_0\Delta \right) + \left(\frac{5}{3} - \frac{3}{4}EK_0\theta_B + \frac{27}{16}EK_0\Delta \right) \right) \left(-\frac{\Delta}{4} \right) \\ & + \left(\left(6EK_0\theta_B + \frac{9}{4}EK_0\Delta \right) + \left(3EK_0\theta_B + \frac{9}{4}EK_0\Delta \right) \right) \left(-\frac{\Delta}{4} \right) + \left(-\frac{5}{2}EK_0\theta_B + \frac{5}{4}EK_0\Delta \right) \Delta = 0 \end{aligned}$$

Así nos queda la segunda ecuación:

$$-\frac{67}{4}EK_0\theta_B - \frac{37}{16}EK_0\Delta = 5$$

Resolvemos el siguiente sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas:

$$\frac{81}{4}EK_0\theta_B - \frac{13}{16}EK_0\Delta = -\frac{25}{3}$$

$$-\frac{67}{4}EK_0\theta_B - \frac{37}{16}EK_0\Delta = 5$$

Por lo que nos queda:

$$EK_0\theta_B = -\frac{1120}{2901}$$

$$EK_0\Delta = \frac{1840}{2901}$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones de momentos y empujes, tenemos:

Miembro BD:

$$M_{BD} = 5,9497t - m, M_{DB} = -4,626t - m$$

Miembro DE:

$$M_{DE} = 4,626t - m, M_{ED} = 3,0265t - m$$

Miembro BC:

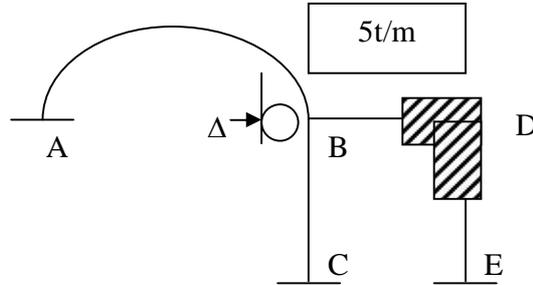
$$M_{BC} = -0,8893t - m, M_{CB} = 0,2689t - m$$

Miembro AB:

$$M_{AB} = 2,7439t - m, M_{BA} = -5,0603t - m, H_{BA} = 1,758t, H_{AB} = 1,758t$$

Ahora resolvamos el mismo problema, eliminando el giro en B:

Estructura Primaria (Eliminando el giro en B):



Debido a que se eliminó el giro en B, se aplicarán las ecuaciones del método de eliminación de incógnitas, en aquellos miembros que concurren en la junta B.

$$\sum_{k=1}^n M_{jk}^0 = \frac{20}{3}, \quad \sum_{k=1}^n C_k E_K K_k \theta_k = 3EK_0 \theta_D, \quad \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_K K_k \varphi_k = -\frac{9}{4} EK_0 \Delta$$

$$\sum_{k=1}^n C_{jk} E_K K_k = 21EK_0, \quad \sum_{k=1}^n C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} = -\frac{5}{2} EK_0 \Delta$$

Miembro AB:

Aplicamos las ecuaciones (1) y (2) colocando el negativo el término $C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k}$, ya que la otra junta del arco diferente de B, está a la izquierda de ésta.

$$M_{AB} = \frac{-3EK_0}{21EK_0} \left[-\frac{20}{3} - 3EK_0 \theta_D - \frac{9}{4} EK_0 \Delta + \frac{5}{2} EK_0 \Delta \right] + \frac{5}{2} EK_0 \Delta = \frac{20}{21} + \frac{3}{7} EK_0 \theta_D + \frac{69}{28} EK_0 \Delta$$

$$M_{BA} = \frac{9EK_0}{21EK_0} \left[-\frac{20}{3} - 3EK_0 \theta_D - \frac{9}{4} EK_0 \Delta + \frac{5}{2} EK_0 \Delta \right] - \frac{5}{2} EK_0 \Delta = -\frac{20}{7} - \frac{9}{7} EK_0 \theta_D - \frac{67}{28} EK_0 \Delta$$

$$H_{AB} = \frac{7,5}{3} EK_0 \left[-\frac{1}{21EK_0} \left[-\frac{20}{3} - 3EK_0 \theta_D - \frac{9}{4} EK_0 \Delta + \frac{5}{2} EK_0 \Delta \right] + \frac{\Delta}{\frac{2}{3} \cdot 3} \right] = \frac{50}{63} + \frac{5}{14} EK_0 \theta_D + \frac{205}{168} EK_0 \Delta$$

$$H_{BA} = \frac{7,5}{3} EK_0 \left[-\frac{1}{21EK_0} \left[-\frac{20}{3} - 3EK_0 \theta_D - \frac{9}{4} EK_0 \Delta + \frac{5}{2} EK_0 \Delta \right] + \frac{\Delta}{\frac{2}{3} \cdot 3} \right] = \frac{50}{63} + \frac{5}{14} EK_0 \theta_D + \frac{205}{168} EK_0 \Delta$$

Miembro BC:

$$M_{BC} = \frac{4x1,5EK_0}{21EK_0} \left[-\frac{20}{3} - 3EK_0\theta_D - \frac{9}{4}EK_0\Delta + \frac{5}{2}EK_0\Delta \right] + \frac{9}{4}EK_0\Delta = -\frac{40}{21} - \frac{6}{7}EK_0\theta_D + \frac{65}{28}EK_0\Delta$$

$$M_{CB} = \frac{2x1,5EK_0}{21EK_0} \left[-\frac{20}{3} - 3EK_0\theta_D - \frac{9}{4}EK_0\Delta + \frac{5}{2}EK_0\Delta \right] + \frac{9}{4}EK_0\Delta = -\frac{20}{21} - \frac{3}{7}EK_0\theta_D + \frac{16}{7}EK_0\Delta$$

Miembro BD:

$$M_{BD} = \frac{20}{3} + \frac{4x1,5EK_0}{21EK_0} \left[-\frac{20}{3} - 3EK_0\theta_D - \frac{9}{4}EK_0\Delta + \frac{5}{2}EK_0\Delta \right] + 2x1,5EK_0\theta_D = \frac{100}{21} + \frac{15}{7}EK_0\theta_D + \frac{1}{14}EK_0\Delta$$

$$M_{DB} = -\frac{20}{3} + \frac{2x1,5EK_0}{21EK_0} \left[-\frac{20}{3} - 3EK_0\theta_D - \frac{9}{4}EK_0\Delta + \frac{5}{2}EK_0\Delta \right] + 4x1,5EK_0\theta_D = -\frac{160}{21} + \frac{39}{7}EK_0\theta_D + \frac{1}{28}EK_0\Delta$$

Ahora aplicamos las ecuaciones del método de las rotaciones para el miembro DE:

Miembro DE:

$$M_{DE} = \left[4\theta_D - (4+2)\left(-\frac{\Delta}{4}\right) \right] x1,5EK_0 = 6EK_0\theta_D + \frac{9}{4}EK_0\Delta$$

$$M_{ED} = \left[2\theta_D - (4+2)\left(-\frac{\Delta}{4}\right) \right] x1,5EK_0 = 3EK_0\theta_D + \frac{9}{4}EK_0\Delta$$

Ahora, planteamos las ecuaciones que resuelven el problema (sumatoria de momentos en la junta D y aplicación del principio de trabajos virtuales para la desplazabilidad Δ):

Haciendo sumatoria de momentos en la junta D, tenemos:

$$M_{DE} + M_{DB} = 0$$

$$\left(6EK_0\theta_D + \frac{9}{4}EK_0\Delta \right) + \left(-\frac{160}{21} + \frac{39}{7}EK_0\theta_D + \frac{1}{28}EK_0\Delta \right) = 0$$

Así obtenemos la primera ecuación:

$$\frac{81}{7}EK_0\theta_D + \frac{16}{7}EK_0\Delta = \frac{160}{21}$$

Aplicando el principio de trabajos virtuales para la desplazabilidad Δ , tenemos:

$$(M_{ED} + M_{DE})\varphi_{DE} + (M_{BC} + M_{CB})\varphi_{CB} + H_{BA}\Delta = 0$$

$$\left(\left(3EK_0\theta_D + \frac{9}{4}EK_0\Delta \right) + \left(6EK_0\theta_D + \frac{9}{4}EK_0\Delta \right) \right) \left(-\frac{\Delta}{4} \right)$$

$$+ \left(\left(-\frac{40}{21} - \frac{9}{14}EK_0\theta_D + \frac{65}{28}EK_0\Delta \right) + \left(-\frac{20}{21} - \frac{3}{7}EK_0\theta_D + \frac{16}{7}EK_0\Delta \right) \right) \left(-\frac{\Delta}{4} \right)$$

$$+ \left(\frac{50}{63} + \frac{5}{14}EK_0\theta_D + \frac{205}{168}EK_0\Delta \right) \Delta = 0$$

Así obtenemos la segunda ecuación:

$$-\frac{11}{7}EK_0\theta_D - \frac{355}{336}EK_0\Delta = -\frac{95}{63}$$

Resolvemos el siguiente sistema de 2 ecuaciones con dos incógnitas:

$$\frac{81}{7}EK_0\theta_D + \frac{16}{7}EK_0\Delta = \frac{160}{21}$$

$$-\frac{11}{7}EK_0\theta_D - \frac{355}{336}EK_0\Delta = -\frac{95}{63}$$

$$EK_0\theta_D = \frac{4640}{8703}$$

$$EK_0\Delta = \frac{1840}{2901}$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones de momentos y empujes, tenemos:

Miembro BD:

$$M_{BD} = 5,9497t - m, M_{DB} = -4,626t - m$$

Miembro DE:

$$M_{DE} = 4,626t - m, M_{ED} = 3,0265t - m$$

Miembro BC:

$$M_{BC} = -0,8893t - m, M_{CB} = 0,2689t - m$$

Miembro AB:

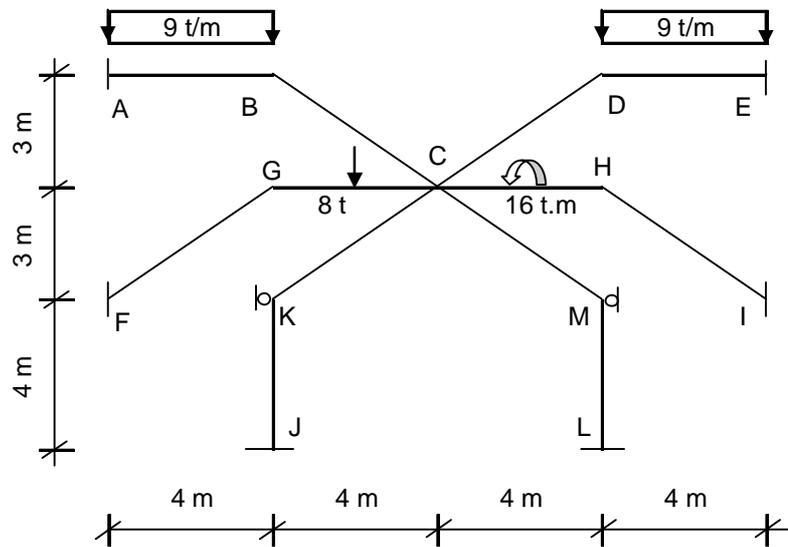
$$M_{AB} = 2,7439t - m, M_{BA} = -5,0603t - m, H_{BA} = 1,758t, H_{AB} = 1,758t$$

4.8 Ejemplos de Estructuras resolviendo su análisis

A continuación, se presentan ejemplos de estructuras, resolviendo su análisis, tanto por el método de las rotaciones, como con el método de eliminación de incógnitas, para luego comparar resultados y hacer conclusiones.

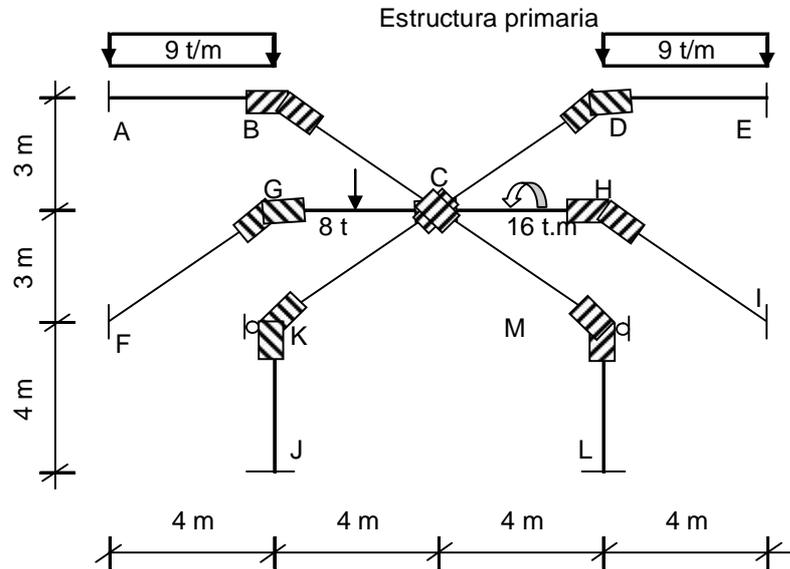
Ejemplo 4.8.1:

Sea la siguiente estructura:



Hallar los momentos en los extremos de los miembros, sabiendo que los mismos son de sección constante, y tienen el mismo valor de $K_0 = I/L$

Solución por el método de rotaciones



Esta estructura no tiene desplazabilidades, y los grados de giro son 7 ($\theta_B, \theta_C, \theta_D, \theta_G, \theta_H, \theta_K$ y θ_M)

Hallamos los momentos de empotramiento:

$$M_{AB}^0 = \frac{9 \cdot 4^2}{12} = 12t \cdot m \quad M_{DE}^0 = \frac{9 \cdot 4^2}{12} = 12t \cdot m \quad M_{GC}^0 = \frac{8 \cdot 4}{8} = 4t \cdot m$$

$$M_{BA}^0 = -\frac{9 \cdot 4^2}{12} = -12t \cdot m \quad M_{ED}^0 = -\frac{9 \cdot 4^2}{12} = -12t \cdot m \quad M_{CG}^0 = -\frac{8 \cdot 4}{8} = -4t \cdot m$$

$$M_{CH}^0 = \frac{16}{4} = 4t \cdot m \quad M_{HC}^0 = \frac{16}{4} = 4t \cdot m$$

Ahora, para resolver el problema, debemos plantear las ecuaciones de sumatoria de momentos en las juntas cuyos giros son incógnitas.

$$\sum M_B = 0 \rightarrow M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_C = 0 \rightarrow M_{CB} + M_{CD} + M_{CG} + M_{CH} + M_{CM} + M_{CK} = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_D = 0 \rightarrow M_{DE} + M_{DC} = 0 \quad (3)$$

$$\sum M_G = 0 \rightarrow M_{GF} + M_{GC} = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_H = 0 \rightarrow M_{HI} + M_{HC} = 0 \quad (5)$$

$$\sum M_K = 0 \rightarrow M_{KJ} + M_{KC} = 0 \quad (6)$$

$$\sum M_M = 0 \rightarrow M_{ML} + M_{MC} = 0 \quad (7)$$

Ahora planteamos las expresiones de momento, en los extremos de los miembros, según el método de las rotaciones:

$$\text{Miembro AB} \begin{cases} M_{AB} = 12 + 2EK_0\theta_B \\ M_{BA} = -12 + 4EK_0\theta_B \end{cases} \quad \text{Miembro CD} \begin{cases} M_{CD} = 4EK_0\theta_C + 2EK_0\theta_D \\ M_{DC} = 2EK_0\theta_C + 4EK_0\theta_D \end{cases}$$

$$\text{Miembro BC} \begin{cases} M_{BC} = 4EK_0\theta_B + 2EK_0\theta_C \\ M_{CB} = 2EK_0\theta_B + 4EK_0\theta_C \end{cases} \quad \text{Miembro DE} \begin{cases} M_{DE} = 20 + 4EK_0\theta_D \\ M_{ED} = -20 + 2EK_0\theta_D \end{cases}$$

$$\text{Miembro FG} \begin{cases} M_{FG} = 2EK_0\theta_G \\ M_{GF} = 4EK_0\theta_G \end{cases} \quad \text{Miembro HI} \begin{cases} M_{HI} = 4EK_0\theta_H \\ M_{IH} = 2EK_0\theta_H \end{cases}$$

$$\text{Miembro GC} \begin{cases} M_{GC} = 4 + 4EK_0\theta_G + 2EK_0\theta_C \\ M_{CG} = -4 + 2EK_0\theta_G + 4EK_0\theta_C \end{cases}$$

$$\text{Miembro HC} \begin{cases} M_{CH} = 4 + 4EK_0\theta_C + 2EK_0\theta_H \\ M_{HC} = 4 + 2EK_0\theta_C + 4EK_0\theta_H \end{cases}$$

$$\text{Miembro KC} \begin{cases} M_{CK} = 4EK_0\theta_C + 2EK_0\theta_K \\ M_{KC} = 2EK_0\theta_C + 4EK_0\theta_K \end{cases}$$

$$\text{Miembro CM} \begin{cases} M_{CM} = 4EK_0\theta_C + 2EK_0\theta_M \\ M_{MC} = 2EK_0\theta_C + 4EK_0\theta_M \end{cases}$$

Con estas expresiones, se arman las ecuaciones (1) a (7):

$$-12 + 8EK_0\theta_B + 2EK_0\theta_C = 0 \quad (1)$$

$$2EK_0\theta_B + 2EK_0\theta_C + 2EK_0\theta_D + 2EK_0\theta_G + 2EK_0\theta_H + 2EK_0\theta_K + 2EK_0\theta_M = 0 \quad (2)$$

$$20 + 8EK_0\theta_D + 2EK_0\theta_C = 0 \quad (3)$$

$$4 + 8EK_0\theta_G + 2EK_0\theta_C = 0 \quad (4)$$

$$4 + 8EK_0\theta_H + 2EK_0\theta_C = 0 \quad (5)$$

$$8EK_0\theta_K + 2EK_0\theta_C = 0 \quad (6)$$

$$8EK_0\theta_M + 2EK_0\theta_C = 0 \quad (7)$$

Luego, resolviendo el sistema de 7 ecuaciones con 7 incógnitas, se obtiene:

$$EK_0\theta_C = \frac{4}{21}, EK_0\theta_B = \frac{61}{42}, EK_0\theta_D = -\frac{107}{42}, EK_0\theta_G = -\frac{23}{42}, EK_0\theta_H = -\frac{23}{42},$$

$$EK_0\theta_K = -\frac{1}{21}, EK_0\theta_M = -\frac{1}{21}$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones de momento en los extremos de los miembros, nos queda:

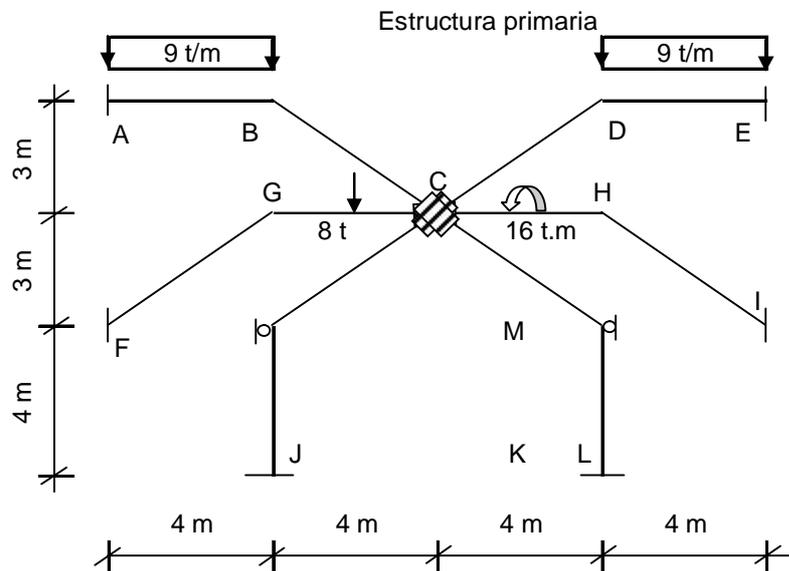
$$\text{Barra AB} \begin{cases} M_{AB} = \frac{313}{21} \\ M_{BA} = -\frac{130}{21} \end{cases} \quad \text{Barra BC} \begin{cases} M_{BC} = \frac{130}{21} \\ M_{CB} = \frac{11}{3} \end{cases} \quad \text{Barra CD} \begin{cases} M_{CD} = -\frac{13}{3} \\ M_{CB} = \frac{11}{3} \end{cases}$$

$$\text{Barra DE} \begin{cases} M_{DE} = \frac{206}{21} \\ M_{ED} = -\frac{527}{21} \end{cases} \quad \text{Barra FG} \begin{cases} M_{FG} = -\frac{23}{21} \\ M_{GF} = \frac{46}{21} \end{cases} \quad \text{Barra GC} \begin{cases} M_{GC} = \frac{46}{21} \\ M_{CB} = -\frac{13}{3} \end{cases}$$

$$\text{Barra HC} \begin{cases} M_{CH} = \frac{11}{3} \\ M_{HC} = \frac{46}{21} \end{cases} \quad \text{Barra HI} \begin{cases} M_{HI} = -\frac{46}{21} \\ M_{IH} = -\frac{23}{21} \end{cases} \quad \text{Barra KC} \begin{cases} M_{KC} = \frac{2}{3} \\ M_{CK} = \frac{4}{21} \end{cases}$$

$$\text{Barra CM} \begin{cases} M_{CM} = \frac{2}{3} \\ M_{MC} = \frac{4}{21} \end{cases} \quad \text{Barra KJ} \begin{cases} M_{KJ} = -\frac{4}{21} \\ M_{JK} = -\frac{2}{21} \end{cases} \quad \text{Barra ML} \begin{cases} M_{ML} = -\frac{4}{21} \\ M_{LM} = -\frac{2}{21} \end{cases}$$

Solución por el método de eliminación de incógnitas de giro



Si siguiendo los lineamientos del método, si se elimina el giro en la junta C, no se podrán eliminar los otros giros, en cambio, si eliminamos uno de los otros giros diferentes de C, no se podrá eliminar en giro en C, pero si se podrán eliminar los otros giros, por lo tanto, se eliminarán como incógnitas $\theta_B, \theta_D, \theta_G, \theta_H, \theta_K$ y θ_M , y queda como única incógnita, el giro en C.

$$\text{Miembro AB} \begin{cases} M_{AB} = 12 + \frac{2EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(-12 + 0) - (2EK_0\theta_C)] = 15 - \frac{1}{2}EK_0\theta_C \\ M_{BA} = -12 + \frac{4EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(-12 + 0) - (2EK_0\theta_C)] = -6 - EK_0\theta_C \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{Miembro BC} & \begin{cases} M_{BC} = \frac{4EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(-12+0) - (2EK_0\theta_C)] + 2EK_0\theta_C = 6 + EK_0\theta_C \\ M_{CB} = \frac{2EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(-12+0) - (2EK_0\theta_C)] + 4EK_0\theta_C = 3 + \frac{7}{2}EK_0\theta_C \end{cases} \\
\text{Miembro CD} & \begin{cases} M_{DC} = \frac{4EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(20+0) - (2EK_0\theta_C)] + 2EK_0\theta_C = -10 + EK_0\theta_C \\ M_{CD} = \frac{2EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(20+0) - (2EK_0\theta_C)] + 4EK_0\theta_C = -5 + \frac{7}{2}EK_0\theta_C \end{cases} \\
\text{Miembro DE} & \begin{cases} M_{DE} = 20 + \frac{4EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(20+0) - (2EK_0\theta_C)] = 10 - EK_0\theta_C \\ M_{ED} = -20 + \frac{2EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(20+0) - (2EK_0\theta_C)] = -25 - \frac{1}{2}EK_0\theta_C \end{cases} \\
\text{Miembro FG} & \begin{cases} M_{FG} = \frac{2EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(4+0) - (2EK_0\theta_C)] = -1 - \frac{1}{2}EK_0\theta_C \\ M_{GF} = \frac{4EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(4+0) - (2EK_0\theta_C)] = -2 - EK_0\theta_C \end{cases} \\
\text{Miembro FG} & \begin{cases} M_{FG} = \frac{2EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(4+0) - (2EK_0\theta_C)] = -1 - \frac{1}{2}EK_0\theta_C \\ M_{GF} = \frac{4EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(4+0) - (2EK_0\theta_C)] = -2 - EK_0\theta_C \end{cases} \\
\text{Miembro GC} & \begin{cases} M_{GC} = 4 + \frac{4EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(4+0) - (2EK_0\theta_C)] + 2EK_0\theta_C = 2 + EK_0\theta_C \\ M_{CG} = -4 + \frac{2EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(4+0) - (2EK_0\theta_C)] + 4EK_0\theta_C = -5 + \frac{7}{2}EK_0\theta_C \end{cases} \\
\text{Miembro HC} & \begin{cases} M_{HC} = 4 + \frac{2EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(4+0) - (2EK_0\theta_C)] + 4EK_0\theta_C = 3 + \frac{7}{2}EK_0\theta_C \\ M_{CH} = 4 + \frac{4EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(4+0) - (2EK_0\theta_C)] + 2EK_0\theta_C = 2 + EK_0\theta_C \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Miembro HI} & \left\{ \begin{aligned} M_{HI} &= \frac{4EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(4+0) - (2EK_0\theta_C)] = -2 - EK_0\theta_C \\ M_{HI} &= \frac{2EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(4+0) - (2EK_0\theta_C)] = -1 - \frac{1}{2}EK_0\theta_C \end{aligned} \right. \\
\text{Miembro KC} & \left\{ \begin{aligned} M_{KC} &= \frac{4EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(2EK_0\theta_C)] + 2EK_0\theta_C = EK_0\theta_C \\ M_{CK} &= \frac{2EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(2EK_0\theta_C)] + 4EK_0\theta_C = \frac{7}{2}EK_0\theta_C \end{aligned} \right. \\
\text{Miembro CM} & \left\{ \begin{aligned} M_{MC} &= \frac{4EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(2EK_0\theta_C)] + 2EK_0\theta_C = EK_0\theta_C \\ M_{CM} &= \frac{2EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(2EK_0\theta_C)] + 4EK_0\theta_C = \frac{7}{2}EK_0\theta_C \end{aligned} \right. \\
\text{Miembro KJ} & \left\{ \begin{aligned} M_{KJ} &= \frac{4EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(2EK_0\theta_C)] = -EK_0\theta_C \\ M_{JK} &= \frac{2EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(2EK_0\theta_C)] = -\frac{1}{2}EK_0\theta_C \end{aligned} \right. \\
\text{Miembro ML} & \left\{ \begin{aligned} M_{ML} &= \frac{4EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(2EK_0\theta_C)] = -EK_0\theta_C \\ M_{LM} &= \frac{2EK_0}{4EK_0 + 4EK_0} [-(2EK_0\theta_C)] = -\frac{1}{2}EK_0\theta_C \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

Ahora hacemos sumatoria de momentos en la junta C, para resolver una única ecuación con una única incógnita.

$$\sum M_C = 0 \rightarrow \left(3 + \frac{7}{2}EK_0\theta_C\right) \times 2 + \left(-5 + \frac{7}{2}EK_0\theta_C\right) \times 2 + \left(\frac{7}{2}EK_0\theta_C\right) \times 2 = 0 \rightarrow -4 + 21EK_0\theta_C = 0$$

Resolviendo la ecuación, se obtiene:

$EK_0\theta_c = \frac{4}{21}$, luego, sustituyendo en las expresiones de momento en los extremos de los miembros, se obtiene:

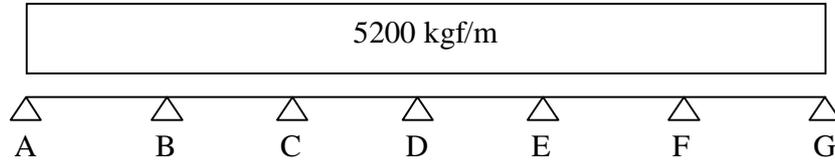
$$\begin{array}{l} \text{Barra AB} \left\{ \begin{array}{l} M_{AB} = \frac{313}{21} \\ M_{BA} = -\frac{130}{21} \end{array} \right. \quad \text{Barra BC} \left\{ \begin{array}{l} M_{BC} = \frac{130}{21} \\ M_{CB} = \frac{11}{3} \end{array} \right. \quad \text{Barra CD} \left\{ \begin{array}{l} M_{CD} = -\frac{13}{3} \\ M_{CB} = \frac{11}{3} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Barra DE} \left\{ \begin{array}{l} M_{DE} = \frac{206}{21} \\ M_{ED} = -\frac{527}{21} \end{array} \right. \quad \text{Barra FG} \left\{ \begin{array}{l} M_{FG} = -\frac{23}{21} \\ M_{GF} = \frac{46}{21} \end{array} \right. \quad \text{Barra GC} \left\{ \begin{array}{l} M_{GC} = \frac{46}{21} \\ M_{CB} = -\frac{13}{3} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Barra HC} \left\{ \begin{array}{l} M_{CH} = \frac{11}{3} \\ M_{HC} = \frac{46}{21} \end{array} \right. \quad \text{Barra HI} \left\{ \begin{array}{l} M_{HI} = -\frac{46}{21} \\ M_{IH} = -\frac{23}{21} \end{array} \right. \quad \text{Barra KC} \left\{ \begin{array}{l} M_{KC} = \frac{2}{3} \\ M_{CK} = \frac{4}{21} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Barra CM} \left\{ \begin{array}{l} M_{CM} = \frac{2}{3} \\ M_{MC} = \frac{4}{21} \end{array} \right. \quad \text{Barra KJ} \left\{ \begin{array}{l} M_{KJ} = -\frac{4}{21} \\ M_{JK} = -\frac{2}{21} \end{array} \right. \quad \text{Barra ML} \left\{ \begin{array}{l} M_{ML} = -\frac{4}{21} \\ M_{LM} = -\frac{2}{21} \end{array} \right. \end{array}$$

Ejemplo 4.8.2:
Sea la siguiente losa:



Todos los tramos tienen una longitud de 3 m, y son de sección constante.

Resolviendo por el método de rotaciones:

Para resolver el problema por el método de rotaciones, debemos considerar 5 incógnitas ($\theta_B, \theta_C, \theta_D, \theta_E$ y θ_F).

Hallamos los momentos de empotramiento:

$$M_{AB}^0 = M_{BC}^0 = M_{CD}^0 = M_{DE}^0 = M_{EF}^0 = M_{FG}^0 = \frac{5200 \cdot 3^2}{12} = 3900 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

$$M_{BA}^0 = M_{CB}^0 = M_{DC}^0 = M_{ED}^0 = M_{FE}^0 = M_{GF}^0 = -\frac{5200 \cdot 3^2}{12} = -3900 \text{ kgf} \cdot \text{m}$$

Ahora planteamos las expresiones de momento en los extremos de los miembros:

$$M_{BA} = -3900 + \frac{2}{4}(0 - 3900) + \left(4 - \frac{2^2}{4}\right)EK_0\theta_B = -5850 + 3EK_0\theta_B$$

$$M_{BC} = 3900 + 4EK_0\theta_B + 2EK_0\theta_C, \quad M_{CB} = -3900 + 2EK_0\theta_B + 4EK_0\theta_C$$

$$M_{CD} = 3900 + 4EK_0\theta_C + 2EK_0\theta_D, \quad M_{DC} = -3900 + 2EK_0\theta_C + 4EK_0\theta_D$$

$$M_{DE} = 3900 + 4EK_0\theta_D + 2EK_0\theta_E, \quad M_{ED} = -3900 + 2EK_0\theta_D + 4EK_0\theta_E$$

$$M_{EF} = 3900 + 4EK_0\theta_E + 2EK_0\theta_F, \quad M_{FE} = -3900 + 2EK_0\theta_E + 4EK_0\theta_F$$

$$M_{FG} = 3900 + \frac{2}{4}(0 - (-3900)) + \left(4 - \frac{2^2}{4}\right)EK_0\theta_F = 5850 + 3EK_0\theta_F$$

Ahora hacemos sumatoria de momentos en B, C, D, E y F:

$$\sum M_B = 0 \rightarrow M_{BC} + M_{BA} = 0 \rightarrow 7EK_0\theta_B + 2EK_0\theta_C = 1950$$

$$\sum M_C = 0 \rightarrow M_{CB} + M_{CD} = 0 \rightarrow 2EK_0\theta_B + 8EK_0\theta_C + 2EK_0\theta_D = 0$$

$$\sum M_D = 0 \rightarrow M_{DC} + M_{DE} = 0 \rightarrow 2EK_0\theta_C + 8EK_0\theta_D + 2EK_0\theta_E = 0$$

$$\sum M_E = 0 \rightarrow M_{ED} + M_{EF} = 0 \rightarrow 2EK_0\theta_D + 8EK_0\theta_E + 2EK_0\theta_F = 0$$

$$\sum M_F = 0 \rightarrow M_{FE} + M_{FG} = 0 \rightarrow 7EK_0\theta_F + 2EK_0\theta_G = -1950$$

Así se forma el siguiente sistema de 5 ecuaciones con cinco incógnitas:

$$\begin{aligned} 7EK_0\theta_B + 2EK_0\theta_C &= 1950 \\ 2EK_0\theta_B + 8EK_0\theta_C + 2EK_0\theta_D &= 0 \\ 2EK_0\theta_C + 8EK_0\theta_D + 2EK_0\theta_E &= 0 \\ 2EK_0\theta_D + 8EK_0\theta_E + 2EK_0\theta_F &= 0 \\ 7EK_0\theta_F + 2EK_0\theta_E &= -1950 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} EK_0\theta_B &= 300 \\ EK_0\theta_C &= -75 \\ EK_0\theta_D &= 0 \\ EK_0\theta_E &= 75 \\ EK_0\theta_F &= -300 \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones de momento en los extremos de los miembros, nos queda:

Miembro AB:

$$M_{BA} = -4950t - m$$

Miembro BC:

$$M_{BC} = 4950t - m, M_{CB} = -3600t - m$$

Miembro CD:

$$M_{CD} = 3600t - m, M_{DC} = -4050t - m$$

Miembro DE:

$$M_{DE} = 4050t - m, M_{ED} = -3600t - m$$

Miembro EF:

$$M_{EF} = 3600t - m, M_{FE} = -4950t - m$$

Miembro FG:

$$M_{FG} = 4950t - m$$

Resolviendo por el método de eliminación de incógnitas de giro:

Se puede eliminar el giro en B, D y F, y tenemos que aplicar las ecuaciones del método de eliminación de incógnitas de giro en todos los miembros. Así nos quedan como incógnitas, el giro en C, y el giro en E.

Planteamos las expresiones de momento en los extremos de los miembros:

$$M_{BA} = -3900 + \frac{2}{4}(0 - 3900) + \frac{\left(4 - \frac{2^2}{4}\right)EK_0}{4EK_0 + \left(4 - \frac{2^2}{4}\right)EK_0}(1950 - 2EK_0\theta_C) = -\frac{35100}{7} - \frac{6}{7}EK_0\theta_C$$

$$M_{BC} = 3900 + \frac{4EK_0}{4EK_0 + \left(4 - \frac{2^2}{4}\right)EK_0}(1950 - 2EK_0\theta_C) + 2EK_0\theta_C = \frac{35100}{7} + \frac{6}{7}EK_0\theta_C$$

$$M_{CB} = -3900 + \frac{2EK_0}{4EK_0 + \left(4 - \frac{2^2}{4}\right)EK_0}(1950 - 2EK_0\theta_C) + 4EK_0\theta_C = -\frac{23400}{7} + \frac{24}{7}EK_0\theta_C$$

$$M_{CD} = 3900 + \frac{2EK_0}{4EK_0 + 4EK_0}(-2EK_0\theta_C - 2EK_0\theta_D) + 4EK_0\theta_C = 3900 + \frac{7}{2}EK_0\theta_C - \frac{1}{2}EK_0\theta_E$$

$$M_{DC} = -3900 + \frac{4EK_0}{4EK_0 + 4EK_0}(-2EK_0\theta_C - 2EK_0\theta_E) + 2EK_0\theta_C = -3900 + EK_0\theta_C - EK_0\theta_E$$

$$M_{DE} = 3900 + \frac{4EK_0}{4EK_0 + 4EK_0}(-2EK_0\theta_C - 2EK_0\theta_E) + 2EK_0\theta_E = 3900 - EK_0\theta_C + EK_0\theta_E$$

$$M_{ED} = -3900 + \frac{2EK_0}{4EK_0 + 4EK_0}(-2EK_0\theta_C - 2EK_0\theta_E) + 4EK_0\theta_E = -3900 - \frac{1}{2}EK_0\theta_C + \frac{7}{2}EK_0\theta_E$$

$$M_{EF} = 3900 + \frac{2EK_0}{4EK_0 + \left(4 - \frac{2^2}{4}\right)EK_0}(-1950 - 2EK_0\theta_E) + 4EK_0\theta_E = \frac{23400}{7} + \frac{24}{7}EK_0\theta_E$$

$$M_{FE} = -3900 + \frac{4EK_0}{4EK_0 + \left(4 - \frac{2^2}{4}\right)EK_0}(-1950 - 2EK_0\theta_E) + 2EK_0\theta_E = -\frac{35100}{7} + \frac{6}{7}EK_0\theta_E$$

$$M_{FG} = 3900 + (0 - (-3900)) + \frac{\left(4 - \frac{2^2}{4}\right)EK_0}{4EK_0 + \left(4 - \frac{2^2}{4}\right)EK_0} (-1950 - 2EK_0\theta_E) = \frac{35100}{7} - \frac{6}{7}EK_0\theta_E$$

Ahora hacemos sumatoria de momentos en C y en E:

$$\sum M_C = 0 \rightarrow M_{CB} + M_{CD} = 0 \rightarrow \frac{97}{14}EK_0\theta_C - \frac{1}{2}EK_0\theta_E = -\frac{3900}{7}$$

$$\sum M_E = 0 \rightarrow M_{CB} + M_{CD} = 0 \rightarrow -\frac{1}{2}EK_0\theta_C + \frac{97}{14}EK_0\theta_E = \frac{3900}{7}$$

Así se forma el siguiente sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\frac{97}{14}EK_0\theta_C - \frac{1}{2}EK_0\theta_E = -\frac{3900}{7}$$

$$-\frac{1}{2}EK_0\theta_C + \frac{97}{14}EK_0\theta_E = \frac{3900}{7}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, nos queda:

$$EK_0\theta_C = -75$$

$$EK_0\theta_E = 75$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones de momento en los extremos de los miembros, nos queda:

Miembro AB:

$$M_{BA} = -4950t - m$$

Miembro BC:

$$M_{BC} = 4950t - m, M_{CB} = -3600t - m$$

Miembro CD:

$$M_{CD} = 3600t - m, M_{DC} = -4050t - m$$

Miembro DE:

$$M_{DE} = 4050t - m, M_{ED} = -3600t - m$$

Miembro EF:

$$M_{EF} = 3600t - m, M_{FE} = -4950t - m$$

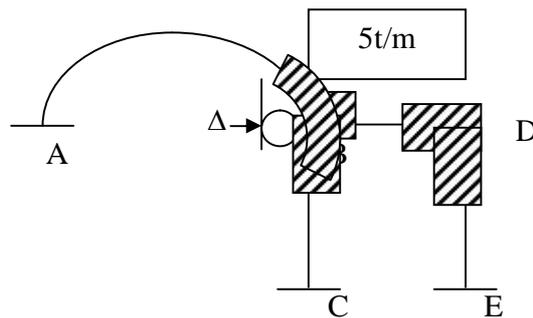
Miembro FG:

$$M_{FG} = 4950t - m$$

Ejemplo 4.8.3:

Consideremos el ejemplo 5.2.2., como ya se resolvió por el método de eliminación de incógnitas de giro, ahora se resolverá por el método de las rotaciones para luego comparar resultados.

Estructura Primaria:



Planteamos las expresiones de momentos y empujes en los extremos de los miembros:

$$M_{AB} = -3EK_0\theta_B + \frac{5}{2}EK_0\Delta, M_{BA} = 9EK_0\theta_B + \frac{5}{2}EK_0\Delta$$

$$M_{BC} = 6EK_0\theta_B + \frac{9}{4}EK_0\Delta, M_{CB} = 3EK_0\theta_B + \frac{9}{4}EK_0\Delta$$

$$M_{BD} = 6EK_0\theta_B + 3EK_0\theta_D + \frac{20}{3}, M_{DB} = 3EK_0\theta_B + 6EK_0\theta_D - \frac{20}{3}$$

$$M_{DE} = 6EK_0\theta_D + \frac{9}{4}EK_0\Delta, M_{ED} = 3EK_0\theta_D + \frac{9}{4}EK_0\Delta$$

Haciendo sumatoria de momentos en D, se obtiene la primera ecuación:

$$3EK_0\theta_B + 12EK_0\theta_D + \frac{9}{4}EK_0\Delta = \frac{20}{3}$$

Haciendo sumatoria de momentos en B, se obtiene la segunda ecuación:

$$21EK_0\theta_B + 3EK_0\theta_D - \frac{1}{4}EK_0\Delta = -\frac{20}{3}$$

Haciendo sumatoria de trabajos virtuales, se obtiene la tercera ecuación:

$$-\frac{19}{4}EK_0\theta_B - \frac{9}{4}EK_0\theta_D - EK_0\Delta = 0$$

Así se forma el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$3EK_0\theta_B + 12EK_0\theta_D + \frac{9}{4}EK_0\Delta = \frac{20}{3}$$

$$21EK_0\theta_B + 3EK_0\theta_D - \frac{1}{4}EK_0\Delta = -\frac{20}{3}$$

$$-\frac{19}{4}EK_0\theta_B - \frac{9}{4}EK_0\theta_D - EK_0\Delta = 0$$

Resolviendo el sistema nos queda:

$$EK_0\theta_B = -\frac{1120}{2901}$$

$$EK_0\theta_D = \frac{4640}{8703}$$

$$EK_0\Delta = \frac{1840}{2901}$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones de momentos y empujes, tenemos:

Miembro BD:

$$M_{BD} = 5,9497t - m, M_{DB} = -4,626t - m$$

Miembro DE:

$$M_{DE} = 4,626t - m, M_{ED} = 3,0265t - m$$

Miembro BC:

$$M_{BC} = -0,8893t - m, M_{CB} = 0,2689t - m$$

Miembro AB:

$$M_{AB} = 2,7439t - m, M_{BA} = -5,0603t - m, H_{BA} = 1,758t, H_{AB} = 1,758t$$

CAPÍTULO V

ANALISIS DE RESULTADOS

5.1 Comparaciones

Las siguientes comparaciones están referidas a los ejemplos 5.3.

Para el ejemplo 5.3.1 tenemos:

Número de incógnitas que se generan:

Método de rotaciones: 7

Método de eliminación de incógnitas: 1

Sistema de ecuaciones a resolver:

Método de rotaciones:

$$-12 + 8EK_0\theta_B + 2EK_0\theta_C = 0$$

$$2EK_0\theta_B + 2EK_0\theta_C + 2EK_0\theta_D + 2EK_0\theta_G + 2EK_0\theta_H + 2EK_0\theta_K + 2EK_0\theta_M = 0$$

$$20 + 8EK_0\theta_D + 2EK_0\theta_C = 0$$

$$4 + 8EK_0\theta_G + 2EK_0\theta_C = 0$$

$$4 + 8EK_0\theta_H + 2EK_0\theta_C = 0$$

$$8EK_0\theta_K + 2EK_0\theta_C = 0$$

$$8EK_0\theta_M + 2EK_0\theta_C = 0$$

Tamaño del sistema de ecuaciones: 7x7

Método de eliminación de incógnitas:

$$-4 + 21EK_0\theta_C = 0$$

Tamaño del sistema de ecuaciones: 1x1

Para el ejemplo 5.3.2 tenemos:

Número de incógnitas que se generan:

Método de rotaciones: 5

Método de eliminación de incógnitas: 2

Sistema de ecuaciones a resolver:

Método de rotaciones:

$$7EK_0\theta_B + 2EK_0\theta_C = 1950$$

$$2EK_0\theta_B + 8EK_0\theta_C + 2EK_0\theta_D = 0$$

$$2EK_0\theta_C + 8EK_0\theta_D + 2EK_0\theta_E = 0$$

$$2EK_0\theta_D + 8EK_0\theta_E + 2EK_0\theta_F = 0$$

$$7EK_0\theta_F + 2EK_0\theta_E = -1950$$

Tamaño del sistema de ecuaciones: 5x5

Método de eliminación de incógnitas:

$$\frac{97}{14}EK_0\theta_C - \frac{1}{2}EK_0\theta_E = -\frac{3900}{7}$$

$$-\frac{1}{2}EK_0\theta_C + \frac{97}{14}EK_0\theta_E = \frac{3900}{7}$$

Tamaño del sistema de ecuaciones: 2x2

Para el ejemplo 5.3.3 tenemos:

Número de incógnitas que se generan:

Método de rotaciones: 3

Método de eliminación de incógnitas: 2

Sistema de ecuaciones a resolver:

Método de rotaciones:

$$3EK_0\theta_B + 12EK_0\theta_D + \frac{9}{4}EK_0\Delta = \frac{20}{3}$$

$$21EK_0\theta_B + 3EK_0\theta_D - \frac{1}{4}EK_0\Delta = -\frac{20}{3}$$

$$-\frac{19}{4}EK_0\theta_B - \frac{9}{4}EK_0\theta_D - EK_0\Delta = 0$$

Tamaño del sistema de ecuaciones: 3x3

Método de eliminación de incógnitas:

(Eliminando θ_D)

$$\frac{81}{4}EK_0\theta_B - \frac{13}{16}EK_0\Delta = -\frac{25}{3}$$

$$-\frac{67}{4}EK_0\theta_B - \frac{37}{16}EK_0\Delta = 5$$

Tamaño del sistema de ecuaciones: 2x2

(Eliminando θ_B)

$$\frac{81}{7}EK_0\theta_D + \frac{16}{7}EK_0\Delta = \frac{160}{21}$$

$$-\frac{11}{7}EK_0\theta_D - \frac{355}{336}EK_0\Delta = -\frac{95}{63}$$

Tamaño del sistema de ecuaciones: 2x2

5.2 Análisis de resultados

Usando tanto el método de rotaciones, como el método de eliminación de incógnitas de giro, se obtienen los mismos resultados numéricos de los valores de empuje y momentos en los extremos de los miembros, en cada ejemplo. Lo que es diferente en ambos métodos es el tamaño del sistema de ecuaciones que se generan, y el número de incógnitas que se generan. Se puede observar que, en todos los ejemplos, el número de incógnitas que se generan al usar el método de rotaciones, es mayor al número de incógnitas que se generan al usar el método de eliminación de incógnitas,

y por lo tanto, el tamaño del sistema de ecuaciones que se genera al usar el método de rotaciones, es más grande que el que se genera al usar el método de eliminación de incógnitas. De esta manera, podemos notar que el logro obtenido por el método de rotaciones, se puede obtener más rápidamente usando el método de eliminación de incógnitas de giro.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 Conclusiones

Podemos concluir, que para simplificar el análisis de estructuras, es necesario sacrificar lo simple de aplicar las ecuaciones del método de las rotaciones, al utilizar otras ecuaciones (las ecuaciones del método de eliminación de incógnitas presentado en este trabajo de grado), que dependen de más parámetros, y son más complejas. Pero este sacrificio vale la pena, ya que a la final ahorramos, trabajo y tiempo, factores importantísimos, de los cuáles dependemos en nuestra carrera. Consideremos el caso del ejemplo 5.3.1, donde se eliminan 6 incógnitas y se resuelve un sistema de una sola ecuación con una sola incógnita. Esto demuestra, que es posible eliminar muchas incógnitas a través de éste método. Luego pensemos: ¿Cuánto nos tardaríamos resolviendo esta estructura por el método de rotaciones?

Notemos que para resolver la estructura del ejemplo 5.3.1, por el método de rotaciones, se consideraron 7 incógnitas, y se resolvió un sistema de 7 ecuaciones con 7 incógnitas. El ahorro de tiempo, lo podemos notar cuando estamos generando el sistema de ecuaciones a resolver, y cuando tenemos que sustituir los valores de las diferentes incógnitas en las expresiones de momentos en los extremos de los miembros. Nótese, que para generar las 7 ecuaciones, se debe hacer sumatoria de momentos en 7 juntas, mientras que por el método de eliminación de incógnitas, se hace sumatoria de momentos en una sola junta, y para obtener los valores de momentos por el método de rotaciones, tenemos que sustituir 7 incógnitas en las expresiones de momento de cada miembro, mientras que por el método de eliminación de incógnitas, solo debemos sustituir una sola incógnita para obtener los mismos resultados.

Concluimos también que el método de eliminación de incógnitas de giro va de la mano con el método de las rotaciones. Esto se debe a que cuando aplicamos las ecuaciones del método de eliminación de incógnitas, en aquellos miembros concurrentes en una junta, cuyo giro será eliminado como incógnita, es necesario, aplicar las ecuaciones del método de rotaciones, en aquellos miembros constituidos por dos juntas cuyos giros no fueron eliminados.

6.2 Recomendaciones

Se recomienda, para la aplicación de éste método, seguir los pasos dados en 4.5 (Pasos a seguir para aplicar el Método de Eliminación de Incógnitas de Giro), y usar el criterio dado en 4.4 (Criterio para considerar un arco con junta articulada a la derecha o a la izquierda de j).

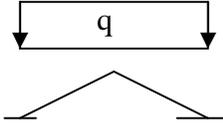
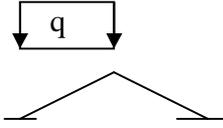
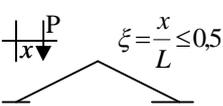
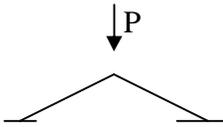
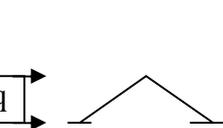
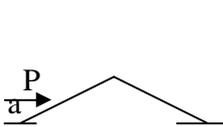
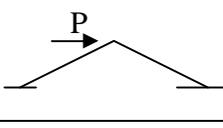
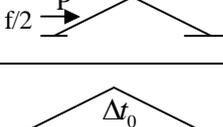
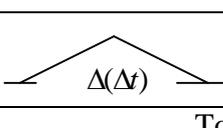
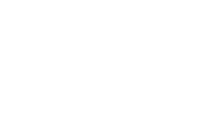
Además se recomienda trabajar de forma organizada, para evitar obtener resultados erróneos. La mala aplicación de las ecuaciones y criterios, conduce a errores graves de cálculo.

Se recomienda también, a la Escuela de Ingeniería Civil de la Universidad de Carabobo, enseñar el método de eliminación de incógnitas de giro, como método alternativo.

BIBLIOGRAFÍA

- 1.- Slesarew, Leo. Estructuras Avanzadas. Folleto de Estructuras N° 15. Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ingeniería. Escuela de Ingeniería Civil. Dpto. de Estructuras. Caracas, Junio de 1981.
- 2.- Hibbeler, Russell C. Análisis Estructural. Tercera Edición. Año 1997. Impreso en México.
- 3.- Mc Cormack, Jack C.-Nelson, James K. Análisis de Estructuras. Segunda Edición. Año 2002. Impreso en México.
- 1.- <http://es.wikipedia.org/wiki/Investigaci%c3%B3n>

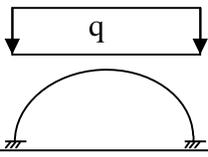
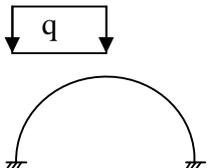
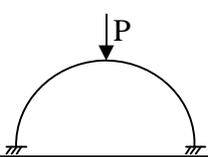
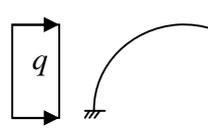
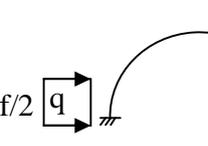
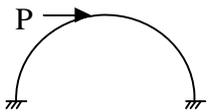
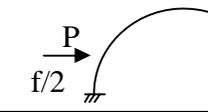
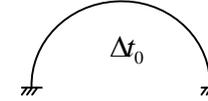
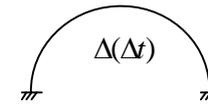
ANEXOS

Solicitación	M_{ij}^0	M_{ji}^0	H_{ij}^0	H_{ji}^0
	$\frac{1}{48} qL^2$	$-\frac{1}{48} qL^2$	$-\frac{qL^2}{8f}$	$-\frac{qL^2}{8f}$
	$\frac{5}{192} qL^2$	$\frac{1}{192} qL^2$	$-\frac{qL^2}{16f}$	$-\frac{qL^2}{16f}$
	$PL\xi(1-2\xi)\left(1-\frac{3}{2}\xi\right)$	$\frac{P}{2}L\xi^2(1-2\xi)$	$-\frac{P}{f}L\xi^2(3-4\xi)$	$-\frac{P}{f}L\xi^2(3-4\xi)$
	0	0	$-\frac{PL}{4f}$	$-\frac{PL}{4f}$
	$\frac{5}{48} qL^2$	$\frac{1}{48} qL^2$	$\frac{3}{4} qf$	$-\frac{1}{4} qf$
	$P\frac{a}{4}\left(1-\frac{a}{f}\right)\left(4-3\frac{a}{f}\right)$	$P\frac{a^2}{4f}\left(1-\frac{a}{f}\right)$	$P\left(1-\frac{3a^2}{2f^2}+\frac{a^3}{f^3}\right)$	$-P\left(\frac{3a^2}{2f^2}-\frac{a^3}{f^3}\right)$
	0	0	$\frac{P}{2}$	$-\frac{P}{2}$
	$\frac{5}{32} Pf$	$\frac{1}{32} Pf$	$\frac{3}{4} P$	$-\frac{1}{4} P$
	$-3\frac{\alpha_t\Delta t_0 L}{Sf} EI_0$	$3\frac{\alpha_t\Delta t_0 L}{Sf} EI_0$	$-6\frac{\alpha_t\Delta t_0 L}{Sf^2} EI_0$	$-6\frac{\alpha_t\Delta t_0 L}{Sf^2} EI_0$
	$\frac{\alpha_t\Delta(\Delta t)}{h} EI_0$	$-\frac{\alpha_t\Delta(\Delta t)}{h} EI_0$	0	0

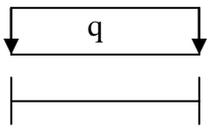
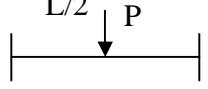
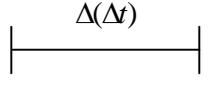
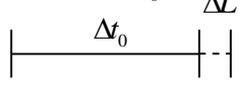
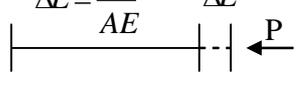
Todos estos valores son para arcos de eje quebrado de sección constante

Solicitación	M_{ij}^0	M_{ji}^0	H_{ij}^0	H_{ji}^0
	0	0	$-\frac{qL^2}{8f}$	$-\frac{qL^2}{8f}$
	$\frac{qL^2}{64}$	$\frac{qL^2}{64}$	$-\frac{qL^2}{16f}$	$-\frac{qL^2}{16f}$
	$\frac{PL}{2} \xi(1-\xi)^2(2-5\xi)$	$\frac{PL}{2} \xi^2(1-\xi)(3-5\xi)$	$-\frac{15PL}{4f} \xi^2(1-\xi)^2$	$-\frac{15PL}{4f} \xi^2(1-\xi)^2$
	$-\frac{PL}{32}$	$\frac{PL}{32}$	$-\frac{15PL}{64f}$	$-\frac{15PL}{64f}$
	$\frac{51}{280} qf^2$	$\frac{19}{280} qf^2$	$\frac{11}{14} qf$	$-\frac{3}{14} qf$
	$0,157qf^2$	$0,0633qf^2$	$0,4663qf$	$-0,0337qf$
	$\frac{Pf}{8}$	$\frac{Pf}{8}$	$\frac{P}{2}$	$-\frac{P}{2}$
	$0,245Pf$	$0,068Pf$	$0,809P$	$-0,191P$
	$-7,5 \frac{\alpha_i \Delta t_0}{f} EI_0$	$7,5 \frac{\alpha_i \Delta t_0}{f} EI_0$	$-\frac{45}{4} \frac{\alpha_i \Delta t_0}{f^2} EI_0$	$-\frac{45}{4} \frac{\alpha_i \Delta t_0}{f^2} EI_0$
	$\frac{\alpha_i \Delta(\Delta t)}{h} EI_0$	$-\frac{\alpha_i \Delta(\Delta t)}{h} EI_0$	0	0

Todos estos valores son para arcos parabólicos compensados

Solicitación	M_{ij}^0	M_{ji}^0	H_{ij}^0	H_{ji}^0
	$-0,1066qR^2$	$-0,1066qR^2$	$-0,5601qR$	$-0,5601qR$
	$-0,0155qR^2$	$0,0911qR^2$	$-0,2801qR$	$-0,2801qR$
	$-0,1105PR$	$0,1105PR$	$-0,459P$	$-0,459P$
	$-2,5269qR^2$	$2,8147qR^2$	$-3,4989qR$	$-4,4989qR$
	$1,1207qR^2$	$-0,9692qR^2$	$2,2501qR$	$1,7501qR$
	$\frac{\pi-2}{2\pi}PR$	$\frac{\pi-2}{2\pi}PR$	$\frac{P}{2}$	$-\frac{P}{2}$
	$0,252PR$	$0,0889PR$	$0,7994P$	$-0,2006P$
	$-\frac{8}{\pi^2-8} \frac{\alpha_t \Delta t_0}{R} EI_0$	$\frac{8}{\pi^2-8} \frac{\alpha_t \Delta t_0}{R} EI_0$	$-\frac{4\pi}{\pi^2-8} \frac{\alpha_t \Delta t_0}{R^2} EI_0$	$\frac{4\pi}{\pi^2-8} \frac{\alpha_t \Delta t_0}{R^2} EI_0$
	$\frac{\alpha_t \Delta(\Delta t)}{h} EI_0$	$-\frac{\alpha_t \Delta(\Delta t)}{h} EI_0$	0	0

Todos estos valores son para arcos semicirculares de sección constante

Solicitación	M_{ij}^0	M_{ji}^0
	$\frac{qL^2}{12}$	$-\frac{qL^2}{12}$
<p>Fuerza aplicada a L/2</p> 	$\frac{PL}{8}$	$-\frac{PL}{8}$
<p>Momento aplicado a L/2</p> 	$\frac{M}{4}$	$\frac{M}{4}$
	$\frac{\alpha_t \Delta(\Delta t)}{h} EI_0$	$-\frac{\alpha_t \Delta(\Delta t)}{h} EI_0$
<p>$\Delta L = \alpha L \Delta t_0$</p> 	0	0
<p>$\Delta L = \frac{PL}{AE}$</p> 	0	0

Todos estos valores son para miembros de directriz recta de sección constante

APENDICE A

RESUMEN DE ECUACIONES

ECUACIONES DEL MÉTODO DE ROTACIONES:

Para miembros empotrados-empotrados de directriz recta y sección variable:

$$M_{ij} = M_{ij}^E + [C_i \theta_i + C \theta_j - (C_i + C) \varphi_{ij}] EK_0$$

$$M_{ji} = M_{ji}^E + [C \theta_i + C_j \theta_j - (C_j + C) \varphi_{ij}] EK_0$$

Para arcos empotrados-empotrados:

$$M_{ij} = M_{ij}^0 + \left[C_i \theta_i + C \theta_j - (C_i + C) \varphi_{ij} + C_H \frac{\Delta L}{f} \right] EK_0$$

$$M_{ji} = M_{ji}^0 + \left[C \theta_i + C_j \theta_j - (C_j + C) \varphi_{ij} - C_H \frac{\Delta L}{f} \right] EK_0$$

$$H_{ij} = H_{ij}^0 + \left[\theta_i - \theta_j + \frac{\Delta L}{Y_0} \right] \frac{C_H}{f} EK_0$$

$$H_{ji} = H_{ji}^0 + \left[\theta_i - \theta_j + \frac{\Delta L}{Y_0} \right] \frac{C_H}{f} EK_0$$

Para miembros empotrados-articulados de directriz recta y sección variable:

Miembro articulado en la junta “i”:

$$M_{ji} = M_{ji}^o + \frac{C}{C_i} (M_{ij} - M_{ij}^o) + EK_0 [(\theta_j - \varphi_{ij}) (C_j - \frac{C^2}{C_i})]$$

Miembro articulado en la junta “j”:

$$M_{ij} = M_{ij}^o + \frac{C}{C_j} (M_{ji} - M_{ji}^o) + EK_0 [(\theta_i - \varphi_{ij}) (C_i - \frac{C^2}{C_j})]$$

Para arcos empotrados-articulados:

Arco articulado en la junta “i”:

$$M_{ji} = M_{ji}^o + \frac{C}{C_i} (M_{ij} - M_{ij}^o) + EK_0 [(\theta_j - \varphi_{ij}) (C_j - \frac{C^2}{C_i}) - (1 + \frac{C}{C_i}) C_H \frac{\Delta L}{f}]$$

$$H_{ij} = H_{ij}^o + EK_0 \frac{C_H}{f} [- (1 + \frac{C}{C_i}) (\theta_j - \varphi_{ij}) + (\frac{1}{y_o} - \frac{C_H}{f C_i}) \Delta L] + \frac{C_H}{f C_i} (M_{ij} - M_{ij}^o)$$

$$H_{ji} = H_{ji}^o + EK_0 \frac{C_H}{f} [- (1 + \frac{C}{C_i}) (\theta_j - \varphi_{ij}) + (\frac{1}{y_o} - \frac{C_H}{f C_i}) \Delta L] + \frac{C_H}{f C_i} (M_{ij} - M_{ij}^o)$$

Arco articulado en la junta “j”:

$$M_{ij} = M_{ij}^o + \frac{C}{C_j} (M_{ji} - M_{ji}^o) + EK_0 [(\theta_i - \varphi_{ij}) (C_i - \frac{C^2}{C_j}) + (1 + \frac{C}{C_j}) C_H \frac{\Delta L}{f}]$$

$$H_{ij} = H_{ij}^o + EK_0 \frac{C_H}{f} [(1 + \frac{C}{C_j}) (\theta_i - \varphi_{ij}) + (\frac{1}{y_o} - \frac{C_H}{f C_j}) \Delta L] - \frac{C_H}{f C_j} (M_{ji} - M_{ji}^o)$$

$$H_{ji} = H_{ji}^o + EK_0 \frac{C_H}{f} [(1 + \frac{C}{C_j}) (\theta_i - \varphi_{ij}) + (\frac{1}{y_o} - \frac{C_H}{f C_j}) \Delta L] - \frac{C_H}{f C_j} (M_{ji} - M_{ji}^o)$$

ECUACIONES DEL MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE INCÓGNITAS DE GIRO:

Ecuaciones de momento en los extremos de los miembros:

Para miembros empotrados-empotrados:

$$M_{jk} = M_{jk}^o + \frac{C_{jk} E_k K_k}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}})} [M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o) - \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} \varphi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) - \sum_{k=1}^n C_{HK} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} - \sum_{k'=1}^{n'} (1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_{k'} K_{k'} C_{HK} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}}] + C_k E_k K_k \theta_k - (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + C_{HK} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \quad (1)$$

Si el miembro es un arco

$$M_{kj} = M_{kj}^o + \frac{C_k E_k K_k}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}})} [M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o) - \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} \varphi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) - \sum_{k=1}^n C_{HK} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} - \sum_{k'=1}^{n'} (1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_{k'} K_{k'} C_{HK} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}}] + C_{ik} E_k K_k \theta_k - (C_{ik} + C_k) E_k K_k \varphi_k - C_{HK} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \quad (2)$$

Si el miembro es un arco

Para miembros empotrados-articulados:

$$\begin{aligned}
 M_{jk'} = & M_{jk'}^o + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o) + \frac{(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) E_k K_k}{\sum_{k=1}^n C_{jk'} E_k K_k + \sum_{k'=1'}^{n'} E_{k'} K_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}})} [M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1'}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1'}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)] \\
 & - \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk'} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1'}^{n'} E_{k'} K_{k'} \varphi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) - \sum_{k=1}^n C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \\
 & - \sum_{k'=1'}^n (1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_{k'} K_{k'} C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} - E_k K_k \varphi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) + (1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_{k'} K_{k'} C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} \quad (3)
 \end{aligned}$$



Si el miembro es
un arco

Nota: Para arcos empotrados-articulados cuya junta articulada se encuentra a la izquierda de la junta j , el término $(1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_{k'} K_{k'} C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}}$, es negativo tanto para los términos que tienen sumatorias como para los que no los tienen. Y el término $C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k}$ es negativo para arcos empotrados-empotrados, cuya otra junta diferente de j , está a la izquierda de ésta, tanto para los términos que tienen sumatorias como para los que no los tienen.

Ecuaciones de empujes en los arcos:

Para arcos empotrados-empotrados:

Arcos cuya otra junta diferente de j está a la derecha de j :

$$\begin{aligned}
 H_{jk} = & H_{jk}^o + E_k K_k \frac{C_{Hk}}{f_k} \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1'}^{n'} E_{k'} K_{k'} (C_{jk} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}})} [M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1'}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1'}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)] \right. \\
 & - \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1'}^{n'} E_{k'} K_{k'} \varphi_{k'} (C_{jk} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) - \sum_{k=1}^n C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \\
 & \left. - \sum_{k'=1'}^{n'} (1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_{k'} K_{k'} C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} - \theta_k + \frac{\Delta L_k}{y_o} \right] \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{kj} &= H_{kj}^o + E_k K_k \frac{C_{Hk}}{f_k} \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}})} [M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)] \right. \\
&- \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} \varphi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) - \sum_{k=1}^n C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \\
&\left. - \sum_{k'=1}^{n'} (1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_{k'} K_{k'} C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} \right] - \theta_k + \frac{\Delta L_k}{y_o} \quad (5)
\end{aligned}$$

Arcos cuya otra junta diferente de j está a la izquierda de j :

$$\begin{aligned}
H_{jk} &= H_{jk}^o + E_k K_k \frac{C_{Hk}}{f_k} \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}})} [M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)] \right. \\
&- \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} \varphi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) - \sum_{k=1}^n C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \\
&\left. - \sum_{k'=1}^{n'} (1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_{k'} K_{k'} C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} \right] + \theta_k + \frac{\Delta L_k}{y_o} \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{kj} &= H_{kj}^o + E_k K_k \frac{C_{Hk}}{f_k} \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}})} [M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)] \right. \\
&- \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} \varphi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) - \sum_{k=1}^n C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \\
&\left. - \sum_{k'=1}^{n'} (1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_{k'} K_{k'} C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} \right] + \theta_k + \frac{\Delta L_k}{y_o} \quad (7)
\end{aligned}$$

Para arcos empotrados-articulados:

Arcos con junta articulada a la derecha de la junta j:

$$\begin{aligned}
 H_{k'j} = & H_{k'j}^o + E_{k'}K_{k'} \frac{C_{HK'}}{f_{k'}} \left[\left(1 + \frac{C_{k'}}{CiK'} \right) \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1'}^{n'} E_{k'} K_{k'} \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}} \right)} [Mextj - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1'}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1'}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)] \right. \right. \\
 & - \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1'}^{n'} E_{k'} K_{k'} \varphi_{k'} \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}} \right) - \sum_{k=1}^n C_{HK} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \\
 & \left. - \sum_{k'=1'}^{n'} \left(1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} \right) E_{k'} K_{k'} C_{HK'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} - \varphi_{k'} \right] + \left(\frac{1}{y_o} - \frac{C_{HK'}}{f_{k'} C_{ik'}} \right) \Delta L_{k'} - \frac{C_{HK'}}{f_{k'} C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o) \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_{jk'} = & H_{jk'}^o + E_{k'}K_{k'} \frac{C_{HK'}}{f_{k'}} \left[\left(1 + \frac{C_{k'}}{CiK'} \right) \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1'}^{n'} E_{k'} K_{k'} \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}} \right)} [Mextj - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1'}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1'}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)] \right. \right. \\
 & - \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1'}^{n'} E_{k'} K_{k'} \varphi_{k'} \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}} \right) - \sum_{k=1}^n C_{HK} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \\
 & \left. - \sum_{k'=1'}^{n'} \left(1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} \right) E_{k'} K_{k'} C_{HK'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} - \varphi_{k'} \right] + \left(\frac{1}{y_o} - \frac{C_{HK'}}{f_{k'} C_{ik'}} \right) \Delta L_{k'} - \frac{C_{HK'}}{f_{k'} C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o) \quad (9)
 \end{aligned}$$

Arcos con junta articulada a la izquierda de la junta j:

$$\begin{aligned}
 H_{k'j} = & H_{k'j}^o + E_{k'}K_{k'} \frac{C_{HK'}}{f_{k'}} \left[- \left(1 + \frac{C_{k'}}{CiK'} \right) \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1'}^{n'} E_{k'} K_{k'} \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}} \right)} [Mextj - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1'}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1'}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)] \right. \right. \\
 & - \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1'}^{n'} E_{k'} K_{k'} \varphi_{k'} \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}} \right) - \sum_{k=1}^n C_{HK} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \\
 & \left. - \sum_{k'=1'}^{n'} \left(1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} \right) E_{k'} K_{k'} C_{HK'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} - \varphi_{k'} \right] + \left(\frac{1}{y_o} - \frac{C_{HK'}}{f_{k'} C_{ik'}} \right) \Delta L_{k'} + \frac{C_{HK'}}{f_{k'} C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o) \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{jk} = & H_{jk}^o + E_k K_k \frac{C_{HK}}{f_k} \left[-\left(1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}\right) \left[\frac{1}{\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_k K_k \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}\right)} [M_{extj} - \sum_{k=1}^n M_{jk}^o - \sum_{k'=1}^{n'} M_{jk'}^o - \sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o)] \right. \right. \\
& - \sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k + \sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k + \sum_{k'=1}^{n'} E_k K_k \varphi_{k'} \left(C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}\right) - \sum_{k=1}^n C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} \\
& \left. - \sum_{k'=1}^{n'} \left(1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}\right) E_k K_k C_{HK} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} - \varphi_{k'} \right] + \left(\frac{1}{y_o} - \frac{C_{HK}}{f_k C_{ik'}} \right) \Delta L_{k'} \left. \right] + \frac{C_{HK}}{f_k C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o) \quad (11)
\end{aligned}$$

Donde en estas ecuaciones tenemos:

M_{jk} = Momento de j hacia k del miembro empotrado-empotrado.

M_{kj} = Momento de k hacia j del miembro empotrado-empotrado.

$M_{jk'}$ = Momento de j hacia k' del miembro empotrado-articulado.

$M_{k'j}$ = Momento aplicado en la junta k' del miembro empotrado-articulado.

H_{jk} = Empuje de j hacia k del arco empotrado-empotrado.

H_{kj} = Empuje de k hacia j del arco empotrado-empotrado.

$H_{jk'}$ = Empuje de j hacia k' del arco empotrado-articulado.

$H_{k'j}$ = Empuje de k' hacia j del arco empotrado-articulado.

M_{jk}^o = Momento de empotramiento de j hacia k del miembro empotrado-empotrado.

M_{kj}^o = Momento de empotramiento de k hacia j del miembro empotrado-empotrado.

$M_{jk'}^o$ = Momento de empotramiento de j hacia k' del miembro empotrado-articulado, calculado como si fuese empotrado-empotrado.

$M_{k'j}^o$ = Momento de empotramiento de k' hacia j del miembro empotrado-articulado, calculado como si fuese empotrado-empotrado.

H_{jk}^o = Empuje de empotramiento de j hacia k del arco empotrado-empotrado.

H_{kj}^o = Empuje de empotramiento de k hacia j del arco empotrado-empotrado.

$H_{jk'}^o$ = Empuje de empotramiento de j hacia k' del arco empotrado-articulado, calculado como si fuese empotrado-empotrado.

$H_{k'j}^o$ = Empuje de empotramiento de k' hacia j del arco empotrado-articulado, calculado como si fuese empotrado-empotrado.

M_{extj} = Momento aplicado en la junta j .

C_{jk} = Coeficiente C_j del miembro k empotrado-empotrado.

C_{ik} = Coeficiente C_i del miembro k empotrado-empotrado.

C_k = Coeficiente C del miembro k empotrado-empotrado.

$C_{jk'}$ = Coeficiente C_j del miembro k' empotrado-articulado, calculado como si fuese empotrado-empotrado.

$C_{ik'}$ = Coeficiente C_i del miembro k' empotrado-articulado, calculado como si fuese empotrado-empotrado.

$C_{k'}$ = Coeficiente C del miembro k' empotrado-articulado, calculado como si fuese empotrado-empotrado.

$C_{Hk'}$ = Coeficiente C_H del miembro k' empotrado-articulado, calculado como si fuese empotrado-empotrado.

C_{Hk} = Coeficiente C_H del miembro k empotrado- empotrado.

$E_{k'}$ = Módulo de elasticidad del miembro k' empotrado-articulado.

E_k = Módulo de elasticidad del miembro k empotrado- empotrado.

$K_{k'}$ = Relación Inercia/Longitud del miembro k' empotrado-articulado.

K_k = Relación Inercia/Longitud del miembro k empotrado- empotrado.

$f_{k'}$ = Flecha del miembro k' cuando éste es un arco.

f_k = Flecha del miembro k cuando éste es un arco.

ΔL_k = Alargamiento o acortamiento del miembro k , cuando éste es un arco.

$\Delta L_{k'}$ = Alargamiento o acortamiento del miembro k' , cuando éste es un arco.

θ_k = Giro de la junta k .

φ_k = Giro del miembro k .

$\varphi_{k'}$ = Giro del miembro k' .

y_o = Ordenada del centro elástico del miembro.

$$\sum_{k=1}^n M_{jk}^0 = M_{j1}^0 + M_{j2}^0 + M_{j3}^0 + M_{j4}^0 + M_{j5}^0 + \dots + M_{jn}^0$$

$$\sum_{k'=1}^{n'} M_{jk'}^0 = M_{j1'}^0 + M_{j2'}^0 + M_{j3'}^0 + M_{j4'}^0 + M_{j5'}^0 + \dots + M_{jn'}^0. \text{ Estos momentos se calculan}$$

como si los miembros estuviesen empotrados-empotrados.

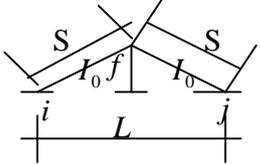
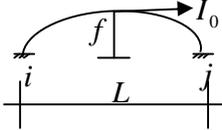
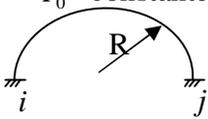
$$\sum_{k'=1}^{n'} \frac{C_{k'}}{C_{ik'}} (M_{k'j} - M_{k'j}^o) = \frac{C_{1'}}{C_{i1'}} (M_{1'j} - M_{1'j}^o) + \frac{C_{2'}}{C_{i2'}} (M_{2'j} - M_{2'j}^o) + \frac{C_{3'}}{C_{i3'}} (M_{3'j} - M_{3'j}^o) \\ + \frac{C_{4'}}{C_{i4'}} (M_{4'j} - M_{4'j}^o) + \frac{C_{5'}}{C_{i5'}} (M_{5'j} - M_{5'j}^o) + \dots + \frac{C_{n'}}{C_{in'}} (M_{n'j} - M_{n'j}^o)$$

Estos momentos se calculan como si los miembros estuviesen empotrados-empotrados.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n C_k E_k K_k \theta_k &= C_1 E_1 K_1 \theta_1 + C_2 E_2 K_2 \theta_2 + C_3 E_3 K_3 \theta_3 + C_4 E_4 K_4 \theta_4 + C_5 E_5 K_5 \theta_5 + \dots + C_n E_n K_n \theta_n \\
\sum_{k=1}^n (C_{jk} + C_k) E_k K_k \varphi_k &= (C_{j1} + C_1) E_1 K_1 \varphi_1 + (C_{j2} + C_2) E_2 K_2 \varphi_2 + (C_{j3} + C_3) E_3 K_3 \varphi_3 \\
&+ (C_{j4} + C_4) E_4 K_4 \varphi_4 + (C_{j5} + C_5) E_5 K_5 \varphi_5 + \dots + (C_{jn} + C_n) E_n K_n \varphi_n \\
\sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} \varphi_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) &= E_{1'} K_{1'} \varphi_{1'} (C_{j1'} - \frac{C_{1'}^2}{C_{i1'}}) + E_{2'} K_{2'} \varphi_{2'} (C_{j2'} - \frac{C_{2'}^2}{C_{i2'}}) \\
&+ E_{3'} K_{3'} \varphi_{3'} (C_{j3'} - \frac{C_{3'}^2}{C_{i3'}}) + E_{4'} K_{4'} \varphi_{4'} (C_{j4'} - \frac{C_{4'}^2}{C_{i4'}}) + E_{5'} K_{5'} \varphi_{5'} (C_{j5'} - \frac{C_{5'}^2}{C_{i5'}}) + \dots \\
&+ E_{n'} K_{n'} \varphi_{n'} (C_{jn'} - \frac{C_{n'}^2}{C_{in'}}) \\
\sum_{k=1}^n C_{Hk} E_k K_k \frac{\Delta L_k}{f_k} &= C_{H1} E_1 K_1 \frac{\Delta L_1}{f_1} + C_{H2} E_2 K_2 \frac{\Delta L_2}{f_2} + C_{H3} E_3 K_3 \frac{\Delta L_3}{f_3} + C_{H4} E_4 K_4 \frac{\Delta L_4}{f_4} \\
&+ C_{H5} E_5 K_5 \frac{\Delta L_5}{f_5} + \dots + C_{Hn} E_n K_n \frac{\Delta L_n}{f_n} \\
\sum_{k'=1}^{n'} (1 + \frac{C_{k'}}{C_{ik'}}) E_{k'} K_{k'} C_{Hk'} \frac{\Delta L_{k'}}{f_{k'}} &= (1 + \frac{C_{1'}}{C_{i1'}}) E_{1'} K_{1'} C_{H1'} \frac{\Delta L_{1'}}{f_{1'}} + (1 + \frac{C_{2'}}{C_{i2'}}) E_{2'} K_{2'} C_{H2'} \frac{\Delta L_{2'}}{f_{2'}} \\
&+ (1 + \frac{C_{3'}}{C_{i3'}}) E_{3'} K_{3'} C_{H3'} \frac{\Delta L_{3'}}{f_{3'}} + (1 + \frac{C_{4'}}{C_{i4'}}) E_{4'} K_{4'} C_{H4'} \frac{\Delta L_{4'}}{f_{4'}} + (1 + \frac{C_{5'}}{C_{i5'}}) E_{5'} K_{5'} C_{H5'} \frac{\Delta L_{5'}}{f_{5'}} \\
&+ \dots + (1 + \frac{C_{n'}}{C_{in'}}) E_{n'} K_{n'} C_{Hn'} \frac{\Delta L_{n'}}{f_{n'}} \\
\sum_{k=1}^n C_{jk} E_k K_k &= C_{j1} E_1 K_1 + C_{j2} E_2 K_2 + C_{j3} E_3 K_3 + C_{j4} E_4 K_4 + C_{j5} E_5 K_5 + \dots + C_{jn} E_n K_n \\
\sum_{k'=1}^{n'} E_{k'} K_{k'} (C_{jk'} - \frac{C_{k'}^2}{C_{ik'}}) &= E_{1'} K_{1'} (C_{j1'} - \frac{C_{1'}^2}{C_{i1'}}) + E_{2'} K_{2'} (C_{j2'} - \frac{C_{2'}^2}{C_{i2'}}) + E_{3'} K_{3'} (C_{j3'} - \frac{C_{3'}^2}{C_{i3'}}) \\
&+ E_{4'} K_{4'} (C_{j4'} - \frac{C_{4'}^2}{C_{i4'}}) + E_{5'} K_{5'} (C_{j5'} - \frac{C_{5'}^2}{C_{i5'}}) + \dots + E_{n'} K_{n'} (C_{jn'} - \frac{C_{n'}^2}{C_{in'}})
\end{aligned}$$

APENDICE B

RESUMEN DE COEFICIENTES ELASTICOS PARA ARCOS SIMETRICOS

Tipo de arco simétrico		Arco parabólico compensado 	Arco circular con $I_0 = \text{constante}$ 
$C_i = C_j$	3,5	9	4,6339
C	-0,5	-3	-2,0875
C_H	3	7,5	4,2790
y_0	$\frac{1}{2}f$	$\frac{2}{3}f$	$\frac{2R}{\pi}$
EK_0	$\frac{EI_0}{S}$	$\frac{EI_0}{L}$	$\frac{EI_0}{2R}$

RESUMEN DE COEFICIENTES ELASTICOS PARA MIEMBROS DE DIRECTRIZ RECTA

Para miembros de directriz recta de sección constante:

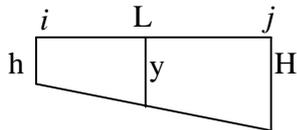
$$C_i = C_j = 4$$

$$C = 2$$

$$EK_0 = \frac{EI_0}{L}$$

Para miembros de directriz recta y sección variable, tenemos:

Para el caso de variación recta:

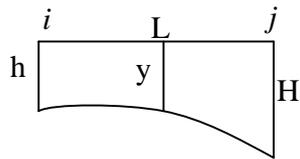


$$\phi_i = \frac{1}{(\gamma-1)^2} \left[\frac{Ln\gamma}{\gamma-1} + \frac{\gamma-3}{2} \right]; \quad \phi_j = \frac{1}{(\gamma-1)^2} \left[\frac{Ln\gamma}{\gamma-1} + \frac{1-3\gamma}{2\gamma^2} \right]$$

$$\phi = \frac{1}{(\gamma-1)^2} \left[\frac{Ln\gamma}{\gamma-1} + \frac{1-3\gamma}{2\gamma^2} \right] - \frac{1}{2\gamma^2}$$

Luego $C_i = \frac{\phi_j}{\phi_i\phi_j - \phi^2}$; $C_j = \frac{\phi_i}{\phi_i\phi_j - \phi^2}$; $C = \frac{-\phi}{\phi_i\phi_j - \phi^2}$; siendo $\gamma = \frac{H}{h}$

Para el caso de variación parabólica en que la altura “y” varia de la forma $y = ax^2 + c$:



$$\phi_i = \frac{1}{8(\gamma-1)\sqrt{\gamma-1}} \left[(3\gamma-2)\text{arctg}(\sqrt{\gamma-1}) - \frac{(2-\gamma)\sqrt{\gamma-1}}{\gamma^2} \right] - \frac{(\gamma+2)}{8\gamma^2}$$

$$\phi_j = \frac{1}{8(\gamma-1)\sqrt{\gamma-1}} \left[\text{arctg}(\sqrt{\gamma-1}) - \frac{(2-\gamma)\sqrt{\gamma-1}}{\gamma^2} \right]$$

$$\phi = \frac{1}{8(\gamma-1)\sqrt{\gamma-1}} \left[\operatorname{arctg}(\sqrt{\gamma-1}) - \frac{(2-\gamma)\sqrt{\gamma-1}}{\gamma^2} \right] - \frac{(\gamma+1)}{4\gamma^2}$$

Luego $C_i = \frac{\phi_j}{\phi_i\phi_j - \varphi^2}$; $C_j = \frac{\phi_i}{\phi_i\phi_j - \varphi^2}$; $C = \frac{-\phi}{\phi_i\phi_j - \varphi^2}$; siendo $\gamma = \frac{H}{h}$